

ISSN 2520-6915



# ВЕСТНИК

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
КРЫМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
имени В.И. ВЕРНАДСКОГО

Том 1 (67-69)

№ 3  
2017

**ВЕСТНИК**  
**ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**  
**КРЫМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА имени В. И. ВЕРНАДСКОГО**

**Том 1 (67–69), № 3**

**Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского**  
**Симферополь**  
**2017**

---

**Редакционная коллегия журнала**

<i>Бержанский В. Н.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф., <b>главный редактор</b>	<i>Дзедолик И. В.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.
<i>Глумова М. В.</i> , канд. физ.-мат. наук, доц., <b>заместитель главного редактора</b>	<i>Милюков В. В.</i> , канд. техн. наук, доц.
<i>Михайлова Т. В.</i> , канд. физ.-мат. наук, <b>ответственный секретарь</b>	<i>Полулях С. Н.</i> , д-р физ.-мат. наук, доц.
<i>Алексеев К. Н.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.	<i>Стругацкий М. Б.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.
<i>Бекиров Э. А.</i> , д-р техн. наук, проф.	<i>Сосновский Ю. В.</i> , канд. техн. наук, доц.
<i>Воляр А. В.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.	<i>Старостенко В. В.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.
<i>Григорьев П. Е.</i> , д-р биол. наук, проф.	<i>Фридман Ю. А.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.
	<i>Шапошников А. Н.</i> , канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
	<i>Яценко А. В.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.

---

Научное периодическое издание, журнал  
**Вестник Физико-технического института Крымского федерального  
университета имени В. И. Вернадского**  
**Том 1 (67–69), № 3**

*Историческим предшественником журнала «Вестник Физико-технического  
института Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского»  
является научный журнал «Ученые записки Таврического национального  
университета имени В. И. Вернадского. Серия: Физико-математические науки».  
Журнал был основан в 1918 г. как «Известия Таврического университета».  
За прошедшее столетие название журнала менялось несколько раз в связи с  
преобразованиями университета*

**Печатается по решению Научно-технического совета Крымского федерального  
университета имени В. И. Вернадского, протокол № 3 от «03» октября 2018 г.**

**Адрес редакции:** 295007, Республика Крым, г. Симферополь,  
пр-т Академика Вернадского, д. 4  
**E-mail:** [journal.phys.tech@cfuv.ru](mailto:journal.phys.tech@cfuv.ru)  
**Web-site:** <http://jphystech.cfuv.ru/>  
**Тел.:** +7 (3652) 51-70-95

**JOURNAL**  
**OF PHYSICS AND TECHNOLOGY INSTITUTE**  
**OF V. I. VERNADSKY CRIMEAN**  
**FEDERAL UNIVERSITY**

**Volume 1 (67–69), No. 3**

**V. I. Vernadsky Crimean Federal University**  
**Simferopol**  
**2017**

---

**Journal Editorial Board**

<i>V. N. Berzhansky</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof., <b>Editor-in-Chief</b>	<i>I. V. Dzedolik</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.
<i>M. V. Glumova</i> , Ph.D. (Phys. & Math.), Ass. Prof., <b>Deputy Editor-in-Chief</b>	<i>V. V. Milyukov</i> , Ph.D. (Technical Sc.), Ass. Prof.
<i>T. V. Mikhailova</i> , Ph.D. (Phys. & Math.), <b>Assistant Editor</b>	<i>S. N. Polulyakh</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Ass. Prof.
<i>C. N. Alexeyev</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.	<i>M. B. Strugatsky</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.
<i>E. A. Bekirov</i> , Dr. of Sc. (Technical Sc.), Prof.	<i>Yu. V. Sosnovsky</i> , Ph.D. (Technical Sc.), Ass. Prof.
<i>A. V. Volyar</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.	<i>V. V. Starostenko</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.
<i>P. E. Grigoriev</i> , Dr. of Sc. (Biology), Prof.	<i>Yu. A. Fridman</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.
	<i>A. N. Shaposhnikov</i> , Ph.D. (Phys. & Math.), Senior Researcher Degree
	<i>A. V. Yatsenko</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.

---

Scientific periodical, journal

**Journal of Physics and Technology Institute  
of V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Volume 1 (67–69), No. 3**

*The historical predecessor of journal “Journal of Physics and Technology Institute of V. I. Vernadsky Crimean Federal University” is scientific journal “Scientific Notes of Taurida National V. I. Vernadsky University. Series: Physics and Mathematics Sciences”. The journal was founded in 1918 as “Annales de l’Universite de Tauride”. Over the past century, the journal title has changed several times due to the university reforms*

**Published by the decision of Scientific and Technical Council of V. I. Vernadsky  
Crimean Federal University, protocol No. 3 issued 03 October 2018**

**Address of Editorial Board:** 295007, Republic of Crimea, Simferopol,  
4 Vernadskogo Prospekt

**E-mail:** [journal.phys.tech@cfuv.ru](mailto:journal.phys.tech@cfuv.ru)

**Web-site:** <http://jphystech.cfuv.ru/>

**Phone.:** +7 (3652) 51-70-95

# ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

## PHYSICS AND MATHEMATICS

*Вестник Физико-технического института  
Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского  
Том 1 (67–69). № 3. 2017. С. 5–22  
Journal of Physics and Technology Institute of V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Volume 1 (67–69). No. 3. 2017. P. 5–22*

УДК 537.87

### КВАДРАТИЧНАЯ ФОРМА ДЛЯ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНОЙ, ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ, ДВИЖУЩЕЙСЯ БЕЗ ИЗМЕНЕНИЯ ФОРМЫ

*Леляков А. П., Осокин К. С.\**

*Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия  
\*E-mail: [oxygen93@ya.ru](mailto:oxygen93@ya.ru)*

В работе найдено решение уравнений Эйнштейна для аксиально-симметричной, замкнутой нуль-струны, направление движения для которой в каждый момент времени ортогонально плоскости, в которой находится нуль-струна. Показано отсутствие предельного перехода между найденным решением и решением для замкнутой нуль-струны постоянного радиуса, что может говорить об устойчивости конфигурации замкнутой нуль-струны в виде окружности при движении во внешнем гравитационном поле, влияние которого для такой нуль-струны может сводиться к изменению ее движения как целого (без изменения формы и размера) или к изменению ее радиуса.

**Ключевые слова:** уравнения Эйнштейна, нуль-струна, гравитационное поле, точное решение.

**PACS:** 04.20.jb

#### ВВЕДЕНИЕ

Нуль-струны реализуют предел нулевого натяжения (высокотемпературную фазу) теории струн [1–14], т.е. могли образовываться на ранних этапах эволюции Вселенной и таким образом, возможно, наряду со струнами, монополями и мембранами, принимали участие в процессах формирования структуры наблюдаемой Вселенной. Так, например, интересна возможность участия сети (газа) струн, в формировании «темной» материи [15–17], а также нуль-струнный механизм инфляционного сценария, предложенный в работе [14].

Исследование движения пробной нуль-струны в гравитационном поле замкнутой нуль-струны постоянного (неизменного со временем) радиуса [18], проведенное в работе [19], а также в гравитационном поле замкнутой нуль-струны, радиально расширяющейся или радиально коллапсирующей в плоскости, проведенное в работе [20, 21], позволяет предполагать возможность существования ряда интересных, с точки зрения космологии, свойств газа нуль-струн. Так, например, было отмечено, что наличие для пробной нуль-струны только «узкой» области («зоны взаимодействия»), находясь в которой пробная нуль-струна может взаимодействовать с нуль-струной, порождающей гравитационное поле, говорит о возможности реализации «зернистой» структуры пространства, заполненного газом нуль-струн.

Наличие для каждой пробной нуль-струны, попавшей в «зону взаимодействия» аномальных участков траектории, на которых пробная нуль-струна за очень короткий промежуток времени или ускоренно выталкивается на бесконечность, или ускоренно притягивается из бесконечности, подтверждает, хотя и косвенно, гипотезу о возможной струнной природе механизма инфляции Вселенной, предложенной в работе [14].

Анализ решений уравнений движения пробной нуль-струны, приведенный в работах [19–22] также показал возможность реализации устойчивых поляризованных состояний (фазы) газа нуль-струн, а также возможность образования доменной структуры в пространстве, заполненном газом нуль-струн.

Интересным продолжением может стать исследование влияния формы замкнутой нуль-струны на свойства ее гравитационного поля.

Исследование гравитационных свойств нуль-струны сильно осложняет наличие  $\delta$ -функций в соответствующем тензоре энергии-импульса, что приводит к проблемам в интегрировании системы уравнений Эйнштейна. Для того чтобы обойти эту трудность удобно воспользоваться алгоритмом, предложенным в работе [18], а именно, рассматривать компоненты струнного тензора энергии-импульса как предел некоторого «размазанного» распределения, в качестве которого удобно выбрать вещественное безмассовое скалярное поле (поскольку нуль-струна это скалярный «нуль-объект»), а затем стянуть это «размазанное» распределение в нуль-струны требуемой формы и движущуюся по данной траектории, требуя при этом, чтобы компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля, в пределе сжатия, асимптотически совпали с компонентами нуль-струнного тензора энергии-импульса. При таком подходе мы фактически отказываемся от одномерности нуль-струны и переходим к физически обоснованной модели нуль-струны в виде тонкой трубки («размазанной» нуль-струны).

Предлагаемая работа посвящена построению решения системы уравнений Эйнштейна для «размазанной», аксиально-симметричной, замкнутой нуль-струны, направление движения для которой ортогонально плоскости расположения.

## 1. УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Компоненты тензора энергии-импульса для нуль-струны, движущейся в псевдоримановом пространстве-времени, определяются равенствами [14]:

$$T^{mn} \sqrt{-g} = k \int d\tau d\sigma x_{,\tau}^m x_{,\sigma}^n \delta^4(x^l - x^l(\tau, \sigma)), \quad (1)$$

где индексы  $m, n, l$  принимают значение 0, 1, 2, 3, функции  $x^m = x^m(\tau, \sigma)$  определяют траекторию движения нуль-струны (мировую поверхность),  $\tau$  и  $\sigma$  параметры на мировой поверхности нуль-струны,  $x_{,\tau}^m = \partial x^m / \partial \tau$ ,  $g = |g_{mn}|$ ,  $g_{mn}$  – метрический тензор внешнего пространства-времени,  $k = const$ . В цилиндрической системе координат

$$x^0 = t, \quad x^1 = \rho, \quad x^2 = \theta, \quad x^3 = z$$

функции  $x^m(\tau, \sigma)$ , определяющие траекторию движения замкнутой нуль-струны, рассматриваемую в работе, имеют вид:

$$t = \tau, \quad \rho = R(\sigma), \quad \theta = \sigma, \quad z = -\tau \quad (2)$$

где:  $\tau \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\sigma \in [0; 2\pi]$ , функция  $R(\theta)$  удовлетворяет условиям:

$$R(\theta)|_{\theta=0} = R(\theta)|_{\theta=2\pi},$$

(условие замкнутости нуль-струны), и

$$R(\theta) = R(-\theta),$$

(условие инвариантности относительно инверсии  $\theta$  на  $-\theta$ ). Отметим, что траектория (2) описывает движение замкнутой нуль-струны вдоль отрицательного направления оси  $z$ , при котором она в каждый момент времени полностью лежит в плоскости, ортогональной этой оси, при этом, форма замкнутой нуль-струны, определяемая функцией  $R(\theta)$ , при движении не изменяется.

Квадратичная форма пространства-времени, для рассматриваемой траектории движения (2), должна быть инвариантна относительно инверсии  $\theta$  на  $-\theta$ , а также относительно одновременной инверсии  $t \rightarrow -t$ ,  $z \rightarrow -z$ , тогда

$$g_{mn}(t, \rho, \theta, z) = g_{mn}(t, \rho, -\theta, z), \quad (3)$$

$$g_{mn}(t, \rho, \theta, z) = g_{mn}(-t, \rho, \theta, -z). \quad (4)$$

Следствием (3) есть  $g_{02} = g_{12} = g_{32} = 0$ . Следствием (4) есть  $g_{01} = g_{31} = 0$ . В дополнение, используя свободу выбора систем координат в ОТО, удобно частично зафиксировать ее требованием  $g_{03} = 0$ . Таким образом, квадратичная форма для решаемой задачи может быть представлена в виде

$$dS^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2 - e^{2\mu}(dz)^2, \quad (5)$$

где  $\nu$ ,  $\mu$ ,  $A$ ,  $B$  функции переменных  $t$ ,  $\rho$ ,  $\theta$ ,  $z$ . Анализ системы уравнений Эйнштейна, построенной для (1), (2), (5), позволяет доопределить зависимость функций квадратичной формы (5), а именно:

$$\nu = \mu, \quad \nu = \nu(q, \rho, \theta), \quad A = A(q, \rho, \theta), \quad B = B(q, \rho, \theta) \quad (6)$$

где

$$q = t + z. \quad (7)$$

Для (6), (7), квадратичная форма (5) принимает вид

$$dS^2 = e^{2\nu} \left( (dt)^2 - (dz)^2 \right)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2, \quad (8)$$

где  $\nu$ ,  $A$ ,  $B$  функции переменных  $q$ ,  $\rho$ ,  $\theta$ .

Компоненты тензора энергии-импульса для вещественного безмассового скалярного поля имеют вид [2]:

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}L, \quad (9)$$

где  $L = g^{\bar{\omega}\lambda}\varphi_{,\bar{\omega}}\varphi_{,\lambda}$ ,  $\varphi_{,\alpha} = \partial\varphi/\partial x^\alpha$ ,  $\varphi$  – функция распределения скалярного поля, индексы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\bar{\omega}$ ,  $\lambda$  принимают значение 0, 1, 2, 3. Для того, чтобы обеспечить самосогласованность уравнений Эйнштейна для (8), (9), будем требовать

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(q, \rho, \theta) \Rightarrow \varphi = \varphi(q, \rho, \theta), \quad (10)$$

Система уравнений Эйнштейна может быть представлена в виде:

$$\left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right)_{,q} - 2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^2 + \left(\frac{B_{,q}}{B}\right)^2\right) = -2\chi(\varphi_{,q})^2, \quad (11)$$

$$\frac{1}{A}\left\{-\frac{B_{,\rho\rho}}{B} + \frac{1}{2}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{B_{,\rho}}{B}\frac{A_{,\rho}}{A} - 2\nu_{,\rho\rho} - 2(\nu_{,\rho})^2 + \nu_{,\rho}\left(\frac{A_{,\rho}}{A} - \frac{B_{,\rho}}{B}\right)\right\} + \frac{1}{B}\left\{-\frac{A_{,\theta\theta}}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{A_{,\theta}}{A}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{B_{,\theta}}{B}\frac{A_{,\theta}}{A} - 2\nu_{,\theta\theta} - 2(\nu_{,\theta})^2 + \nu_{,\theta}\left(\frac{B_{,\theta}}{B} - \frac{A_{,\theta}}{A}\right)\right\} = \quad (12)$$

$$= \chi\left\{\frac{(\varphi_{,\rho})^2}{A} + \frac{(\varphi_{,\theta})^2}{B}\right\},$$

$$\frac{1}{A}\left\{-2\nu_{,\rho\rho} - 2(\nu_{,\rho})^2 + \nu_{,\rho}\left(\frac{A_{,\rho}}{A} + \frac{B_{,\rho}}{B}\right)\right\} + \frac{1}{B}\left\{2\nu_{,\theta\theta} + 2(\nu_{,\theta})^2 - \nu_{,\theta}\left(\frac{B_{,\theta}}{B} + \frac{A_{,\theta}}{A}\right)\right\} = \chi\left\{\frac{(\varphi_{,\rho})^2}{A} - \frac{(\varphi_{,\theta})^2}{B}\right\}, \quad (13)$$

$$\frac{\nu_{,\rho}}{A}\left\{\frac{\partial}{\partial\rho}\ln\left[\nu_{,\rho}e^{2\nu}\sqrt{\frac{B}{A}}\right]\right\} + \frac{\nu_{,\theta}}{B}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\ln\left[\nu_{,\theta}e^{2\nu}\sqrt{\frac{A}{B}}\right]\right\} = 0, \quad (14)$$

$$\left(\frac{B_{,\rho}}{B} + 2\nu_{,\rho}\right)_{,q} - \nu_{,\rho}\left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right) - \frac{1}{2}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{A_{,q}}{A} - \frac{B_{,q}}{B}\right) = -2\chi\varphi_{,q}\varphi_{,\rho}, \quad (15)$$

$$\left(\frac{A_{,\theta}}{A} + 2v_{,\theta}\right)_{,q} - v_{,\theta} \left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right) - \frac{1}{2} \frac{A_{,\theta}}{A} \left(\frac{B_{,q}}{B} - \frac{A_{,q}}{A}\right) = -2\chi\varphi_{,q}\varphi_{,\theta}, \quad (16)$$

$$-2v_{,\rho\theta} - 2v_{,\rho}v_{,\theta} + v_{,\rho} \frac{A_{,\theta}}{A} + v_{,\theta} \frac{B_{,\rho}}{B} = \chi\varphi_{,\rho}\varphi_{,\theta}. \quad (17)$$

Если рассматривать систему уравнений (11)–(17) для распределения скалярного поля, сконцентрированного внутри “тонкой области” (размазанной нуль-струны), для которой переменные  $q$  (определяемой равенством (7)) и  $\rho$  принимают значение в интервале

$$q \in [-\Delta q, +\Delta q], \quad \rho \in [R(\theta) - \Delta\rho, R(\theta) + \Delta\rho], \quad \theta = 0 \dots 2\pi, \quad (18)$$

где функция  $R(\theta)$  определяет форму замкнутой нуль-струны,  $\Delta q$  и  $\Delta\rho$  малые положительные константы, определяющие «толщину» размазанной нуль-струны, то есть

$$\Delta q \ll 1, \quad \Delta\rho \ll 1, \quad (19)$$

и при дальнейшем сжатии такого «тонкого» «кольца» в одномерный объект (нуль-струну)

$$\Delta q \rightarrow 0, \quad \Delta\rho \rightarrow 0, \quad (20)$$

то пространство, в котором находится такая «размазанная» нуль-струна, и для которого переменные  $q$  и  $\rho$  принимают значение в интервале  $q \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\rho \in [0, +\infty)$ , условно можно разбить на три области

– область  $I$ , для которой

$$q \in (-\infty, -\Delta q) \quad (+\Delta q, +\infty), \quad \rho \in [0, +\infty), \quad \theta = 0 \dots 2\pi, \quad (21)$$

– область  $II$ , для которой

$$q \in (-\Delta q, +\Delta q), \quad \rho \in [0, R(\theta) - \Delta\rho) \quad (R(\theta) + \Delta\rho, +\infty), \quad \theta = 0 \dots 2\pi, \quad (22)$$

– область  $III$ , для которой

$$q \in [-\Delta q, +\Delta q], \quad \rho \in [R(\theta) - \Delta\rho, R(\theta) + \Delta\rho], \quad \theta = 0 \dots 2\pi, \quad (23)$$

Сравнивая систему уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны с системой (11)–(17), можно получить условия на функцию распределения скалярного поля, а именно при стягивании скалярного поля в струну, то есть при  $\Delta q \rightarrow 0$ ,  $\Delta\rho \rightarrow 0$ , должно быть выполнено

$$\begin{aligned} (\varphi, \rho)^2 \Big|_{q \rightarrow 0, \rho \rightarrow R(\theta)} &\rightarrow 0, \quad (\varphi, \theta)^2 \Big|_{q \rightarrow 0, \rho \rightarrow R(\theta)} \rightarrow 0, \quad (\varphi, q)^2 \Big|_{q \rightarrow 0, \rho \rightarrow R(\theta)} \rightarrow \infty, \\ (\varphi, q \varphi, \rho) \Big|_{q \rightarrow 0, \rho \rightarrow R(\theta)} &\rightarrow 0, \quad (\varphi, q \varphi, \theta) \Big|_{q \rightarrow 0, \rho \rightarrow R(\theta)} \rightarrow 0, \quad (\varphi, \rho \varphi, \theta) \Big|_{q \rightarrow 0, \rho \rightarrow R(\theta)} \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (24)$$

а вне области, где сконцентрировано скалярное поле (в области  $I$  и  $II$ )

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \varphi, q \rightarrow 0, \quad \varphi, \rho \rightarrow 0, \quad \varphi, \theta \rightarrow 0, \quad (25)$$

Для приведенных условий (24), (25) функцию распределения скалярного поля удобно представить в виде

$$\varphi(q, \rho, \theta) = \ln \left( \frac{1}{(\alpha(q) + \lambda(q) f(\eta))^\gamma} \right), \quad (26)$$

где  $\eta = \eta(\rho, \theta) = \rho - R(\theta)$ ,  $\gamma$  – некоторая положительная константа, функция  $\alpha(q) + \lambda(q) f(\eta)$  ограниченная

$$0 < \alpha(q) + \lambda(q) f(\eta) \leq 1, \quad (27)$$

Функция (26), в соответствии с (27), может принимать значения от

$$\varphi \rightarrow 0, \quad \text{при } \alpha(q) + \lambda(q) f(\eta) \rightarrow 1, \quad (28)$$

и до

$$\varphi \rightarrow \infty, \quad \text{при } \alpha(q) + \lambda(q) f(\eta) \rightarrow 0, \quad (29)$$

Отметим, что вид функции распределения (26), не является общим, а ее выбор нужно рассматривать как один из возможных способов «размазывания» нуль-струны. Вид функции распределения скалярного поля должен влиять на гравитационные свойства модели струны в виде трубки скалярного поля. Однако поскольку нуль-струне соответствует случай, в котором скалярное поле стягивается в одномерный объект то способ «размазывания» в предельных случаях (19), (20) не может быть существенен.

Можно показать, что для распределения (26), условия (24), (25) приводят к следующим ограничениям на функции  $\alpha(q)$ ,  $\lambda(q)$  и  $f(\eta)$ :

1. функции  $\lambda(q)$  и  $\alpha(q)$  связаны соотношением

$$\lambda(q) = (1 - \alpha(q)) / f_0, \quad f_0 = const, \quad (30)$$

2. функции  $\alpha(q)$  и  $f(\eta)$  ограниченные и для всех  $q \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\rho \in [0, +\infty)$ ,  $\theta = 0 \quad 2\pi$ , принимают значения в интервале

$$0 < \alpha(q) < 1, \quad 0 < f(\eta) < f_0, \quad (31)$$

причем

$$\alpha(q) \Big|_{q \in (-\infty, -\Delta q) \cup (+\Delta q, +\infty)} \rightarrow 1, \quad \alpha(q) \Big|_{q \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad (32)$$

$$f(\eta) \Big|_{\rho \in [0, R(\theta) - \Delta \rho) \cup (R(\theta) + \Delta \rho, +\infty)} \rightarrow f_0, \quad f(\eta) \Big|_{\eta \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad (33)$$

Также в пределе сжатия в одномерный объект (нуль-струну) должны быть выполнены условия (при  $\Delta q \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rho \rightarrow 0$ ):

$$\left| \frac{\alpha_{,q}}{\alpha(q)} \right|_{q \rightarrow 0} \rightarrow \infty, \quad \left| \frac{f_{,\eta}}{f(\eta)} \right|_{\eta \rightarrow 0} \rightarrow 0, \quad \left| \frac{\alpha_{,q}}{\alpha(q)} \times \frac{f_{,\eta}}{f(\eta)} \right|_{q \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} \rightarrow 0 \quad (34)$$

Ниже приведен один из примеров функций  $\alpha(q)$  и  $f(\eta)$ , удовлетворяющих найденным условиям

$$\alpha(q) = \exp\left(\frac{-1}{\varepsilon + (\xi q)^2}\right), \quad (35)$$

$$f(\eta) = f_0 \exp\left(-\mu \left(1 - \exp\left(\frac{-1}{(\zeta \eta)^2}\right)\right)\right), \quad (36)$$

где константы  $\xi$  и  $\zeta$  определяют размер («толщину») «кольца», внутри которого сконцентрировано скалярное поле по переменным  $q$  и  $\rho$  соответственно, а именно, как следует из (35), (36), при  $\Delta q \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rho \rightarrow 0$

$$\xi \rightarrow \infty, \quad \zeta \rightarrow \infty, \quad (37)$$

а положительные константы  $\varepsilon$  и  $\mu$  обеспечивают выполнение условий (32)-(34), при  $\Delta q \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rho \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow R(\theta)$ ,  $\theta = 0 \dots 2\pi$ ,  $q \rightarrow 0$ , а именно, при  $\Delta q \rightarrow 1$ ,  $\Delta \rho \rightarrow 1$

$$\varepsilon \rightarrow 1, \quad \mu \rightarrow 1, \quad (38)$$

а при дальнейшем сжатии в одномерный объект (нуль-струну), то есть при  $\Delta \rho \rightarrow 0$ ,  $\Delta q \rightarrow 0$

$$\varepsilon \rightarrow 0, \quad \mu \rightarrow \infty. \quad (39)$$

Используя (30), (35), (36) для (26), получаем выражение одного из возможных распределений скалярного поля, компоненты тензора энергии-импульса для которого при сжатии в одномерный объект асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии-импульса замкнутой нуль-струны, движущейся по траектории (2).

## 2. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ «РАЗМАЗАННОГО» РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Дополним систему уравнений Эйнштейна (11)–(17) уравнением скалярного поля, которое для тензора (9) есть

$$(g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha})_{;\beta} = 0, \quad (40)$$

где точка с запятой обозначает ковариантную производную. Для (8), (10) уравнение (40) принимает вид

$$\frac{\varphi_{,\rho}}{A} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \ln \left[ \varphi_{,\rho} e^{2\nu} \sqrt{\frac{B}{A}} \right] \right\} + \frac{\varphi_{,\theta}}{B} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \ln \left[ \varphi_{,\theta} e^{2\nu} \sqrt{\frac{A}{B}} \right] \right\} = 0, \quad (41)$$

Сравнивая уравнения (14) и (40), находим

$$v_{,\rho} = c(q)\varphi_{,\rho}, \quad v_{,\theta} = c(q)\varphi_{,\theta} \quad (42)$$

откуда

$$v = v(q, \rho, \theta) = v(q, \eta) = c(q)\varphi(q, \eta) + v_0(q), \quad (43)$$

где, согласно (4), (7), функции  $c(q)$  и  $v_0(q)$  симметричны относительно замены  $q$  на  $-q$ .

Для (43) уравнение (17) может быть приведено к виду

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \ln \left[ (\varphi_{,\eta})^2 e^{2c(q)\varphi \left( 1 + \frac{\chi}{2c^2(q)} \right)} \right] = \frac{B_{,\rho}}{B} - \frac{1}{R_{,\theta}} \cdot \frac{A_{,\theta}}{A}. \quad (44)$$

Можно заметить, что правая часть полученного равенства есть функция переменных  $q$  и  $\eta$ :

$$\frac{B_{,\rho}}{B} - \frac{1}{R_{,\theta}} \cdot \frac{A_{,\theta}}{A} = F(q, \eta), \quad (45)$$

Из (45)

$$B = B(q, \rho, \theta) = B_1 B_2, \quad A = A(q, \rho, \theta) = A_1 \alpha_1 \quad (46)$$

где  $B_1 = B_1(q, \eta)$ ,  $B_2 = B_2(q, \theta)$ ,  $A_1 = A_1(q, \eta)$ ,  $\alpha_1 = \alpha_1(q)$ .

Интегрируя уравнение (44) для (46), находим

$$\frac{(c_1)^2 (\varphi_{,\eta})^2 e^{2c(q)\varphi \left( 1 + \frac{\chi}{2c^2(q)} \right)}}{B_1}, \quad (47)$$

где  $(c_1)^2 = (c_1(q))^2$  “константа” интегрирования.

Уравнение (13) для (17), (43), (46), при условии

$$R_{,\theta} \neq 0, \quad (48)$$

принимает вид

$$\frac{B_{2,\theta}}{B_2} = 2 \frac{R_{,\theta\theta}}{R_{,\theta}}. \quad (49)$$

Интегрируя уравнение (49), находим

$$B_2(q, \theta) = \beta(R_{,\theta})^2. \quad (50)$$

где  $\beta = \beta(q)$  “константа” интегрирования.

Для (43), (46), (50) уравнение скалярного поля (41) и уравнение (12), соответственно, принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \ln \left[ \varphi_{,\eta} \left( \frac{\alpha_1 A_1 + \beta B_1}{\alpha_1 \beta \sqrt{A_1 B_1}} \right) e^{2\nu} \right] = 0. \quad (51)$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \ln \left[ \frac{(\alpha_1 A_1 + \beta B_1)_{,\eta}}{\sqrt{A_1 B_1}} \right] = -2\nu_{,\eta}. \quad (52)$$

Интегрируя уравнения (51), (52), учитывая (43), (47), находим

$$\alpha_1 A_1 + \beta B_1 = c_1 c_2 \alpha_1 \beta e^{-2\nu_0(q)} e^{-\left(c(q) - \frac{\chi}{2c(q)}\right)\varphi}, \quad (53)$$

$$(\alpha_1 A_1 + \beta B_1)_{,\eta} = c_1 c_3 \varphi_{,\eta} \beta e^{-2\nu_0(q)} e^{-\left(c(q) - \frac{\chi}{2c(q)}\right)\varphi}, \quad (54)$$

где  $c_2 = c_2(q)$  и  $c_3 = c_3(q)$  “константы” интегрирования. Дифференцируя равенство (53) по переменной  $\eta$ , находим выражение для функции  $c_3(q)$ :

$$c_3(q) = -\alpha_1 \beta(q) c_2(q) \left( c(q) - \frac{\chi}{2c(q)} \right). \quad (55)$$

Можно отметить, что для (43), (46), (50), (53) уравнение (14) выполняется тождественно.

Применяя равенство (47) для (53), получаем алгебраическое уравнение, связывающее функцию  $B_1$  и функцию распределения скалярного поля  $\varphi$

$$\beta(B_1)^2 - bB_1 + a = 0, \quad (56)$$

где обозначено

$$b = c_1 c_2 \alpha_1 \beta e^{-2\nu_0(q)} e^{-c(q)\varphi\left(1 - \frac{\chi}{2c^2(q)}\right)}, \quad a = \alpha_1 (c_1)^2 (\varphi, \eta)^2 e^{2c(q)\varphi\left(1 + \frac{\chi}{2c^2(q)}\right)}. \quad (57)$$

Отметим, что согласно (47), (53)

$$b = (\alpha_1 A_1 + \beta B_1), \quad a = \alpha_1 A_1 B_1, \quad (58)$$

Дискриминант уравнения (56), используя (57), (58), есть

$$D = (\alpha_1 A_1 - \beta B_1)^2. \quad (59)$$

Из (59) следует, что  $D = 0$  в случае

$$\alpha_1 A_1 = \beta B_1, \quad (60)$$

и  $D > 0$  в случае

$$\alpha_1 A_1 \neq \beta B_1. \quad (61)$$

Как следует из (43), (47), (53) случай (60) приводит к уравнению, связывающему функцию распределения скалярного поля  $\varphi$  и «константы» интегрирования:

$$2e^{c(q)\varphi + \nu_0(q)} \varphi, \eta = c_2 \sqrt{\alpha_1(q)\beta(q)}. \quad (62)$$

Интегрируя (62), находим

$$\varphi(q, \eta) = -\frac{\nu_0(q)}{c(q)} + \frac{1}{2c(q)} \ln \left( c(q)c_2(q) \sqrt{\alpha_1(q)\beta(q)} \eta + \varphi_0(q) \right), \quad (63)$$

где  $\varphi_0(q)$  «константа» интегрирования. Легко заметить, что функция (63) не может реализовать распространение локализованного по переменной  $\rho$  объекта, поэтому случай (60) не реализуется. Корни уравнения (56), для (59), (61) следующие

$$B_1(q, \eta)_{1,2} = \frac{1}{2} c_1 c_2 \alpha_1 e^{-2\nu_0 - \varphi\left(c - \frac{\chi}{2c}\right)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left( 2 \frac{\varphi, \eta}{\sqrt{\alpha_1 \beta c_2}} \right)^2} \right], \quad (64)$$

тогда используя (53)

$$A_1(q, \eta)_{1,2} = \frac{1}{2} c_1 c_2 \beta e^{-2\nu_0 - \varphi\left(c - \frac{\chi}{2c}\right)} \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left( 2 \frac{\varphi, \eta}{\sqrt{\alpha_1 \beta c_2}} \right)^2} \right]. \quad (65)$$

Оставшиеся три уравнения системы: (11), (15) и (16), рассматриваемые для (43), (64) и (65) определяют условия, связывающее между собой функции («константы» интегрирования):  $c(q)$ ,  $c_1(q)$ ,  $c_2(q)$ ,  $\alpha_1(q)$ ,  $v_0(q)$ ,  $\beta(q)$ , их производные, и константу  $\gamma$ .

Так разность уравнений (15) и (16), для (43), (46), (50), есть

$$\left( \frac{(\beta B_1)_{,q} - (\alpha_1 A_1)_{,q}}{\beta B_1 - \alpha_1 A_1} \right)_{,\eta} + \frac{1}{2} \left( \frac{(\beta B_1)_{,q} - (\alpha_1 A_1)_{,q}}{\beta B_1 - \alpha_1 A_1} \right) \left( \frac{(B_1)_{,\eta}}{B_1} + \frac{(A_1)_{,\eta}}{A_1} \right) = 0. \quad (66)$$

Согласно (26), (30) функция  $\varphi(q, \eta)$ , определяющая распределение скалярного поля, удовлетворяет уравнениям:

$$\varphi_{,\eta\eta} - \frac{f_{,\eta\eta}}{f_{,\eta}} \varphi_{,\eta} - \frac{1}{\gamma} (\varphi_{,\eta})^2 = 0. \quad (67)$$

$$\varphi_{,qq} - \frac{\alpha_{,\eta\eta}}{\alpha_{,\eta}} \varphi_{,q} - \frac{1}{\gamma} (\varphi_{,q})^2 = 0. \quad (68)$$

$$\varphi_{,q\eta} - \frac{\lambda_{,q}}{\lambda(q)} \varphi_{,\eta} - \frac{1}{\gamma} \varphi_{,q} \varphi_{,\eta} = 0. \quad (69)$$

Для (64), (65), (67), (69) уравнение (66) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} & \psi_0 + \psi_1 \varphi + \psi_2 \varphi_{,q} + \psi_3 \varphi_{,\eta} + \psi_4 \varphi_{,\eta} \varphi + \psi_5 \varphi_{,\eta} \varphi_{,q} + \psi_6 (\varphi_{,\eta})^2 \varphi + \\ & + \psi_7 (\varphi_{,\eta})^3 \varphi + \psi_8 (\varphi_{,\eta})^3 + \psi_9 (\varphi_{,\eta})^3 \varphi_{,q} + \psi_{10} \varphi_{,q\eta} = 0, \end{aligned} \quad (70)$$

где  $\psi_i$ ,  $i=0, 1, \dots, 10$  – функции, содержащие «константы» интегрирования, их производные, константу  $\gamma$ , а также функции, определяющие распределение скалярного поля, например,

$$\psi_0 = \frac{f_{,\eta\eta}}{f_{,\eta}} \frac{d}{dq} \ln \left( \frac{\lambda(q) e^{2v_0(q)}}{\sqrt{\alpha_1(q) \beta(q) c_2(q)}} \right), \quad \psi_2 = \left( \frac{1}{\gamma} + 2c(q) \right) \frac{f_{,\eta\eta}}{f_{,\eta}}, \quad \psi_{10} = \left( \frac{1}{\gamma} + 2c(q) \right).$$

Можно показать, что требование

$$\left( \frac{1}{\gamma} + 2c(q) \right) = 0, \Rightarrow c(q) = c = -\frac{1}{2\gamma} = const., \quad (71)$$

$$\frac{\lambda(q) e^{2v_0(q)}}{\sqrt{\alpha_1(q) \beta(q) c_2(q)}} = c_4 = const., \quad (72)$$

есть «тривиальное» решение уравнения (70) (т.е. решение, для которого  $\psi_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, 10$ ), и которое для уравнения (66) соответствует случаю

$$\frac{(\beta B_1)_{,q}}{\beta B_1} - \frac{(\alpha_1 A_1)_{,q}}{\alpha_1 A_1} = 0. \quad (73)$$

С другой стороны, можно показать, что требование

$$\left( \frac{1}{\gamma} + 2c(q) \right) \neq 0, \quad (74)$$

которое для уравнения (66) соответствует случаю

$$\frac{(\beta B_1)_{,q}}{\beta B_1} - \frac{(\alpha_1 A_1)_{,q}}{\alpha_1 A_1} \neq 0, \quad (75)$$

приводит к противоречию. Так, для (74), приравнявая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях функции  $\varphi$  и ее производных, уравнений (69) и (70), в частности, получаем требование  $\psi_2 = 0$ , которое приводит к уравнению

$$\frac{f_{,\eta\eta}}{f_{,\eta}} = 0, \Rightarrow f(\eta) = c\eta + \hat{c} \quad (76)$$

где  $\bar{c}$  и  $\hat{c}$  константы, решение которого, очевидно, не может выполнить требования (33), (34). Поэтому случай (75) не реализуется.

Сумма уравнений (15) и (16), для (43), (46), (50), (64), (65), учитывая (71)–(73), есть

$$\varphi_{,q\eta} - \frac{2}{1+2\chi\gamma^2} \left( \frac{d}{dq} \ln \left( \lambda(q)c_1(q)\sqrt{\alpha_1(q)\beta(q)} \right) \right) \varphi_{,\eta} - \frac{1}{\gamma} \varphi_{,q} \varphi_{,\eta} = 0. \quad (77)$$

Приравнявая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях функции  $\varphi$  и ее производных уравнений (69) и (77), получаем

$$\frac{d}{dq} \ln \left( \lambda(q)c_1(q)\sqrt{\alpha_1(q)\beta(q)} \right) = \frac{1+2\chi\gamma^2}{2} \frac{d}{dq} \ln(\lambda(q)). \quad (78)$$

Интегрируя (78), находим

$$c_1(q) = \bar{c}_1 \frac{(\lambda(q))^{\left(\chi\gamma^2 - \frac{1}{2}\right)}}{\sqrt{\alpha_1(q)\beta(q)}}. \quad (79)$$

где  $\bar{c}_1$  константа интегрирования.

Для (43), (46), (50), (64), (65), учитывая (71)–(73), (79), уравнение (11) есть

$$\Psi_0(q) + \varphi_{,qq} + \Psi_1(q)\varphi_{,q} + \Psi_2(\varphi_{,q})^2 = 0. \quad (80)$$

где

$$\Psi_0(q) = \frac{\gamma(1+2\chi\gamma^2)}{(1-2\chi\gamma^2)} \left[ \left( \frac{\lambda_{,q}}{\lambda(q)} \right)_{,q} - 2\nu_0(q) \frac{\lambda_{,q}}{\lambda(q)} + \frac{1}{4}(1+2\chi\gamma^2) \left( \frac{\lambda_{,q}}{\lambda(q)} \right)^2 \right], \quad (81)$$

$$\Psi_1(q) = -2\nu_0(q) + \left[ \frac{(1+2\chi\gamma^2)}{(1-2\chi\gamma^2)} + \frac{1}{2}(1+2\chi\gamma^2) \right] \frac{\lambda_{,q}}{\lambda(q)}, \quad (82)$$

$$\Psi_2 = \left( \frac{1}{2\gamma} - \chi\gamma \right)^{-1} \left( \frac{1}{2\gamma^2}(1-2\chi\gamma^2) + \frac{1}{8\gamma^2}(1-2\chi\gamma^2)^2 + \chi \right). \quad (83)$$

Приравнявая коэффициенты, стоящие при одинаковых степенях функции  $\varphi$  и ее производных уравнений (68) и (80), находим условия на функции  $\Psi_i$ ,  $i=0, 1, 2$ , уравнения (80):

$$\Psi_0(q) = 0, \quad (84)$$

$$\Psi_1(q) = -\frac{\alpha_{,qq}}{\alpha_{,q}}, \quad (85)$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{\gamma}. \quad (86)$$

Применяя (83) для (86) получаем алгебраическое уравнение

$$4\chi^2\gamma^4 + 12\chi\gamma^2 + 9 = 0, \quad (87)$$

которое имеет единственное положительное решение (поскольку  $\gamma > 0$ ):

$$\gamma = \sqrt{\frac{3}{2\chi}}. \quad (88)$$

Для (81), (88) равенство (84) принимает вид

$$2\nu_0(q) = \frac{\lambda_{,qq}}{\lambda_{,q}}. \quad (89)$$

Интегрируя (89), находим (учитывая четность функции  $\nu_0(q)$ )

$$e^{2\nu_0(q)} = c_5 |\lambda_{,q}|, \quad (90)$$

где  $c_5$  константа интегрирования. Отметим, что для (30), (82), (88), (89) равенство (85) выполняется тождественно.

Таким образом, используя (26), (43), (46), (50), (64), (65), (71), (72), (79), (88), (90), получаем выражение для искомых метрических функций квадратичной формы (8):

$$e^{2\nu} = c_5 |\lambda_{,q}| (\alpha(q) + \lambda(q) f(\eta)), \quad (91)$$

$$B = \frac{3\bar{c}_1 c_4}{\chi} \lambda^2(q) (\alpha(q) + \lambda(q) f(\eta)) \frac{(f_{,\eta})^2 (R_{,\theta})^2}{\left[ 1 - \sqrt{1 - \left( c_4 \sqrt{\frac{6}{\chi}} f_{,\eta} \right)^2} \right]}, \quad (92)$$

$$A = \frac{3\bar{c}_1 c_4}{\chi} \lambda^2(q) (\alpha(q) + \lambda(q) f(\eta)) \frac{(f_{,\eta})^2}{\left[ 1 \pm \sqrt{1 - \left( c_4 \sqrt{\frac{6}{\chi}} f_{,\eta} \right)^2} \right]}, \quad (93)$$

где значение константы  $c_4$  (нормировочная константа) должно обеспечивать выполнение неравенства

$$0 < \left( c_4 \sqrt{\frac{6}{\chi}} f_{,\eta} \right)^2 \leq 1,$$

а ее величина, в соответствии с (36) зависит от значения констант  $f_0$ ,  $\mu$  и  $\zeta$ , определяющих размер («толщину») «кольца», внутри которого сконцентрировано скалярное поле по переменной  $\rho$ , а именно

$$c_4 = \frac{\sqrt{\chi}}{f_0 \mu \zeta^2}. \quad (94)$$

Для определения значения константы  $c_1$  удобно исследовать выражение для скалярной кривизны:  $K = g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} R_{\alpha\mu\beta\nu}$ , где  $R_{\alpha\mu\beta\nu}$  – тензор Римана-Кристоффеля, которое для найденных метрических функций имеет вид

$$K = -\chi \left[ \frac{(\varphi_{,\rho})^2}{A} + \frac{(\varphi_{,\theta})^2}{B} \right] = \frac{-\chi}{\bar{c}_1 c_4 (\alpha(q) + \lambda(q) f(\eta))^3}, \quad (95)$$

Сравнивая (95) с правой частью уравнения (12), видно, что при стягивании скалярного поля в струну, то есть при  $\Delta q \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rho \rightarrow 0$ , в области *III*, определяемой (23), должно быть выполнено

$$K|_{q \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} = -\frac{\chi}{\bar{c}_1 c_4 F} \rightarrow 0, \quad (96)$$

где, применяя (30), (35), (36),

$$F = \left( \exp(-1/\varepsilon) + (1 - \exp(-1/\varepsilon))e^{-\mu} \right)^3. \quad (97)$$

В области *I* и области *II*, определяемых (21) и (22), согласно (30), (32), (33), функция  $(\alpha(q) + \lambda(q)f(\eta)) \rightarrow 1$ . Тогда из равенства (95) следует

$$K = -\frac{\chi}{\bar{c}_1 c_4}, \quad (98)$$

Из равенств (94), (96), (97), (98) видно, что скалярная кривизна пространства в областях *I*–*III* зависит от значения констант, определяющих размер («толщину») «кольца», внутри которого сконцентрировано скалярное поле. Причем, в пределе сжатия «размазанного» распределения в одномерный объект (нуль-струну), в области *I* и области *II* также должно быть выполнено:  $K \rightarrow 0$ . Фиксируя в (95), (98), например,  $c_1 = \sqrt{\chi}(c_4)^{-2} F^{-1}$ , получаем

$$K|_{q \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} = \frac{-\chi F}{f_0 \mu \zeta^2 (\alpha(q) + \lambda(q)f(\eta))^3}, \quad (99)$$

Применяя (37), (39) получаем, что при сжатии «размазанного» распределения в одномерный объект (нуль-струну) равенство (99) принимает вид: в области *I* и области *II*

$$K = \frac{-\chi F}{f_0 \mu \zeta^2} \rightarrow 0, \quad (100)$$

в области *III*

$$K|_{q \rightarrow 0, \eta \rightarrow 0} = \frac{-\chi F}{f_0 \mu \zeta^2} \rightarrow 0. \quad (101)$$

Значение константы  $c_5$  в выражении (91), которая является масштабным множителем, удобно выбрать равным

$$c_5 = \frac{3c_1 c_4}{\chi} = \frac{3f_0 \mu \zeta^2}{F}, \quad (102)$$

Учитывая (91)–(93), (102), квадратичная форма (8) может быть записана в виде

$$dS^2 = W \left\{ \frac{|\lambda_{,q}|}{\lambda^2(q)} \left( (dt)^2 - (dz)^2 \right) - \frac{(f_{,\rho})^2 (d\rho)^2}{\left[ 1 \pm \sqrt{1 - (c_4 f_{,\eta})^2} \right]} - \frac{(f_{,\theta})^2 (d\theta)^2}{\left[ 1 \sqrt{1 - (c_4 f_{,\eta})^2} \right]} \right\}, \quad (103)$$

где  $c_4 = c_4 \sqrt{\frac{6}{\chi}}$ ,

$$W = W(q, \eta) = \frac{3f_0 \mu \zeta^2}{F} \lambda^2(q) [\alpha(q) + \lambda(q) f(\eta)].$$

Частным случаем траекторий движения, определяемых (2), является траектория, соответствующая требованию  $R(\theta) = R = const$ , которая описывает движение вдоль оси  $z$  замкнутой нуль-струны постоянного (неизменного со временем) радиуса  $R$ , решение системы уравнений Эйнштейна, для которой было найдено в работе [18]. Интересно отметить, что система уравнений Эйнштейна (11)–(17), для аксиально-симметричной нуль-струны, в предельном случае  $R(\theta) = R = const$  полностью совпадает с системой для нуль-струны постоянного радиуса  $R$ , а решение (103) в пределе  $R(\theta) \rightarrow R = const$  не может быть приведено к решению, найденному в работе [18]. Отсутствие при  $R(\theta) \rightarrow R = const$  предельного перехода между данными решениями может говорить об устойчивости конфигурации замкнутой нуль-струны в виде окружности при движении во внешнем гравитационном поле, влияние которого для такой нуль-струны, следовательно, может сводиться к изменению ее движения как целого или к изменению ее радиуса.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе, сравнивая систему уравнений Эйнштейна, построенную для распределения вещественного безмассового скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой области», с системой уравнений Эйнштейна для замкнутой аксиально-симметричной нуль-струны, которая движется вдоль оси  $z$ , без изменения формы и в каждый момент времени  $t$  полностью лежит в плоскости, ортогональной этой оси, мы нашли условия, при выполнении которых, в пределе сжатия скалярного поля в одномерный объект (нуль-струну), компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии-импульса замкнутой нуль-струны. Предложен вид функции распределения, описывающего движение скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой области» вдоль оси  $z$ .

Найдено решение уравнений Эйнштейна для «размазанной», аксиально-симметричной, замкнутой нуль-струны, движущейся вдоль оси  $z$ , и в каждый момент времени  $t$  полностью лежащей в плоскости, ортогональной этой оси.

Показано отсутствие предельного перехода между решением системы

уравнений Эйнштейна для аксиально-симметричной «размазанной» нуль-струны и решением для замкнутой нуль-струны постоянного радиуса, которое приведено в работе [18], что может говорить об устойчивости конфигурации замкнутой нуль-струны в виде окружности при движении во внешнем гравитационном поле, влияние которого для такой нуль-струны может сводиться к изменению ее движения как целого (без изменения формы и размера) или к изменению ее радиуса.

### Список литературы

1. Peebles P. J. E. *Principles of Physical Cosmology*. Princeton University Press, 1994. 736 p.
  2. Linde A. D. *Particle Physics and Inflationary Cosmology*. Harwood, Chur, 1990. 269 p.
  3. Vachaspati T., Vilenkin A. Formation and evolution of cosmic strings // *Phys. Rev. D*. 1984. Vol. 30, P. 2036.
  4. Vilenkin A., Shellard E. P. S. *Cosmic string and other topological defects*. Cambridge University Press, 1994. 580 p.
  5. Kibble T. W. B., Hindmarsh M. B. Cosmic strings // *Reports on Progress in Physics*. 1994. Vol. 58, No. 5.
  6. Bennet D. P. *Formation and Evolution of Cosmic Strings*. Cambridge University Press, 1990.
  7. Schild A. Classical null strings // *Phys. Rev. D*. 1977. Vol. 16, P. 1722.
  8. Hill C. T., Schramm D. N., Fry J. N.. Cosmological Structure Formation from Soft Topological Defects // *Commun Nucl. Part. Phys*. 1999. Vol. 19. P. 25.
  9. Roshchupkin S. N., Zheltukhin A. A. Variational principle and a perturbative solution of non-linear string equations in curved space // *Nucl. Phys. B*. 1999. Vol. 543. P. 365.
  10. Bandos I. A., Zheltukhin A. A. Null super p-brane quantum theory in 4-dimensional space-time // *Fortschr. Phys*. 1993. Vol. 4. P. 619.
  11. Zheltukhin A. A. Hamiltonian structure of the antisymmetric action of a string // *JETP Lett*. 1987. Vol. 46. P. 262.
  12. Zheltukhin A. A. // *Soviet J. Nucl. Phys*. 1988. Vol. 48. P. 375.
  13. Roshchupkin S. N., Zheltukhin A. A. Friedmann universes and exact solutions in string cosmology // *Class. Quantum. Grav*. 1995. Vol. 12. P. 2519.
  14. Cui Y., Morrissey D. E. Non-Thermal Dark Matter from Cosmic Strings // *arXiv* : 0805.1060.
  15. Oliv K. A. TASI Lectures on Dark Matter // *arXiv* : astro-ph/0301505.
  16. Bertone G., Hooper D., Silk J. Particle Dark Matter : Evidence, Candidates and Constraints // *Phys. Rept*. 2005. Vol. 405. P. 279.
  17. Lelyakov A. P. Solution to the Einstein equations for a “spread” closed null string of constant radius // *Gravitation and Cosmology*. 2015. Vol. 21. No. 3. P. 200.
  18. Lelyakov A. P. Dynamics of a null string in the gravitational field of a closed null string of constant radius // *Gravitation and Cosmology*. 2015. Vol. 21. No. 4. P. 309.
  19. Lelyakov O. P., Karpenko A. S., Babadzhan R.-D. O. Dynamics of a Non-Rotating Test Null String in the Gravitational Field of a Closed “Thick” Null String Radially Expanding or Collapsing in the Plane  $z = 0$  // *Ukr. J. Phys*. 2014. Vol. 59. P. 1114.
  20. Lelyakov A. P., Karpenko A. S. Dynamics of a probe null string in the gravitational field of a closed null string radially collapsing in the plane // *Theoretical and Mathematical Physics*. 2017. Vol.190, P. 140–153.
  21. Lelyakov A. P. Peculiarities of null string motion in the gravitational field of a radially expanding or radially collapsing multistring system // *Gravitation and Cosmology*. 2017. Vol. 23, P. 50–62.
-

**QUADRATIC FORM FOR AXIALLY SYMMETRIC CLOSED NULL STRING,  
MOVING WITHOUT CHANGE OF ITS SHAPE**

*Lelyakov A. P., Osokin C. S.\**

*Physics and Technology Institute, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

*\*E-mail: [journal.phys.tech@cfuv.ru](mailto:journal.phys.tech@cfuv.ru)*

A solution of the Einstein equations for an axially symmetric closed null string has been found in the paper. The direction of motion for null string at each moment of time is orthogonal to the plane in which it is located. It is shown that there is no limit transition between the solution found and the solution for a closed null-string of constant radius. This can indicate the stability of the configuration of a closed null-string in the shape of a circle when moving in an external gravitational field. The effect of such field for such a null string can be reduced to a change in its motion as a whole (without change of the shape and size) or to a change of its radius.

**Keywords:** Einstein equations, null string, gravitational field, exact solution.

**References**

1. P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1994).
2. A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, Chur, 1990).
3. T. Vachaspati, A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **30**, 2036 (1984).
4. A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic string and other topological defects* (Cambridge University Press, 1994).
5. T. W. B. Kibble, M.B. Hindmarsh, e-print hep-th/9411342.
6. D. P. Bennet, *Formation and Evolution of Cosmic Strings* (Cambridge University Press, 1990).
7. A. Schild, *Phys. Rev. D* **16**, 1722 (1977).
8. C. T. Hill, D. N. Schramm and J. N. Fry, *Commun Nucl. Part. Phys.* **19**, 25 (1999).
9. S. N. Roshchupkin, A. A. Zheltukhin, *Nucl. Phys. B* **543**, 365 (1999).
10. I. A. Bandos, A. A. Zheltukhin, *Fortschr. Phys.* **41**, 619 (1993).
11. I. A. Bandos, A. A. Zheltukhin, *Soviet. J. Nucl. Phys.* **50** (3), 556 (1989).
12. A. A. Zheltukhin, *JETP Lett.* **46** 262 (1987).
13. S. N. Roshchupkin, A. A. Zheltukhin, *Class. Quantum. Grav.* **12**, 2519 (1995).
14. Y. Cui, D. E. Morrissey, arXiv: 0805.1060v2 (hep-ph).
15. K. A. Oliv, arXiv: astro-ph/0301505.
16. G. Bertone, D. Hooper, J. Silk, *Phys. Rept.* **405**, 279 (2005).
17. A. P. Lelyakov, *Gravitation and Cosmology* **21**, No. 3, 200 (2015).
18. A. P. Lelyakov, *Gravitation and Cosmology* **21**, No. 4, 309 (2015).
19. O. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, R.-D. O. Babadzhan, *Ukr. J. Phys.* **59**, 1114 (2014).
20. A. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, *Theoretical and mathematical Physics*, **190**, No. 1, 140 (2017).
21. A. P. Lelyakov, *Gravitation and Cosmology* **23**, No. 1, 50 (2017).

*Поступила в редакцию 08.11.2017 г. Принята к публикации 22.12.2017 г.  
Received November 08, 2017. Accepted for publication December 22, 2017*

УДК 535.015

## SIMPLE PHOTONICS CRYSTALS AS A MEDIUM FOR EXISTENCE OF OPTICAL QUARKS

Volyar A. V., Alexeyev C. N., Egorov Yu. A., Akimova. Ya. E.\*

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Vernadsky Prospekt 4, Simferopol 295007, Russia

\*E-mail: [yana\\_akimova\\_1994@mail.ru](mailto:yana_akimova_1994@mail.ru)

In this paper we demonstrated that in biaxial crystals under the condition of the conical diffraction the fractional-order vortices are unstable. We also demonstrated that the circular fiber array with a space-variant birefringence is an appropriate medium for fractional-order vortex beams in such arrays the supermodes may bear the half-integer order vortices in circular components. The decisive role in forming such supermodes plays evanescent-coupling assisted phase locking of individual fiber modes combined with tunneling of polarization states between anisotropic fibers in the array. We showed that integer-charge phase increment in a fractional-order supermode consists of two half-integer charge phase contributions. The implicit half-integer charge phase contribution (or the “hidden phase”) comes due to the sign alteration of the amplitude factors in the field components that corresponds to the wavefront cuts. We have also made the comparison of the hidden and hydrodynamic phases in superfluidic fractional-charge vortices with analogous phases in fractional-order supermodes.

**Keywords:** optical vortices, fractional topological charges, the fractional-order supermodes, hidden phase, the array of optical vortices.

**PACS:** 41.85. -p

### INTRODUCTION

In this paper we studied the shaping and evolution of singular beams bearing optical vortices with fractional topological charges both in uniform and non-uniform anisotropic media. Authors of the paper [3] remarked also unusual behavior of the orbital angular momentum  $l_z$  (OAM). At first glance it seems that the fractional-order vortex topological charge is an indicator of the OAM of singular beams at least records nearest values to its physical quantity. In some first papers ([7], [13]) authors obtained a nearly linear dependence between  $l_z$  and a topological charge  $p$  on the base of assessed theoretical results. However, the computer simulation of the process and physical analysis [12] revealed a complex behavior of the function  $l_z(p)$ . Small values of the charge  $p < 10$  correspond to a nearly linear dependence  $l_z \approx p$  with a small amplitude of oscillations. The growth of the value  $p > 10$  results in increasing the amplitude of oscillations between the values  $l_z = \text{integer}(p)$  and  $p = 0$ . The presented results are evidence of a complex interference coupling between a great number of the integer-order vortices in a fractional-order vortex beam.

One more unexpected property of the fractional-order vortex beams revealed the authors of the paper [15]. They tried to answer experimentally the question: can the fractional-order vortex beams control the states of the integer-order ones? They achieved a success using two beams: the pump and probe ones.

The pump beam is of a topological dipole field consisting of two  $\frac{1}{2}$ - order vortices with opposite signs of their charges. The pump beam lays a course in a nonlinear medium for the probe singular beam of a smaller intensity. Changing parameters of the dipole they can steer the state of the probe beam. In fact, the fractional-order topological dipole is not destroyed inside the nonlinear medium forming the waveguide channel for the probe beam.

The example of structural stability of fractional-order vortex beams is a discrete fiber array with supermodes bearing half integer-order vortices [14].

### 1. THE SPACE VARIANT UNBOUNDED BIREFRINGENT MEDIUM

The brightest representatives of the space-variant media are the so-called q-plates [1]. The q-plate is, in the first version, a slab of a birefringent medium (liquid crystal) with different local directions of the crystal birefringence while the slab has uniform phase retardation. The space-variant birefringence of the q-plates is defined by the topological charge  $q$  equal to a rotation of the optical axis in a path circling around the plate center. Obviously, the value of  $q$  can be integer or half inter. The  $q$  – value can be controlled either by mechanical or by the electrical way ([2, 3]) that implements a polarization modulation at the input beam cross-section. The beam turns into a new wave state due to a superposition of a great number of plane waves with different polarization states. As a result the field distribution has a set of elliptic polarization states differ essentially from the birefringent structure of the q-plate.

There is not an appropriate physical mechanism in the device that could promote imprinting the space-variant birefringence structure into the propagating field. In that respect, the processes of the conical diffraction in the uniform biaxial crystal are not to differ from the effect of the q-plate. In essence, the main mechanism to construct the structured field in the q-plates are the superposition of the uniform propagating waves with the space-variant polarization far from that imprinted by the birefringent distribution of the anisotropic medium while the obtained wave construction maintains the desired fractional angular momentum. It means that the q-plate is solely destined for controlling the orbital angular momentum rather than for creating a stable fractional-order vortex-state.

At first sight it seems that the only physical mechanism of shaping the beams with the space-variant polarization in unbounded media is a superposition of the uniform propagating waves but for one little detail. The Fourier analysis is an appropriate approach only for unbounded media. However, such approach in the paraxial case cannot be applied to the wave beams in restricted media with a boundary surfaces where along with propagating waves exist non-radiative (*evanescent* [14]) waves.

One of such media is photonic crystal fibers that consist of a tightly compressed array of structured optical fibers. Their total birefringence is specified by the structure of a fiber stacking and local properties of single fibers [4–6]. The photonic crystals have two infeasible advantages: the wave guiding property and the controlled fiber coupling. The simplest model of the photonic crystal is a discrete circular fiber array [7].

In the following section we will try to uncover basic physical processes responsible for the structural stability of vortex constructions with half integer-order topological

charges in non-uniform media with a discrete space-variant birefringence and the rules to form them integer-order vortex beams.

## 2. THE DISCRETE FIBER ARRAY: NON-ADIABATIC FOLLOWING AND OPTICAL QUARKS

### A. Supermodes of anisotropic arrays

We will focus our attention on the discrete system of single mode birefringent fibers inserted into a transparent continuous medium with a uniform refractive index  $n_e$  lesser than that of the fiber core  $n_{co} < n_{cl}$  ([7–9]). Each optical fiber is located at the vertices of a regular  $N$ -gon as shown in Fig. 1. We will assume that the principal birefringence refractive indices  $n_e$  and  $n_o$  are such that  $n_e \approx n_o \approx n_{co}$ ,  $\delta n = n_{co} - n_{cl} \ll 1$  and  $\Delta n = n_e - n_o \ll \delta n$ .

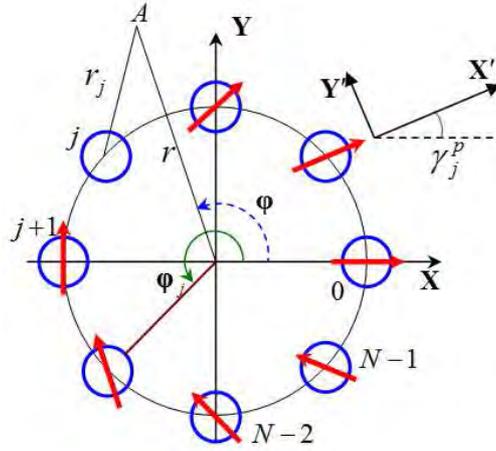


Fig. 1. Sketch of the birefringent fiber positions in the discrete circular fiber array

The principal point of our consideration is a distinctive distribution of the axes birefringence over the optical fibers: the birefringent directions at the  $j$ -th fiber makes an angle  $\gamma_j^p$  with the  $X$  axis of the global frame

$$\gamma_j^p = \frac{2\pi p j}{N} = 2\varphi_p j, \quad \varphi_p = \frac{\pi}{N} p, \quad (1)$$

where  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$  and  $p$  is a number of rotations of the fiber birefringence axis, i.e. the index  $p$  controls the position of the director of the anisotropic medium. The index  $p = (2n_p + 1)/2$ ,  $n_p = 0, 1, 2, \dots$  sets the characteristic index of the fiber array. The angle

$\varphi_j$  points out the position of the local fiber in the array. Besides our consideration is restricted to the case of even  $N$ .

The fibers in the array are coupled due to a mutual penetration of the guided fields inside neighboring fibers. The coupling coefficient  $a$  (with the dimension  $m^{-2}$ ) is general for all array and depends on the radius of the core. As a result, the coupled fiber modes form stable phase-locked field combinations (so-called super-modes) propagating with certain propagation constants. The field structure and the spectrum of their propagation constants are determined by the perturbation matrix [7]:

$$\hat{P} = a \cos 2\varphi_p \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

built through averaging over  $X', Y'$ - polarized fundamental modes located at individual fibers. The mode spectrum  $P_\nu$  is found from the eigenvalue equation

$$\hat{P}\mathbf{K}_\nu = P_\nu\mathbf{K}_\nu \quad (3)$$

For the components  $K_\nu^j$  of the eigenvector  $\mathbf{K}_\nu$  one has the following solution

$$K_\nu^j = \frac{\varepsilon^j}{\sqrt{N}} \exp(i j \varphi_{2m+1}), \quad (4)$$

The composite index  $\nu$  in (4) consists of two elements  $\nu = (\varepsilon, m)$  so that its first element assumes two values:  $\varepsilon = \pm 1$ ,  $m = 0, 1, \dots, N/2 - 1$  and the eigenvalue read as

$$P_\nu = \varepsilon a \cos 2\varphi_p \cos \varphi_{2m+1}. \quad (5)$$

The expression for supermodes are built on the basis of the components  $K_\nu^j$  and are given by

$$\mathbf{X}_\nu = \sum_{j=0}^{N-1} K_\nu^j G_j \mathbf{i}'_j, \quad \mathbf{Y}_\nu = \sum_{j=0}^{N-1} K_\nu^j G_j \mathbf{j}'_j, \quad (6)$$

where  $\mathbf{i}'_j, \mathbf{j}'_j$  are the unit vectors directed along  $X', Y'$  axes associated with the  $j$ - fiber. For the radial function we chose the Gaussian approximation [1]

$$G_j = E \exp\left(-\frac{r_j^2}{2w^2}\right), \quad (7)$$

where  $E$  is the field amplitude,  $w$  is the waist radius equal  $w = \rho_0 / \sqrt{2 \ln V}$ ,  $\rho_0$  is the radius of the fiber core,  $V = k \rho_0 \sqrt{2 \delta n}$ ,  $k$  is the wavenumber in free space.

The supermodes (51) are formed of fundamental modes of local fibers polarized along  $X', Y'$  local axes. The propagation constant  $\beta_v^{x,y}$  of the  $\mathbf{X}_v, \mathbf{Y}_v$  supermodes is given by [2]

$$\beta_v^{x,y} = \bar{\beta} + \frac{P_v}{2\bar{\beta}} \pm k \Delta n, \quad (8)$$

where  $\bar{\beta}$  stands for the scalar propagation constant of each local fiber. The signs ( $\pm$ ) denote the upper indices in  $\beta^{x,y}$ , correspondingly.

Further we will analyze the supermode structure (6) in the circularly polarized basis. Thus, in the general case the mode field of each local mode is elliptically polarized so that the contributions to the  $j$ -th local fiber make the right-hand circular polarization in the form of the phase factor  $\exp\left[i 2\pi j(m - n_p) / N\right]$  and the left-hand one in the form of the  $\exp\left[i 2\pi j(m + n_p + 1) / N\right]$  factor. When we consider the array as a whole, the  $j$  index changes from 0 to  $N - 1$  so that the total increments of the phases over the vertices of the array are  $2\pi(m - n_p)$  and  $2\pi(m + n_p + 1)$ . As we have in detail shown in [8] these increments from opposite circular polarizations set the *integer-order* vortex charge of the discrete fiber array. At first sight it seems that we can conclude that such fiber array *cannot* support the propagation of vortex modes with the fractional-order topological charges. However, we have showed in the first sub-section that fractional-order vortices can be formed by the superposition of the integer-order vortex modes. It proves also possible to form of the supermodes (4) the simple combinations that explicitly contain the circularly polarized components bearing the fractional-order vortex fields.

The basic point of our consideration lies in choosing the eigen modes bearing the fractional-order vortices. We can reach the desired results through combining the degenerated modes of the fiber array. In fact, the eigenvalues of the matrix  $\hat{P}$  in (2) are double-degenerate because  $P_{\epsilon, m} = P_{-\epsilon, N-2-m-1}$  (see eq. (5)) Since  $\mathbf{K}_{\epsilon, m}^* = \mathbf{K}_{-\epsilon, N/2-m-1}$  it follows that  $\mathbf{K}_v^*$  belongs to the same eigenvalues as  $\mathbf{K}_v$ . Further we have  $(\mathbf{K}_v^* \cdot \mathbf{K}_v) = 0$ , i.e. the vectors are linearly independent. Thus, we choose new set of eigenvectors in the form

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{K}_v - \mathbf{K}_v^*}{2i}, \quad \mathbf{e}_{-1} = \frac{\mathbf{K}_v + \mathbf{K}_v^*}{2}. \quad (9)$$

The new set of the eigenvectors can be conventionally divided into two parts with  $\varepsilon = 1$  for the  $\mathbf{e}_1$  eigenvectors and  $\varepsilon = -1$  for  $\mathbf{e}_{-1}$  ones. In accordance with eq. (2) we can obtain the alternative representation of the eigenvector components

$$\Gamma_v^j = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{cases} \sin(j \varphi_{2m+1}), & \varepsilon = 1 \\ \varepsilon^j \cos(j \varphi_{2m+1}), & \varepsilon = -1, \end{cases} \quad (10)$$

while the spectrum of the propagation constants remains defined by eq. (5) and the eigenvectors are recovered by replacement  $K_v^j \rightarrow \Gamma_v^j$  in eq. (6). On the one hand, the function  $\Gamma_v^j$  is responsible for a number of zeros in eigen modes of the circular fiber array, but, on the other hand, the function  $\Gamma_v^j$  lodges the field zeros synchronously with the birefringence directions on the concrete local fibers in the array. We will call the fields with  $\varepsilon = 1$  and  $\varepsilon = -1$  the odd  $\mathbf{E}_{o,m}$  and the even  $\mathbf{E}_{e,m}$  mode beams, respectively.

For example, at  $\varepsilon = 1$  for the amplitudes at the  $j$ -th fiber for circular components of the  $\mathbf{X}_v$  supermode we obtain  $\exp(-2i\varphi_p j) \sin(\varphi_{2n+1} j)$  in the right circular polarization and  $\exp(2i\varphi_p j) \sin(\varphi_{2n+1} j)$  in the left hand component. For the case  $\varepsilon = -1$ , the sines should be replaced multiplied by cosines multiple by the factor  $\varepsilon^{j-1}$ . In this case, the total phase increments in the components over the vertices of the array are  $2\pi p$ . In fact, the birefringence symmetry itself of the fiber array inserts the fractional-order topological charges  $p$  into supermode fields.

Following [3] we can write for the electric field components  $E_v^\pm$  of the eigen supermodes:

$$E_v^\pm(r, \varphi, z) = G \sqrt{N} \sum_{j=0}^{N-1} \Gamma_v^j \exp \left[ \frac{rr_0}{w^2} \cos(\varphi - 2\varphi_j) - 2ip\varphi_j - i\beta_v z \right], \quad (11)$$

where  $G = E \exp[-(r^2 + r_0^2)/(2w^2)]$ ,  $r_0$  is the array radius.

Typical field patterns on the background of the intensity distributions of the supermodes are shown in Fig. 2.

The pattern in Eq. 11, a has the C-shaped form where the electric field directed along the  $\mathbf{X}'$  direction of the birefringence axis in each local fiber (see also Fig. 1) ( $|1/2\rangle = E_{o,e}^+$ ). In the pattern in Fig. 2 b, the intensity distribution is the mirror-reflected intensity in Fig. 2 a.

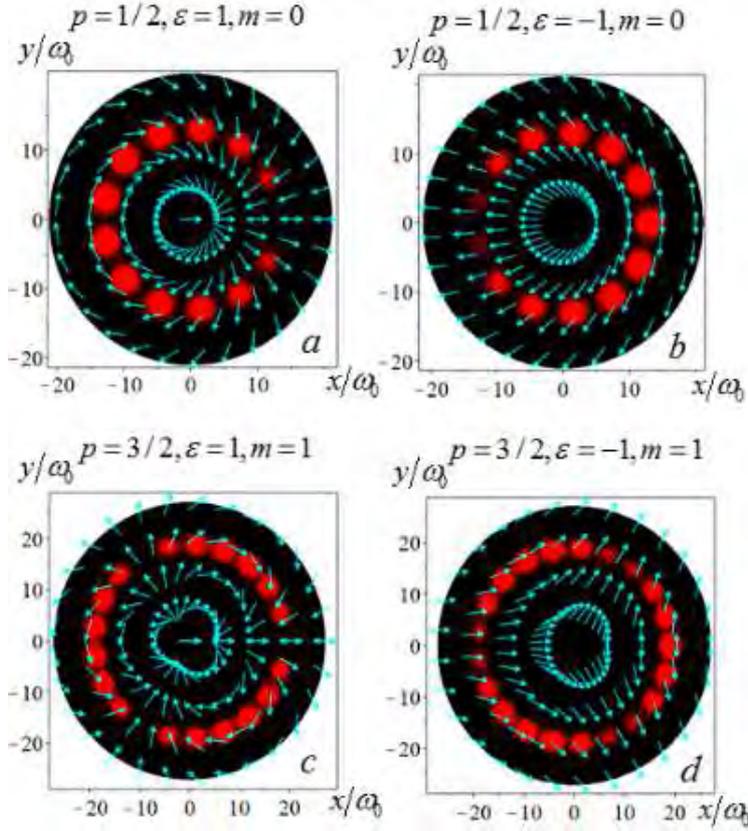


Fig. 2. The polarization and polarization distributions for the supermodes with  $p = \pm 3/2$

However, the electric fields in each local fiber are directed along the  $\mathbf{Y}'$  axis ( $|-1/2\rangle = E_{o,e}^-$ ) under the condition that the fiber array index  $p$  remains the same (the local birefringent directions do not change). In accordance with the eq. (8) the propagation constants differ from each other by the value  $\Delta\beta = \beta_{1,0} - \beta_{-1,0} = 2k\Delta n$ . The patterns in Fig. 2 c and d have the mirror-reflected positions of the field zeros ( $m=1$ ) but the fields in each local fiber are directed along the  $\mathbf{X}'$  ( $|3/2\rangle = E_{1,e}^+$ ) and  $\mathbf{Y}'$  ( $|-3/2\rangle = E_{1,e}^+$ ) axes, correspondingly. The difference between the propagation constants is  $\Delta\beta = \beta_{1,1} - \beta_{-1,1} = 2k\Delta n$ .

Curiously, the point  $x = y = 0$  around which the full path-tracing is accorded by the rotation of the linear polarization by  $\psi = \pi$  is not the singular point in a sense. The fact is that although the field has a space-variant linear polarization over all cross-section, the central point  $x = y = 0$  cannot be related to any well-known polarization singularities.

Typical polarization singularities (star, lemon or monstar) imply the presence of the circular polarization at the center [9].

It is important to note that the local linear polarization in each eigen supermode of the fiber array follows the birefringence axes in the local fibers. Such optical phenomenon has much in common with the phenomenon of the adiabatic following in a twisted birefringent medium (in particular, in liquid crystals) [11]. In contrast to this classical effect, the matching of the field polarization and the fiber birefringence in the discrete fiber array is realized by jumps from one fiber to the other due to the mode coupling from the direction of neighboring fibers. In keeping with the adiabatic following phenomenon in the continuous anisotropic media we call the above effect the *non-adiabatic following* that underlies shaping all eigen supermodes in the discrete circular fiber array.

**B. Is the “hidden phase” hidden indeed?**

The following point of our treatment is to study the phase composition in the fractional-order vortex mode components. We plotted the phase patterns using the expressions (11) for the components of the vortex-beams shown in Fig. 3.

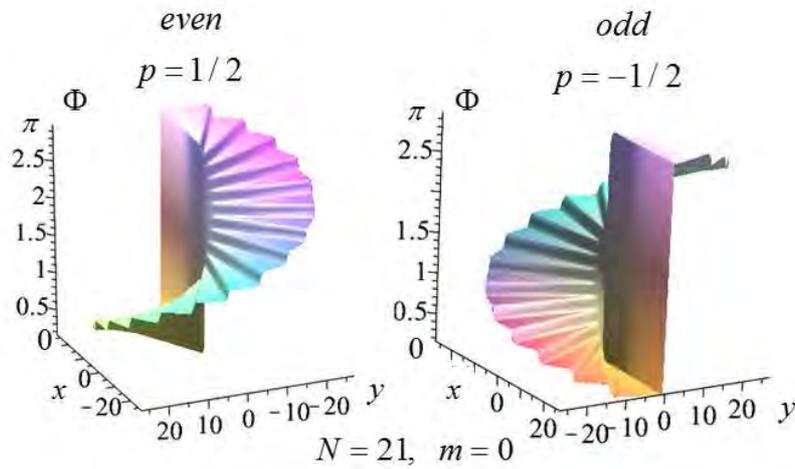


Fig. 3. The ladder-like phase patterns of the supermodes with  $p = \pm 1/2$

One observes the ladder-like structure of the phase for the topological charges  $p = \pm 1$  for the even and odd field components where the phase jump  $\Delta\Phi = \pi$  is present at the center. However, in accordance with our notion in sub-section the fractional-order vortex beam is an infinite sum of the integer-order vortex beams. It is the set of integer-order vortices that makes up the phase deficiency  $\Delta\Phi = \pi$ . But we do not observe any traces of the integer-order vortices in Fig. 3.

Perhaps the presented plotting does not feel the hidden vortices? To answer this question and analyze the fine phase structure we studied the interference of the fractional beam with the plane and spherical waves. The interference patterns in Fig. 4 are formed

by the superposition of the odd  $E_{o,0}^+$  component with the topological charge  $p = 1/2$  and the plane (a) and spherical (b) waves.

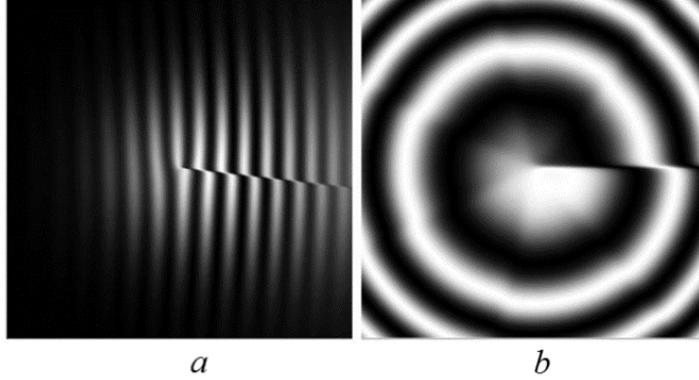


Fig. 4. The interferential patterns of the  $E_{o,0}^+$  component with  $p = 1/2$

We observe again the ladder-like structure in the phase construction. There is only one broken fork at the end of the cut of the interference fringes (Fig. 4 a) and the cut of the interference spiral (Fig. 4 b) attesting to the phase jump  $\pi$  in the phase structure that resembles the  $1/2$ -charged vortex imprinted in the field component. There are no any integer-order vortices in the patterns. Besides, such phase distribution preserves its structure when propagating along the fiber array in contrast to the fractional order vortex in free space that is ruined to an infinite number of integer-order vortices [12].

On the other hand, the overall phase increment of  $2\pi$ , as should have been for a physical meaningful field, is composed of a continuous phase increment of  $\pi$  value which we attribute to a  $1/2$  - vortex charge and of a phase  $\pi$  - jump at the cut of the wave front that preserves during the mode propagation in the wave guided medium. But such a treatment is only a simple explanation of the interference pattern without a successive physical mechanism that we will consider later on.

At first, let us show that the fractional-order vortex field component has no phase singularities. For this purpose, one can study the scalar optical current defined for a scalar field  $\Psi$  [13]

$$\mathbf{J} = i(\Psi \nabla_{\perp} \Psi^* - \Psi^* \nabla_{\perp} \Psi). \quad (12)$$

Taking into account eq. (11) and (12), one can obtain the expression for the transverse components of the optical current [13]

$$J_x - J_y \propto \sum_{n,m=0}^{N-1} \exp\left[2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_{m+n}) \cos(\varphi_{m-n}) / w^2\right] \sin(2p\varphi_{m-n}) \sin \varphi_n \sin \varphi_m \quad (13)$$

The summed expression in (13) is antisymmetric in  $m$  and  $n$  indices that gives  $J_x = J_y$ , i.e. the optical current does not contain vorticities. However, around the phase singularities the optical current should form the closed trajectories [10]. Therefore, the circularly polarized component of the fractional-order vortex field (11) does not contain phase singularities.

### C. Non-adiabatic following and optical quarks

The essential distinction between the continuous and discrete cases is that the smooth field distributions inside the optical fibers are broken by the gaps with other refractive indices and other field nature. In the continuous medium the only propagation wave participates in the transmitting process, at that the beam field of a unified infinite number of integer-order vortices at the initial plane scatters into an infinite number of self-dependent vortices. However, two waves – propagating and evanescent (arising at the refractive index gaps) influence the shaping supermodes of the discrete fiber array. Infinite number of the integer-order vortices in the supermode propagates as a single whole as if the vortices are glued together by the evanescent waves (the fiber coupling) along all length of the fiber array.

A part of the gluing between the fiber fields in the array plays *evanescent waves* [14] (a fiber coupling). It is the evanescent waves that are responsible for the *non-adiabatic following* effect shaping the extraordinary field structure different from that in other propagating fields in continuous media (e.g. in the conical diffraction processes in biaxial crystals and q-plates). The influence of the evanescent waves on the mode shaping falls into place if one imagines that the evanescent waves vanish in a blink. But then the wave guiding effect vanishes too and the supermode turns into an array of divergent light beams with a space-variant polarization so that we return to the q-plate case.

If we traverse around the array center at the radius  $r_0$  (Fig. 2a) then the inclination angle of the linear polarization in each local fiber changes by jumps from  $0$  to  $\pi$ . Such a polarization evolution is mapped on the *Poincare sphere* as a motion along the equator. As a result, each component of the supermode (11) with the topological charge  $p = 1/2$  acquires the *Pancharatnam–Berry phase* [15]  $\phi_{PB} = \pi$  that is of the “hidden phase” considered above.

Let us consider a diagram representation of transmission of the vortex field with integer-order topological charges through a fiber array with half-integer-order index  $p$  presented in Fig. 5.

*Case 1.* Let the circularly polarized field with the integer order vortex charge  $q = 1$  be formed at the input  $z = 0$  of the array with the index  $p = 1/2$ . Naturally, we must expand the vortex state  $|1\rangle$  over the eigen states  $|1/2\rangle$  and  $|-1/2\rangle$  propagating with their own propagation constants  $\beta_q$  and  $\beta_{-q}$  respectively.

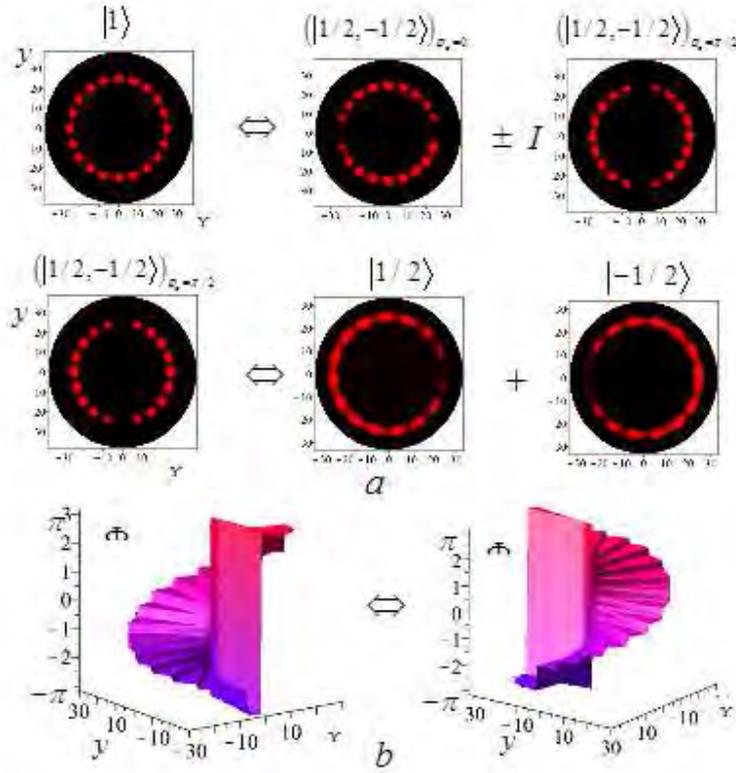


Fig. 5. Diagrams of the conversion of the  $|1/2\rangle$  and  $|-1/2\rangle$  supermode states

The first step to turn the initial vortex field into the topologically neutral one at the arbitrary array length consists in shaping the eigen supermodes  $|q\rangle$  and  $|-q\rangle$  into two the dipoles  $(|1/2, -1/2\rangle)_{\varphi_0=0}$  and  $(|1/2, -1/2\rangle)_{\varphi_0=\pi/2}$  rotated through an angle  $\varphi_0 = \pi/2$  with respect to each other (the first line in Fig. 5 a).

The second step is of their superposition with the phase shift  $\pi/2$

$$|1\rangle \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos \phi \\ i \sin \phi \end{pmatrix} \left[ (|1/2, -1/2\rangle)_{\varphi_0=0} + I (|1/2, -1/2\rangle)_{\varphi_0=\pi/2} \right], \quad (14)$$

where  $\phi = k\Delta n z / 2$ . However, the second term in eq. (14) is nothing but than the sum of the odd and even states

$$(|1/2, -1/2\rangle)_{\varphi_0=\pi/2} \Rightarrow (|1/2, -1/2\rangle)^o + (|1/2, -1/2\rangle)^e. \quad (15)$$

In turn, each topological dipole can be presented as a sum of two modes  $|1/2\rangle$  and  $|-1/2\rangle$  supermodes (the second line in Fig. 5 a). As far as the supermodes are transmitted

through the array with different propagation constants  $\Delta\beta = \beta_{1/2} - \beta_{-1/2}$  we will observe the conversion of these states at the beating length  $\Lambda = \pi / \Delta\beta$ . The conversion of the integer-order states  $|1\rangle e^{i\varphi} \leftrightarrow |-1\rangle e^{-i\varphi}$  in the form of changing the phase staircase  $\Phi(x, y)$  is shown in Fig. 5 b.

*Case 2.* Let the transverse electric field ( $|TE\rangle$  mode state) be incident on the array input. The input field is of a superposition of two vortex constructions  $|1\rangle e^{i\varphi}$ ,  $|-1\rangle e^{-i\varphi}$  that have been regarded in Case 1. The state conversion develops in the frameworks of the above written diagram. We will observe the consecutive alternation of the  $|TE\rangle$  and  $|TM\rangle$  (transverse magnetic) states at the half-beating length  $L_{b/2} = \frac{2\pi}{k\Delta n}$  shown in Fig. 5

whereas the conversion of the  $|1/2\rangle \leftrightarrow |-1/2\rangle$  states take place at the length  $L_{b/4} = \frac{\pi}{k\Delta n}$ .

The detailed calculation shows ([1–8]) that if the projections of the electric field at the array input  $z = 0$  onto the  $X', Y'$  local axes of the  $j$ -th fiber are  $I_j$  and  $L_j$ , the amplitudes of the circularly polarized components  $A_j^\pm$  at the  $\alpha$ -th fiber in the global coordinates  $X, Y$  can be written as

$$A_\alpha^\pm = \sum_{v,j} K_v^{j*} K_v^\alpha \left( I_j e^{i\varphi} \quad iL_j e^{-i\varphi} \right) e^{i\frac{\Delta\beta^2}{\beta} z} e^{i\gamma_\alpha^p}, \quad (16)$$

Let a right polarized field with the amplitude

$$A_j^+ \propto \sin n\varphi_j \exp(-i2j\varphi_q), \quad (17)$$

where the indices  $n$  – odd and  $q$  – half-integer, be incident onto the fiber array with the index  $p$ . Then the field amplitude at the  $z$  – section of the array is

$$A^\pm \propto G\sqrt{N} \sum_{\alpha=0}^{N-1} A_\alpha^\pm \exp\left[\frac{rr_0}{w^2} \cos(\varphi - 2\varphi_\alpha)\right] \times \left( \begin{array}{l} \cos\phi e^{-i\alpha\varphi_{2q}} \\ i\sin\phi e^{i\alpha\varphi_{4p-2q}} \end{array} \right) \sin\left(\alpha\varphi_n - \frac{\alpha z}{\beta} \cos\varphi_{2p} \sin\varphi_{2p-2q} \sin\varphi_n\right). \quad (18)$$

In fact, the obtained equation is the analog of the expressions for the expansion into a series of the field with a fractional-order vortex fields over the integer-order ones in a continuous medium but for the fields in the discrete anisotropic media. When propagating the initial right hand polarized field with the fractional charge  $q$  induces the left hand polarized component with the fractional charge  $2p - q$  modulated by the factor  $\sin\phi$  while the right-hand polarization has the factor  $\cos\phi$ . Otherwise, we observe the energy

conversion along the array between the wave fields with the orthogonal circular polarizations but with different fractional topological charges.

Thus, the discrete fiber array with the inherent space-variant anisotropy is a particular medium for translating and preserving light fields with the fractional-order optical vortices. Any other fields bearing the integer-order vortices propagate through the array only as a superposition of the fractional-order eigen supermodes. After the fiber array, the supermode decays into many integer-order vortex beams.

From this point of view, we can regard the fractional vortex states  $|p\rangle$  as *optical quarks* (predicted in [13]) similar to that in the Standard Model of particle physics, in particular, in the Gell-Mann's quark model of the hadrons [12]. The optical quarks in a free state can exist only inside the media with the inherent symmetry of the permittivity tensor. Out of the medium the optical quarks break up into the guided modes of the new optical structure.

### CONCLUSION

We found that the space-variant birefringence with one singular point is inherent in the fractional-order vortex-beams at the crystals input under the condition of the conical diffraction. Typical scenario of the beam propagation here evolves in such a way that the topological charges of the fractional-order vortices in the circularly polarized components of vector beams differ from each other in one unit. The difference between the propagation constants of the components is independent on the value. It means that the biaxial crystal does not feel distinction between the fractional- and integer-order vortex beams. The same processes we observe also in the so-called q-plates. Moreover the polarization states at the beam cross-section are distributed by the complex way far from that of the birefringent directions in the crystal. Naturally the fractional-order vortex beams in the biaxial crystals and q-plates are also unstable one under propagation.

Quite another situation occurs in the discrete circular fiber array. The space variant birefringent axes in the fiber array are exactly recreated at the field cross-section. Such a polarization distribution is well preserved along all fiber array length in the form of a supermode. The shaping of the array eigen supermode is carried out due to the non-adiabatic following of the polarization states between the modes of the neighboring fibers when a linear polarization of different parts of the field follows strictly the birefringent axes of the local fibers. Thus, the fractional topological charge of the supermode is specified by the space-variant birefringence of a fiber array. A part of the "glue" of a great number of integer-order vortices into a single fractional-order one plays the evanescent waves between the local fibers.

We revealed a remarkable effect of shaping the integer-order vortex in a fiber array. Each integer-order vortex is of a superposition of four fractional order vortices with different propagation constants so that the integer-order mode decays and gathers together again along the array. We came to call them the optical quarks owing to resemblance of their behavior with that of quarks in the Standard Model of particle physics. The optical quarks can exist only inside the medium with an appropriate structural symmetry. Outside

the medium, the optical quarks are transformed into a cloud of standard integer-order vortices.

#### References

1. L. Marrucci, E. Karimi, S. Slussarenko, B. Piccirillo, E. Santamato, E. Nagali, F. Sciarrino, *J. Opt.* **13**, 064001 (2011).
2. S. Slussarenko, A. Murauski, T. Du, V. Chigrinov, L. Marrucci, E. Santamato, *Opt. Express* **19**, 4085–4090 (2011).
3. F. Cardano, E. Karimi, L. Marrucci, Corrado de Lisio, E. Santamato, *Opt. Express* **21**, 8815–8820 (2013).
4. T. Ritari, H. Ludvigsen, M. Wegmuller, M. Legré, N. Gisin, J. R. Folkenberg, M. D. Nielsen, *Opt. Express* **12**, 5943–5939 (2004).
5. A. Bezryadina, D. Neshev, A. Desyatnikov, J. Young, Z. Chen, Yu. Kivshar, *Opt. Express* **14**, 8317–8327 (2006).
6. S. Lee Yong, G. Lee Chung, Jung Yongmin, Oh Myoung-kyu, Kim Soeun, *J. Opt. Soc. Korea* **20**, 567–574 (2016).
7. C. N. Alexeyev, A. V. Volyar, M. A. Yavorsky, *Phys. Rev. A* **80**, 063821-12 (2009).
8. C. N. Alexeyev, A. O. Pogrebnaya, G. Milione, M. A. Yavorsky, *J. Opt.* **18**, 025602 (2016).
9. M. R. Dennis, *Opt. Commun.* **213**, 201–221 (2002).
10. M. V. Berry, *J. Opt. A* **11**, 094001 (2009).
11. A. Yariv, P. Yeh, *Optical waves in Crystals* (John Wiley & Sons, 1984), 102 p.
12. S. M. Wong, *Introductory Nuclear Physics* (Wiley Interscience Publication, 1998) 355 p.
13. A. V. Volyar, *Ukr. J. Phys. Opt.* **14**, 31–42 (2013).
14. Fornel F. de, *Evanescent waves* (Springer, Heidelberg, 2001) 111 p.
15. M. V. Berry, “Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes”, in *Proceedings of the Royal Society A* **392**, 45–57 (1984).

---

## ПРОСТЫЕ ФОТОННЫЕ КРИСТАЛЛЫ КАК СРЕДСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ ОПТИЧЕСКИХ КВАРКОВ

**Воляр А. В., Алексеев К. Н., Егоров Ю. А., Акимова Я. Е.\***

*Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия*

\*E-mail: [yana.akimova.1994@mail.ru](mailto:yana.akimova.1994@mail.ru)

В настоящей работе показано, что в двухосных кристаллах при условии конической дифракции дробные вихри неустойчивы. Мы также продемонстрировали, что круговая волновая решетка с пространственно-вариантным двулучепреломлением является подходящей средой для вихревых пучков дробного порядка. В таких массивах супермоды могут иметь полуцелые порядковые вихри в круговых компонентах. Решающая роль в формировании таких супермод играет ускорение фазы синхронизации отдельных волоконных мод в сочетании с туннелированием состояний поляризации между анизотропными волокнами в массиве. Мы показали, что приращение фазы целочисленного заряда в супермоду дробного порядка состоит из двух вкладов фазы с половиной целого заряда. Неявный вклад фазы с полуцелой суммой (или «скрытая фаза») обусловлен изменением знака амплитудных коэффициентов в компонентах поля, соответствующих разрезам волнового фронта. Мы также провели сравнение скрытых и гидродинамических фаз

в сверхтекучих дробных вихрях с аналогичными фазами в супермодах дробного порядка.

**Ключевые слова:** оптически вихри, дробный топологический заряд, супермоды дробного порядка, скрытая фаза, массив оптических вихрей.

**Список литературы**

1. Spin-to-orbital conversion of the angular momentum of light and its classical and quantum applications / L. Marrucci, E. Karimi, S. Slussarenko, B. Piccirillo, E. Santamato, E. Nagali, F. Sciarrino // J. Opt., 2011. Vol. 13. 064001.
2. Tunable liquid crystal q-plates with arbitrary topological charge / S. Slussarenko, A. Murauski, T. Du, V. Chigrinov, L. Marrucci, E. Santamato // Opt. Express. 2011. Vol. 19. P. 4085–4090.
3. Generation and dynamics of optical beams with polarization singularities / F. Cardano, E. Karimi, L. Marrucci, Corrado de Lisio, E. Santamato // Opt. Express. 2013. Vol. 21, P. 8815–8820.
4. Experimental study of polarization properties of highly birefringent photonic crystal fibers / T. Ritari, H. Ludvigsen, M. Wegmuller, M. Legré, N. Gisin, J. R. Folkenberg, M. D. Nielsen // Opt. Express. 2004. Vol. 12, P. 5943–5939.
5. Observation of topological transformations of optical vortices in two-dimensional photonic lattices / A. Bezryadina, D. Neshev, A. Desyatnikov, J. Young, Z. Chen, Yu. Kivshar // Opt. Express. 2006. Vol. 14. P. 8317–8327.
6. Highly birefringent and dispersion compensating photonic crystal fiber based on double line defect core / Yong S. Lee, Chung G. Lee, Yongmin Jung, Myoung-kyu Oh, Soeun Kim // J. Opt. Soc. Korea. 2016. Vol. 20. P. 567–574.
7. Alexeyev C. N., Volyar A. V., Yavorsky M. A., Linear azimuthons in circular fiber arrays and optical angular momentum of discrete optical vortices // Phys. Rev. A. 2009. Vol. 80. 063821-12.
8. Propagation of light in a circular array of elliptical fibres / C. N. Alexeyev, A. O. Pogrebnaya, G. Milione, and M. A. Yavorsky // J. Opt. 2016. Vol. 18. 025602.
9. Dennis M. R., Polarization singularities in paraxial vector fields: morphology and statistics // Opt. Commun. 2002. Vol. 213. P. 201–221.
10. Berry M. V., Optical currents // J. Opt. A. 2009. Vol. 11. 094001.
11. A. Yariv, P. Yeh, Optical waves in Crystals // John Wiley & Sons. 1984. 102 p.
12. Wong S. M., Introductory Nuclear Physics // 2<sup>nd</sup> edition, Wiley Interscience Publication. 1998. 355 p.
13. Volyar A. V., Do optical quarks exist in free space? A scalar treatment // Ukr. J. Phys. Opt. 2013. Vol. 14. P. 31–42.
14. Fornel F. de, Evanescent waves // Springer, Heidelberg, 2001. 111 p.
15. Berry M. V., Quantal Phase Factors Accompanying Adiabatic Changes // Proceedings of the Royal Society A. 1984. Vol. 392, P. 45–57.

*Поступила в редакцию 11.11.2017 г. Принята к публикации 22.12.2017 г.  
Received November 11, 2017. Accepted for publication December 22, 2017*

УДК 535

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА  
ДЕМУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЯ ПО ДЛИНАМ ВОЛН, ПОСЛЕ  
ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛОКНА С  $V = 3.8$ , УПЛОТНЕННОГО ВИХРЕВЫМИ  
ПУЧКАМИ С  $l = \pm 1$  И  $s = \pm 1$**

*Халилов С. И.\* , Ильясова А. А., Рыбась А. Ф.*

*Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия*

*\*E-mail: [server.khalilov.94@mail.ru](mailto:server.khalilov.94@mail.ru)*

Мы показали возможность увеличения количества информационных каналов в волоконно-оптической линии связи, используя вихревые пучки с топологическими зарядами  $l = \pm 1$ , состоянием поляризации  $s = \pm 1$  и двумя длинами волн. А также с помощью тонкой структуры поля волокна, идентифицировали каждый из входных пучков по состоянию поляризации и топологическому заряду, после прохождения волокна.

**Ключевые слова:** орбитальный угловой момент, оптический вихрь, топологический заряд, сингулярность.

**PACS:** 42.81.Uv

**ВВЕДЕНИЕ**

Скорость передачи данных по волоконно-оптическим линиям связи приближается к максимально возможным для традиционных методов мультиплексирования сигнала в ВОЛС [1–5].

Орбитальный угловой момент (ОУМ) вихревого пучка, который в поперечном сечении имеет спиральную фазовую структуру  $\exp(il\varphi)$ , где  $\varphi$  – поперечный азимутальный угол,  $l$  – величина ОУМ вихревого пучка, которая теоретически не ограничена и дает новую степень свободы в увеличении количества каналов в волокне (ОУМ относится к пространственной фазе пучка, а не к состоянию поляризации, который связан со спиновой компонентой пучка). Вихревые пучки с различными величинами ОУМ взаимно ортогональны, что позволяет мультиплексировать и демультиплексировать их по величинам ОУМ, с низким уровнем перекрестных помех.

Предложенная нами экспериментальная схема, позволяет: мультиплексировать и демультиплексировать сложный сигнал в оптическом маломодовом волокне. Также анализировать поле на выходе из маломодового волокна методом Стокс-поляриметрии, для различных комбинаций складываемых сигналов в зависимости от знаков и величин топологических зарядов оптических вихрей и направленности циркулярно-поляризованных компонент.

## 1. МОДЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТЫ

Для исследования процесса демультимплексирования вихревого сигнала после маломодового волокна по длинам волн, использовалась установка Рис. 1.

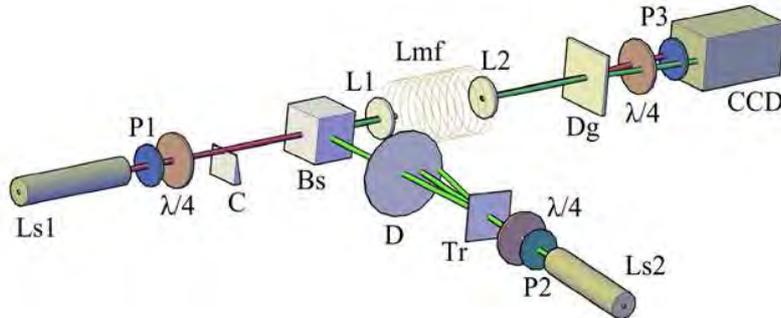


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: ( $Ls_1, Ls_2$ ) – источник света, ( $P$ ) – поляризатор, ( $\lambda/4$ ) – четверть-волновая пластинка, ( $C$ ) – покровное стекло, ( $Tr$ ) – фазовый транспарант, ( $D$ ) – диафрагма, ( $Bs$ ) – делительный кубик, ( $L$ ) – микробиъектив, ( $Fmf$ ) – маломодовое оптическое волокно, ( $Dr$ ) – дифракционная решетка, ( $CCD$ ) – камера

Источник света  $Ls_1$  с длиной волны  $\lambda_1 = 0.6328$  мкм, имеющий правую компоненту поляризации  $s = +1$ , проходя через покровное стекло  $C$  [6], дифрагирует, образуя «цепочку», состоящую из оптических вихрей. Регулируя диаметром пучка, можно выделить единственный оптический вихрь с топологическим зарядом  $l = +1$  (Рис. 1 а, б). Далее источником света  $Ls_2$  с длиной волны  $\lambda_2 = 0.5328$  мкм, имеющий левую компоненту поляризации  $s = -1$ , проходя через фазовый транспарант, дифрагирует, образуя угловой спектр, состоящий из оптических вихрей.

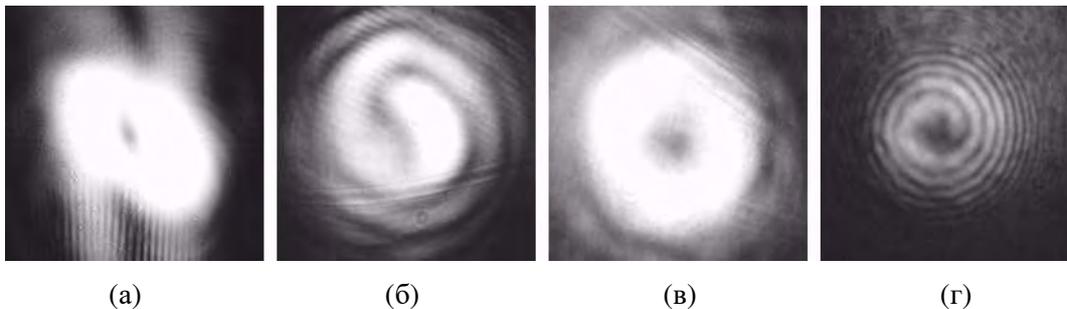


Рис. 2. (а), (в) распределение интенсивности; (б), (г) интерферограмма оптического вихря с Гауссовым полем. (а), (б) оптический вихрь, полученный на покровном стекле с топологическим зарядом  $l = +1$ ; (в), (г) оптический вихрь, полученный с помощью фазового транспаранта, с топологическим зарядом  $l = -1$

С помощью диафрагмы  $D$  выделяем вихрь, с топологическим зарядом  $l = -1$  (Рис. 2 б, в). Далее, два вихревых пучка мультиплексируем на делительном кубике  $Bs$  и с помощью линзы  $L$ , соосно проецируем в торец маломодового оптического волокна  $Fmf$ .

В эксперименте использовалось изотропное волокно с градиентным показателем преломления, имеющий круглую сердцевину. Волноводный параметр  $V$  такого волокна, для излучения с длиной волны  $\lambda_1 = 0.6328$  мкм составил  $V_1 = 3.8$ , а для  $\lambda_2 = 0.5328$  мкм –  $V_2 = 4.37$ . При таких двух значений волноводного параметра, в волокне реализуется двенадцатимодовый режим [7–9]. Для фильтрации не вихревых модовых комбинаций оптическое волокно заранее навивалось на кварцевую трубку. Из-за геометрической формы спирали не вихревые моды, в частности фундаментальная мода, смещаются с сердцевины к периферии волокна, формируя в сердцевине вихревые комбинации [10–13].

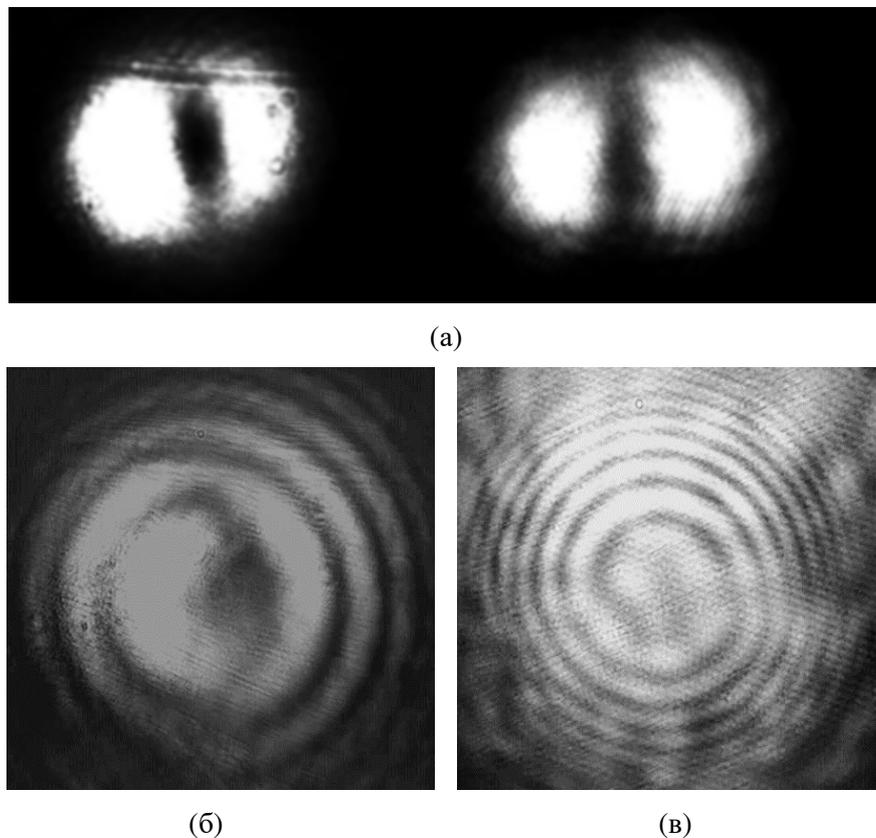
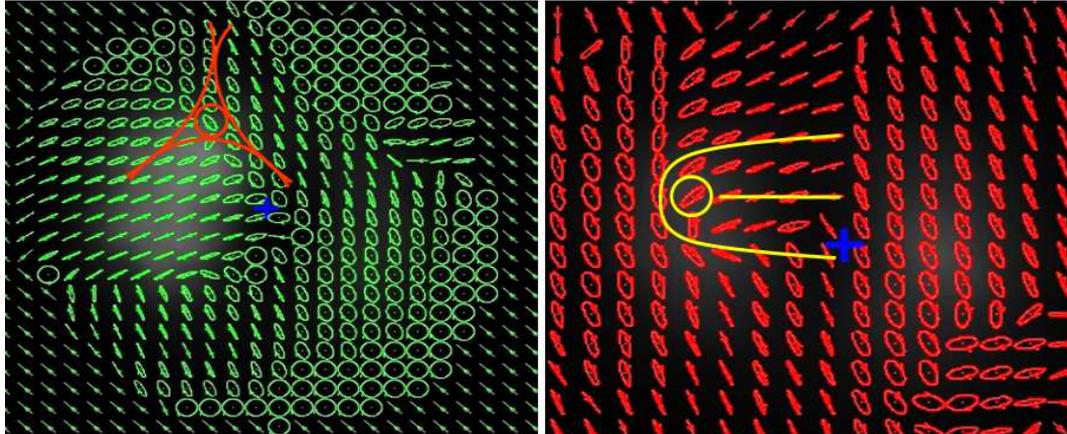


Рис. 3. (а) распределение интенсивности поля волокна после демультиплексирования по длинам волн (слева для  $\lambda_2 = 0.5328$  мкм, справа для  $\lambda_1 = 0.6328$  мкм); (б), (в) интерферограмма соответствующих полей волокна с Гауссовым полем

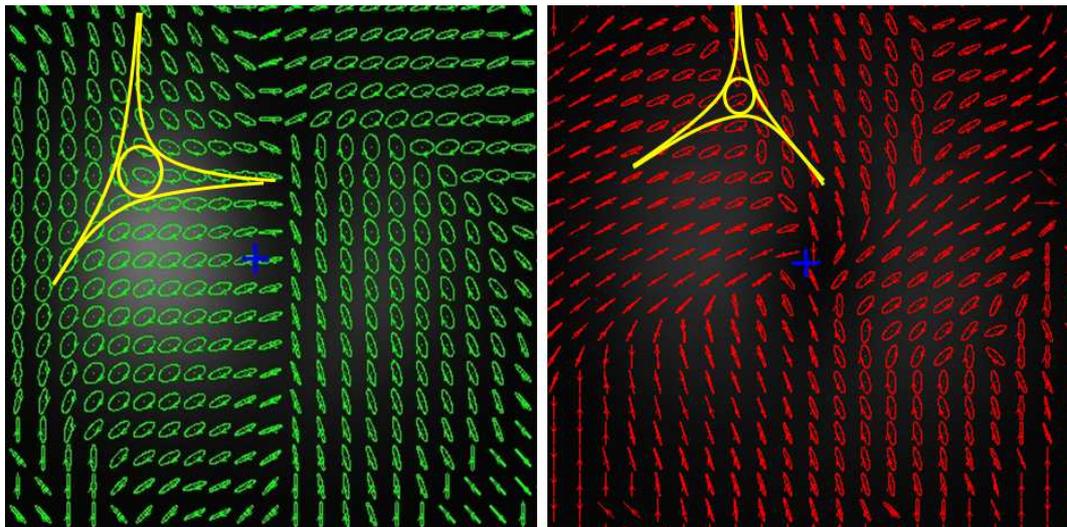
После прохождения волокна, поле излучения с помощью дифракционной решетки  $Dg$ , разделяется на два канала с различными длинами волн и результат фиксирует  $CCD$  камера Рис. 3 (а).

Для измерения величины топологического заряда, дополнительно был собран интерферометр Маха-Цендера. Как видно из интерферограмм, величина и знак топологического заряда поля волокна Рис. 3 (б), (в), совпадает с величиной и знаком топологического заряда входного пучка Рис. 2 (б), (г).



(а)  $\lambda_2 = 0.5328$  мкм.,  $s = -1$ ,  $l = -1$

$\lambda_1 = 0.6328$  мкм.,  $s = +1$ ,  $l = +1$



(б)  $\lambda_2 = 0.5328$  мкм.,  $s = +1$ ,  $l = -1$

$\lambda_1 = 0.6328$  мкм.,  $s = +1$ ,  $l = -1$

Рис. 4. Векторная карта распределения поляризации поля волокна, после демультимплексирования по длинам волн: (а) первый и (б) второй эксперимент с различными входными параметрами пучка

Далее для идентификации каждого из пучков поля волокна по величинам топологического заряда и состояния поляризации, строим векторную карту поляризации методом Стокс-поляриметрии [14].

Как видно из тонкой структуры поля волокна после разделения по длинам волн Рис. 4: поляризационная сингулярность типа «лимон» присутствует у входного пучка с величиной топологического заряда  $l = +1$ , а сингулярность типа «звезда» присутствует у пучков с величиной топологического заряда  $l = -1$ , а знак этих С-точек указывает на состояние поляризации входного пучка.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами экспериментально была продемонстрирована возможность мультиплексирования и после прохождения маломодового волокна – демultipлексирования по длинам волн циркулярно поляризованных вихревых пучков с величиной топологического заряда  $l = \pm 1$ . Методом Стокс-поляриметрии проведен анализ тонкой поляризационной структуры поля волокна. Показана возможность идентификации каждого из входных сигналов по длинам волн и орбитальным угловым моментам. Обнаружено, что в поле излучения на выходе из маломодового оптического волокна имеется С-точка, характеризующая знак циркулярной поляризации входного пучка. Также, величина топологического заряда исходного пучка, попавшего на входной торец волокна, соответствует С-точки топологического индекса.

Как было показано, данная методика поддерживает технологию спектрального WDM уплотнения и позволяет увеличить количество каналов в нынешней волоконно-оптической линии связи минимум в 4 раза.

### Список литературы

1. Willner A., Wang J. and Huang H. A different angle on light communications / *Science*. 2012. Vol. 337. P. 655.
2. 12-core fiber with one ring structure for extremely large capacity transmission / S. Matsuo, Y. Sasaki, T. Akamatsu, I. Ishida, K. Takenaga, K. Okuyama, K. Saitoh, M. Kosihba // *Opt. Express*. 2012. Vol. 20. P. 28398.
3. Terabit-scale orbital angular momentum mode division multiplexing in fibers / N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A. Willner, S. Ramachandran // *Science*. 2013. Vol. 340. P. 1545.
4. Richardson D., Fini J. and Nelson L. Space-division multiplexing in optical fibres // *Nat. Photonics*. 2013. Vol. 7. P. 354.
5. Terabit free-space data transmission employing orbital angular momentum multiplexing / J. Wang, J. Yang, I. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur, A. Willner // *Nat. Photonics*. 2012. Vol. 6. P. 488.
6. Izdebskaya Ya., Shvedov V., Volyar A. Singular Beam Diffraction by the Edge of a Dielectric Medium // *Ukr. J. Phys. Opt.* 2004. Vol. 5, №3. P. 96.
7. Dislocation reactions and topological birefringence of degenerated combined fields of low-mode fiber / T. Fadeyeva, A. Volyar, V. Zhilaitis, M. Soskin // *Proc. of SPIE*. Vol. 3904. P. 112.
8. Combined optical vortices in low-mode optical fibers / T. Fadeyeva, A. Volyar, V. Zhilaitis, M. Soskin // *Proc. of SPIE*. Vol. 3904. P. 124.
9. Volyar A., Fadeyeva T., Shvedov V. Generic singular beams in an optical fiber and free space, its applications // *Proceedings of SPIE*. Vol. 4403. P. 153.
10. Alexeyev C. N., Lapin B. P., Yavorsky M. A. Optical vortices and topological phase in strongly anisotropic coiled few-mode optical fibers // *J. Opt. Soc. Am. B*. 2007. Vol. 24. No. 10. P. 2666.

11. Alexeyev C. N., Lapin B. P., Yavorsky M. A. Optical Vortices and Topological Effects in Coiled Fibers with Combined Anisotropy // *Optics and Spectroscopy*. 2011. Vol. 110, No. 3. P. 456.
12. Alexeyev C. N., Yavorsky M. A. Propagation of Optical Vortices in Coiled Weakly Guiding Optical Fibers // *Optics and Spectroscopy*. 2007. Vol. 102, No. 5. P. 754.
13. Alexeyev C. N., Yavorsky M. A. Berry's phase for optical vortices in coiled optical fibres // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. 2006. Vol. 9 (1), P. 6.
14. Патент на полезную модель 168752 РФ, (51) МПК G01J 4/04 (2006.01). Устройство для определения и исследования распределения поляризации / А. Ф. Рыбась, А. О. Погребная; заявитель и патентообладатель ФГАОУ ВО Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского. № 2016131640; заявл. 01.08.2016; опубл. 17.02.2017, Бюл. № 5.

**EXPERIMENTAL STUDY OF THE PROCESS OF DEMULTIPLEXING THE  
WAVELENGTHS, AFTER PASSING THROUGH A FIBER WITH  $V = 3.8$ ,  
COMPACTED VORTEX BEAMS WITH  $l = \pm 1$  AND  $s = \pm 1$**

*Halilov S. I.\* , Ilyasova A. A., Rubass A. F.*

*Institute of Physics and Technology, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

\*E-mail: [server.khalilov.94@mail.ru](mailto:server.khalilov.94@mail.ru)

We have shown the possibility of increasing of the number of information channels in the fiber-optic communication line, using vortex beams with topological charges  $l = \pm 1$ , the state of polarization  $s = \pm 1$  and two wavelengths. Also, using the fine structure of the field of fibers, each of the input beams was identified by polarization state and topological charge after passing through the fiber.

**Keywords:** optical angular momentum, optical vortex, topological charge, singulars.

**References**

1. A. Willner, J. Wang and H. Huang, *Science* **337**, 655–656 (2012).
2. S. Matsuo, Y. Sasaki, T. Akamatsu, I. Ishida, K. Takenaga, K. Okuyama, K. Saitoh and M. Koshiba M., *Opt. Express* **20**, 28398–28408 (2012).
3. N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A. Willner and S. Ramachandran, *Science* **340**, 1545–1548 (2013).
4. D. Richardson, J. Fini, L. Nelson, *Nat. Photonics* **7**, 354–362 (2013).
5. J. Wang, J. Yang, I. Fazal, N. Ahmed, Y. Yan, H. Huang, Y. Ren, Y. Yue, S. Dolinar, M. Tur and A. Willner, *Nat. Photonics* **6**, 488–496 (2012).
6. Ya. Izdebskaya, V. Shvedov, A. Volyar., *Ukr. J. Phys. Opt.* **5**, №3, 96–99 (2004).
7. T. Fadeyeva, A. Volyar, V. Zhilaitis, M. Soskin, *Proc. of SPIE* **3904**, 112–123 (1999).
8. T. Fadeyeva, A. Volyar, V. Zhilaitis, M. Soskin, *Proc. of SPIE* **3904**, 124–130 (1999).
9. A. Volyar, T. Fadeyeva, V. Shvedov, *Proc. of SPIE* **4403**, 153–161 (2001).
10. C. N. Alexeyev, B. P. Lapin, M. A. Yavorsky, *J. Opt. Soc. Am. B* **24**, No. 10 (2007).
11. C. N. Alexeyev, B. P. Lapin, M. A. Yavorsky, *Optics and Spectroscopy* **110**, No. 3, 456–463 (2011).
12. C. N. Alexeyev, M. A. Yavorsky, *Optics and Spectroscopy* **102**, No. 5, 754–759 (2007).
13. C. N. Alexeyev, M. A. Yavorsky, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics* **9** (2007).
14. A. F. Rubass, A. O. Pogrebная. RF Patent, No. 168752, Byull., No. 5 (2017).

*Поступила в редакцию 14.11.2017 г. Принята к публикации 22.12.2017 г.  
Received November 14, 2017. Accepted for publication December 22, 2017*

**УДК 535.012.2**

## **ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КЛАСТЕРНОЙ СТРУКТУРЫ ВОДЫ С ПОМОЩЬЮ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

**Шостка В. И.<sup>1</sup>, Шостка Н. В.<sup>2</sup>, Доненко И. Л.<sup>1</sup>**

<sup>1</sup> *Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия*

<sup>2</sup> *Департамент научно-исследовательской деятельности, Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия*

\*E-mail: [yshostka@yandex.ru](mailto:yshostka@yandex.ru)

Вода представляет собой неупорядоченную жидкость, водородные связи в которой являются короткоживущими. В работе применены оптические методы исследования изменений, происходящих в структуре воды. Исследованы кластерные картины структуры поверхности капли воды. Показано, что вода обладает уникальными свойствами, связанными с наличием порядка в различных ее состояниях вследствие кооперативного эффекта структурного и динамического изменений в неоднородной сетке водородных связей.

**Ключевые слова:** кластеры, фрактально-кластерная структура воды, ассоциаты.

**PACS:** 42.25.Fx

### **ВВЕДЕНИЕ**

В последние годы возрастает интерес к вопросам исследования структуры воды как со стороны биологов, химиков или медиков, но также и со стороны физиков.

Вода, широко распространенный растворитель, обладает необычными свойствами. Благодаря межмолекулярным водородным связям она по своим свойствам отличается от других гидридов и имеет ассоциативную структуру и является в структурном отношении очень чувствительной системой, в которой имеется огромное количество метастабильных состояний. Вопрос о наличии структуры воды и водных растворов уже перешел в плоскость изучения влияния изменения структуры воды и водных растворов на различные технологические процессы, а также на уровень здоровья человека [1–8]. Отсутствие же строгих представлений о структуре воды и ее организации на молекулярном уровне тормозит развитие методов не только количественного анализа, но и качественной оценки структурированности воды.

Особенности строения воды можно объяснить наличием порядка в ее различных состояниях, который является следствием кооперативного эффекта структурно изменяющейся неоднородной сетки водородных связей. Вследствие чего структуру воды можно связать с наличием водородных связей и образованием гидратированных ионов, формирующих сложную трехмерную сетку. Тетраэдрический ближний порядок скорее всего определяется  $sp^3$  гибридизацией электронных орбит. Число возможных способов соединения тетраэдрических молекул воды друг с другом и стабильных конфигураций на их основе огромно, в связи с чем нестационарные процессы приводят к образованию кластеров.

Отдельные молекулы, соединенные водородными связями, объединяются в ассоциаты или кластеры, размеры которых зависят от разных условий, прежде всего, от температуры [9–11].

Одним из важных свойств поверхностного слоя воды является изменение коэффициентов прохождения и преломления лазерного излучения, благодаря которым появляется возможность "видеть" кластеры, определять их размеры и количество [12–13]. Считается, что время существования устойчивых нанокластеров в объемной фазе воды не превышает  $10^{-10}$  с. Находящиеся в этой фазе кластеры с большим числом молекул ( $n \leq 150$ ) непрерывно образуются и исчезают [14]. Попадая из объемной фазы в приповерхностную, короткоживущие кластеры стабилизируются в ней, и время их жизни существенно возрастает.

Стабилизация кластеров в приповерхностном слое воды связана с высокой структурной упорядоченностью слоя. По мере удаления от поверхности раздела вглубь жидкости степень упорядоченности понижается. На некотором расстоянии от поверхности упорядоченность соответствует состоянию жидкости в объемной фазе.

Свойства жидкой воды, которые обуславливают растворение веществ, являются результатом движений молекул воды в постоянно меняющейся структуре сетки водородных связей. Полное представление о динамике сетки водородных связей необходимо для построения адекватных моделей воды, например, для расчета химических реакций.

До последнего времени не получено полной картины структурных образований в воде. В публикациях приводятся лишь обрывочные данные о возможных видах ассоциатов, образуемых молекулами воды.

Одной из сложных задач является экспериментальная расшифровка структуры воды и доказательство существования стабильных структурных ее элементов. Т.к. вода чувствительна к внешним воздействиям, то для изучения эволюции ее свойств необходимо применять адекватные неразрушающие методы исследования.

**Целью данной работы** является применение оптических методов исследования изменений структуры воды, как неупорядоченной жидкости, которая, несмотря на то, что водородные связи в ней являются короткоживущими, способна к самоорганизации вследствие образования новых водородных связей и кооперативных эффектов. В результате образуются ассоциаты три-, тетра-, пента-, и гексамеров, а также и свободных молекул воды.

### ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ СТРУКТУРЫ ВОДЫ

Для визуализации вышеописанных структур в приповерхностном слое бидистиллированной воды, который отличается от «объемной» воды коэффициентом преломления света, в настоящей работе нами был применен метод лазерной интерферометрии, особенность которого заключалась в использовании амплитудно-фазовой модуляции расширенного лазерного пучка при прохождении через слой капли воды [15].

Капля исследуемой воды помещалась в треугольную ячейку, показанную на рис. 1. Луч от гелий-неонового лазера ЛГН-208 А с длиной волны  $\lambda = 0,6328$  мкм,

мощностью 2,0 мВт, диаметром пучка лазерного излучения на расстоянии 40 мм порядка 0,6 – 0,8 мм, отраженный от плоского зеркала, пропускаясь через объектив микроскопа (x8) и фокусируясь на каплю исследуемой воды, сформированной в треугольной ячейке на предметном стекле, расположенном на определенном расстоянии от объектива микроскопа.

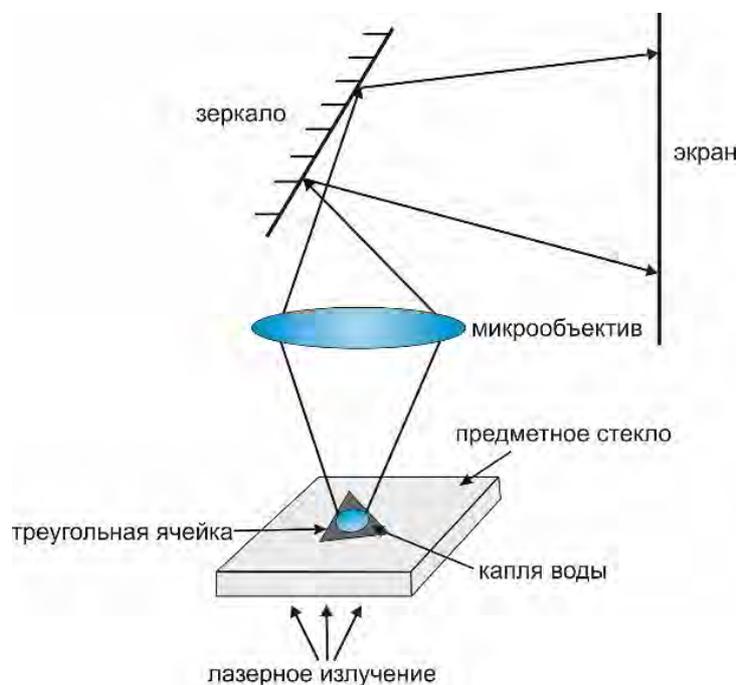


Рис. 1. Схема экспериментальной установки по визуализации фрактально-кластерной структуры бидистиллированной воды в лазерном излучении

Оптическую картину при помощи второго зеркала проецировали на экран размером 300 x 500 мм, так чтобы проекция изображения занимала большую часть экрана. Для фиксирования визуальных картин эволюции структуры воды использовали цифровую фотокамеру высокого разрешения, которая фиксировала фрактальные срезы приповерхностного слоя при прохождении лазерного излучения до фокуса и после фокуса сферической водной линзы в течение испарения капли (рис. 2).

Далее фрагменты полученных изображений увеличивали примерно в 10 – 20 раз и для лучшей визуализации изображение делали черно-белым, изменяя только яркость и контрастность.

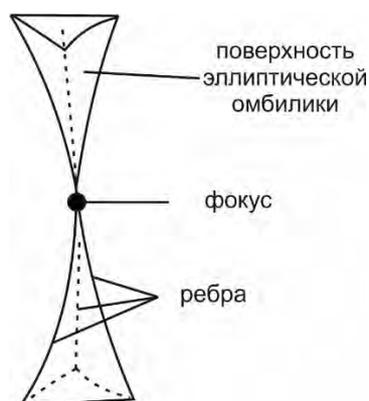


Рис. 2. Вид поверхности эллиптической омбилики вблизи фокуса системы «водяная» линза – микрообъектив, фрактальные срезы которой исследованы в данной работе

Динамика изменений фрактально-кластерной структуры поверхностного слоя бидистиллированной воды представлена на рис. 3.

На рисунке 4 приведена фотография высохшей водяной капли. Видно, что она не имеет ни пространственных, ни плоскостных кластерных структур. Присутствуют только огибающие каустические поверхности, на которых прослеживаются краевые дифракционные линии.

Таким образом, полученные картины эволюции структуры бидистиллированной воды достаточно убедительно свидетельствуют в пользу того, что в жидкой воде присутствуют весьма устойчивые полимерные структуры, что вполне согласуется с мнением американского химика Кена Джордана, предложившим в 1993 году варианты устойчивых «квантов» воды, состоящих из 6 ее молекул [14]. Интересной особенностью этой модели является то, что из нее автоматически следует, что свободно растущие кластеры воды, должны обладать шестилучевой симметрией, что наглядно подтверждается результатами проведенных нами экспериментов.

Образование кластеров, наличие их неупорядоченного броуновского движения и влияние на них различных факторов приводят к разрушению водородных связей. В результате при их взаимодействии могут образовываться радикалы  $\text{OH}\cdot$  и  $\text{H}_3\text{O}^+$  ( $\text{H}_5\text{O}_2^+$ ), которые приводят к образованию атомарного водорода и новых кластеров.

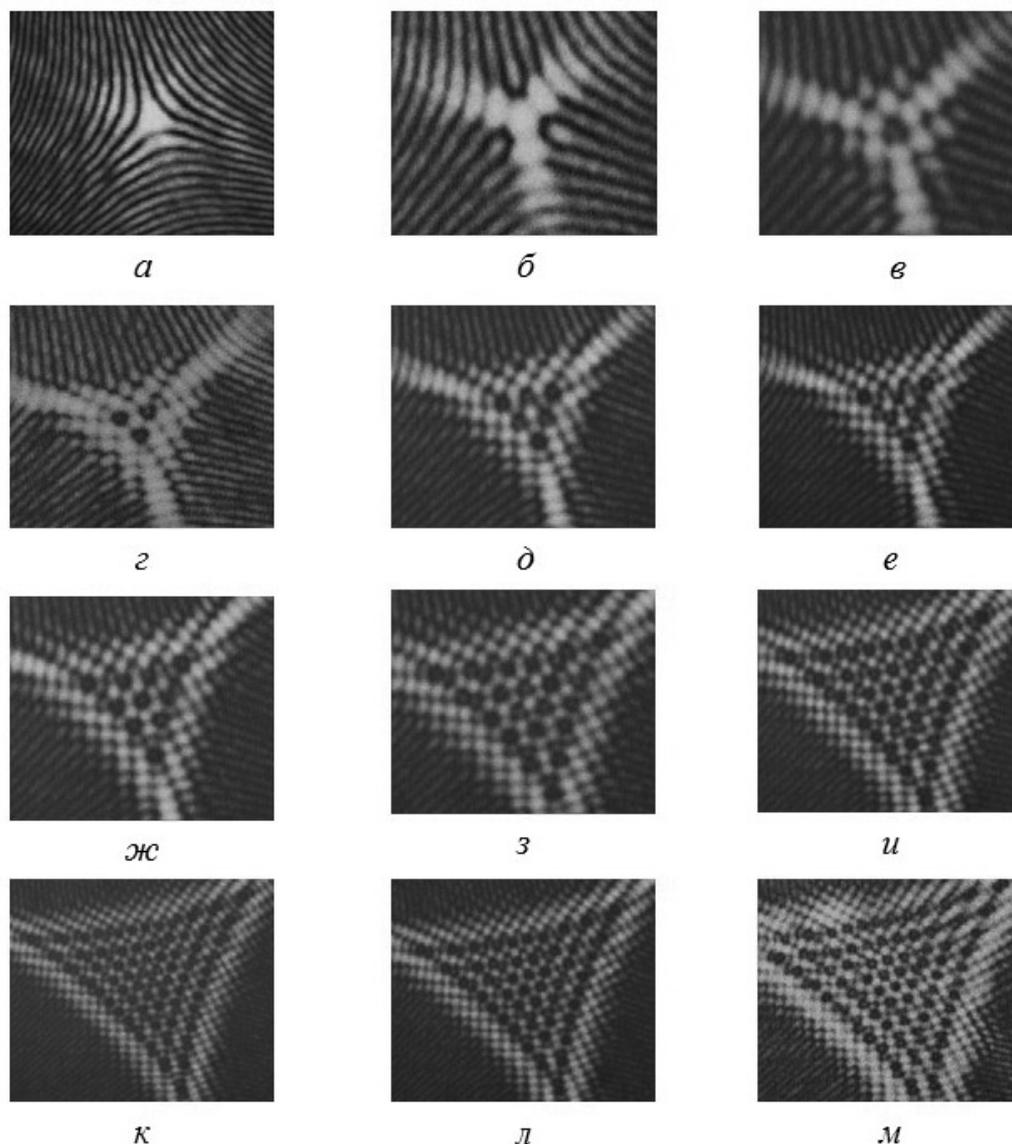


Рис. 3. Эволюция фрактально-кластерной структуры бидистиллированной воды при прохождении лазерного излучения через каплю воды вблизи фокуса системы «водяная» линза – микрообъектив при ее высыхании (время высыхания  $t = 2,8-3,0$  минуты): *a* – ассоциаты тетраэдрической формы; *б, в* – три- и гексамеры; *д – м* – отображения пространственных и плоскостных фрактально-кластерных структур, сформированных в результате кооперативного эффекта структурного и динамического изменений в неоднородной сетке водородных связей: в основном проявляются гексациклы  $(H_2O)_6$ , L-кластеры  $-(H_2O)_{20}$  и T-кластеры  $-(H_2O)_{27}$ , которые соответствуют моделям, приведенным в работе [14]

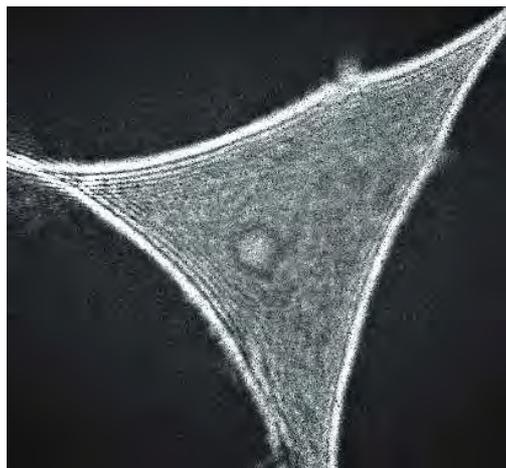


Рис. 4. Вид водяной капли после высыхания

Г. А. Домрачев и Д. А. Селивановский предложили гипотезу существования механохимических реакций радикальной диссоциации воды [16], исходя из того, что жидкая вода является динамичной нестабильной полимерной системой. Подобно реакциям в полимерах при механическом воздействии на воду энергия, необходимая для разрыва связей Н - ОН, локализуется в микрообъемах структуры воды по схеме :  $(\text{H}_2\text{O})_n (\text{H}_2\text{O}\dots\text{H}\dots\text{OH}) (\text{H}_2\text{O})_m \rightarrow \cdot + e (\text{H}_2\text{O})_{(n+1)} (\cdot\text{H})+(\cdot\text{OH})(\text{H}_2\text{O})_m$ , где  $e$  – неспаренный электрон. Поскольку диссоциация молекул воды и реакции радикалов и происходят в ассоциированном состоянии жидкой воды, радикалы могут иметь длительные промежутки жизни (десятки секунд и более), что и подтверждает существование в воде достаточно устойчивых симметричных кластерных структур (рис. 3).

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате проведенных исследований подтверждено и наглядно показано, что вода обладает уникальными свойствами, которые связаны с наличием порядка в ее разнообразных состояниях вследствие кооперативного эффекта структурного и динамического изменений в неоднородной сетке водородных связей.

Структура поверхностного слоя капли воды формируется кластерами, кластеры построены из молекул воды, которые удерживаются водородными связями. В кластере может быть различное количество молекул, которые могут образовывать ассоциаты различной формы. Обнаружено (рис. 3), что, группируясь, они образуют тетраэдры молекул воды ( $a$ ), из которых в процессе образования кластеров формируются разнообразные пространственные и плоскостные структуры ( $b - m$ ). Как видно из полученных фрактальных картин кластеры представляют собой микрообъемы, которые содержат в своей структуре как ассоциированные молекулы воды, так и фрагменты, обладающие развитой структурой с сильно выраженной упорядоченностью, а также пустотами между ними.

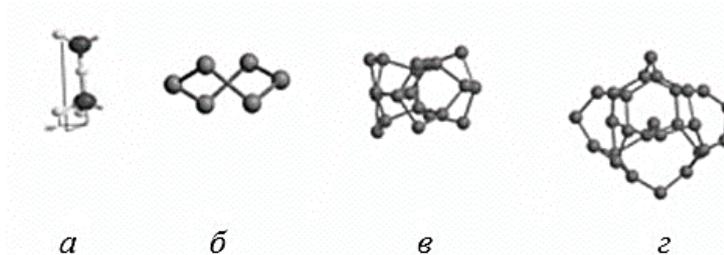


Рис. 5. Модели кластерной структуры воды: *a* –ди-мер, *б* – гексацикл ( $\text{H}_2\text{O}$ )<sub>6</sub>, *в* – ( $\text{H}_2\text{O}$ )<sub>20</sub> или L-кластер, *г* – ( $\text{H}_2\text{O}$ )<sub>27</sub> или Т-кластер [14].

Таким образом можно констатировать, что структура воды является фрактальной, в ней молекулы воды объединены в кластеры с определенным их переменным количеством. Кластеры чередуются с пустотами («дырками»). Основным структурным элементом кластеров является тетраэдры, которые образуют довольно устойчивые симметричные сетки. Иерархия модулей «фрактальной» структуры воды соответствует моделям, представленным на рис. 5. Первичными структурами, в которых могут являться ди-меры, три-меры, гексациклы..., олигомеры, из которых в дальнейшем образуются циклические структуры в основном пяти- и шестичленные, которые формируют различные пространственные многогранники [14, 15]. Наиболее привлекательными являются многогранники, имеющие ось симметрии пятого порядка (додекаэдр и икосаэдр), так как это объясняет многие свойства воды, например, ее текучесть, способность образовывать газовые гидраты и др. [9]

В практическом плане результаты настоящего исследования могут служить основой для новых простых по исполнению лазерных методов оперативного определения структуры бидистиллированной воды, применяемой в качестве растворителя в различных жидких растворах от лекарственных веществ до пищевых продуктов.

*Авторы выражают благодарность доценту Лапаевой С. В. и заведующему лабораториями кафедры общей физики Вершицкому В. И. за ценные советы и помощь в проведении эксперимента.*

#### Список литературы

1. How well do we know the structure of liquid water? / L. Pusztai // Physica B: Condensed Matter. 2000. Vol. 276. P. 419–420.
2. Структуры сеток водородных связей и динамика молекул воды в конденсированных водных системах / В. П. Волошин, Е. А. Желиговская, Г. Г. Маленков, Ю. И. Наберухин, Д. Л. Тытик // Российский Химический Журнал. 2001. Т. XLV. № 3.
3. Антонченко В. Я., Давыдов А. С., Ильин В. С. Основы физики воды. Киев : Наукова думка, 1991. 669 с.
4. Зацепина Г. Л. Физические свойства и структура воды. М. : Изд-во Московского университета, 1998. 185 с.

5. Solution and proton motion in ice-like structures / V. Ya. Antonchenko, A. S. Davydov, A. V. Zolotariuk // *Phys. Status Solidi (B)*. 1985. Vol. 115. No. 2. P. 631–640.
  6. Water structure theory and some implications for drug design / T. H. Plumridge, R. D. J. Waigh // *Pharm. Pharmacol.* 2002. Vol. 54(9). P. 1155–1179.
  7. The structure of nature's solvent: Water / S. D. Colson, Jr. T. H. Dunning // *Science*. 1994. Vol. 265, 5168. P. 43–44.
  8. The spatial structure in liquid water / P. G. Kusalik, I. M. Svishchev // *Science*. 1994. Vol. 265, 5176. P. 1219–1221.
  9. Обоснование континуальной модели структуры воды методом ИК-спектроскопии / А. П. Жуковский // *Ж. структ. химии*. 1981. Т. 22. С. 56–63.
  10. Фрактальные структуры в дисперсных системах / В. И. Ролдугин // *Успехи химии*. 2003. Т. 72. № 10. С. 931–959.
  11. Машинное моделирование микрокластеров воды / Е. Н. Бродская, А. И. Русанов // *Исследование воды и водных систем физическими методами*. Л. : Изд. Лен. унив., 1989. Вып. 6. С. 29–42.
  12. Кузьмичева А. Н., Потапов А. В. Исследование влияния структурных особенностей водных систем на фотофизические процессы. М. : Изд-во МГУ, 2003.
  13. Современные представления о структуре и электропроводности воды. / А. К. Запольский, Е. Д. Першина, А. И. Герасимчук, К. А. Каздобин // *Науково-технічні вісті*. № 3(13). 2013. С. 24–40.
  14. Гидрофобная модель структуры ассоциатов молекул воды / С. В. Зенин // *Журнал физ. химии*. 1994. Т. 68. С. 634–641.
  15. Формирование кластерных наноструктур в воде / В. И. Шостка, Н. В. Шостка, И. Л. Доненко // *Сб. : Взгляд молодых на проблемы региональной экономики – 2017. Материалы Всероссийского открытого конкурса студентов вузов и молодых исследователей*. Тамбов, 2017. С. 41–44.
  16. Роль нейтральных дефектов в структурной химии жидкой воды / Г. А. Домрачев, Д. А. Селивановский, Е. Г. Домрачева, Л. Г. Домрачева, А. И. Лазарев, П. А. Стунжас, С. Ф. Шишканов, В. Л. Вакс // *Ж. Структ. Хим.* 2004. Т. 45. № 4. С. 670–677.
- 

## VISUALIZATION OF THE CLUSTER WATER STRUCTURE WITH LASER RADIATION

*Shostka V. I.<sup>1</sup>, Shostka N. V.<sup>2</sup>, Donenko I. L.<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Institute of Physics and Technology, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

<sup>2</sup>*Scientific research department, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

\*E-mail: [vshostka@yandex.ru](mailto:vshostka@yandex.ru)

In recent years, there has been growing interest in the study of the structure of water both from biologists, chemists or physicians, but also from physicists. The absence of strict ideas about the structure of water and its organization at the molecular level inhibits the development of methods not only for quantitative analysis, but also for a qualitative assessment of water structurization. Optical methods for studying the changes taking place in the structure of water are used in this work. Fractal patterns of clusters of the waters structure are investigated. It is shown that water has unique properties that are associated with the presence of order in its various States due to the cooperative effect of structural and dynamic changes in the heterogeneous network of hydrogen bonds. The structure of the surface layer of water droplets formed by the clusters formed from water molecules held by hydrogen bonds.

**Keywords:** clusters, fractal-cluster structure of water, associates.

## References

1. L. Pusztai, *Physica B: Condensed Matter* **276**, 419–420 (2000).
2. V. P. Voloshin, E. A. Zheligovskaya, G. G. Malenkov, Yu. I. Naberuhin, D. L. Tytik, *Rossiyskiy Khimicheskiy Zhurnal* **XLV** (3), (2001) [in Russian].
3. V. YA. Antonchenko, A. S. Davydov, V. S. Il'in, *Osnovy fiziki vody* [Basics of water physics] (Kiev: Naukova dumka, 1991) [in Russian].
4. G. L. Zatssepina *Fizicheskiye svoystva i struktura vody* [Physical properties and water's structure] (M.: Izd-vo Moskovskogo universiteta, 1998) [in Russian].
5. V. Ya. Antonchenko, A. S. Davydov, A. V. Zolotariuk, *Phys. Status Solidi (B)* **115**, No. 2, 631–640 (1985).
6. T. H. Plumridge, R. D. J. Waigh, *Pharm. Pharmacol* **54(9)**, 1155–1179 (2002).
7. S. D. Colson, Jr. T. H. Dunning, *Science* **265**, No 5168, 43–44 (1994).
8. P. G. Kusalik, I. M. Svishchev, *Science* **265**, No 5176, 1219–1221 (1994).
9. A. P. Zhukovskiy, *Journal of Structural Chemistry* **22**, 56–63 (1981) [in Russian].
10. V. I. Roldugin, *Uspekhi khimii* **72**, No 10, 931–959 (2003) [in Russian].
11. Ye. N. Brodskaya, A. I. Rusanov, *L.: Izd. Len. univ.* **6**, 29–42 (1989) [in Russian].
12. A. N. Kuz'micheva, A. V. Potapov *Issledovaniye vliyaniya strukturnykh osobennostey vodnykh sistem na fotofizicheskiye protsessy* [Investigation of the influence of structural features of water systems on photophysical processes] (M.: M.: Izd-vo MGU, 2003) [in Russian].
13. A. K. Zapol'skiy, Ye. D. Pershina, A. I. Gerasimchuk, K. A. Kazdobin, *Scientific and Technical news* **3**, No. 13, 24–40 (2013) [in Russian].
14. S. V. Zenin, *Russian Journal of Physical Chemistry* **68**, 634–641 (1994) [in Russian].
15. Formirovanie klasternykh nanostruktur v vode. / V. I. Shostka, N. V. Shostka, I. L. Donenko in *Abstracts Vzglyad molodyh na problemy regionalnoy ekonomiki – 2017*. (Materialy Vserossiyskogo otkrytogo konkursa studentov vuzov i molodyh issledovateley. Tambov, 2017) p. 41–44. [in Russian].
16. G. A. Domrachev, D. A. Selivanovskiy, Ye. G. Domracheva, L. G. Domracheva, A. I. Lazarev, P. A. Stunzhas, S. F. Shishkanov, V. L. Vaks, *Journal of Structural Chemistry* **45**, No. 4, 670–677 (2004) [in Russian].

Поступила в редакцию 21.10.2017 г. Принята к публикации 22.12.2017 г.  
Received October 21, 2017. Accepted for publication December 22, 2017

УДК 535.137

## ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЫ ПОЛОСКОВОГО ВОЛНОВОДА

Перескоков В. С., Дзедолик И. В.\*

Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В.И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия

\*E-mail: [igor.dzedolik@cfuv.ru](mailto:igor.dzedolik@cfuv.ru)

Теоретически исследованы линейные и нелинейные плазмон-поляритонные моды металлического полоскового волновода, расположенного на диэлектрической подложке. Рассмотрены непрерывный и импульсный режимы.

**Ключевые слова:** полосковый волновод, плазмон-поляритонные линейные и нелинейные моды, плазмон-поляритонный импульс.

**PACS:** 73.20.Mf

### ВВЕДЕНИЕ

Плазмон-поляритоны (ПП) привлекают внимание исследователей в связи с задачами передачи сигналов и управления электромагнитными полями оптических частот в ПП-устройствах, создания оптических процессоров, спазеров, других устройств и элементов плазмонной техники [1–7]. Сигналы в ПП-устройствах передаются между элементами плазмонной цепи по полосковым волноводам, расположенным на диэлектрической подложке и окруженным диэлектрической средой [8–12].

Цель работы – теоретически исследовать процесс генерации мод ПП в металлическом полосковом волноводе при непрерывном и импульсном возбуждении в оптическом диапазоне в линейном и нелинейном режимах и сравнить их свойства. Анализ свойств линейных и нелинейных мод полоскового волновода позволит выбрать требуемые режимы работы ПП-элементов.

### 1. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЫ ПОЛОСКОВОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим формирование линейных ПП мод в металлическом полосковом волноводе с размерами поперечного сечения  $2a \times 2b$  с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon_1, \mu_1$ , расположенного на подложке с параметрами  $\epsilon_3, \mu_3$ , и окруженного с трех сторон средой с параметрами  $\epsilon_2, \mu_2$ , (рис. 1). Полосковый волновод в рассматриваемом случае симметричен относительно оси  $x$ , но асимметричен относительно оси  $y$  из-за разных диэлектрической и магнитной проницаемостей сред 2 и 3. Диэлектрическая проницаемость металла на оптических частотах является комплексной величиной с отрицательной действительной частью  $\epsilon_M = -\epsilon'_M + i\epsilon''_M$ . Поэтому постоянные распространения мод плазмон-поляритонов  $\beta = \beta' + i\beta''$  также будут комплексными величинами. Их мнимые части

характеризуют затухание ПП вдоль оси  $z$ , т.е. определяют длину распространения ПП в металлическом слое  $L = 1/2\beta''$  [4].

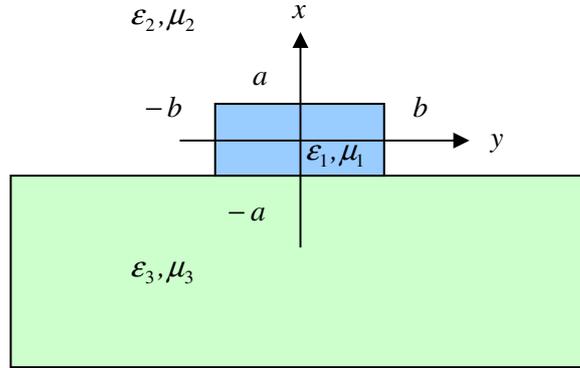


Рис. 1. Полосковый волновод на диэлектрической подложке

Диэлектрические проницаемости сред имеют вид [6]:  

$$\varepsilon_M(\omega) = 1 + \frac{\omega_{IM}^2}{\Omega_{\perp M}^2 - \omega^2 - i\Gamma_M \omega} - \frac{\omega_{eM}^2}{\omega^2 + i\omega_M \omega}$$
 в металле, и  

$$\varepsilon_D(\omega) = 1 + \frac{\omega_{ID}^2}{\Omega_{\perp D}^2 - \omega^2 - i\Gamma_D \omega} + \frac{\omega_{eD}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_D \omega}$$
 в диэлектрической среде, где  $\omega_0$  –

электронная резонансная частота,  $\Omega_{\perp}$  – резонансная частота кристаллической решетки,  $\omega_l^2 = 4\pi e^2 N_l / m_l$  – ионная плазменная частота,  $\omega_e^2 = 4\pi e^2 N_e / m_e$  – электронная плазменная частота,  $\omega_M, \Gamma_M, \Gamma_D$  – частоты релаксации в металле и диэлектрике.

Компоненты электрического и магнитного векторов ПП удовлетворяют уравнениям Максвелла  $\nabla \times \mathbf{H} = c^{-1} \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -c^{-1} \mu \partial \mathbf{H} / \partial t$ . Выражения для поперечных компонент поля ПП  $E_x, E_y$  и  $H_x, H_y$ , пропорциональных  $\sim \exp(i\beta z - i\omega t)$ , в средах 1, 2 и 3 имеют вид (Приложение А)

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i}{q_m^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_0 \mu_m \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), & H_x &= -\frac{i}{q_m^2} \left( k_0 \varepsilon_m \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ E_y &= \frac{i}{q_m^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - k_0 \mu_m \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & H_y &= \frac{i}{q_m^2} \left( k_0 \varepsilon_m \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q_m^2 = k_0^2 \varepsilon_j \mu_j - \beta^2$ ,  $m = 1, 2, 3$ . Продольные компоненты поля ПП  $E_z$  и  $H_z$  удовлетворяют уравнению

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + q_m^2 \right) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия для тангенциальных компонент поля ПП должны выполняться во всех точках верхней и нижней, правой и левой границ полоскового волновода, в том числе, в точках  $x = \pm a$ ,  $y = 0$ , и  $x = 0$ ,  $y = \pm b$  (рис. 1). В областях 2 и 3 компоненты полей должны убывать при удалении от границ волновода, поэтому представим продольные компоненты в области 2 в виде  $E_{2z} = A_2 \exp(-\alpha_2 x)$ ,  $H_{2z} = B_2 \exp(-\alpha_2 x)$  при  $x \geq a$ , и  $E_{3z} = A_3 \exp(\alpha_3 x)$ ,  $H_{3z} = B_3 \exp(\alpha_3 x)$  при  $x \leq -a$ ;  $E_{2z} = A_2 \exp(-\alpha_2 y)$ ,  $H_{2z} = B_2 \exp(-\alpha_2 y)$  при  $y \geq b$ , и  $E_{2z} = A_2 \exp(\alpha_2 y)$ ,  $H_{2z} = B_2 \exp(\alpha_2 y)$  при  $y \leq -b$ . Для выполнения граничных условий во всех точках границ выбираем четное решение уравнений (2) для продольных компонент мод (Приложение А)

$$\begin{aligned} E_z &= A_1 \cos(\kappa x) \cos(\gamma y), \\ H_z &= B_1 \cos(\kappa x) \cos(\gamma y), \end{aligned} \quad (3)$$

тогда поперечные компоненты мод (1) будут иметь вид

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i}{q_1^2} \{ \beta \kappa A_1 \sin(\kappa x) \cos(\gamma y) + k_0 \mu_1 B_1 \cos(\kappa x) \sin(\gamma y) \}, \\ E_y &= -\frac{i}{q_1^2} \{ \beta \gamma A_1 \cos(\kappa x) \sin(\gamma y) - k_0 \kappa \mu_1 B_1 \sin(\kappa x) \cos(\gamma y) \}, \\ H_x &= \frac{i}{q_1^2} \{ k_0 \gamma \epsilon_1 A_1 \cos(\kappa x) \sin(\gamma y) - \beta \kappa B_1 \sin(\kappa x) \cos(\gamma y) \}, \\ H_y &= -\frac{i}{q_1^2} \{ k_0 \kappa \epsilon_1 A_1 \sin(\kappa x) \cos(\gamma y) + \beta \gamma B_1 \cos(\kappa x) \sin(\gamma y) \}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\kappa^2 + \gamma^2 = q_1^2$ .

Характеристические уравнения для поперечных компонент волновых векторов  $\kappa$  и  $\gamma$  четных мод получаем из граничных условий на стенках волновода (Приложение А)

$$\frac{\cos(\kappa a)}{\cos(\gamma b)} = \exp[\alpha_2(b-a)], \quad (5)$$

$$\frac{\mu_2 \alpha_2 q_3^2}{\mu_3 \alpha_3 q_2^2} = \exp[(\alpha_2 - \alpha_3)a]. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) нужно дополнить характеристическими уравнениями, полученными из уравнений (2) в волноводе

$$k_0^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 - \gamma^2 - \beta^2 = 0, \quad (7)$$

и в областях 2 и 3

$$k_0^2 \varepsilon_2 \mu_2 + \alpha_2^2 - \beta^2 = 0, \quad (8)$$

$$k_0^2 \varepsilon_3 \mu_3 + \alpha_3^2 - \beta^2 = 0. \quad (9)$$

Постоянную распространения моды в волноводе найдем из уравнения (7)  $\beta = (k_0^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 - \gamma^2)^{1/2}$ . Исключая постоянную распространения  $\beta$  из уравнений (8) и (9), получаем поперечные декременты волновых векторов в областях 2 и 3

$$\alpha_2 = [k_0^2 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2) - \kappa^2 - \gamma^2]^{1/2}, \quad (10)$$

$$\alpha_3 = [k_0^2 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_3 \mu_3) - \kappa^2 - \gamma^2]^{1/2}. \quad (11)$$

Решения системы уравнений (7)–(11) определяют значения компонент волновых векторов мод  $\kappa$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и  $\beta$  соответствующей моды. Волноводная мода исчезает при равенстве нулю постоянной распространения  $\beta = (k_0^2 \varepsilon_1 \mu_1 - q^2)^{1/2} = 0$ , то есть при  $q_1 = k_0 (\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2}$ , откуда находим частоту отсечки моды  $\omega_c = cq (\varepsilon_1 \mu_1)^{-1/2}$ , где  $q_1 = (\kappa^2 + \gamma^2)^{1/2}$ .

## 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЫ ПОЛОСКОВОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим формирование нелинейных мод плазмон-поляритонов в полосковом волноводе (рис. 1). Уравнение для электрического вектора, полученное из уравнений Максвелла, имеет вид  $\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) + k_0^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} = 0$ , где  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_m + 4\pi\chi_{(3)}(E_x^* E_x + E_y^* E_y + E_z^* E_z)$  – нелинейная диэлектрическая проницаемость сред 1, 2 и 3,  $\chi_{(3)}$  – диэлектрическая восприимчивость третьего порядка,  $\mu \rightarrow \mu_m$ ,  $\mathbf{E} \sim \exp(-i\omega t)$ . Полагаем, что диэлектрическая проницаемость волновода если изменяется, то плавно, на расстояниях порядка половины длины волны плазмон-поляритонов, то есть  $\nabla \ln \varepsilon \approx 0$ . Тогда из теоремы Гаусса для электрического вектора  $\nabla(\varepsilon \mathbf{E}) = (\nabla \varepsilon) \mathbf{E} + \varepsilon \nabla \mathbf{E} = 0$  находим, что  $\nabla \mathbf{E} = -(\nabla \ln \varepsilon) \mathbf{E} \approx 0$ . В этом случае уравнение для электрического вектора можно представить в виде системы уравнений для его компонент.

Представляя решения системы уравнений для полоскового волновода в форме мод с медленно меняющимися амплитудами [6, 13–16]

$$E_j = \frac{1}{4} \tilde{E}_j(z) (e^{i\kappa x} + e^{-i\kappa x}) (e^{i\gamma y} + e^{-i\gamma y}) \exp(i\beta z), \text{ где } \tilde{E}_j(z) \text{ – действительные амплитуды.}$$

Пренебрегая несинхронными пространственными гармониками  $\sim e^{\pm i2\kappa x}$  и  $e^{\pm i2\gamma y}$  в

слагаемых  $E_j^* E_j = \frac{1}{16} \tilde{E}_j^2 (2 + e^{i2\kappa x} + e^{-i2\kappa x}) (2 + e^{i2\gamma y} + e^{-i2\gamma y})$ , получаем систему уравнений для амплитуд мод (Приложение Б)

$$\frac{d^2 E_j}{dz^2} + i2\beta \frac{dE_j}{dz} + \bar{K}^2 E_j + \frac{1}{4} k_0^2 \bar{\chi} E_j \sum_{j'=x,y,z} E_{j'}^2 = 0, \quad (12)$$

где  $\bar{K}^2 = k^2 - \kappa^2 - \gamma^2 - \beta^2$ ,  $k^2 = k_0^2 \mu_1 \varepsilon_1$ ,  $\bar{\chi} = 4\pi\mu_1 \chi_{(3)}$ ,  $j = x, y, z$ .

Систему уравнений (12) можно представить в виде одного уравнения для величины  $I = \sum_{j=x,y,z} \tilde{E}_j^2$ , пропорциональной плотности энергии поля ПП. Умножая уравнения системы (12) на соответствующие амплитуды компонент полей  $\tilde{E}_j$  и складывая, получаем уравнение для непрерывного возбуждения волновода

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dz^2} + i\beta \frac{dI}{dz} + \bar{K}^2 I + \frac{1}{4} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = f_1(z), \quad (13)$$

где  $f_1(z) = \sum_{j=x,y,z} (d\tilde{E}_j/dz)^2$ . Учитывая, что в уравнении (13)

$k^2 = k_0^2 \mu (\varepsilon'_{(1)} + i\varepsilon''_{(1)}) \equiv k'^2 + ik''^2$  – комплексная величина, можно разделить его действительную и мнимую части

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + 2\bar{K}^2 I + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 2f(z), \quad (14)$$

$$\beta \frac{dI}{dz} + \bar{K}^2 I = 0. \quad (15)$$

Решение линейного уравнения (15)  $I = I_0 \exp(-\bar{K}^2 \beta^{-1} z)$  характеризует диссипацию энергии при распространении ПП вдоль оси волновода. Аналитическое решение нелинейного уравнения (14) имеет форму кноидальных волн – периодических нелинейных волн, если учесть медленность изменения амплитуд и пренебречь правой частью, полагая  $(d\tilde{E}_j/dz)^2 \rightarrow 0$ , (Приложение В)

$$I = \tilde{a} cn^2(\Phi, \tilde{k}) + \tilde{b} sn^2(\Phi, \tilde{k}), \quad (16)$$

где  $\Phi = \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{k_0^2 \bar{\chi}}{3}} z \right)$ ,  $\tilde{k} = \sqrt{\frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a} - \tilde{c}}}$  – модуль эллиптического интеграла

первого рода  $F(\varphi, \tilde{k})$ , постоянные  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$  определяются из уравнений  $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = 3p^2/k_0^2\bar{\chi}$ ,  $\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{a}\tilde{c} = 0$ ,  $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = -6\bar{K}^2/k_0^2\bar{\chi}$ ,

$$p^2 = \left( \frac{dI}{dz} \right)_0^2 + 2\bar{K}^2 I_0^2 + \frac{1}{3} k_0^2 \bar{\chi} I_0^3, \quad \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) \Big|_a^I. \quad (16)$$

представлен на рис. 2.

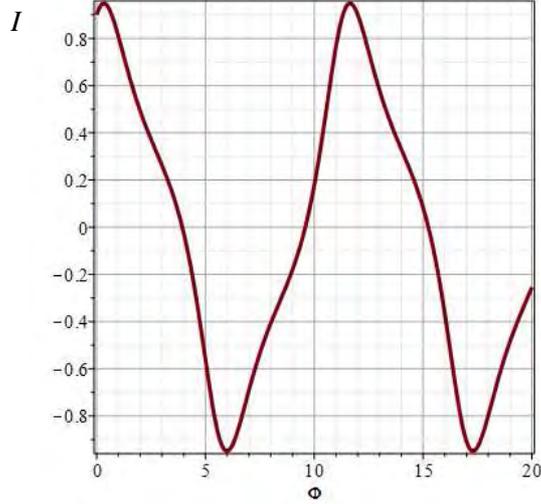


Рис. 2. Кноидальная волна  $I(\Phi)$  плазмон-поляритонов в полосковом волноводе (все величины нормированные,  $\tilde{a} = 0.9, \tilde{b} = 0.3, \tilde{k} = 0.97$ )

При  $\tilde{b} \cong \tilde{c}$  модуль  $\tilde{k} \rightarrow 1$ ,  $cn^2(\Phi, \tilde{k}) \rightarrow \cosh^{-2}(\Phi)$ ,  $sn^2(\Phi, \tilde{k}) \rightarrow \tanh^2(\Phi)$ , и плотность энергии определяется соотношением

$$I = (\tilde{a} - \tilde{b}) \cosh^{-2}(\Phi) + \tilde{b}. \quad (17)$$

Из выражения (17) следует, что этом частном случае соотношения параметров волновода плотность энергии плазмон-поляритонов убывает вдоль оси волновода  $z$  пропорционально  $\sim \cosh^{-2}(\Phi)$  даже без учета диссипации.

Из сравнения выражений для линейной моды ПП  $I_L = \sum_{j=x,y,z} E_j^2 \sim \exp(i2\beta z)$  (выражения (4)–(5)) и для нелинейной моды  $I_{NL} = \sum_{j=x,y,z} \tilde{E}_j^2 \sim cn(\Phi) + sn(\Phi)$

(выражение (16)) следует, что в нелинейном режиме происходят ангармонические пульсации плотности энергии ПП вдоль оси волновода (рис. 2) в отличие от гармонического изменения плотности энергии в линейном режиме. Период пульсаций плотности энергии ПП  $\sim I_{NL}$  зависит от величины диэлектрической восприимчивости  $\chi_{(3)}$  волновода. Этот эффект аналогичен возбуждению и трансформации нелинейных мод в оптическом волокне [15, 16].

## 3. ИМПУЛЬСЫ В НЕЛИНЕЙНОМ ПОЛОСКОВОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим динамику импульса ПП в нелинейном полосковом волноводе. При распространении импульсов в нелинейном полосковом волноводе необходимо учитывать нелинейный отклик среды  $\varepsilon(t)$ , зависящий от времени [6]. Распространение импульсов в полосковом волноводе с учетом нелинейных эффектов может быть описано с помощью уравнения для электрического вектора

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon \mu \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ где } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_m + \bar{\chi} I(t) \text{ неявно зависит от времен через медленно}$$

меняющиеся во времени амплитуды  $\tilde{E}_j(t, z)$  компонент электрического вектора

$$E_j = \frac{1}{4} \tilde{E}_j(t, z) (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{iy} + e^{-iy}) \exp(i\beta z - i\omega t).$$

Из лабораторной системы отсчета перейдем в подвижную систему отсчета с помощью введения «смещенного времени»  $\tau = t - z/v$ , где  $v = d\omega/dk = \text{const}$  – скорость импульса. Скорость импульса определим как

$$v = (dk/d\omega)^{-1} = c \left[ \sqrt{\mu \varepsilon'_{(1)}} (1 + d \ln \varepsilon'_{(1)} / 2d\omega) \right]^{-1}. \text{ Тогда получаем уравнение для}$$

импульсного возбуждения волновода (Приложение Г)

$$(1 - a_1 I) \frac{d^2 I}{d\tau^2} - a_2 \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 - a_3 \frac{dI}{d\tau} + a_4 I + a_5 I^2 = 2\bar{f}'_2, \quad (18)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{3k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad a_2 = \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad a_3 = \frac{2k_0^2 \varepsilon''_{(1)}}{\omega} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1},$$

$$a_4 = 2\bar{K}^2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad a_5 = \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad \bar{f}'_2 = f'_2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1}. \text{ Вблизи}$$

вершины импульса при  $d\tilde{E}_j/d\tau \rightarrow 0$  из (18) получаем уравнение с насыщением нелинейности для плотности энергии импульса

$$\frac{d^2 I}{d\tau^2} = \frac{a_4 I + a_5 I^2}{a_1 I - 1}. \quad (19)$$

В частном случае, при соотношении параметров импульса и волновода  $\ln|a_1 I - 1| \ll b_1^{-1} b_2 (a_1 I - 1)^2$ , решение уравнения (19) имеет вид (Приложение Д)

$$I = \frac{(4b_2 G_0 - b_3^2)^{1/2}}{2a_1 b_2} \sinh(a_1 \sqrt{b_2} \tau + \tau_0) + \frac{2b_2 - b_3}{2a_1 b_2}, \quad (20)$$

где  $G_0 = \left(\frac{dI}{d\tau}\right)_0^2 - b_1 \ln|a_1 I_0 - 1| - b_2 (a_1 I_0 - 1)^2 - 2b_3 (a_1 I_0 - 1)$ ,  $b_1 = 2\left(\frac{a_4}{a_1^2} + \frac{a_5}{a_1^3}\right)$ ,  $b_2 = \frac{a_5}{a_1^3}$ ,

$b_3 = 2\left(\frac{a_4}{a_1^2} + \frac{2a_5}{a_1^3}\right)$ ,  $\tau_0 = \operatorname{ar sinh} \frac{2b_2(a_1 I_0 - 1) + b_3}{(4b_2 G_0 - b_3^2)^{1/2}}$ . Анализ решения (20) показывает, что

импульс, поданный на вход в нелинейный полосковый волновод, возбуждает ударную волну, распространяющуюся по волноводу (рис. 3).

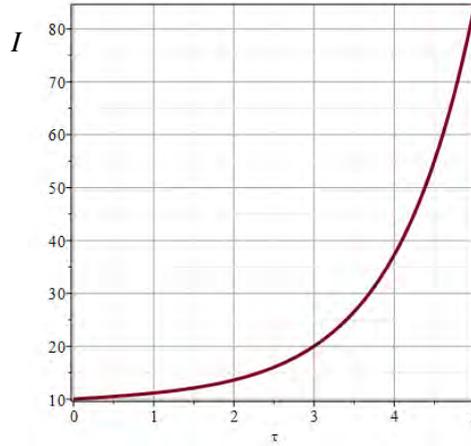


Рис. 3. Ударная волна  $I(\tau)$ , возбужденная импульсом в полосковом волноводе (все величины нормированные)

Если плотность энергии плазмон-поляритонного импульса не слишком велика  $a_1 I \ll 1$ , и насыщения нелинейности не возникает, то вблизи вершины импульса уравнение (18) можно представить в виде

$$\frac{d^2 I}{d\tau^2} + a_4 I + a_5 I^2 = 0. \quad (21)$$

Решение уравнения (21) имеет вид (Приложение Е)

$$I = \tilde{a} c n^2(\Phi, \tilde{k}) + \tilde{b} s n^2(\Phi, \tilde{k}), \quad (22)$$

где  $\Phi = \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{2a_5}{3}} \tau \right)$ ,  $\tilde{k} = \sqrt{\frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a} - \tilde{c}}}$ ,  $\tilde{a} \tilde{b} \tilde{c} = 3\xi^2 / 2a_5$ ,  $\tilde{a} \tilde{b} + \tilde{b} \tilde{c} + \tilde{a} \tilde{c} = 0$ ,

$\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = -3a_4 / 2a_5$ ,  $\xi^2 = \left(\frac{dI}{dz}\right)_0^2 + a_4 I_0^2 + \frac{2a_5}{3} I_0^3$ ,  $\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) \Big|_{\tilde{a}}^{I_0}$ . Из

выражения (22) следует, что импульс, поданный на вход волновода, в общем случае не сохраняет свою форму, но возбуждает в волноводе нелинейные волны.

При соотношении параметров  $\tilde{b} \cong \tilde{c}$ ,  $\tilde{k} \rightarrow 1$ , ПП импульс распространяется в нелинейном полосковом волноводе в форме солитона с пьедесталом (рис. 4)

$$I = (\tilde{a} - \tilde{b}) \cosh^{-2}(\Phi) + \tilde{b}. \quad (23)$$

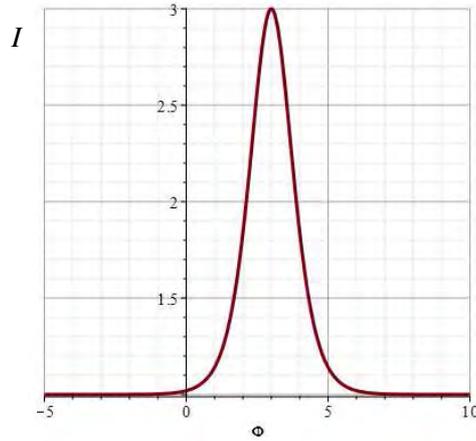


Рис. 4. Плазмон-поляритонный импульс  $I(\Phi)$  в полосковом волноводе (все величины нормированные,  $\tilde{a} = 3, \tilde{b} = 1$ )

Для реализации режима распространения солитонного импульса параметры импульса и волновода должны удовлетворять уравнениям  $\tilde{a}\tilde{b}^2 = 3\xi^2/2a_5$ ,  $\tilde{a} + 2\tilde{b} = -3a_4/2a_5$ . Тогда  $\tilde{a} = -2\tilde{b} - 3a_4/2a_5$ , а  $\tilde{b}$  определяется действительными решениями кубического уравнением

$$\tilde{b}^3 + (3a_4/4a_5)\tilde{b}^2 + 3\xi^2/4a_5 = 0. \quad (24)$$

Набор корней уравнения (24) имеет вид  $\tilde{b}_1 = A_1 + A_2$ ,  $\tilde{b}_{2,3} = -\left[ (1 \pm i\sqrt{3})A_1 + (1 \mp i\sqrt{3})A_2 \right] / 2$ , где  $A_{1,2} = \left( -q/2 \pm \sqrt{Q} \right)^{1/3}$ ,  $q = 2(3a_4/4a_5)^3/27 + 3\xi^2/4a_5$ ,  $p = -(3a_4/4a_5)^2/3$ ,  $Q = p^3/27 + q^2/4$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Линейные моды полоскового волновода распространяются в форме гармонических волн. При этом поперечная структура линейных мод описывается произведением синусов и косинусов с числом максимумов и минимумов, зависящим от поперечных размеров, диэлектрической и магнитной проницаемостей волновода.

Нелинейные моды полоскового волновода распространяются в форме кноидальных волн, период которых зависит от нелинейной диэлектрической восприимчивости третьего порядка среды волновода. При этом поперечная структура нелинейных мод может быть аппроксимирована произведением гармонических функций, если плотность энергии поля ПП не слишком велика, и нет необходимости учитывать нелинейные эффекты в поперечном поле мод, что обычно реализуется на практике.

Импульсное возбуждение полоскового волновода приводит к возникновению в нем кноидальных волн ПП, либо солитонного импульса с пьедесталом, что зависит от соотношения параметров возбуждающего импульса и волновода.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнения Максвелла  $\nabla \times \mathbf{H} = c^{-1} \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -c^{-1} \mu \partial \mathbf{H} / \partial t$  для линейных мод волновода  $\sim \exp(i\beta z - i\omega t)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y &= -i \frac{\omega \varepsilon}{c} E_x, & \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y &= i \frac{\omega \mu}{c} H_x, \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} + i\beta H_x &= -i \frac{\omega \varepsilon}{c} E_y, & -\frac{\partial E_z}{\partial x} + i\beta E_x &= i \frac{\omega \mu}{c} H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -i \frac{\omega \varepsilon}{c} E_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i \frac{\omega \mu}{c} H_z. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Из системы уравнений (A.1) получаем выражения для поперечных компонент поля ПП  $E_x, E_y$  и  $H_x, H_y$ ,

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i}{q^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), & H_x &= -\frac{i}{q^2} \left( k_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ E_y &= \frac{i}{q^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - k_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & H_y &= \frac{i}{q^2} \left( k_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где  $q^2 = k_0^2 \varepsilon \mu - \beta^2$ . Для продольных компонент поля  $E_z$  и  $H_z$  получаем уравнения второго порядка

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + q^2 \right) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (\text{A.3})$$

В волноводе решения для продольных компонент  $\{E_z, H_z\} \rightarrow \psi(x, y)$  представим в факторизованной форме  $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ . Тогда из уравнения

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + q^2 \right) \psi = 0 \text{ получаем два уравнения } \frac{d^2 X}{dx^2} + \kappa^2 X = 0 \text{ и } \frac{d^2 Y}{dy^2} + \gamma^2 Y = 0,$$

где  $\kappa^2 + \gamma^2 = q^2$ . Общие решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} X &= A_1 \sin(\kappa x) + B_1 \cos(\kappa x), \\ Y &= A_2 \sin(\gamma y) + B_2 \cos(\gamma y). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Представим частные решения  $\psi$  для продольных компонент поля в волноводе в виде

$$\psi_{SS}(x, y) = A \sin(\kappa x) \sin(\gamma y), \quad (\text{A.5})$$

$$\psi_{SC}(x, y) = A \sin(\kappa x) \cos(\gamma y), \quad (\text{A.6})$$

$$\psi_{CS}(x, y) = A \cos(\kappa x) \sin(\gamma y), \quad (\text{A.7})$$

$$\psi_{CC}(x, y) = A \cos(\kappa x) \cos(\gamma y). \quad (\text{A.8})$$

Приравнивая соответствующие компоненты полей мод на верхней границе, а также на нижней границе волновода, и соответствующих областей, получаем уравнения для амплитуд полей. Приравнивая компоненты полей  $E_z$  на границах волновода: в точке  $x = a, y = 0$ ,  $A_1 \cos(\kappa a) = A_2 \exp(-\alpha_2 a)$ , и в точке  $x = 0, y = b$ ,  $A_1 \cos(\gamma b) = A_2 \exp(-\alpha_2 b)$ , получаем характеристическое уравнение для поперечных компонент волновых векторов четной моды

$$\frac{\cos(\kappa a)}{\cos(\gamma b)} = \exp[\alpha_2(b - a)]. \quad (\text{A.9})$$

Приравнивая компоненты полей на границах:  $E_y$  в точке  $x = a, y = 0$ ,  $\mu_1 \frac{\kappa}{q_1^2} B_1 \sin(\kappa a) = \mu_2 \frac{\alpha_2}{q_2^2} B_2 \exp(-\alpha_2 a)$ , и  $E_y$  в точке  $x = -a, y = 0$ ,  $\mu_1 \frac{\kappa}{q_1^2} B_1 \sin(\kappa a) = \mu_3 \frac{\alpha_3}{q_3^2} B_2 \exp(-\alpha_3 a)$ , получаем характеристическое уравнение

$$\frac{\mu_2 \alpha_2 q_3^2}{\mu_3 \alpha_3 q_2^2} = \exp[(\alpha_2 - \alpha_3)a]. \quad (\text{A.10})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Векторное уравнение  $\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) + k_0^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = 0$  представим в виде системы уравнений

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} + \left( k^2 + k_0^2 \bar{\chi} \sum_{j'=x,y,z} E_{j'}^* E_{j'} \right) E_j = 0, \quad (\text{Б.1})$$

где  $k^2 = k_0^2 \mu \epsilon_{(1)}$ ,  $\bar{\chi} = 4\pi\mu\chi_{(3)}$ ,  $j = x, y, z$ . Решения системы уравнений (Б.1) для полоскового волновода в форме мод с медленно меняющимися амплитудами  $E_j = \frac{1}{4} \tilde{E}_j(z) (e^{ikx} + e^{-ikx}) (e^{i\gamma y} + e^{-i\gamma y}) \exp(i\beta z)$ , где  $\tilde{E}_j(z)$  – действительные амплитуды.

Тогда, пренебрегая несинхронными пространственными гармониками  $\sim e^{\pm i2kx}$ ,  $e^{\pm i2\gamma y}$  в слагаемых  $E_j^* E_j = \frac{1}{16} \tilde{E}_j^2 (2 + e^{i2kx} + e^{-i2kx}) (2 + e^{i2\gamma y} + e^{-i2\gamma y})$ , из (Б.1) получаем систему уравнений для амплитуд мод

$$\frac{d^2 \tilde{E}_j}{dz^2} + i2\beta \frac{d\tilde{E}_j}{dz} + \bar{K}^2 \tilde{E}_j + \frac{1}{4} k_0^2 \bar{\chi} \tilde{E}_j \sum_{j'=x,y,z} \tilde{E}_{j'}^2 = 0, \quad (\text{Б.2})$$

где  $\bar{K}^2 = k^2 - \kappa^2 - \gamma^2 - \beta^2$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ В

Представим уравнение (14)  $\frac{d^2 I}{dz^2} + 2\bar{K}^2 I + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 0$  в форме

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{dI}{dz} \right)^2 + \left( 2\bar{K}^2 I + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 \right) \frac{dI}{dz} = 0, \quad \text{и} \quad \text{проинтегрируем} \quad \text{его}$$

$$\int_{I_0}^I d \left( \frac{dI}{dz} \right)^2 = - \int_{I_0}^I \left( 4\bar{K}^2 I + k_0^2 \bar{\chi} I^2 \right) dI, \quad \text{находим} \quad \text{первый} \quad \text{интеграл}$$

$$\left( \frac{dI}{dz} \right)^2 - \left( \frac{dI}{dz} \right)_0^2 = -2\bar{K}^2 I^2 - \frac{1}{3} k_0^2 \bar{\chi} I^3 + 2\bar{K}^2 I_0^2 + \frac{1}{3} k_0^2 \bar{\chi} I_0^3. \quad \text{Второй интеграл уравнения}$$

ищем в виде эллиптического интеграла  $\int_{I_0}^I \frac{dI}{\left( p^2 - 2\bar{K}^2 I^2 - k_0^2 \bar{\chi} I^3 / 3 \right)^{1/2}} = z$ , где

$$p^2 = \left( \frac{dI}{dz} \right)_0^2 + 2\bar{K}^2 I_0^2 + \frac{1}{3} k_0^2 \bar{\chi} I_0^3. \quad \text{Представим эллиптический интеграл в виде}$$

$$\int_{\tilde{a}}^I \frac{dI}{\left[ (\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I) \right]^{1/2}} - \int_{\tilde{a}}^{I_0} \frac{dI}{\left[ (\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I) \right]^{1/2}} = -\sqrt{\frac{k_0^2 \bar{\chi}}{3}} z,$$

где  $(\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I) = 3p^2 / k_0^2 \bar{\chi} - 6\bar{K}^2 I^2 / k_0^2 \bar{\chi} - I^3$ , а постоянные  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$  определяются из уравнений  $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = 3p^2 / k_0^2 \bar{\chi}$ ,  $\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{a}\tilde{c} = 0$ ,

$\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = -6\bar{K}^2 / k_0^2 \bar{\chi}$ . Интегрируя, получаем  $\frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) = \varphi_0 - \sqrt{\frac{k_0^2 \bar{\chi}}{3}} z$ , где

$F(\varphi, \tilde{k})$  – эллиптический интеграл первого рода,  $\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\tilde{a} - I}{\tilde{a} - \tilde{b}}}$ ,  $\tilde{k} = \sqrt{\frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a} - \tilde{c}}}$

модуль эллиптического интеграла,  $\tilde{a} > x > \tilde{b} > \tilde{c}$ ,

$\varphi_0 = \int_{\tilde{a}}^{I_0} \frac{dI}{[(\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I)]^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) \Big|_{\tilde{a}}^{I_0}$ . Обращая эллиптический интеграл,

получаем  $\varphi = \sqrt{\frac{\tilde{a} - I}{\tilde{a} - \tilde{b}}} = \operatorname{sn} \left[ \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{k_0^2 \bar{\chi}}{3}} z \right), \tilde{k} \right]$ , откуда находим

$I = \tilde{a} \operatorname{cn}^2(\Phi, \tilde{k}) + \tilde{b} \operatorname{sn}^2(\Phi, \tilde{k})$ , где  $\Phi = \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{k_0^2 \bar{\chi}}{3}} z \right)$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Пренебрегая несинхронными пространственными гармониками  $\sim e^{\pm i2kx}, e^{\pm i2y}$ ,

из векторного уравнения  $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \epsilon \mu \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial z^2} - \frac{k_0^2 \epsilon_{(1)}}{\omega^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial t^2} + i2\beta \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial z} + i2 \frac{k_0^2 \epsilon_{(1)}}{\omega} \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial t} + \bar{K}^2 \tilde{E}_j \\ & - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tilde{E}_j - 2 \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial t} + i2 \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega} \frac{\partial I}{\partial t} \tilde{E}_j \\ & - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} I \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial t^2} + i2 \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega} I \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial t} + \frac{1}{4} k_0^2 \bar{\chi} I \tilde{E}_j = 0. \end{aligned} \quad (\Gamma.1)$$

где  $j = x, y, z$ . Умножая уравнения системы (Г.1) на соответствующие амплитуды  $\tilde{E}_j$  и складывая, получаем уравнение для плотности энергии плазмон-поляритонов в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{j=x,y,z} \left[ \tilde{E}_j \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial z^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \tilde{E}_j \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial t^2} \right] \\ & + i\beta \frac{\partial I}{\partial z} + i \frac{k_0^2 \varepsilon_{(1)}}{\omega} \frac{\partial I}{\partial t} + \bar{K}^2 I \\ & - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} \left( \frac{\partial I}{\partial t} \right)^2 + i3 \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega} \frac{\partial I}{\partial t} I + \frac{1}{4} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 0. \end{aligned} \quad (\Gamma.2)$$

Представим первое слагаемое с суммой в уравнении (Г.2) в виде  $\sum_{j=x,y,z} \left[ \tilde{E}_j \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial z^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \tilde{E}_j \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial t^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \right] - f_2(z)$ ,

где  $f_2(z) = \sum_{j=x,y,z} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial z} \right)^2 - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \left( \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial t} \right)^2 \right]$ , тогда уравнение (Г.2) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + i2\beta \frac{\partial I}{\partial z} + i2 \frac{k_0^2 \varepsilon_{(1)}}{\omega} \frac{\partial I}{\partial t} + 2\bar{K}^2 I \\ & - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega^2} \left( \frac{\partial I}{\partial t} \right)^2 + i6 \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega} \frac{\partial I}{\partial t} I + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 2f_2(z). \end{aligned} \quad (\Gamma.3)$$

Перейдем в подвижную систему отсчета с помощью введения «смещенного времени»  $\tau = t - z/v$ , где  $v = d\omega/dk = const$  – скорость импульса. Тогда уравнение (Г.3) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{3\bar{\chi}}{4} I \right) \right] \frac{d^2 I}{d\tau^2} - i \frac{2\beta}{v} \frac{dI}{d\tau} + i \frac{2k_0^2 \varepsilon_{(1)}}{\omega} \frac{dI}{d\tau} + 2\bar{K}^2 I \\ & - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega^2} \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 + i \frac{3k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega} \frac{dI}{d\tau} I + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 2f_2(z), \end{aligned} \quad (\Gamma.4)$$

где  $f_2(z) = \left[ \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \right] \sum_{j=x,y,z} \left( \frac{d\tilde{E}_j}{d\tau} \right)^2$ . Разделим действительные и мнимые

части в уравнении (Г.4), получаем два уравнения

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right) \frac{d^2 I}{d\tau^2} - \frac{2k_0^2 \varepsilon''_{(1)}}{\omega} \frac{dI}{d\tau} + 2\bar{K}^2 I \\ & - \frac{3k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} I \frac{d^2 I}{d\tau^2} - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega^2} \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 2f'_2(z), \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{k_0^2 \varepsilon''_{(1)}}{\omega^2} \frac{d^2 I}{d\tau^2} + 2 \left( \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega} - \frac{\beta}{v} \right) \frac{dI}{d\tau} + 2 \overline{\overline{K}}''^2 I \\
 & + \frac{3k_0^2 \overline{\chi}}{2\omega} \frac{dI}{d\tau} I = 2f_2''(z).
 \end{aligned} \tag{Г.6}$$

Уравнение (Г.5) описывает динамику плотности энергии импульса плазмон-поляритонов в нелинейном полосковом волноводе, а уравнение (Г.6) характеризует диссипацию энергии импульса при распространении его вдоль волновода.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Представим уравнение (19)

$$\frac{d^2 I}{d\tau^2} = \frac{a_4 I + a_5 I^2}{a_1 I - 1}$$

в форме

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 = 2 \frac{a_4 I + a_5 I^2}{a_1 I - 1} \frac{dI}{d\tau}$$

и проинтегрируем его  $\int_{I_0}^I d \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 = 2a_4 \int_{I_0}^I \frac{IdI}{a_1 I - 1} + 2a_5 \int_{I_0}^I \frac{I^2 dI}{a_1 I - 1}$ , получаем

$$\left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dI}{d\tau} \right)_0^2 = \frac{2a_4}{a_1^2} (a_1 I - 1 + \ln|a_1 I - 1|) + \frac{a_5}{a_1^3} \left[ (a_1 I - 1)^2 + 4(a_1 I - 1) + 2 \ln|a_1 I - 1| \right].$$

Отсюда находим первый интеграл уравнения

$$\left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 = 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{a_5}{a_1^3} \right) \ln|a_1 I - 1| + \frac{a_5}{a_1^3} (a_1 I - 1)^2 + 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{2a_5}{a_1^3} \right) (a_1 I - 1) + G_0,$$

где  $G_0 = \left( \frac{dI}{d\tau} \right)_0^2 - 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{a_5}{a_1^3} \right) \ln|a_1 I_0 - 1| - \frac{a_5}{a_1^3} (a_1 I_0 - 1)^2 - 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{2a_5}{a_1^3} \right) (a_1 I_0 - 1)$ . Второй

интеграл уравнения имеет вид  $\int_{X_0}^X (b_1 \ln|X| + b_2 X^2 + b_3 X + G_0)^{-1/2} dX = a_1 \tau$ , где

$X = a_1 I - 1$ ,  $b_1 = 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{a_5}{a_1^3} \right)$ ,  $b_2 = \frac{a_5}{a_1^3}$ ,  $b_3 = 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{2a_5}{a_1^3} \right)$ . Перепишем интеграл в

форме  $\int_{X_0}^X (\ln|X| + b_1^{-1} b_2 X^2 + b_1^{-1} b_3 X + b_1^{-1} G_0)^{-1/2} dX = a_1 \sqrt{b_1} \tau$  и пренебрежем  $\ln|X|$  по

сравнению с остальными слагаемыми под корнем, находим интеграл  $\int_{X_0}^X (b_1^{-1}b_2X^2 + b_1^{-1}b_3X + b_1^{-1}G_0)^{-1/2} dX = \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_2}} \operatorname{arc\,sinh} \frac{2b_2X + b_3}{(4b_2G_0 - b_3^2)^{1/2}} \Big|_{X_0}^X$ . Тогда получаем

$$\operatorname{arc\,sinh} \frac{2b_2X + b_3}{(4b_2G_0 - b_3^2)^{1/2}} = a_1\sqrt{b_2}\tau + \tau_0, \quad \text{где} \quad \tau_0 = \operatorname{arc\,sinh} \frac{2b_2(a_1I_0 - 1) + b_3}{(4b_2G_0 - b_3^2)^{1/2}},$$

то есть решение уравнения в данном приближении имеет вид

$$I = \frac{(4b_2G_0 - b_3^2)^{1/2}}{2a_1b_2} \sinh(a_1\sqrt{b_2}\tau + \tau_0) + \frac{2b_2 - b_3}{2a_1b_2}.$$

### ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Уравнение (21)

$$\frac{d^2I}{d\tau^2} + a_4I + a_5I^2 = 0$$

представим в форме

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 + (a_4I + a_5I^2) \frac{dI}{d\tau} = 0,$$

проинтегрируем и находим первый интеграл  $\left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 = -a_4I^2 - \frac{2a_5}{3}I^3 + \xi^2$ , где

$\xi^2 = \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 + a_4I_0^2 + \frac{2a_5}{3}I_0^3$ . Второй интеграл уравнения ищем в виде эллиптического

интеграла  $\int_{I_0}^I \frac{dI}{(\xi^2 - a_4I^2 - 2a_5I^3/3)^{1/2}} = \tau$ , тогда получаем

$$\int_{\tilde{a}}^I \frac{dI}{[(\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I)]^{1/2}} - \int_{\tilde{a}}^{I_0} \frac{dI}{[(\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I)]^{1/2}} = -\sqrt{\frac{2a_5}{3}}\tau,$$

где  $(\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I) = 3\xi^2/2a_5 - 3a_4I^2/2a_5 - I^3$ ,  $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = 3\xi^2/2a_5$ ,

$\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{a}\tilde{c} = 0$ ,  $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = -3a_4/2a_5$ . Интегрируя получаем

$\frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) = \varphi_0 - \sqrt{\frac{2a_5}{3}}\tau$ , где  $F(\varphi, \tilde{k})$  – эллиптический интеграл первого рода,

$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\tilde{a} - I}{\tilde{a} - \tilde{b}}}$ ,  $\tilde{k} = \sqrt{\frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a} - \tilde{c}}}$  – модуль эллиптического интеграла,  $\tilde{a} > x > \tilde{b} > \tilde{c}$ ,

$$\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) \Big|_{\tilde{a}}^{I_0}. \quad \text{Обращая эллиптический интеграл, получаем}$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{\tilde{a} - I}{\tilde{a} - \tilde{b}}} = \operatorname{sn} \left[ \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{2a_5}{3}} \tau \right), \tilde{k} \right], \quad \text{откуда находим}$$

$$I = \tilde{a} c n^2(\Phi, \tilde{k}) + \tilde{b} s n^2(\Phi, \tilde{k}), \text{ где } \Phi = \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{2a_5}{3}} \tau \right).$$

### Список литературы

1. Barnes W. L., Dereux A., and Ebbesen T. W. Surface plasmon subwavelength optics // *Nature*. 2003. Vol. 424. P. 824–830.
2. Krasavin A. V., Zayats A. V., Zheludev N. I. Active control of surface plasmon–polariton waves // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. 2005. Vol. 7. P. S85–S89.
3. Климов В. В. Наноплазмоника. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. 480 с.
4. Майер С. А. Плазмоника: теория и приложения. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 296 с.
5. Stockman M. I. Nanoplasmonics: past, present, and glimpse into future // *Optics Express*. 2011. Vol. 19. P. 22029–22106.
6. Dzedolik I. V. Solitons and Nonlinear Waves of Phonon-Polaritons and Plasmon-Polaritons. New York : Nova Science Publishers, 2016. 151 p.
7. Формирование плазмонных импульсов при кооперативном распаде экситонов квантовых точек вблизи металлической поверхности / А. В. Шестериков, М. Ю. Губин, М. Г. Гладуш, А. В. Прохоров // *ЖЭТФ*. 2017. Т. 151. Вып. 1. С. 24–39.
8. Ярив А. Введение в оптическую электронику. М. : Высшая школа, 1983. 398 с.
9. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М. : Мир, 1984. 512 с.
10. Dai D., He S. A silicon-based hybrid plasmonic waveguide with a metal cap for a nano-scale light confinement // *Optics Express*. 2009. Vol. 17. No. 19. P. 16646–16653.
11. Huang C.-C. Ultra-long-range symmetric plasmonic waveguide for high-density and compact photonic devices // *Optics Express*. 2013. Vol. 21. No. 24. P. 29544–29557.
12. Mode properties in metallic and non-metallic plasmonic waveguides / W. Liu, Y. Chen, X. Hu, L. Wen, L. Jin, Q. Su, Q. Chen // *Applied Optics*. 2017. Vol. 56. No. 16. P. 4861.
13. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М. : Наука, 1990. 432 с.
14. Кившарь Ю. С., Агравал Г. П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 648 с.
15. Дзедолик И. В., Дзедолик А. И. Нелинейные моды оптического волокна // *Письма в ЖТФ*. 2002. Т. 28. Вып. 10. С. 7–12.
16. Dzedolik I. V. Transformation of sinusoidal electromagnetic and polarization waves into cnoidal waves in an optical fibre // *Ukrainian Journal of Physical Optics*. 2008. Vol. 9. No. 4. P. 226–235.

## LINEAR AND NONLINEAR MODES OF STRIP WAVEGUIDE

*Pereskokov V. S., Dzedolik I. V.\**

*Physics and Technology Institute, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

\*E-mail: [igor.dzedolik@cfuv.ru](mailto:igor.dzedolik@cfuv.ru)

Linear and nonlinear plasmon polariton modes of a metal strip waveguide that located on a dielectric substrate are studied theoretically. Continuous-wave and pulsed operations are considered.

**Keywords:** strip waveguide, plasmon polariton linear and nonlinear modes, plasmon polariton pulse.

### References

1. W. L. Barnes, A. Dereux, T. W. Ebbesen, *Nature* **424**, 824 (2003).
2. A. V. Krasavin, A. V. Zayats, N. I. Zheludev, *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics* **7**, S85 (2005).
3. V. V. Klimov, *Nanoplasmonics* (Moscow : FIZMATLIT, 2010) [in Russian].
4. S. A. Maier, *Plasmonics : Fundamental and Applications* (New York: Springer, 2007).
5. M. I. Stockman, *Optics Express* **19**, 22029 (2011).
6. I. V. Dzedolik, *Solitons and Nonlinear Waves of Phonon-Polaritons and Plasmon-Polaritons* (New York: Nova Science Publishers, 2016).
7. A. B. Shesterikov, M. Yu. Gubin, M. G. Gladush, A. V. Prokhorov, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **124**, No. 1, 18 (2017) [in Russian].
8. A. Yariv, *Introduction to Optical Electronics* (Holt, Rinehart and Winston, 1976).
9. M. J. Adams, *An Introduction to Optical Waveguides* (John Wiley and Sons, 1981).
10. D. Dai, S. He, *Optics Express* **17**, No. 19, 16646 (2009).
11. C.-C. Huang, *Optics Express* **21**, No. 24, 29544 (2013).
12. W. Liu, Y. Chen, X. Hu, L. Wen, L. Jin, Q. Su, Q. Chen, *Applied Optics* **56**, No. 16, 4861 (2017).
13. M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, A. P. Sukhorukov, *Theory of waves* (Moscow: Nauka, 1990) [in Russian].
14. Yu. S. Kivshar, G. P. Agrawal, *Optical solitons: from fibers to photonic crystals* (Academic Press, 2003).
15. I. V. Dzedolik, A. I. Dzedolik, *Technical Physics Letters* **28**, No. 5, 7 (2002).
16. I. V. Dzedolik, *Ukrainian Journal of Physical Optics* **9**, No. 4, 226 (2008).

*Поступила в редакцию 02.11.2017 г. Принята к публикации 22.12.2017 г.  
Received November 02, 2017. Accepted for publication December 22, 2017*

УДК 537.874

## РАДИОПОГЛОЩАЮЩАЯ СТРУКТУРА НА ОСНОВЕ РЕЗИСТИВНО- ЕМКОСТНЫХ ПЛЕНОК

Пономаренко В. И.\*, Лагунов И. М., Батраков П. А.

Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В.И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия  
\*E-mail: [vponom@gmail.com](mailto:vponom@gmail.com)

На основе дифракционно-квазистатического подхода получены частотные зависимости, в диапазоне сверхвысоких частот, эффективного поверхностного сопротивления и эффективной диэлектрической проницаемости для структуры из резистивно-емкостных лент и диэлектрических слоев. Проведена частотная оптимизация коэффициента отражения от исследуемой структуры. Показано преимущество данной структуры, по сравнению со структурой из чисто резистивных пленок, при разработке радиопоглощающих материалов.

**Ключевые слова:** радиопоглощающие структуры, композиционные материалы, коэффициент отражения.

PACS: 41.20.Jb

### ВВЕДЕНИЕ

Поглотители электромагнитных волн широко применяются в технике сверхвысоких частот для радиомаскировки объектов, оборудования безэховых камер и других целей [1, 2]. Одним из традиционно применяемых радиопоглощающих материалов являются резистивные пленки [3]. В частности, резистивная пленка применяется в четвертьволновом слое, ставшем наиболее ранней реализацией радиопоглотителя, экранирующего металлическую поверхность. Более широкополосными, по сравнению с четвертьволновым поглотителем, являются многослойные структуры, состоящие из нескольких резистивных пленок разных номиналов, разделенных диэлектрическими прослойками [4].

Как показано в [5], если помещенную в переменное электрическое поле с циклической частотой  $\omega$  плоскую резистивную пленку с поверхностным сопротивлением  $\rho$  разделить на отдельные ленты, рис. 1, с шириной  $2b$ , достаточно малой по сравнению с длиной волны, то при направлении поля вдоль оси  $Y$  эффективное поверхностное сопротивление (ЭПС) такой структуры становится комплексным  $\rho_{\text{eff}} = \rho' + i\rho''$ , приобретая емкостную компоненту.

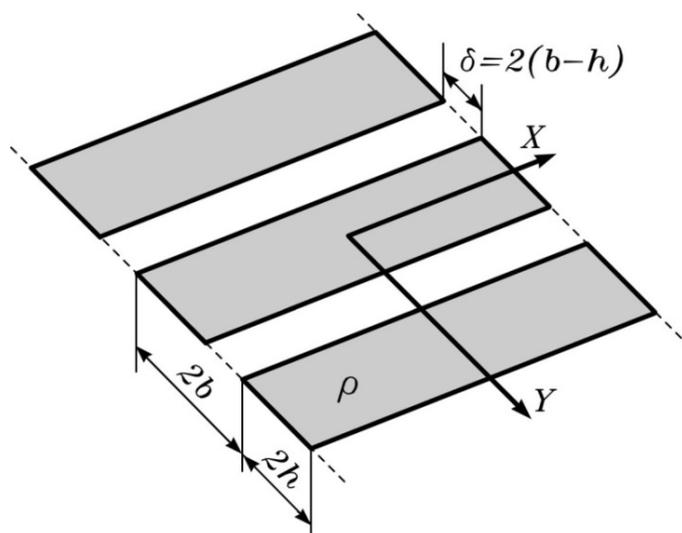


Рис. 1. Плоская решетка из резистивных лент, бесконечная в направлениях  $X$ ,  $Y$

Возможность варьирования значений  $\rho'$  и  $\rho''$  резистивно-емкостной пленки (РЕП), путем изменения параметров  $\rho$ ,  $b$ ,  $h$  расширяет, по сравнению со сплошной пленкой, обладающей чисто омическим поверхностным сопротивлением, возможность влияния на характеристики искусственных диэлектриков (ИД) и радиопоглощающих структур, содержащих РЕП. Так, в [6–9] показаны преимущества радиопоглощающих структур с наличием емкостной компоненты проводимости, по сравнению со структурами, содержащими резистивную пленку.

Целью настоящей работы является моделирование на основе электродинамических расчетов многослойных структур, содержащих резистивно-емкостные пленки.

## 1. ИСКУССТВЕННЫЙ ДИЭЛЕКТРИК

Исследуемая структура, изображенная на рис. 2, периодическая с периодом  $2b$  по оси  $Y$  и бесконечная по оси  $X$ , состоит из  $N$  решеток резистивных лент одинаковой ширины,  $h_1 = h_2 = \dots = h_{N+1} = h$  с поверхностными сопротивлениями  $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_N = \rho$ , и  $N+1$  диэлектрических слоев с толщинами

$$d_1 = d_{N+1} = d/2N, \quad d_n = \frac{d}{N}, \quad n = 2, \dots, N, \quad (1)$$

где  $d$  – общая толщина структуры. Относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрических слоев одинакова и равна  $\epsilon$ . Относительная эффективная диэлектрическая проницаемость (ЭДП) структуры  $\epsilon_{\text{eff}}$  вводится аналогично [10]:

$$\epsilon_{\text{eff}} = \frac{(R_1 - 1)(R_2 - 1)}{(R_1 + 1)(R_2 + 1)}, \quad (2)$$

где  $R_{1,2}$  – комплексные коэффициенты отражения по амплитуде поляризованной вдоль оси  $Y$  электромагнитной волны, нормально падающей на структуру рис. 1, расположенную на металлическом зеркале ( $R_1$ ) и на магнитном зеркале ( $R_2$ ).

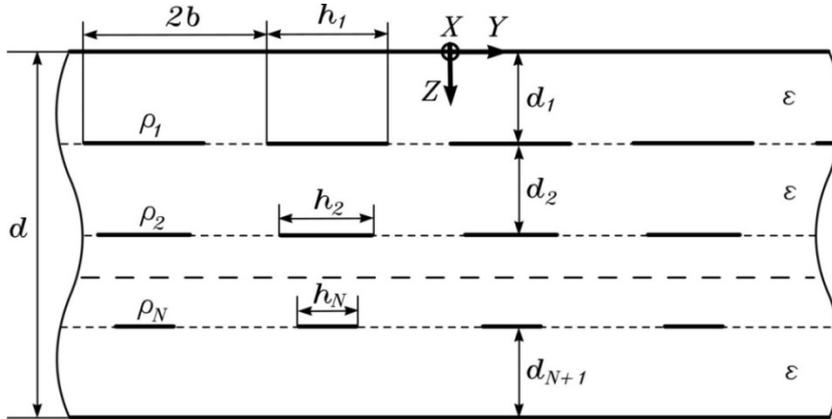


Рис. 2. Структура из резистивно-емкостных решеток и диэлектрических слоев

Значения коэффициента отражения (КО) вычислялись матричным методом [11], при этом каждая резистивно-емкостная пленка рассматривалась как слой предельно малой толщины  $\tau \ll \{d_n\}$  с абсолютной диэлектрической проницаемостью, равной  $i(\omega\tau\rho)^{-1}$  [12]. ЭПС резистивно-емкостной пленки, изображенной на рис. 1, вычислялось по формулам [5]:

$$\rho_{\text{eff}} = \rho \left[ 1 + \frac{\pi}{Ab \left( 2K + \ln \frac{2}{\alpha} \right)} \right], \quad (3)$$

$$A = -2i\omega\epsilon_0\epsilon\rho, \quad K = -\frac{\pi}{6}Ab, \quad \alpha = 1 + \cos(\pi h/b), \quad (4)$$

где  $\epsilon_0$  – диэлектрическая проницаемость вакуума.

На рис. 3, 4 приведены зависимости от длины волны вещественной и мнимой частей эффективного поверхностного сопротивления резистивно-емкостной пленки при  $\rho = 100$  Ом,  $b = 5$  мм,  $\epsilon = 4$  и различных величинах зазора  $\delta$  между лентами.

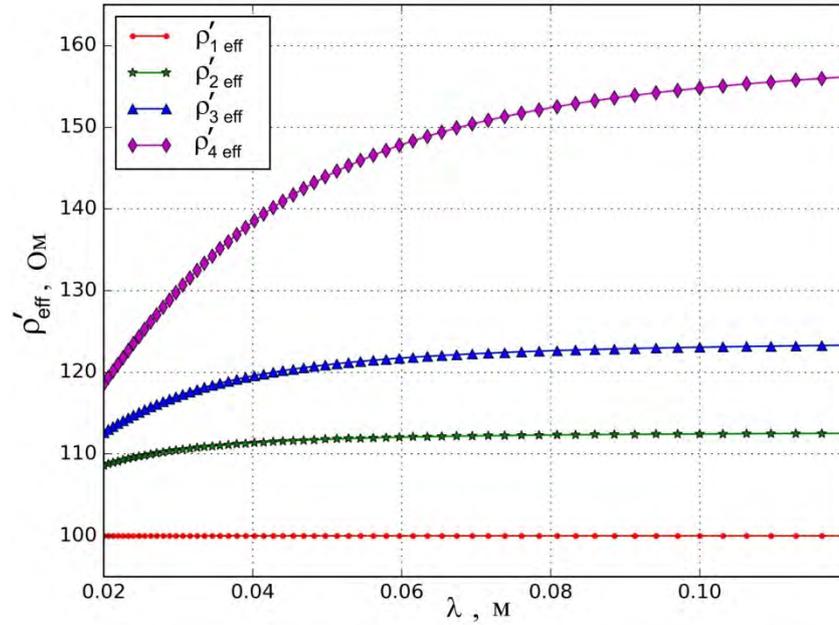


Рис. 3. Зависимость  $\rho'_{\text{eff}}$  от длины волны при различных величинах зазора между лентами:  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0,5$  мм,  $\delta_3 = 1$  мм,  $\delta_4 = 2$  мм

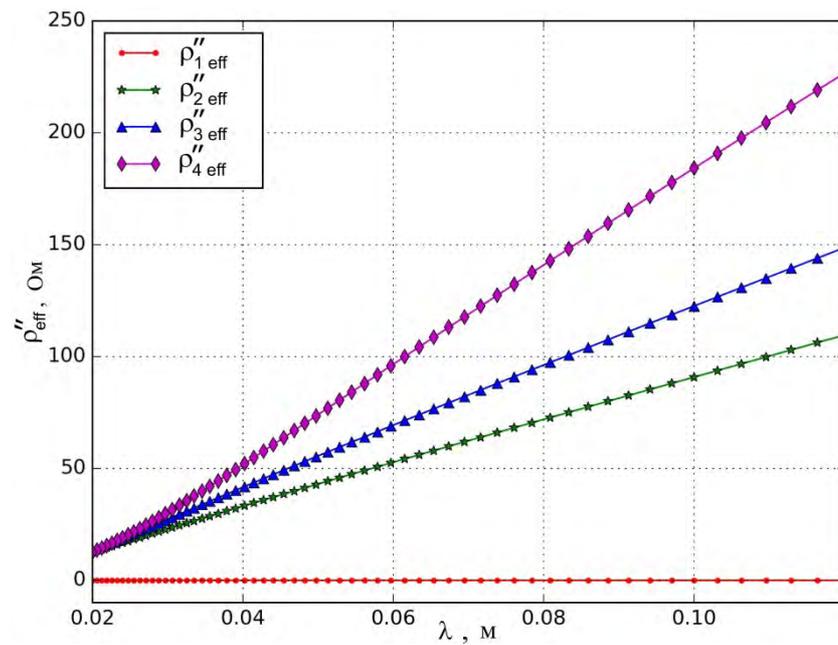


Рис. 4. Зависимость  $\rho''_{\text{eff}}$  от длины волны при различных величинах зазора между лентами:  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0,5$  мм,  $\delta_3 = 1$  мм,  $\delta_4 = 2$  мм

Из рисунков видно, что с увеличением зазора возрастает как  $\rho'_{\text{eff}}$ , так и  $\rho''_{\text{eff}}$  (от минимальных значений  $\rho'_{\text{eff}} = 100 \text{ Ом}$  и  $\rho''_{\text{eff}} = 0$  при  $\delta = 0$ ), причем обе компоненты  $\rho_{\text{eff}}$  возрастают с увеличением длины волны.

На рис. 5, 6 приведены зависимости от длины волны вещественной и мнимой частей ЭДП при  $N = 5$ ,  $\rho_i = 100 \text{ Ом}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\varepsilon = 4$ ,  $d = 1,5 \text{ см}$ ,  $b = 0,5 \text{ см}$  и различных зазорах между лентами. Из рисунков видно, что, меняя ширину зазора, можно варьировать  $\rho_{\text{eff}}$  в широких пределах.

С целью проверки адекватности описания ИД с такими параметрами эффективной диэлектрической проницаемостью (процедура гомогенизации) были проведены расчеты КО по амплитуде  $R = R' + iR''$  с использованием ЭДП при расположении структуры на бесконечном слое диэлектрика с проницаемостью  $\varepsilon = 4$ , а также структуры двойной толщины с  $N = 10$ , расположенной на металлическом зеркале. Сравнение полученных значений КО со значениями, вычисленными из решения задачи отражения от многослойной структуры, показало их совпадение с графической точностью. В то же время, при уменьшении числа  $N$  точность гомогенизации уменьшается.

На рис. 7 приведены для структуры толщиной  $d = 3 \text{ см}$  с  $N = 6$  значения  $R_1$  комплексного коэффициента отражения, вычисленные из решения задачи отражения от многослойной структуры, и значения  $R_2$  коэффициента отражения, вычисленные по значениям  $\varepsilon_{\text{eff}}$ , причем последние вычислялись из решения задачи отражения при  $d = 1,5 \text{ см}$  с  $N = 3$ .

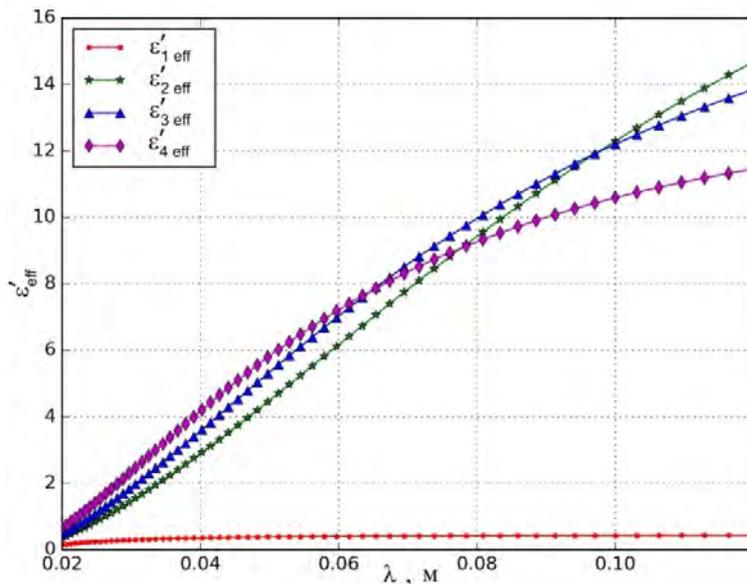


Рис. 5. Зависимость  $\varepsilon'_{\text{eff}}$  от длины волны при различных величинах зазора между лентами:  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0,5 \text{ мм}$ ,  $\delta_3 = 1 \text{ мм}$ ,  $\delta_4 = 2 \text{ мм}$

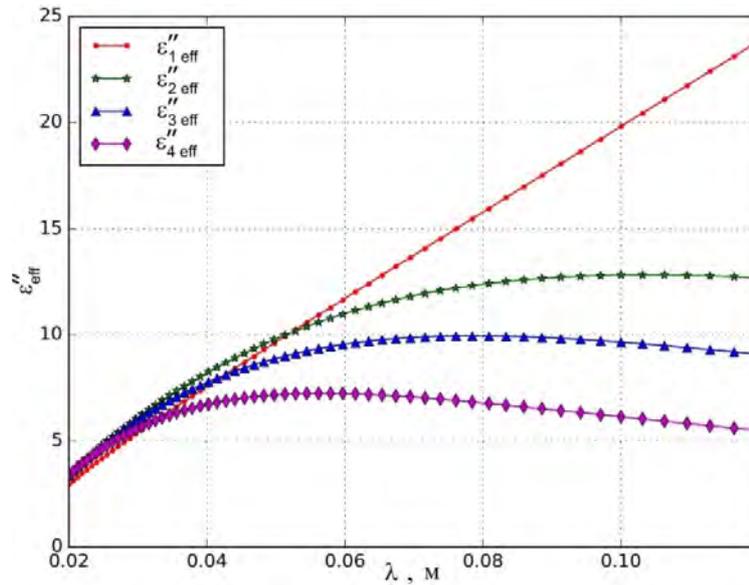


Рис. 6. Зависимость  $\varepsilon''_{\text{eff}}$  от длины волны при различных величинах зазора между лентами:  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0,5$  мм,  $\delta_3 = 1$  мм,  $\delta_4 = 2$  мм

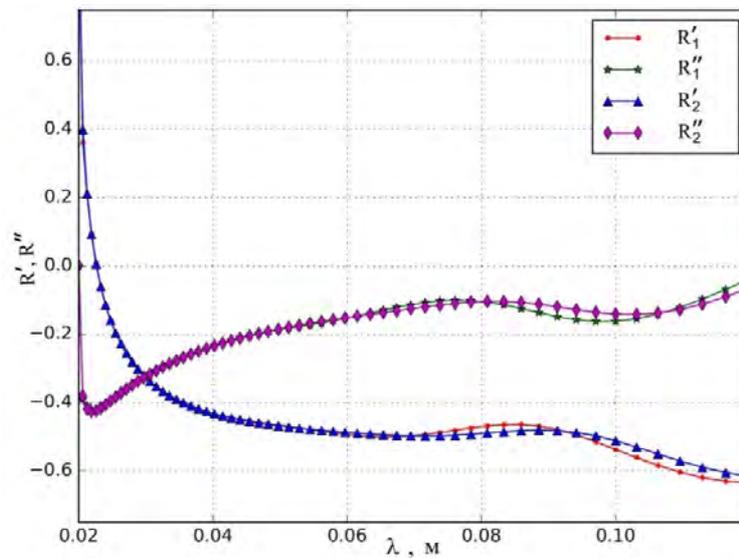


Рис. 7. Зависимость компонент КО от структуры, расположенной на магнитном зеркале,  $R_1$  и  $R_2$  от длины волны, при различном количестве резистивно-емкостных решеток,  $N = 6$ ,  $d = 3$  см,  $\rho = 100$  Ом,  $\delta = 1$  мм,  $b = 0,5$  см,  $\varepsilon = 4$ :  $R_1$  – вычисленные по отражению от структуры;  $R_2$  – вычисленные от слоя толщиной  $d = 3$  см с эффективной проницаемостью, найденной для структуры с  $d = 1,5$  см,  $N = 3$

Из рисунка видно, что величины  $R_1$  и  $R_2$  заметно отличаются, что указывает на снижение точности гомогенизации с уменьшением числа периодов структуры.

## 2. РАДИОПОГЛОЩАЮЩИЕ СТРУКТУРЫ

На рис. 8 приведены зависимости от длины волны коэффициента отражения по мощности  $R_M$  от структуры рис. 2, расположенной на металлическом зеркале, при  $b = 5$  мм, толщине структуры  $d = 1$  см с  $N = 3$  и толщине  $d = 1,5$  см с  $N = 4$ .

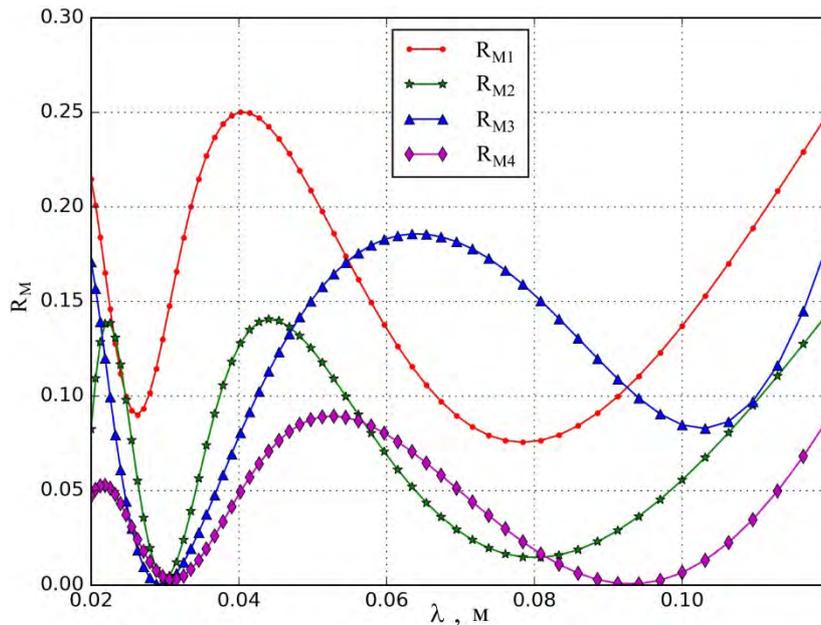


Рис. 8. Зависимости  $R_M$  от длины волны при различном количестве резистивно-емкостных решеток для оптимизированных структур, расположенных на металлическом зеркале:  $R_{M1}$  –  $d = 1$  см,  $\delta = 0$ ,  $N = 3$ ,  $\epsilon = 4,9$ ,  $\rho_1 = 380$  Ом,  $\rho_2 = 300$  Ом,  $\rho_3 = 96$  Ом;  $R_{M2}$  –  $d = 1,5$  см,  $\delta = 0$ ,  $N = 4$ ,  $\epsilon = 2,3$ ,  $\rho_1 = 773$  Ом,  $\rho_2 = 552$  Ом,  $\rho_3 = 449$  Ом,  $\rho_4 = 481$  Ом;  $R_{M3}$  –  $b = 0,5$  см,  $d = 1$  см,  $\delta = 1$  мм,  $N = 3$ ,  $\epsilon = 1,7$ ,  $\rho_1 = 36$  Ом,  $\rho_2 = 31$  Ом,  $\rho_3 = 36$  Ом;  $R_{M4}$  –  $b = 0,5$  см,  $d = 1,5$  см,  $\delta = 1$  мм,  $N = 4$ ,  $\epsilon = 2,1$ ,  $\rho_1 = 1149$  Ом,  $\rho_2 = 372$  Ом,  $\rho_3 = 229$  Ом,  $\rho_4 = 172$  Ом

Рассматривалось нормальное падение электромагнитной волны на структуру. Расчеты проводились как для сплошных пленок ( $\delta = 0$ ), так и для резистивно-емкостных пленок ( $\delta = 1$  мм). Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  и значения величин  $\rho_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , приведенные в подписи к рисунку, вычислялись из решения методом координатного спуска [13] задачи оптимизации, при этом минимизировался критерий  $R_{M \max}$  – максимальное в волновом диапазоне значение  $R_M$ . С целью нахождения глобального минимума  $R_{M \max}$ , выбирались различные начальные значения параметров  $\rho_i$ ,  $\epsilon$ .

Из рисунков видно, что структуры с резистивно-емкостной пленкой обеспечивают намного лучший критерий оптимальности как при толщине  $d = 1$  см, так и при толщине  $d = 1,5$  см. Так, структура толщиной  $d = 1,5$  см с  $\delta = 1$  мм,  $b = 5$  мм обеспечивает  $R_{M \max} = 8,9\%$ , тогда как структура такой же толщины со сплошными пленками ( $\delta = 0$ ) имеет  $R_{M \max} = 14,5\%$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

На основе решения задачи отражения электромагнитной волны от многослойной структуры, состоящей из чередующихся слоев диэлектрика и резистивно-емкостных пленок, составленных из разделенных зазорами резистивных лент, расположенной на идеально отражающей поверхности, вычислена эффективная диэлектрическая проницаемость искусственного диэлектрика на основе резистивно-емкостных пленок. В отличие от предложенного в [10] дифракционного подхода к гомогенизации искусственного диэлектрика, примененный в настоящей работе подход можно охарактеризовать как дифракционно-квазистатический, поскольку эффективное поверхностное сопротивление резистивно-емкостных пленок вычислялось в квазистатическом приближении на основе известного решения соответствующей задачи. Показана адекватность процедуры гомогенизации при достаточно большом количестве слоев и малости характерных размеров структуры по сравнению с длиной волны. Показано, что рассмотренный искусственный диэлектрик имеет характер дисперсии эффективной диэлектрической проницаемости, благоприятный для его применения в радиопоглощающих покрытиях.

Решена задача оптимизации частотной зависимости коэффициента отражения нормально падающей электромагнитной волны от радиопоглощающей структуры на основе резистивно-емкостных пленок, расположенной на металлическом зеркале. Падающая волна поляризована поперек резистивных лент. Показано существенное преимущество такой структуры по сравнению с аналогичной структурой на основе чисто резистивных пленок. Рассмотренная структура является поляризационно-зависимой. Однако ввиду малости зазоров между лентами следует ожидать, что коэффициент отражения от такой структуры достаточно близок к коэффициенту отражения поляризационно-независимой структуры на основе резистивных квадратов, разделенных малыми зазорами, поскольку зазоры, параллельные электрическому вектору, не размыкают текущие по пленкам электрические токи.

### Список литературы

1. Алимин Б. Ф. Современные разработки поглотителей электромагнитных волн и радиопоглощающих материалов // Зарубежная радиоэлектроника. 1989. № 2. С. 75–82.
2. Chung В.-К., Chuah Н.-Т. Modeling of RF absorber for application in the design of anechoic chamber // PIER. 2003. Vol. 43. P. 273–285.
3. Слуцкая В. В. Тонкие пленки в технике СВЧ. М.: Госэнергоиздат. 1962. 112 с.
4. Латышева А. Ф., Калинин Ю. Е. Анализ перспективных радиопоглощающих материалов // Вестник Воронежского государственного университета. Воронеж: Изд. Воронежского государственного технического университета. 2012. Т. 8. № 6. С. 70–76.

5. Пономаренко В. И. Проводящая ленточная решетка в квазистатическом поле // Изв. вузов. Электромеханика. 1982. № 5. С. 518–523.
6. Пономаренко В. И., Журавлев С. И. Неотражающая структура на основе плоской решетки из полупроводящих лент // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37. № 5. С. 812–818.
7. Пономаренко В. И., Мировицкий Д. И., Будагян И. Ф. Расчет коэффициента отражения электромагнитных волн шахтной структурой из проводящих полос // Радиотехника. 1984. Т. 39. № 11. С. 68–71.
8. Ponomarenko V. I., Lagunov I. M. A Radar Absorbing Structure on the Basis of Conducting Grids // Journal of Communications Technology and Electronics, 2017. Vol. 62, No. 7. P. 765–769.
9. Пономаренко В. И., Попов В. В., Лагунов И. М. Радиопоглощающая структура на основе микропроводов // Электромагнитные волны и электронные системы. 2016. Т. 21. № 4. С. 74–79.
10. Пономаренко В. И., Лагунов И. М. Дифракционный расчет эффективной диэлектрической проницаемости радиопоглощающих решеток на основе графитированных волокон // Композиционные материалы: разработка и применение: монография; [под. ред. М. Ю. Звездиной]. Новосибирск: Изд. АНС «СибАК». 2017. С. 112–133.
11. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М.: Мир. 1970. 664 с.
12. Пономаренко В. И., Куприянов И. К., Журавлев С. И. Неотражающая структура на основе резистивной пленки с малой емкостной компонентой проводимости // Радиотехника и электроника. 1992. Т. 37. № 2. С. 346–349.
13. Жиглявский А. А., Жилинскас А. Г. Методы поиска глобального экстремума. М.: Наука. 1991. 248 с.

## A RADAR ABSORBING STRUCTURE ON THE BASIS OF RESISTANT-CAPACITIVE FILMS

*Ponomarenko V. I.\**, *Lagunov I. M.*, *Batratkov P. A.*

*Institute of Physics and Technology, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol  
295007, Russia*

*\*E-mail: [vponom@gmail.com](mailto:vponom@gmail.com)*

On the basis of the diffraction-quasistatic approach, was obtained frequency dependences, in the ultrahigh frequency range, effective surface resistance and effective dielectric constant for a structure of resistive-capacitive tapes and dielectric layers. Was made frequency optimization of the reflection coefficient from the structure. The advantage of this structure made, in comparison with the structure of purely resistive films, in the development of radio absorbing materials.

**Keywords:** radio-absorbing structures, composite materials, reflection coefficient.

### References

1. B. F. Alimin, *Zarubezhnaya radioelektronika*, No. 2, 75–82 (1989) [in Russian].
2. B.-K. Chung, H.-T. Chuah, *PIER* **43**, 273–285 (2003).
3. V. V. Slutskaya, *Tonkie plenki v tekhnike SVCH [Thin films in microwave technology]* (Gosenergoizdat, Moscow, 1962) [in Russian].
4. A. F. Latysheva, YU. E. Kalinin, *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo universiteta* **8**, No. 6, 70–76 (2012) [in Russian].
5. V. I. Ponomarenko, *Izv. Vuzov (Ehlektrimekhanika)*, No. 5, 518–523 (1982) [in Russian].
6. V. I. Ponomarenko, S. I. Zhuravlev, *Radiotekhnika i ehlektronika* **37**, No. 5, 812–818 (1992) [in Russian].
7. V. I. Ponomarenko, D. I. Mirovitskij, I. F. Budagyan, *Radiotekhnika* **39**, No. 11, 68–71 (1984) [in Russian].

8. V. I. Ponomarenko, I. M. Lagunov, *Journal of Communications Technology and Electronics* **62**, No. 7, 765–769 (2017).
9. V. I. Ponomarenko, V. V. Popov, I. M. Lagunov, *Ehlektromagnitnye volny i ehlektronnye sistemy* **21**, No 4, 74–79 (2016) [in Russian].
10. M. Yu. Zvezdina, L. V. CHerkesova, Yu. A. SHokova, G. P. Sinyavskij, D. A. Bezuglov, G. N. SHalamov, V. I. Ponomarenko, I. M. Lagunov, S. V. Sokolova, M. I. Matveev, *Kompozitsionnye materialy: razrabotka i primeneniye* [Composite Materials: Development and application] (Izd. ANS «SibAK», Novosibirsk, 2017) [in Russian].
11. M. Born, EH. Volf, *Osnovy optiki* [Principles of Optics] (Mir, Moscow, 1970) [in Russian].
12. V. I. Ponomarenko, I. K. Kupriyanov, S. I. Zhuravlev, *Radiotekhnika i ehlektronika* **37**, No. 2, 346–349 (1992) [in Russian].
13. A. A. Zhiglyavskij, A. G. Zhilinskas, *Metody poiska global'nogo ehkstreumuma* [Methods of search global extremum] (Nauka, Moscow, 1991) [in Russian].

*Поступила в редакцию 11.10.2017 г. Принята к публикации 22.12.2017 г.  
Received October 11, 2017. Accepted for publication December 22, 2017*

*Вестник Физико-технического института*

*Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского*

*Том 1 (67–69). № 3. 2017. С. 81–93*

*Journal of Physics and Technology Institute of V. I. Vernadsky Crimean Federal University*

*Volume 1 (67–69). No. 3. 2017. P. 81–93*

**УДК 53.097**

### ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРОСТИМУЛЯЦИИ СПИННОГО МОЗГА

*Глушенков А. Н., Григорьев П. Е.*

*Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В.И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия*

*\*E-mail: [an.glushenkov@yandex.ru](mailto:an.glushenkov@yandex.ru)*

В обзорной статье рассмотрены принципы моделирования электростимуляции спинного мозга. Указаны различия представленных моделей как на уровне отдельных моделируемых элементов спинного мозга, так и на уровне отдельных нейронов. Показано, что современные модели не учитывают морфологические особенности дорсальных и вентральных элементов. Часто дорсальные и вентральные элементы могут вообще отсутствовать в модели, как несущественные.

С точки зрения биофизической модели нейронов показано, что большинство моделей использует нестохастические модели нейронов. Наиболее часто используемыми моделями являются модели CRSS (Chin-Ritchie-Stagg-Sweeney) и MRG-нейрон (McIntyre-Grill) в которых используется некоторое упрощенное моделирование действие ионных каналов. Рассмотрены стохастические модели нейронов, моделирующие шум ионных каналов.

**Ключевые слова:** электростимуляция, эпидуральная стимуляция, нейрон, модели нейрона

**PACS: 87.10.Kn**

#### ВВЕДЕНИЕ

Электростимуляция (ЭС) спинного мозга, к которой относится эпидуральная и черезкожная стимуляция, является перспективной методикой, применяющейся во многих сферах медицинской деятельности [1].

Одними из наиболее интенсивно развивающихся областей применения ЭС являются подавление нейропатической боли [2–4] и двигательная нейрореабилитация [5–11].

Исследования нейропатической боли [12–15] и способов осуществления двигательной нейрореабилитации [16–18] тесно связаны с проведением острых экспериментов на различных животных моделях. Согласно канонам доказательной медицины, все методики перед внедрением в практику должны апробироваться на людях. Однако при отсутствии должных гарантий безопасности для здоровья пациента это сопряжено с множеством трудностей этического характера.

Кроме того, присутствуют трудности методического характера для развития исследований и полного использования их внедренческого потенциала, обусловленные индивидуальными физиологическими различиями пациентов и недостаточно хорошим соответствием животных моделей ноцицептивной системе человека. Так, в работе [19] указывается на различия в строении и биофизических

свойствах тканей у людей различного возраста и пола. В случае борьбы с нейропатической болью отмечается, что животные модели плохо передают ноцицептивную систему человека, в частности для случаев хронических болей спины, скелетномышечных болей, болей внутренних органов, мигрени и прочих хронических болевых расстройств [20]. Данные ограничения можно частично снять, используя моделирование как основной метод интерпретации и прогноза на всех этапах исследовательского цикла — от разведочного (начального в отношении апробации новой гипотезы или экспериментальной методики) до эвристического (интерполяции и экстраполяции полученных эмпирических данных в острых экспериментах, построении на их основе эмпирических данных в острых экспериментах, построении на их основе эмпирических математических моделей).

С начала 1980-х гг. было построено множество моделей, призванных описать процессы, протекающие в нервной ткани при ЭС спинного мозга [21–23, 25, 26, 37, 39]. Полученные биофизические модели, как правило, являются узкоспециализированными и строились по результатам экспериментов воздействия на нервную ткань. Зачастую задачи универсальности и эвристического потенциала модели даже не ставят, поскольку, в зависимости от типа моделируемой нервной ткани, используются разные модели нейронов [55].

Данный обзор ставит своей целью сформировать представление о современных методиках биофизического моделирования электростимуляции спинного мозга. Для этого был проведён поиск литературы в научных поисковых системах PubMed и Google Scholar. Было найдено свыше 600 тыс. статей, посвящённых электростимуляции спинного мозга. Из них были выбраны статьи, затрагивающие моделирование электростимуляции спинного мозга. Из которых были выделены общие методики биофизического моделирования ЭС, описанные в соответствующих методических статьях. Содержание этих методических статей является предметом обзора в данной статье. Структура статьи отражает доминирующий в настоящий момент комбинированный подход к моделированию электростимуляции спинного мозга. Вначале обзора обсуждается постановка и решение физической задачи распределения электрического потенциала внешнего по отношению к спинному мозгу электромагнитного поля. Отдельно оговаривается ряд упрощений в существующих моделях геометрической структуры спинного мозга, его дорсальных и вентральных элементов. Следом идёт обзор методик моделирования нервной ткани на клеточном уровне и обсуждение особенностей каждой из них. В конце статьи даются краткие выводы о способах улучшения существующих моделей ЭС спинного мозга.

## **1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕРВНЫХ ТКАНЕЙ**

Как правило, модели ЭС являются гибридными, то есть включают в себя: а) геометрическую модель тканей в некотором объёме, б) биофизическую модель нервных тканей. Геометрические модели служат цели определения методом конечных элементов значения электрического потенциала вблизи сомы интересующей нейронной цепи. Суть метода конечных элементов заключается в разбиении пространства модели на множество дискретных элементов пространства

(конечные элементы), каждый из которых однороден по своим физическим свойствам. Совокупность конечных элементов, обладающих одними и теми же физическими свойствами, и, образуя непрерывный объём, образуют домен. Таким образом, возможно создать приближённое дискретное отображение непрерывной геометрии реальной неоднородной физической системы как совокупность доменов. Постановка физической задачи сводится к формулировке начальных и граничных условий для каждого домена [36]. Применительно к ЭС, физической задачей является электромагнитная задача распределения электрического потенциала  $\varphi$  в объёме модели (1). Пространственное распределение проводимости  $\sigma$  и волновых свойств  $\varepsilon, \mu$  тканей определяется формой и взаимным расположением отдельных физических доменов модели. Начальными условиями выступает закон изменения потенциала на стимулирующем электроде  $V_{эс}$  (2). Граничными условиями является затухание потенциала на бесконечности, что в реальных моделях зачастую означает затухание потенциала на границах модели  $\Omega$ , а моделируемый объём выбирается таким образом, что размеры модели являются значительно больше размеров моделируемой области интереса (3).

$$\nabla \left( \sigma \nabla \varphi + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi \right) = 0, \quad (1)$$

$$\varphi = V_{эс}(t), \quad (2)$$

$$\varphi(\Omega) = 0. \quad (3)$$

На основании решения электромагнитной задачи делается вывод о возможности возбуждения нервных тканей. В работе [45] показано четыре критерия определения начала активации нервной ткани. Первый критерий — это сравнение вычисленной плотности тока с полученной из уравнений Ходжкина-Хаксли *пороговой плотностью тока* для конкретной биофизической модели нейрона. Вторым критерием является прямое сравнение полученных значений электрического потенциала  $\varphi$  с экспериментально полученными значениями порогового потенциала нейрона [58, 59]. Третий критерий подразумевает использование порогового значения напряжённости электрического поля [60]. К четвёртому критерию относится использование активационной функции Раттэя  $f_n$  для одиночного компартмента, представляющего собой простую RC-цепь, «размазанную» по трём соседним конечным элементам  $n-1, n, n+1$  [41]. Для волокна с постоянной длиной  $\Delta x$ , диаметром  $d$ , внутриклеточным сопротивлением  $r_i$  и ёмкостью  $c$ , функция активации принимает вид:

$$f_n = \frac{d}{4c \cdot \rho_i} \cdot \left( \frac{\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}}{\Delta x^2} \right), \quad (4)$$

$$f_n = \frac{1}{C} \cdot \left( \frac{\varphi_{n-1} - 2\varphi_n + \varphi_{n+1}}{\Delta x^2} \right) \quad (5)$$

Из (5) видно, что при коэффициенте  $1/C$  находится выражение второй производной электрического потенциала вдоль направления нервного волокна  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ . Области, в которых  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} > 0$  являются областями инициации всплеска

потенциала (спайка). Сама же функция имеет физический смысл виртуального тока, инжектируемого в нейрон. Положительный знак функции активации отвечает процессу деполяризации плазматической мембраны. Отрицательный знак функции активации отвечает за стремление мембраны к гиперполяризации.

Выбор геометрии моделируемой области ЭС является критически важным аспектом. Так, практически все существующие на текущий момент модели ЭС используют какое-либо приближение геометрии исходя из конкретной задачи. В работах, посвящённых двигательной нейрореабилитации, как правило полностью игнорируется роль дорсальных корешков [26, 37]. И хотя такой подход приносит свои плоды [61, 37, 18] существуют свидетельства о влиянии афферентных цепей на модуляцию моторных цепей [16, 17]. В задачах стимуляции спинного мозга с целью подавления нейропатической боли у пациентов (так называемые «традиционная стимуляция спинного мозга», проводимая с частотой стимулирующих импульсов до 1кГц, и, «высокочастотная стимуляция спинного мозга» — с частотой стимулирующих импульсов 1–10 кГц) электроды расположены в дорсальном полупространстве. Следствием такого положения стимулирующих электродов становится весьма ограниченный вклад различных элементов спинного мозга на распределение потенциала электрического поля от проводника [23, 25]. В работе [25] было показано, что для моделирования антиноцицептивной ЭС спинного мозга наличие вентральных корешков является необязательным параметром, поскольку вблизи них напряжённость электрического поля при типовых токах стимуляции является несущественной. В то же время, ряд ранних работ по стимуляции дорсального столба не учитывает роль дорсальных корешков. К настоящему времени достоверно установлено, что дорсальные корешки являются важным узлом восходящих сенсорных каналов, передающих как рецепторную информацию, так и ноцицептивную информацию [52]. Более того, в передаче ноцицептивной информации дорсальные корешки играют роль последнего информационного звена, ноцицептивная информация в который попала после мультиплексирования всех входных ноцицептивных каналов в ганглии дорсального корешка [51]. Таким образом, исследование влияния электростимуляции на дорсальные корешки становится актуальной задачей, сулящей разработку новых подходов к задаче подавления нейропатической боли. Ряд работ [38, 39] пытается учесть взаимное расположение дорсальных корешков относительно друг друга и стимулирующих электродов. Однако с физиологической точки зрения геометрическая часть модели сильно упрощена — дорсальные корешковые нити в краниально-каудальном направлении расположены стреловидно [38], в то время как

в реальных сегментах спинного мозга корешки имеют трапециевидную форму [57]. Либо расположение дорсальных корешков рассматривается только для редуцированной электромагнитной задачи, сформулированной для горизонтальной проекции спинного мозга [39].

## **2. БИОФИЗИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕРВНОЙ ТКАНИ**

Биофизическая модель нервной ткани представляет собой функциональную модель и представляет собой электрическую цепь, моделирующую реальную нейронную сеть. Сама же нейронная сеть может состоять как из однородных по своим свойствам нейронов, так и неоднородных. В случае однородных нейронных цепей используется одна наиболее подходящая биофизическая модель нейрона [38]. Неоднородные нейронные цепи состоят из отличающихся друг от друга по своим свойствам нейронов. В этом случае для каждого из этих нейронов строится своя биофизическая модель [39].

В основе всех современных биофизических моделей нейронов лежит работа [47], описывающая распространение потенциала действия по немиелинизированному аксону. Такой подход до сих пор остаётся справедливым, так как были получены экспериментальные данные, говорящие о том, что во внешнем электрическом поле возбудимостью обладает именно аксон клетки, в то время как тело клетки остаётся маловосприимчивым к электростимуляции [53, 54]. Фактически, при моделировании нейронных цепей используется множество модификаций уравнения Ходжкина-Хаксли, призванных учитывать проводимость миелинизированного нервного волокна [48, 24, 27, 28], реакцию вида «всё-или-ничего» [40, 43], распространение потенциалов последствия (afterpotential) [31]. В основе каждой из этих модификаций лежит разложение трансмембранного тока на отдельные токовые вклады ионных каналов [30, 24, 42, 31] и синаптических лиганд-ионных каналов [62]. Значительным шагом вперёд стал принцип представления нейрона как набора связанных между собой компартментов (compartment) [49, 41]. Каждый компартмент описывает часть клетки, причём крупные части клетки могут состоять из множества компартментов. Например, сома мотонейрона может быть представлена несколькими компартментами [32]. Другим более частым примером является представление аксона млекопитающего в виде чередующихся между собой компартментов отвечающих за миелинизированную часть и перехваты Ранвье [32]. Данный принцип позволяет строить сколь угодно сложное строение нервной клетки и был положен в основу реализации ряда программных пакетов для моделирования нейронных цепей, среди которых и популярный пакет NEURON [56]. Активное использование модификаций уравнений Ходжкина-Хаксли и принципа компартментов привёл к созданию более 1100 построенных моделей нейронов разной степени точности только в одной из баз моделей ModelDB [50].

В целом же, эти модели, называемые нейронами Ходжкина-Хаксли, характеризуются достаточно большим набором параметров, которые необходимо подбирать для каждой конкретной нейронной цепи и задачи.

Известно, что возникновение и распространение потенциала действия обусловлено работой ионных каналов, расположенных в плазматической мембране нейрона [63]. В настоящее время сформировался достаточно большой объём знаний о структуре и работе различных ионных каналов ( $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ ,  $\text{Ca}^{2+}$ ) как чувствительных к внешнему электрическому полю [64], так и чувствительных к определённым типам нейромедиаторов [46]. Эти данные, отражающие современные представления о работе возбудимых волокон, побуждают ряд биофизиков вносить поправки в выражения для ионных токов, что даёт существенно более точные модели отклика отдельных нейронов и, в конечном счёте, всей моделируемой нервной ткани [44, 45]. Одной из активно используемых в настоящий момент времени моделей, учитывающих особенности работы ионных каналов  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ , является модель аксона Schwarz-Reid-Bostock (рус. Шварц-Рейд-Босток) [29, 30], описывающая распространение потенциала активации в человеческом нейроне.

Ионные каналы в целом часто рассматриваются как источник трансмембранного токового шума (канальный шум) [67], который, в свою очередь, является причиной множества явлений в отдельных нейронах и нейронных цепях в целом. Канальный шум изменяет порог чувствительности [68], временные характеристики спайков [69], временные интервалы между отдельными спайками [71], величину стохастического резонанса [72] и влияние на синаптическую интеграцию [73]. Также канальный шум вносит вклад в точность моторных и сенсорных цепей животных [74, 75, 76, 77] и налагает ограничения на размеры нейронов [78]. Для учёта всех этих эффектов необходимо использовать так называемые стохастические модели нейронов. На текущий момент существует два крупных подхода, учитывающих случайную природу изменения состояния ионных каналов: использование нелинейно-связанных непрерывных во времени цепей Маркова (НЦМ) [65] и использование стохастических дифференциальных уравнений (СДУ) [66]. Несмотря на то, что некоторыми авторами точность СДУ ставится под сомнение по сравнению с НЦМ [66] скорость симуляции при использовании СДУ считается выше, чем у НЦМ [66], а сам метод СДУ активно развивается в настоящее время [70].

Отметим, что на текущий момент очень мало работ по моделированию ЭС спинного мозга, использующих стохастические модели нейронов. Особенно это сильно выражено в случае работ по двигательной нейрореабилитации.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя краткий итог вышеизложенному, есть основания полагать, что дальнейшие усилия по гибриднему моделированию электростимуляции спинного мозга стоит развивать в следующих направлениях:

1. Получение универсальной модели напряжённости электрического поля в областях интереса в зависимости от взаимного расположения на дуральной поверхности стимулирующих электродов и величины плотности тока стимуляции. К областям интереса относятся: ядра афферентных и эфферентных нейронных цепей спинного мозга, дорсальные элементы спинного мозга, вентральные элементы спинного мозга.

2. Внедрение функциональных моделей ионных каналов, что послужит созданию более точных биофизических моделей нейронов и, как следствие, более точных моделей нейронных цепей ЦНС. Учитывая значительное различие в результатах между детерминированными и стохастическими моделями нейронов, необходимо учитывать псевдослучайную природу циклов активации-инактивации отдельных ионных каналов. В случае нейронных цепей необходимо учитывать лиганд-ионные каналы, что позволит существенно улучшить поведение модели в области дендритов и сомы.

3. Использование последних модификаций биофизического моделирования нервной ткани совместно с анатомически точной геометрической моделью позволит создать существенно более точные модели ЭС спинного мозга. Это сулит развитие существующих методик ЭС для двигательной нейрореабилитации и методов борьбы с нейропатическими болями. А также обеспечит возможность поиска новых подходов к решению задач двигательной нейрореабилитации и борьбы с нейропатическими болями.

### Список литературы

1. Хейло А. Л., Аганесов А. Г. Электростимуляция спинного мозга (аналитический обзор) // *Клин. и эксперимент. хир. Журн. им. акад. Б.В. Петровского*. 2015. № 1. С. 45–51.
2. The Appropriate Use of Neurostimulation of the Spinal Cord and Peripheral Nervous System for the Treatment of Chronic Pain and Ischemic Diseases: The Neuromodulation Appropriateness Consensus Committee / T. R. Deer, N. Mekhail, D. Provenanzo [et al.] // *Neuromodulation: Technology at the Neural Interface*. 2014. Vol. 17. No. 6. P. 515–550.
3. Altering Conventional to High Density Spinal Cord Stimulation: An Energy Dose–Response Relationship in Neuropathic Pain Therapy / F. Wille, J. S. Breel, E. W. P. Bakker, M. W. Hollmann // *Neuromodulation: Technology at the Neural Interface*. 2017. Vol. 20. No. 1 P. 71–80.
4. Whiting A., Ponce F. A. Closing the Gate with High-Frequency Spinal Cord Stimulation // *World Neurosurgery*. 2016. Vol. 91. P. 257–259.
5. Dorsal-column stimulation in the rehabilitation of patients with multiple sclerosis / L. S. Illis, A. E. Oygur, E. M. Sedgwick, M. A. Awadalla // *Lancet*. 1976. Vol. 307. No. 7974. P. 1383–1386.
6. Characteristics and mechanisms of locomotion induced by intraspinal microstimulation and dorsal root stimulation in spinal cats / D. Barthélemy, H. Leblond, S. Rossignol // *J. Neurophysiol.* 2007. Vol. 97. No. 3. P. 1986–2000.
7. Spinal cord stimulation restores locomotion in animal models of Parkinson’s disease / R. Fuentes, P. Petersson, W. B. Siesser [et al.] // *Science*. 2009. Vol. 323. No. 5921. P. 1578–1582.
8. Transformation of non-functional spinal circuits into functional states after the loss of brain input. / G. Courtine, Y. Gerasimenko, R. Van Den Brand [et al.] // *Nat. Neurosci.* 2009. Vol. 12. No. 10. P. 1333–1342.
9. Effect of epidural stimulation of the lumbosacral spinal cord on voluntary movement, standing, and assisted stepping after motor complete paraplegia: A case study / S. Harkema, Y. Gerasimenko, J. Hodes [et al.] // *Lancet*. 2011. Vol. 377. No. 9781. P. 1938–1947.
10. Restoring Voluntary Control of Locomotion after Paralyzing Spinal Cord Injury / R. van den Brand, J. Heutschi, Q. Barraud [et al.] // *Science*. 2012. Vol. 336. No. 6085. P. 1182–1185.
11. Real-time control of walking using recordings from dorsal root ganglia / B. J. Holinski, D. G. Everaert, V. K. Mushahwar, R. B. Stein // *Journal of neural engineering*. 2013. Vol. 10. No. 5. P. 056008.
12. Mogil J. S. Animal models of pain: progress and challenges // *Nat. Rev. Neurosci.* 2009. Vol. 10. No. 4. P. 283–294.
13. Way J. C., Chalfie M. The mec-3 gene of *Caenorhabditis elegans* requires its own product for maintained expression and is expressed in three neuronal cell types // *Genes Dev.* 1989. Vol. 3. No. 12a. P. 1823–1833.

14. Gonzalez-Nunez V., Rodriguez R. E. The zebrafish : a model to study the endogenous mechanisms of pain // *ILAR J.* 2009. Vol. 50. No. 4. P. 373–386.
15. Drosophila as a tool for studying the conserved genetics of pain / G. Milinkeviciute, C. Gentile, G. G. Neely // *Clin. Genet.* 2012. Vol. 82. No. 4. P. 359–366.
16. Integrating multiple sensory systems to modulate neural networks controlling posture / I. Lavrov, Y. Gerasimenko, J. Burdick, H. Zhong [et al.] // *J. Neurophys.* 2015. Vol. 114. No. 6. P. 3306–3314.
17. Activation of spinal locomotor circuits in the decerebrated cat by spinal epidural and/or intraspinal electrical stimulation / I. Lavrov, P. E. Musienko, V. A. Selionov [et al.] // *Brain Res.* 2015. Vol. 1600. No. 10. P. 84–92.
18. A brain-spine interface alleviating gait deficits after spinal cord injury in primates / M. Capogrosso, T. Milekovic, D. Borton [et al.] // *Nature.* 2016. Vol. 539. No. 7628. P. 284–288.
19. Anatomy of large animal spines and its comparison to the human spine: a systematic review / S. Sheng, X. Wang, H. Xu, G. Zhu, Y. Zhou // *Eur. Spine J.* 2010. Vol. 19. No. 1. P. 46–56.
20. Animal models of chronic pain: advances and challenges for clinical translation / N. E. Burma, H. Leduc-Pessah, C. Y. Fan, T. Trang // *J Neurosci. Res.* 2017. Vol. 95. No. 6. P. 1242–1256.
21. Coburn B., Sin W. K. A theoretical study of epidural electrical stimulation of the spinal cord — Part I: Finite-element analysis of stimulus fields // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1985. Vol. 11. No. 32. P. 971–977.
22. Coburn B. A theoretical study of epidural electrical stimulation of the spinal cord — Part II: Effect on long myelinated fibers // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1985. Vol. 11. No. 32. P. 978–986.
23. Recruitment of dorsal column fibers in spinal cord stimulation: influence of collateral branching / J. J. Strujik, J. Holsheimer, G. G. van der Heide, H. B. K. Boom // *Trans. Biomed. Eng.* 1992. Vol. 39. No. 9. P. 903–912.
24. McNeal D. R. Analysis of a model for excitation of myelinated nerve // *IEEE Trans. Biomed. Eng.* 1976. Vol. 4. No. 23. P. 329–337.
25. Holsheimer J. Which neuronal elements are activated directly by spinal cord stimulation // *Neuromodulation: Technology at the Neural Interface.* 2002. Vol. 5. No. 1. P. 25–31.
26. A computational model for Epidural Electrical Stimulation of Spinal Sensimotor Circuits / M. Capogrosso, N. Wenger, S. Raspopovic [et al.] // *J. Neurosci.* 2013. Vol. 33. No. 49. P. 19326–19340.
27. A quantitative description of membrane currents in rabbit myelinated nerve / S. Y. Chin, J. M. Ritchie, R. B. Rogart, D. Stagg // *J. Physiol.* 1979. Vol. 292. No. 1. P. 149–166.
28. Modeling of mammalian myelinated nerve for functional neuromuscular stimulation / J. D. Sweeney, J. T. Mortimer, D. Durand // *IEEE 9th Ann. Conf. Eng. Med. Biol. Soc.* 1987. P. 1577–1578.
29. The role of slow potassium current in nerve conduction block induced by high-frequency biphasic electrical current / H. Liu, J. R. Roppolo, W. C. de Groat, C. Tai // *IEEE Trans Biomed Eng.* 2009. Vol. 56. No. 1. P. 137–146.
30. Schwarz J. R., Reid G, Bostock H. Action potentials and membrane currents in the human node of Ranvier // *Pflugers Arch.* 1995. Vol. 430. No. 2. P. 283–292.
31. McIntyre C. C., Richardson A. G., Grill W. M. Modeling the excitability of mammalian nerve fibers: influence of afterpotentials on the recovery cycle // *J Neurophysiol.* 2002. Vol. 87. No. 2. P. 995–1006.
32. McIntyre C. C., Grill W. M. Selective microstimulation of central nervous system neurons // *Ann Biomed Eng.* 2000. Vol. 28. No. 3. P. 219–233.
33. Bachar M., Batzel J., Ditlevsen S. *Stochastic Biomathematical Models with Applications to Neuronal Modeling.* Springer, 2013. 206 p.
34. Sirovich R., Testa L. A new firing paradigm for integrate and fire stochastic neuronal models. // *Math. Biosc. and Eng.* 2016. Vol. 13. No. 3. P. 597–611.
35. Kobayashi R., Shinomoto S., Lansky P. Estimation of Time-Dependent Input from Neuronal Membrane Potential // *Neural Computation.* 2011. Vol. 23. No. 12. P. 3070–3093.
36. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L. *The finite element method (Vol. 3).* McGraw-hill. 1977. 689 p.
37. Mechanisms Underlying the Neuromodulation of Spinal Circuits for Correcting Gait and Balance Deficits after Spinal Cord Injury / E. M. Moraud, M. Capogrosso, E. Formento, N. Wenger [et al.] // *Neuron.* 2016. Vol. 89. No. 4. P. 814–828.

38. Computational analysis of kilohertz frequency spinal cord stimulation for chronic pain management / S. F. Lempka, C. C. McIntyre, K. L. Kilgore, A. G. Machado // *J. Amer. Soc. Anesth.* 2015. Vol. 122. No. 6. P. 1362–1376.
39. High-Frequency Stimulation of Dorsal Column Axons: Potential Underlying Mechanism of Paresthesia-Free Neuropathic Pain Relief / J. E. Arle, L. Mei, K. W. Carlson, J. L. Shils // *Neuromodulation.* 2016. Vol. 19. No. 4. P. 385–397.
40. Rattay F. Analysis of models for external stimulation of axons // *IEEE Trans Biomed Eng.* 1986. Vol. 33. No. 10. P. 974–977.
41. Rattay F. The basic mechanism for the electrical stimulation of the nervous system // *Neuroscience.* 1999. Vol. 89. No. 2. P. 335–346.
42. Rattay F. *Electrical nerve stimulation: theory, experiments and applications.* Springer. 1990. 264 p.
43. Rattay F, Greenberg R, Resatz S. Neuron modeling / Finn W.E., LoPresti P. G. (eds) // *Handbook of neuroprosthetic methods.* CRC Press. 2002. P. 39–71.
44. Rattay F. Research in Electrical Stimulation Fundamentals // *Artificial Organs.* 2013. Vol. 37. No. 12. P. 1023–1026.
45. Rattay F., Danner S. M., Hofstoetter U. S., Minassian K. Finite Element Modeling for Extracellular Stimulation / Jaeger D., Jung R. (eds) // *Encyclopedia of Computational Neuroscience.* Springer. 2015. P. 1186–1195.
46. Glutamate receptor ion channels: structure, regulation, and function / S. F. Traynelis, L. P. Wollmuth, C. J. McBain [et al.] // *Pharmacol Rev.* 2010. Vol. 62. No. 3. P. 405–496.
47. Hodgkin A. L., Huxley A. F. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *J. Physiol.* 1952. Vol. 117. No. 4. P. 500–544.
48. Frankenhaeuser B., Huxley A. F. The action potential in the myelinated nerve fibre of *Xenopus laevis* as computed on the basis of voltage clamp data // *J Physiol.* 1964. Vol. 171. No. 2. P. 302–315.
49. Rall W., Shepherd G. M. Theoretical reconstruction of field potentials and dendrodendritic synaptic interactions in olfactory bulb // *J. Neurophysiol.* 1968. Vol. 31. No. 6. P. 884–915.
50. Twenty years of ModelDB and beyond: building essential modeling tools for the future of neuroscience / R. A. McDougal, T. M. Morse, T. Carnevale [et al.] // *J. Comput. Neurosci.* 2017. Vol. 42. No. 1. P. 1–10.
51. Krames E. S. The Role of the Dorsal Root Ganglion in the Development of Neuropathic Pain // *Pain Medicine.* 2014. Vol. 15. No. 10. P. 1669–1685.
52. Cellular and molecular mechanisms of pain / A. I. Basbaum, D. M. Bautista, G. Scherrer, D. Julius // *Cell.* 2009. Vol. 139. No. 2. P. 267–284.
53. Nowak L. G., Bullier J. Axons, but not cell bodies, are activated by electrical stimulation in cortical gray matter I. Evidence from chronaxie measurements // *J. Exp Brain Res.* 1998. Vol. 118. No. 4. P. 477–488.
54. Nowak L. G., Bullier J. Axons, but not cell bodies, are activated by electrical stimulation in cortical gray matter II. Evidence from selective inactivation of cell bodies and axon initial segments // *J. Exp Brain Res.* 1998. Vol. 118. No. 4. P. 489–500.
55. Kumaravelu K., Brocker D. T., Grill W. M. A biophysical model of the cortex-basal ganglia-thalamus network in the 6-OHDA lesioned rat model of Parkinson's disease // *J. Comput. Neurosci.* 2016. Vol. 40. No. 2. P. 207–229.
56. Carnevale N. T., Hines M. L. The NEURON simulation environment in epilepsy research / Soltesz I., Staley K. (eds) // *Computational Neuroscience in Epilepsy.* Elsevier, 2008. P. 18–33.
57. Cervical nerve root avulsion in brachial plexus injuries: magnetic resonance imaging classification and comparison with myelography and computerized tomography myelography / K. Doi, K. Otsuka, Y. Okamoto [et al.] // *J. Neurosurg: Spine.* 2002. Vol. 96. No. 3. P. 277–284.
58. Jimbo Y., Kawana A. Electrical stimulation and recording from cultured neurons using a planar electrode array // *Bioelectroch. and Bioener.* 1992. Vol. 29. No. 2. P. 193–204.
59. Interfacing neurons with carbon nanotubes: electrical signal transfer and synaptic stimulation in cultured brain circuits / A. Mazzatenta, M. Giugliano, S. Campidelli [et al.] // *J. Neurosci.* 2007. Vol. 27. No. 26. P. 6931–6936.
60. Simulation of epiretinal prostheses — evaluation of geometrical factors affecting stimulation thresholds / H. Kasi, W. Hasenkamp, G. Cosendai [et al.] // *J Neuroeng Rehabil.* 2011. Vol. 8. No. 1. P. 44.

61. Closed-loop neuromodulation of spinal sensorimotor circuits controls refined locomotion after complete spinal cord injury / N. Wenger, E. M. Moraud, S. Raspopovic [et al.] // *Sci. Transl. Med.* 2014. Vol. 6. No. 255. P. 255ra133.
62. Roth A., van Rossum M. C. W. *Modeling Synapses* / Schutter E. D (ed) // *Computational modeling methods for neuroscientists*. The MIT Press, 2009. P. 139–160.
63. Hille B. *Ion channels of excitable membranes*. Sinauer. 2001. 814 p.
64. Catterall W. A. Voltage-gated sodium channels at 60: structure, function and pathophysiology // *J Physiol.* 2012. Vol. 590. No. 11. P. 2577–2589.
65. Groff J., DeRemigio H., Smith G. Markov chain models of ion channels and calcium release sites. In: Lord G.J., Laing C. (eds) *Stochastic Methods in Neuroscience*. Oxford University Press. 2010. P. 29–64.
66. Stochastic differential equation models for ion channel noise in Hodgkin-Huxley neurons / J. H. Goldwyn, N. S. Imennov, M. Famulare, E. Shea-Brown // *Phys. Rev. E.* 2011. Vol. 83. No. 4. P. 041908.
67. Sakmann B., Neher E. *Single-channel Recording*. Springer. 1995. 700 p.
68. Noise from voltage-gated ion channels may influence neuronal dynamics in the entorhinal cortex / J. A. White, R. Klink, A. Alonso, A. R. Kay // *J. Neurophysiol.* 1998. Vol. 80. No. 1. P. 262–269.
69. Van Rossum M. C., O'Brien B. J., Smith R. G. Effects of noise on the spike timing precision of retinal ganglion cells // *J. Neurophys.* 2003. Vol. 89. No. 5. P. 2406–2419.
70. Huang Y., Riidiger S., Shuai J. Accurate Langevin approaches to simulate Markovian channel dynamics // *Phys. Biol.* 2015. Vol. 12. No. 6. P. 061001.
71. Rowat P. Interspike interval statistics in the stochastic Hodgkin-Huxley model: Coexistence of gamma frequency bursts and highly irregular firing // *Neural Comput.* 2007. Vol. 19. No. 5. P. 1215–1250.
72. Schmid G., Goychuk I., Hanggi P. Effect of channel block on the spiking activity of excitable membranes in a stochastic Hodgkin-Huxley model // *Phys. Bio.* 2004. Vol. 1. No. 2. P. 61–71.
73. Cannon R. C., O'Donnell C., Nolan M. F. Stochastic ion channel gating in dendritic neurons: morphology dependence and probabilistic synaptic activation of dendritic spikes // *PloS Comput. Biol.* 2010. Vol. 6. No. 8. P. e1000886. [электронный ресурс] URL: <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000886> (дата обращения: 04.02.2018).
74. White J. A., Rubinstein J. T., Kay A. R. Channel noise in neurons // *Trends Neurosci.* 2000. Vol. 23. No. 3. P. 131–137.
75. Faisal A. A., Selen L. P. J., Wolpert D. M. Noise in the nervous system // *Nat. Rev. Neurosci.* 2008. Vol. 9. No. 4. P. 292–303.
76. Balasubramanian V., Kimber D., Berry M. J. Metabolically efficient information processing // *Neural Comput.* 2001. Vol. 13. No. 4. P. 799–815.
77. de Polavieja G. G. Errors drive the evolution of biological signalling to costly codes // *J. Theor. Biol.* 2002. Vol. 214. No. 4. P. 657–664.
78. Faisal A. A., White J. A., Laughlin S. B. Ion-channel noise places limits on the miniaturization of the brain's wiring // *Curr. Biol.* 2005. Vol. 15. No. 12. P. 1143–1149.

---

## PRINCIPLES OF MODELING OF ELECTRICAL STIMULATION OF THE SPINAL CORD

*Glushenkov A. N., Grigoriev P. E.*

*Physics and Technology Institute, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

\*E-mail: [an.glushenkov@yandex.ru](mailto:an.glushenkov@yandex.ru)

In the review article, the principles of simulation of electrical stimulation of the spinal cord are considered. Differences of the presented models are indicated, both at the level of individual simulated elements of the spinal cord and at the level of individual neurons. It is shown that modern models do not take into account the morphological features of dorsal

and ventral elements. Often, dorsal and ventral elements may not be present in the model at all, because they are considered as non-essential. From the point of view of the biophysical model of neurons, it is shown that most models use non-stochastic models of neurons. The most frequently used models are CRSS (Chin-Ritchie-Stagg-Sweeney) and MRG-neuron (McIntyre-Grill) models, which use simplified simulation of the ion channels. Reviewed the stochastic models of the neurons, which simulate the noise of the ion channels.

**Keywords:** electrical stimulation, epidural stimulation, neuron, neuron models

### References

1. A. L. Kheilo, A. G. Aganesov, *Clinical and experimental surgery* **1**, No. 7, 45–51 (2015) [in Russian].
2. T. R. Deer, N. Mekhail, D. Provenzano, J. Pope, E. Krames, M. Leong, R. M. Levy, D. Abejon, E. Buchser, A. Burton, A. Buvanendran, K. Candido, D. Caraway, M. Cousins, M. DeJongste, S. Diwan, S. Eldabe, K. Gatzinsky, R. D. Foreman, S. Hayek, P. Kim, T. Kinfe, D. Kloth, K. Kumar, S. Rizvi, S. P. Lad, L. Liem, B. Linderth, S. Mackey, G. McDowell, P. McRoberts, L. Poree, J. Prager, L. Raso, R. Rauck, M. Russo, B. Simpson, K. Slavin, P. Staats, M. Stanton-Hicks, P. Verrills, J. Wellington, K. Williams, R. North, *Neuromodulation : Technology at the Neural Interface* **17**, No. 6, 515–550 (2014).
3. F. Wille, J. S. Breel, E. W. P. Bakker, M. W. Hollmann, *Neuromodulation : Technology at the Neural Interface* **20**, No. 1, 71–80 (2017).
4. A. Whiting, F. A. Ponce, *World Neurosurgery* **91**, 257–259 (2016).
5. L. S. Illis, A. E. Oygur, E. M. Sedgwick, M. A. Awadalla, *Lancet* **307**, No. 7974, 1383–1386 (1976).
6. D. Barthélemy, H. Leblond, S. Rossignol, *J. Neurophysiol.* **97**, No. 3, 1986–2000 (2007).
7. R. Fuentes, P. Petersson, W. B. Siesser, M. G. Caron, M. A. Nicolelis, *Science* **323**, No. 5921, 1578–1582 (2009).
8. G. Courtine, Y. Gerasimenko, R. Van den Brand, A. Yew, P. Musienko, H. Zhong, B. Song, Y. Ao, R. M. Ichiyama, I. Lavrov, R. R. Roy, M. V. Sofroniew, V. R. Edgerton, *Nat. Neurosci* **12**, No. 10, 1333–1342 (2009).
9. S. Harkema, Y. Gerasimenko, J. Hodes, J. Burdick, C. Angeli, Y. Chen, C. Ferreira, A. Willhite, E. Rejc, R. G. Grossman, V. R. Edgerton, *Lancet* **377**, No. 9781, 1938–1947 (2011).
10. R. V. D. Brand, J. Heutschi, Q. Barraud, J. DiGiovanna, K. Bartholdi, M. Huerlimann, L. Friedli, I. Vollenweider, E. M. Moraud, S. Duis, N. Dominici, *Science* **336**, No. 6085, 1182–1185 (2012).
11. B. J. Holinski, D. G. Everaert, V. K. Mushahwar, R. B. Stein, *Journal of neural engineering* **10**, No. 5, p. 056008 (2013).
12. J. S. Mogil, *Nat. Rev. Neurosci* **10**, No. 4, 283–294 (2009).
13. J. C. Way, M. Chalfie, *Genes Dev* **3**, No. 12a, 1823–1833 (1989).
14. V. Gonzalez-Nunez, R. E. Rodriguez, *ILAR J* **50**, No. 4, 373–386 (2009).
15. G. Milinkeviciute, C. Gentile, G. G. Neely, *Clin. Genet.* **82**, No. 4, 359–366 (2012).
16. I. Lavrov, Y. Gerasimenko, J. Burdick, H. Zhong, R. R. Roy, V. R. Edgerton, *J. Neurophys.* **114**, No. 6, 3306–3314 (2015).
17. I. Lavrov, P. E. Musienko, V. A. Selionov, S. Zdunowski, R. R. Roy, V. R. Edgerton, Y. Gerasimenko, *Brain Res.* **1600**, No. 10, 84–92 (2015).
18. M. Capogrosso, T. Milekovic, D. Borton, F. Wagner, E. M. Moraud, J. B. Mignardot, N. Buse, J. Gandar, Q. Barraud, D. Xing, E. Rey, S. Duis, Y. Jianzhong, W. K. D. Ko, Q. Li, P. Detemple, T. Denison, S. Micera, E. Bezard, J. Bloch, G. Courtine, *Nature* **539**, No. 7628, 284–288 (2016).
19. S. Sheng, X. Wang, H. Xu, G. Zhu, Y. Zhou, *Eur. Spine J.* **19**, No. 1, 46–56 (2010).
20. N. E. Burma, H. Leduc-Pessah, C. Y. Fan, T. Trang, *J. Neurosci. Res.* **95**, No. 6, 1242–1256 (2017).
21. B. Coburn, W. K. Sin, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **11**, No. 32, 971–977 (1985).
22. B. Coburn, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **11**, No. 32, 978–986 (1985).
23. J. J. Strujik, J. Holsheimer, G. G. van der Heide, H. B. K. Boom, *Trans. Biomed. Eng.* **39**, No. 9, 903–912 (1992).
24. D. R. McNeal, *IEEE Trans. Biomed. Eng.* **4**, No. 23, 329–337 (1976).

25. J. Holsheimer, *Neuromodulation : Technology at the Neural Interface* **5**, No. 1, 25–31 (2002).
26. M. Capogrosso, N. Wenger, S. Raspopovic, P. Musienko, J. Beauparlant, L. B. Luciani, G. Courtine, S. Micera, *J. Neurosci.* **33**, No. 49, 19326–19340 (2013).
27. S. Y. Chin, J. M. Ritchie, R. B. Rogart, D. Stagg, *J. Physiol.* **292**, No. 1, 149–166 (1979).
28. J. D. Sweeney, J. T. Mortimer, D. Durand, *IEEE 9th Ann. Conf. Eng. Med. Biol. Soc.*, Pp. 1577–1578 (1987).
29. H. Liu, J. R. Roppolo, W. C. de Groat, C. Tai, *IEEE Trans Biomed Eng* **56**, No. 1, 137–146 (2009).
30. J. R. Schwarz, G. Reid, H. Bostock, *Pflugers Arch* **430**, No. 2, 283–292 (1995).
31. C. C. McIntyre, A. G. Richardson, W.M. Grill, *J Neurophysiol* **87**, No. 2, 995–1006 (2002).
32. C. C. McIntyre, W. M. Grill, *Ann Biomed Eng* **28**, No. 3 219–233 (2000).
33. M. Bachar, J. Batzel, S. Ditlevsen. *Stochastic Biomathematical Models with Applications to Neuronal Modeling* (Springer, 2013) p. 206.
34. R. Sirovich, L. Testa, *Math. Biosc. and Eng.* **13**, No. 3, 597–611 (2016).
35. R. Kobayashi, S. Shinomoto, P. Lansky, *Neural Computation* **23**, No. 12, 3070–3093 (2011).
36. O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. *The finite element method (Vol.3)* (McGraw-hill, 1977).
37. E. M. Moraud, M. Capogrosso, E. Formento, N. Wenger, J. DiGiovanna, G. Courtine, S. Micera, *Neuron* **89**, No. 4, 814–828 (2016).
38. S. F. Lempka, C. C. McIntyre, K. L. Kilgore, A. G. Machado, *The Journal of the American Society of Anesthesiologists* **122**, No. 6, 1362–1376 (2015).
39. J. E. Arle, L. Mei, K. W. Carlson, J. L. Shils, *Neuromodulation* **19**, No. 4, 385–397 (2016).
40. F. Rattay, *IEEE Trans Biomed Eng.* **33**, No. 10, 974–977 (1986).
41. F. Rattay, *Neuroscience* **89**, No. 2, 335–346 (1999).
42. F. Rattay, *Electrical nerve stimulation : theory, experiments and applications* (Springer, 1990) p. 264.
43. F. Rattay, R. Greenberg, S. Resatz, “Neuron modeling” in *Handbook of neuroprosthetic methods* (W.E. Finn, P.G. LoPresti, eds. ; CRC Press, 2002) Pp. 39–71.
44. F. Rattay, *Artificial Organs* **37**, Vol. 12, 1023–1026 (2013).
45. F. Rattay, S. M. Danner, U. S. Hofstoetter, K. Minassian, “Finite Element Modeling for Extracellular Stimulation” in *Encyclopedia of Computational Neuroscience* (D. Jaeger, R. Jung, eds. ; Springer, 2015) Pp. 1186–1195.
46. S. F. Traynelis, L. P. Wollmuth, C. J. McBain, F. S. Menniti, K. M. Vance, K. K. Ogden, K. B. Hansen, H. Yuan, S. J. Myers, R. Dingledine, *Pharmacol Rev* **62**, No. 3, 405–496 (2010).
47. A. L. Hodgkin, A. F. Huxley., *J. Physiol* **117**, No. 4, 500–544 (1952).
48. B. Frankenhaeuser, A. F. Huxley, *J. Physiol* **171**, No. 2, 302–315 (1964).
49. W. Rall, G. M. Shepherd, *J. Neurophysiol* **31**, No. 6, 884–915 (1968).
50. R. A. McDougal, T. M. Morse, T. Carnevale, L. Marengo, R. Wang, M. Migliore, P. L. Miller, G. M. Shepherd, M. L. Hines, *J. Comput. Neurosci* **42**, No. 1, 1–10 (2016).
51. E. S. Krames, *Pain Medicine* **15**, No. 10, 1669–1685 (2014).
52. A. I. Basbaum, D. M. Bautista, G. Scherrer, D. Julius, *Cell* **139**, No. 2, 267–284 (2009).
53. L. G. Nowak, J. Bullier, *J. Exp Brain Res* **118**, No. 4, 477–488 (1998).
54. L. G. Nowak, J. Bullier, *J. Exp Brain Res* **118**, No. 4, 489–500 (1998).
55. K. Kumaravelu, D. T. Brocker, W. M. Grill, *J. Comput. Neurosci.* **40**, No. 2, 207–229 (2016).
56. N. T. Carnevale, M. L. Hines, “The NEURON simulation environment in epilepsy research” in *Computational Neuroscience in Epilepsy* (I. Soltesz, K. Staley eds. ; Elsevier, 2008) Pp. 18–33.
57. K. Doi, K. Otsuka, Y. Okamoto, H. Fujii, Y. Hattori, A. Baliarsing, *J. Neurosurg Spine* **96**, No. 3, 277–284 (2002).
58. Y. Jimbo, A. Kawana, *Bioelectroch. and Bioener.* **29**, No. 2, 193–204 (1992).
59. A. Mazzatenta, M. Giugliano, S. Campidelli, L. Gambazzi, L. Businaro, H. Markram, M. Prato, L. Ballerini, *J. Neurosci.* **27**, No. 26, 6931–6936 (2007).
60. H. Kasi, W. Hasenkamp, G. Cosendai, A. Bertsch, P. Renaud, *J Neuroeng Rehabil* **8**, No. 1, 44 (2011).
61. N. Wenger, E. M. Moraud, S. Raspopovic, M. Bonizzato, J. DiGiovanna, P. Musienko, M. Morari, S. Micera, G. Courtine, *Sci. Transl. Med.* **6**, No. 255, 255ra133 (2014).
62. A. Roth, M. C. W. van Rossum, “Modeling Synapses” in *Computational modeling methods for neuroscientists* (E.D. Schutter. ed. ; The MIT Press, 2009) Pp. 139–160.
63. B. Hille, *Ion channels of excitable membranes* (Sinauer, 2001).

64. W. A. Catterall, *J Physiol.* **590**, No. 11, 2577–2589 (2012).
65. J. Groff, H. DeRemigio, G. Smith, “Markov chain models of ion channels and calcium release sites” in *Stochastic Methods in Neuroscience* (G. J. Lord, C. Laing, ed.; Oxford University Press, 2010) Pp. 29–64.
66. J. H. Goldwyn, N. S. Imennov, M. Famulare, E. Shea-Brown, *Phys. Rev. E* **83**, No. 4, 041908 (2011).
67. B. Sakmann, E. Neher, *Single-channel Recording* (New York, 1995).
68. J. A. White, R. Klink, A. Alonso, A. R. Kay, *J. Neurophysiol.* **80**, No. 5, 262–269 (1998).
69. M. C. Van Rossum, B. J. O'Brien, R. G. Smith, *J. Neurophysiol.* **89**, No. 5, 2406–2419 (2003).
70. Y. Huang, S. Riidiger, J. Shuai, *Phys. Biol.* **12**, No. 6, 061001 (2015).
71. P. Rowat, *Neural Comput.* **19**, No. 5, 1215–1250 (2007).
72. G. Schmid, I. Goychuk, P. Hanggi, *Phys. Bio.* **1**, No. 2, 61–71 (2004).
73. R. C. Cannon, C. O'Donnell, M. F. Nolan, *PloS Comput. Biol.* **6**, No. 8, e1000886 (2010). Available: <https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1000886>
74. J. A. White, J. T. Rubinstein, A. R. Kay, *Trends Neurosci.* **23**, No. 3, 131–137 (2000).
75. A. A. Faisal, L. P. J. Selen, D. M. Wolpert, *Nat. Rev. Neurosci.* **9**, No. 4, 292–303 (2008).
76. V. Balasubramanian, D. Kimber, M. J. Berry, *Neural Comput.* **13**, No. 4, 799–815 (2001).
77. G. G. de Polavieja, *J. Theor. Biol.* **214**, No. 4, 657–664 (2002).
78. A. A. Faisal, J. A. White, S. B. Laughlin, *Curr. Biol.* **15**, No. 12, 1143–1149 (2005).

*Поступила в редакцию 01.11.2017 г. Принята к публикации 22.12.2017 г.  
Received November 01, 2017. Accepted for publication December 22, 2017*

## СОДЕРЖАНИЕ

### ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

1. Квадратичная форма для аксиально-симметричной, замкнутой нуль-струны, движущейся без изменения формы  
*Леяков А. П., Осокин К. С.* ..... 5
2. Простые фотонные кристаллы как средство существования оптических кварков  
*Воляр А. В., Алексеев К. Н., Егоров Ю. А., Акимова Я. Е.*..... 23
3. Экспериментальное исследование процесса демультимплексирования по длинам волн, после прохождения волокна с  $V = 3.8$ , уплотненного вихревыми пучками с  $l = \pm 1$  и  $s = \pm 1$   
*Халилов С. И., Ильясова А. А., Рыбась А. Ф.*..... 38
4. Визуализация кластерной структуры воды с помощью лазерного излучения  
*Шостка В. И., Шостка Н. В., Доненко И. Л.* ..... 44
5. Линейные и нелинейные моды полоскового волновода  
*Перескоков В. С., Дзедолик И. В.* ..... 53
6. Радиопоглощающая структура на основе резистивно-емкостных пленок  
*Пономаренко В. И., Лагунов И. М., Батраков П. А.* ..... 71

### БИОФИЗИКА И МЕДИЦИНСКАЯ ФИЗИКА

7. Принципы моделирования электростимуляции спинного мозга  
*Глушенков А. Н., Григорьев П. Е.*..... 81
- СОДЕРЖАНИЕ ..... 94

## TABLE OF CONTENTS

### PHYSICS AND MATHEMATICS

1. **Quadratic form for axially symmetric closed null string, moving without change of its shape**  
*Lelyakov A. P., Osokin C. S.* .....5
2. **Simple photonics crystals as a medium for existence of optical quarks**  
*Volyar A. V., Alexeyev C. N., Egorov Yu. A., Akimova Ya. E.* .....23
3. **Experimental study of the process of demultiplexing the wavelengths, after passing through a fiber with  $V = 3.8$ , compacted vortex beams with  $l = \pm 1$  and  $s = \pm 1$**   
*Halilov S. I., Ilyasova A. A., Rubass A. F.* .....38
4. **Visualization of the cluster water structure with laser radiation**  
*Shostka V. I., Shostka N. V., Donenko I. L.* .....44
5. **Linear and nonlinear modes of strip waveguide**  
*Pereskokov V. S., Dzedolik I. V.* .....53
6. **A radar absorbing structure on the basis of resistant-capacitive films**  
*Ponomarenko V. I., Lagunov I. M., Batrakov P. A.* .....71

### BIOPHYSICS AND MEDICAL PHYSICS

7. **Principles of modeling of electrical stimulation of the spinal cord**  
*Glushenkov A. N., Grigoriev P. E.* .....81
- TABLE OF CONTENTS**.....95

Научное периодическое издание, журнал  
Scientific periodical, journal

**Вестник Физико-технического института Крымского  
федерального университета имени В. И. Вернадского**  
**Journal of Physics and Technology Institute**  
**of V. I. Vernadsky Crimean Federal University**

**Том 1 (67–69), № 3**  
**Volume 1 (67–69), No. 3**

**Редакция:**

д-р физ.-мат. наук, проф. Бержанский В. Н. – главный редактор  
канд. физ.-мат. наук, доц. Глумова М. В. – заместитель главного редактора  
канд. физ.-мат. наук Михайлова Т. В. – ответственный секретарь  
Осокин К. С. – технический редактор, корректор

**Компьютерная верстка** – Осокин К. С., Михайлова Т. В.

**Печатается по решению Научно-технического совета Крымского федерального  
университета имени В. И. Вернадского, протокол № 3 от «03» октября 2018 г.**

---

Подписано в печать 03.10.2018. Формат 70×100/16.  
7,8 усл. п. л. 4,17 уч.-изд. л. Тираж 50 экз. Заказ № НП/242.  
Подписной индекс издания в каталоге агентства «Роспечать»  
64999. Цена 300 руб. Дата выхода в свет 30.01.2019.  
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности  
ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского»  
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7

---

**Адрес редакции:** 295007, Республика Крым, г. Симферополь,  
пр-т Академика Вернадского, д. 4  
**E-mail:** [journal.phys.tech@cfuv.ru](mailto:journal.phys.tech@cfuv.ru)  
**Web-site:** <http://jphystech.cfuv.ru/>  
**Тел.:** +7 (3652) 51-70-95