



ISSN 2520-6915

# ВЕСТНИК

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА  
КРЫМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА  
имени В.И. ВЕРНАДСКОГО

Том 1 (67-69)

№ 2  
2017

**ВЕСТНИК**  
**ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА**  
**КРЫМСКОГО ФЕДЕРАЛЬНОГО**  
**УНИВЕРСИТЕТА имени В. И. ВЕРНАДСКОГО**

**Том 1 (67–69), № 2**

**Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского**  
**Симферополь**  
**2017**

---

**Редакционная коллегия журнала**

<i>Бержанский В. Н.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф., <b>главный редактор</b>	<i>Дзедолик И. В.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.
<i>Глумова М. В.</i> , канд. физ.-мат. наук, доц., <b>заместитель главного редактора</b>	<i>Милюков В. В.</i> , канд. техн. наук, доц.
<i>Михайлова Т. В.</i> , канд. физ.-мат. наук, <b>ответственный секретарь</b>	<i>Полулях С. Н.</i> , д-р физ.-мат. наук, доц.
<i>Алексеев К. Н.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.	<i>Стругацкий М. Б.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.
<i>Бекиров Э. А.</i> , д-р техн. наук, проф.	<i>Сосновский Ю. В.</i> , канд. техн. наук, доц.
<i>Воляр А. В.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.	<i>Старостенко В. В.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.
<i>Григорьев П. Е.</i> , д-р биол. наук, проф.	<i>Фридман Ю. А.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.
	<i>Шапошников А. Н.</i> , канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр.
	<i>Яценко А. В.</i> , д-р физ.-мат. наук, проф.

---

Научное периодическое издание, журнал  
**Вестник Физико-технического института Крымского федерального  
университета имени В. И. Вернадского**  
**Том 1 (67–69), № 2**

*Историческим предшественником журнала «Вестник Физико-технического института Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского» является научный журнал «Ученые записки Таврического национального университета имени В. И. Вернадского. Серия: Физико-математические науки». Журнал был основан в 1918 г. как «Известия Таврического университета». За прошедшее столетие название журнала менялось несколько раз в связи с преобразованиями университета*

**Печатается по решению Научно-технического совета Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского, протокол № 3 от «03» октября 2018 г.**

**Адрес редакции:** 295007, Республика Крым, г. Симферополь,  
пр-т Академика Вернадского, д. 4  
**E-mail:** [journal.phys.tech@cfuv.ru](mailto:journal.phys.tech@cfuv.ru)  
**Web-site:** <http://jphystech.cfuv.ru/>  
**Тел.:** +7 (3652) 51-70-95

**JOURNAL**  
**OF PHYSICS AND TECHNOLOGY INSTITUTE**  
**OF V. I. VERNADSKY CRIMEAN**  
**FEDERAL UNIVERSITY**

**Volume 1 (67–69), No. 2**

**V. I. Vernadsky Crimean Federal University**  
**Simferopol**  
**2017**

---

**Journal Editorial Board**

<i>V. N. Berzhansky</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof., <b>Editor-in-Chief</b>	<i>I. V. Dzedolik</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.
<i>M. V. Glumova</i> , Ph.D. (Phys. & Math.), Ass. Prof., <b>Deputy Editor-in-Chief</b>	<i>V. V. Milyukov</i> , Ph.D. (Technical Sc.), Ass. Prof.
<i>T. V. Mikhailova</i> , Ph.D. (Phys. & Math.), <b>Assistant Editor</b>	<i>S. N. Polulyakh</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Ass. Prof.
<i>C. N. Alexeyev</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.	<i>M. B. Strugatsky</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.
<i>E. A. Bekirov</i> , Dr. of Sc. (Technical Sc.), Prof.	<i>Yu. V. Sosnovsky</i> , Ph.D. (Technical Sc.), Ass. Prof.
<i>A. V. Volyar</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.	<i>V. V. Starostenko</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.
<i>P. E. Grigoriev</i> , Dr. of Sc. (Biology), Prof.	<i>Yu. A. Fridman</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.
	<i>A. N. Shaposhnikov</i> , Ph.D. (Phys. & Math.), Senior Researcher Degree
	<i>A. V. Yatsenko</i> , Dr. of Sc. (Phys. & Math.), Prof.

---

Scientific periodical, journal

**Journal of Physics and Technology Institute  
of V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Volume 1 (67–69), No. 2**

*The historical predecessor of journal “Journal of Physics and Technology Institute of V. I. Vernadsky Crimean Federal University” is scientific journal “Scientific Notes of Taurida National V. I. Vernadsky University. Series: Physics and Mathematics Sciences”. The journal was founded in 1918 as “Annales de l’Universite de Tauride”. Over the past century, the journal title has changed several times due to the university reforms*

**Published by the decision of Scientific and Technical Council of V. I. Vernadsky  
Crimean Federal University, protocol No. 3 issued 03 October 2018**

**Address of Editorial Board:** 295007, Republic of Crimea, Simferopol,  
4 Vernadskogo Prospekt

**E-mail:** [journal.phys.tech@cfuv.ru](mailto:journal.phys.tech@cfuv.ru)

**Web-site:** <http://jphystech.cfuv.ru/>

**Phone.:** +7 (3652) 51-70-95

# ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

## PHYSICS AND MATHEMATICS

*Вестник Физико-технического института  
Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского  
Том 1 (67–69). № 2. 2017. С. 5–18  
Journal of Physics and Technology Institute of V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Volume 1 (67–69). No. 2. 2017. P. 5–18*

УДК 539.391+514.764.2

Памяти Р.-Д. А. Бабаджан

### ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ, РАДИАЛЬНО УВЕЛИЧИВАЮЩЕЙ СВОЙ РАЗМЕР

**Бабаджан Р.-Д. А., Леляков А. П.\***

*Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия  
\*E-mail: [lelyakov\\_a\\_p@cfuv.ru](mailto:lelyakov_a_p@cfuv.ru)*

Предложен вид функции распределения, описывающей движение скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой области» и радиально увеличивающей свой размер. Найдены условия, при которых, в пределе сжатия скалярного поля в одномерный объект (нуль-струну), компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии-импульса замкнутой нуль-струны движущейся по той же траектории.

**Ключевые слова:** нуль-струна, гравитационное поле, функция распределения.

**PACS:** 04.60.CF

#### ВВЕДЕНИЕ

В низкотемпературных системах конденсированного состояния существует много примеров линейных топологических дефектов, например, вихри в сверхтекучем гелии или в атомном Бозе-Эйнштейновском конденсате. Подобные структуры обычно возникают в результате спонтанного нарушения симметрии при фазовых переходах в низкотемпературные фазы.

Космические струны – это аналогичные объекты, которые могли быть сформированы в ранней Вселенной. Они могли образовываться в процессе нарушающих симметрию фазовых переходов предсказанных моделями физики частиц, например, модели, ассоциируемые со спонтанным нарушением симметрии в Теории Великого Объединения [1–5]. Космические струны могут достигать космологических размеров и, несмотря на чрезвычайно небольшую толщину, они достаточно массивны, чтобы давать заметные гравитационные эффекты [6–9].

Нуль-струны реализуют предельный случай нулевого натяжения для космической струны [10–13] (т.е. описывают предельный случай, в котором точки струны могут взаимодействовать только с окружающим (внешним) гравитационным полем (но не друг с другом)). Нуль-струны могли образовываться на ранних этапах эволюции Вселенной и, таким образом, возможно, участвовали в процессах формирования структуры наблюдаемой Вселенной.

Так, в работе [13] была рассмотрена возможность нуль-струнного механизма инфляции для случая D-мерных пространств Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ). В этой работе была отмечена возможность существования фазы идеального газа нуль-струн (сжимающихся или расширяющихся) и описываемых точным уравнением состояния

$$\rho = P(D-1)$$

Рассматривая эту фазу газа нуль-струн как доминантный источник гравитации в пространствах ФРУ были вычислены возможные скэйлинговые факторы  $R(t)$ :

$$R_I(t) = [q \cdot (t_c - t)]^{2/D}, \quad t < t_c,$$

$$R_{II}(t) = [q \cdot (t - t_c)]^{2/D}, \quad t > t_c,$$

где  $q = (4\pi G_D A / (D-1)(D-2))^{1/2}$ ,  $G_D$ ,  $A$ ,  $t_c$  – константы. Решение  $R_I(t)$  описывает режим ускоренного сжатия D-мерной Вселенной ( $dR/dt < 0$ ,  $d^2R/dt^2 < 0$ ) с коллапсом в момент  $t = t_c$ . Второе решение  $R_{II}(t)$  описывает режим замедленного расширения Вселенной ( $dR/dt > 0$ ,  $d^2R/dt^2 < 0$ ) из сверхсжатого состояния с нулевым объемом.

Одним из направлений в исследовании газа нуль-струн могут стать задачи о влиянии формы нуль-струны на ее гравитационные свойства. Прежде всего интересно исследовать вопрос о влиянии формы нуль-струны на особенности нуль-струнного газа найденные в работах [14–19], например, на возможность образовывать доменную структуру пространства, заполненного таким газом.

Исследование гравитационных свойств нуль-струны сильно осложняет наличие  $\delta$ -функций в соответствующем тензоре энергии-импульса, что приводит к проблемам в интегрировании системы уравнений Эйнштейна.

Для того чтобы обойти эту трудность удобно воспользоваться алгоритмом, предложенным в работе [14], а именно, рассматривать компоненты струнного тензора энергии-импульса как предел некоторого «размазанного» распределения, в качестве которого удобно выбрать вещественное безмассовое скалярное поле (поскольку нуль-струна это скалярный «нуль-объект»), а затем стянуть это «размазанное» распределение в нуль-струны требуемой формы и движущуюся по данной траектории, требуя при этом, чтобы компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля, в пределе сжатия, асимптотически совпали с компонентами нуль-струнного тензора энергии-импульса. При таком подходе мы фактически отказываемся от одномерности нуль-струны и переходим к физически обоснованной модели нуль-струны в виде тонкой трубки («размазанной» нуль-струны).

Предлагаемая работа посвящена построению функции распределения вещественного безмассового скалярного поля для «размазанной» замкнутой радиально расширяющейся нуль-струны с осевой симметрией.

## 1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Тензор энергии импульса для уединенной нуль-струны имеет вид [13]:

$$T^{mn} \sqrt{-g} = \gamma \int d\tau d\sigma x_{;\tau}^m x_{;\tau}^n \delta^4(x^l - x^l(\tau, \sigma)), \quad (1)$$

где индексы  $m, n, l$  принимают значения  $0, 1, 2, 3$ ; функции  $x^m = x^m(\tau, \sigma)$  определяют траекторию движения нуль-струны;  $\tau$  и  $\sigma$  параметры на мировой поверхности нуль-струны;  $x_{;\tau}^m = \partial x^m / \partial \tau$ ;  $g_{mn}$  – метрический тензор внешнего пространства времени;  $g = |g_{mn}|$ ;  $\gamma = const$ .

В цилиндрической системе координат ( $x^0 = t, x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = z$ ) функции  $x^\alpha(\tau, \sigma)$ , определяющие траекторию движения (мировую поверхность) замкнутой нуль-струны данной задачи, имеют вид

$$t = \tau, \quad \rho = \tau, \quad \theta = \sigma, \quad z = Z(\theta), \quad \tau \in [0, +\infty), \quad \sigma \in [0; 2\pi], \quad (2)$$

где функция  $Z(\theta)$  удовлетворяет условиям замкнутости нуль-струны

$$Z(\theta)|_{\theta=0} = Z(\theta)|_{\theta=2\pi} \quad (3)$$

и инвариантности относительно инверсии  $\theta$  на  $-\theta$

$$Z(\theta) = Z(-\theta). \quad (4)$$

Можно отметить, что траекториям (2) соответствует случай радиального расширения замкнутой нуль-струны, при котором форма нуль-струны, определяемая функцией  $Z(\theta)$ , не зависит от времени, и все точки нуль-струны в каждый момент времени  $t$  находятся на одинаковом расстоянии от оси  $z$  (находятся на поверхности цилиндра).

На рис. 1 приведены примеры возможных конфигураций замкнутой нуль-струны, которые удовлетворяют (2) и соответствуют выбору: а)  $Z(\theta) = \cos(2\theta)$ , б)  $Z(\theta) = \cos(3\theta)$ , в)  $Z(\theta) = \cos(5\theta)$ , г)  $Z(\theta) = \cos^2(5\theta) + \sin^2(4\theta)$ .

Подставляя (2) в (1) находим выражения для компонент тензора энергии-импульса нуль-струны траектория движения для которой определяется равенствами (2)

$$T^{mn} \sqrt{-g} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(z - Z(\theta)) \delta(\rho - t). \quad (5)$$



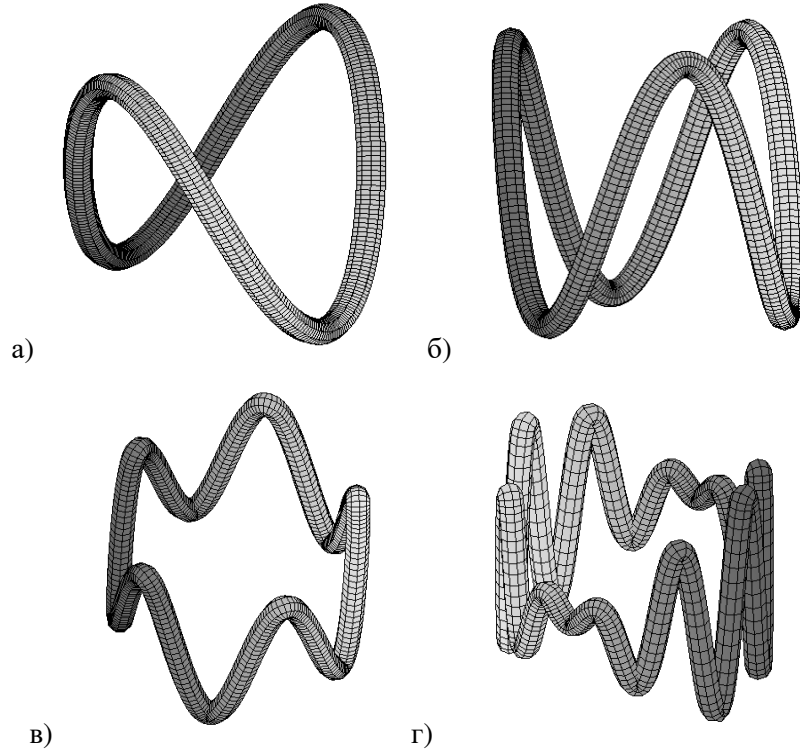


Рис. 1. Примеры конфигураций нуль-струны, удовлетворяющие (2)

Поскольку для траектории (2) форма нуль-струны должна быть инвариантна относительно инверсии  $\theta$  на  $-\theta$  то квадратичная форма пространства-времени должна быть инвариантна относительно инверсии  $\theta$  на  $-\theta$ , тогда

$$g_{mn}(t, \rho, \theta, z) = g_{mn}(t, \rho, -\theta, z). \quad (6)$$

Следствием (6) есть

$$g_{02} = g_{12} = g_{32} = 0. \quad (7)$$

Также можно заметить, что квадратичная форма пространства-времени в решаемой задаче должна быть инвариантна относительно одновременной инверсии  $z \rightarrow -z$  и инверсии  $\theta$  на  $-\theta + \pi/n$ , где  $n$  – порядок оси симметрии, тогда

$$g_{mn}(t, \rho, \theta, z) = g_{mn}(t, \rho, -\theta + \pi/n, -z). \quad (8)$$

Откуда

$$g_{03} = g_{31} = 0. \quad (9)$$

Воспользовавшись свободой выбора систем координат в Общей Теории Относительности частично зафиксируем ее выбором

$$g_{01} = 0. \quad (10)$$

Учитывая (4) – (7) квадратичная форма, для решаемой задачи может быть представлена в виде

$$dS^2 = e^{2\nu} (dt)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2 - e^{2\mu} (dz)^2, \quad (11)$$

где  $\nu, \mu, A, B$  – функции переменных  $t, \rho, \theta, z$ , удовлетворяют условиям (4) и (6), а также очевидному условию (следствие замкнутости нуль-струны)

$$(\nu, \mu, A, B)|_{\theta=0} = (\nu, \mu, A, B)|_{\theta=2\pi}. \quad (12)$$

Компоненты тензора энергии импульса для нуль-струны должны удовлетворять равенству

$$T_{\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (13)$$

Для (5), (11), равенство (13) принимает вид

$$T_0^0 + T_1^1 = \frac{\gamma e^{-\mu}}{\sqrt{B}} \left\{ \frac{e^{\nu}}{\sqrt{A}} - \frac{\sqrt{A}}{e^{\nu}} \right\} \delta(z - Z(\theta)) \delta(\rho - t) = 0, \quad (14)$$

откуда

$$e^{2\nu} = A. \quad (15)$$

Тогда, учитывая (15), квадратичная форма (11) может быть представлена в виде

$$dS^2 = e^{2\nu} \left( (dt)^2 - (d\rho)^2 \right) - B(d\theta)^2 - e^{2\mu} (dz)^2, \quad (16)$$

где  $\nu, \mu, B$  – функции переменных  $t, \rho, \theta, z$  и удовлетворяют условиям (6) и (8).

Анализируя систему уравнений Эйнштейна для квадратичной формы (16), можно доопределить функциональную зависимость метрических функций, а именно:

$$\nu = \nu(\eta, \theta, z), \quad \mu = \mu(\eta, \theta, z), \quad B = B(\eta, \theta, z), \quad \eta = t - \rho, \quad (17)$$

при этом система уравнений Эйнштейна может быть представлена в виде

$$-\mu_{,\eta\eta} - \frac{B_{,\eta\eta}}{2B} - (\mu_{,\eta})^2 + \left( \frac{B_{,\eta}}{2B} \right)^2 + 2\nu_{,\eta} \left( \mu_{,\eta} + \frac{B_{,\eta}}{2B} \right) = \chi T_{00}, \quad (18)$$

$$\frac{B_{,\eta z}}{B} + 2\nu_{,\eta z} - \frac{1}{2} \frac{B_{,\eta}}{B} \frac{B_{,\eta z}}{B} - \frac{B_{,\eta}}{B} \nu_{,\eta z} - \frac{B_{,\eta z}}{B} \mu_{,\eta} - 2\mu_{,\eta} \nu_{,\eta z} = 0, \quad (19)$$

$$e^{2(v-\mu)} \left\{ v_{,zz} + \frac{B_{,zz}}{2B} + (v_{,z})^2 - \left( \frac{B_{,z}}{2B} \right)^2 - \mu_{,z} v_{,z} - \frac{B_{,z}}{2B} \left( \mu_{,z} - v_{,z} + \frac{B_{,z}}{2B} \right) \right\} + \quad (20)$$

$$+ \frac{e^{2v}}{2B} \left\{ v_{,\theta\theta} + \mu_{,\theta\theta} + (v_{,\theta})^2 + (\mu_{,\theta})^2 - \frac{B_{,\theta}}{2B} (\mu_{,\theta} + v_{,\theta}) + \mu_{,\theta} v_{,\theta} \right\} = 0,$$

$$\frac{B}{e^{2\mu}} \left( 2v_{,zz} + 3(v_{,z})^2 - 2v_{,z} \mu_{,z} \right) - 2v_{,\theta} \mu_{,\theta} - (v_{,\theta})^2 = 0, \quad (21)$$

$$(v_{,z})^2 + v_{,z} \frac{B_{,z}}{B} - \frac{e^{2\mu}}{B} \left( 2v_{,\theta\theta} + 3(v_{,\theta})^2 + v_{,\theta} \frac{B_{,\theta}}{B} \right) = 0, \quad (22)$$

$$v_{,\eta\theta} + \mu_{,\eta\theta} - \frac{B_{,\eta}}{2B} (v_{,\theta} + \mu_{,\theta}) - \mu_{,\eta} (v_{,\theta} - \mu_{,\theta}) = 0, \quad (23)$$

$$v_{,\theta z} + v_{,z} (v_{,\theta} - \mu_{,\theta}) - v_{,\theta} \frac{B_{,z}}{B} = 0. \quad (24)$$

## 2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ «РАЗМАЗАННОГО» РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Тензор энергии-импульса для вещественного безмассового скалярного поля имеет вид [3]

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} L, \quad (25)$$

где  $L = g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta}$ ,  $\varphi_{,\alpha} = \partial \varphi / \partial x^\alpha$ ,  $\varphi$  – функция распределения скалярного поля, индексы  $\alpha, \beta$  принимают значения 0, 1, 2, 3. Для обеспечения самосогласованности уравнений Эйнштейна, построенных для (16), (1), будем требовать

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(\eta, \theta, z) \rightarrow \varphi = \varphi(\eta, \theta, z). \quad (26)$$

Расписывая (25) для (16), (26), находим

$$T_{00} = (\varphi_{,\eta})^2 + \frac{e^{2v}}{2} \left( \frac{(\varphi_{,z})^2}{e^{2\mu}} + \frac{(\varphi_{,\theta})^2}{B} \right), \quad (27)$$

$$T_{11} = (\varphi_{,\eta})^2 - \frac{e^{2v}}{2} \left( \frac{(\varphi_{,z})^2}{e^{2\mu}} + \frac{(\varphi_{,\theta})^2}{B} \right), \quad (28)$$

$$T_{22} = -\frac{1}{2} \left( (\varphi_{,\theta})^2 - \frac{B}{e^{2\mu}} (\varphi_{,z})^2 \right), \quad (29)$$

$$T_{33} = \frac{1}{2} \left( (\varphi_{,z})^2 - \frac{e^{2\mu}}{B} (\varphi_{,\theta})^2 \right), \quad (30)$$

$$T_{01} = -(\varphi_{,\eta})^2, \quad T_{12} = \varphi_{,\eta} \varphi_{,\theta}, \quad T_{23} = \varphi_{,z} \varphi_{,\theta}, \quad T_{03} = -T_{13} = \varphi_{,\eta} \varphi_{,z}. \quad (31)$$

Для (16), (17), (27)–(31), система уравнений Эйнштейна может быть представлена в виде

$$-\mu_{,\eta\eta} - \frac{B_{,\eta\eta}}{2B} - (\mu_{,\eta})^2 + \left( \frac{B_{,\eta}}{2B} \right)^2 + 2v_{,\eta} \left( \mu_{,\eta} + \frac{B_{,\eta}}{2B} \right) = \chi (\varphi_{,\eta})^2, \quad (32)$$

$$\frac{B_{,\eta z}}{2B} + v_{,\eta z} - \frac{1}{4} \frac{B_{,\eta}}{B} \frac{B_{,z}}{B} - \frac{B_{,\eta}}{2B} v_{,z} - \frac{B_{,z}}{2B} \mu_{,\eta} - \mu_{,\eta} v_{,z} = -\chi \varphi_{,\eta} \varphi_{,z}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & e^{2(v-\mu)} \left\{ v_{,zz} + \frac{B_{,zz}}{2B} + (v_{,z})^2 - \left( \frac{B_{,z}}{2B} \right)^2 - \mu_{,z} v_{,z} - \frac{B_{,z}}{2B} \left( \mu_{,z} - v_{,z} + \frac{B_{,z}}{2B} \right) \right\} + \\ & + \frac{e^{2v}}{2B} \left\{ v_{,\theta\theta} + \mu_{,\theta\theta} + (v_{,\theta})^2 + (\mu_{,\theta})^2 - \frac{B_{,\theta}}{2B} (\mu_{,\theta} + v_{,\theta}) + \mu_{,\theta} v_{,\theta} \right\} = \\ & = -\chi \frac{e^{2v}}{2} \left( \frac{(\varphi_{,z})^2}{e^{2\mu}} + \frac{(\varphi_{,\theta})^2}{B} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{B}{e^{2\mu}} \left( 2v_{,zz} + 3(v_{,z})^2 - 2v_{,z} \mu_{,z} \right) - 2v_{,\theta} \mu_{,\theta} - (v_{,\theta})^2 = \chi \left( (\varphi_{,\theta})^2 - \frac{B(\varphi_{,z})^2}{e^{2\mu}} \right), \quad (35)$$

$$(v_{,z})^2 + v_{,z} \frac{B_{,z}}{B} - \frac{e^{2\mu}}{B} \left( 2v_{,\theta\theta} + 3(v_{,\theta})^2 + v_{,\theta} \frac{B_{,\theta}}{B} \right) = \chi \left( (\varphi_{,z})^2 - \frac{e^{2\mu}}{B} (\varphi_{,\theta})^2 \right), \quad (36)$$

$$v_{,\eta\theta} + \mu_{,\eta\theta} - \frac{B_{,\eta}}{2B} (v_{,\theta} + \mu_{,\theta}) - \mu_{,\eta} (v_{,\theta} - \mu_{,\theta}) = \chi \varphi_{,\eta} \varphi_{,\theta}, \quad (37)$$

$$v_{,\theta z} + v_{,z} (v_{,\theta} - \mu_{,\theta}) - v_{,\theta} \frac{B_{,z}}{B} = \chi \varphi_{,\theta} \varphi_{,z}. \quad (38)$$

Рассмотрим полученную систему уравнений (32)–(38) для распределения скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой» замкнутой области, для которой переменные  $\eta$  и  $z$  изменяются в пределах

$$\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta], \quad z \in [Z(\theta) - \Delta z; Z(\theta) + \Delta z], \quad (39)$$

где  $\Delta\eta$  и  $\Delta z$  – положительные константы, которые определяют «толщину» области

$$\Delta\eta \ll 1, \Delta z \ll 1, \quad (40)$$

а в пределе сжатия такой «тонкой» области в одномерный объект (нуль-струну)

$$\Delta\eta \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0. \quad (41)$$

Тогда пространство-время, в котором движется такая «размазанная» нуль-струна и для которого переменные изменяются в пределах

$$\eta \in (-\infty; +\infty), z \in (-\infty; +\infty), \theta \in [0; 2\pi], \quad (42)$$

условно может быть разделено на три области:

область I, для которой

$$\eta \in (-\infty; -\Delta\eta) \cup (\Delta\eta; +\infty), z \in (-\infty; +\infty), \theta \in [0; 2\pi], \quad (43)$$

область II, для которой

$$\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta], z \in (-\infty; Z(\theta) - \Delta z) \cup (Z(\theta) + \Delta z; +\infty), \theta \in [0; 2\pi], \quad (44)$$

область III, для которой

$$\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta], z \in [Z(\theta) - \Delta z; Z(\theta) + \Delta z], \theta \in [0; 2\pi]. \quad (45)$$

Поскольку при стягивании скалярного поля в струну система уравнений (32)–(38) для скалярного поля должна асимптотически стремиться к системе (18)–(24) для замкнутой нуль-струны, то в областях I и II

$$\varphi \rightarrow 0, \varphi_{,z} \rightarrow 0, \varphi_{,\eta} \rightarrow 0, \varphi_{,\theta} \rightarrow 0. \quad (46)$$

Сравнивая систему уравнений для замкнутой нуль-струны с системой (32)–(38), можно сделать вывод о том, что при стягивании скалярного поля в струну, то есть при  $\Delta\eta \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$

$$\left. \left\{ (\varphi_{,z})^2; (\varphi_{,\theta})^2; (\varphi_{,\eta} \cdot \varphi_{,z}); (\varphi_{,\eta} \cdot \varphi_{,\theta}); (\varphi_{,\theta} \cdot \varphi_{,z}) \right\} \right|_{\eta \rightarrow 0, z \rightarrow Z(\theta)} \rightarrow 0, \quad (47)$$

$$(\varphi_{,\eta})^2 \Big|_{\eta \rightarrow 0, z \rightarrow Z(\theta)} \rightarrow \infty, \theta = 0..2\pi.$$

### 3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Для полученных условий (46), (47) функцию распределения скалярного поля удобно представить в виде

$$\varphi(\eta, \theta, z) = \ln \left( \frac{1}{(\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(\vartheta))^\gamma} \right), \quad (48)$$

где  $\vartheta = \vartheta(z, \theta) = z - Z(\theta)$ ,  $\gamma$  – некоторая положительная константа, функция

$$\lambda(\eta) = \frac{1}{f_0}(1 - \alpha(\eta)), \quad (49)$$

$f_0 = const$ . Функции  $\alpha(\eta)$  и  $\lambda(\eta)$  симметричны относительно инверсии  $\eta$  на  $-\eta$ :

$$\alpha(\eta) = \alpha(-\eta), \quad \lambda(\eta) = \lambda(-\eta). \quad (50)$$

Функция  $\alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(\vartheta)$  ограничена

$$0 < \alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(\vartheta) \leq 1, \quad (51)$$

функция (48), может принимать значения от

$$\varphi = 0, \quad \text{при } \alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(\vartheta) = 1, \quad (51)$$

и до

$$\varphi \rightarrow \infty, \quad \text{при } \alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(\vartheta) \rightarrow 0, \quad (52)$$

причем в области I, в соответствии с (46), (49), (51)

$$\alpha(\eta) \rightarrow 1, \quad \lambda(\eta) \rightarrow 0. \quad (53)$$

Согласно (46), функция распределения скалярного поля в области II стремится к нулю, тогда при  $\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta]$  и любом фиксированном значении переменной  $z = z_0 \in (-\infty; Z(\theta) - \Delta z) \cup (Z(\theta) + \Delta z; +\infty)$ , должно быть выполнено

$$\alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(z_0) \rightarrow 1. \quad (54)$$

В области III, для тех же значений  $\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta]$  и при  $z = z_0 \in [Z(\theta) - \Delta z; Z(\theta) + \Delta z]$

$$0 < \alpha(\eta) + \lambda(\eta) f(z_0) < 1. \quad (55)$$

Из (53)–(55) следует, что при всех  $z \in (-\infty; Z(\theta) - \Delta z) \cup (Z(\theta) + \Delta z; +\infty)$  значения функции  $f(z)$  не зависят от  $z$ , т.е.

$$f(z) \rightarrow f_0 = const, \quad (56)$$

При этом  $f_0 \neq 0$ . Для области III,

$$0 < \alpha(\eta) + (1 - \alpha(\eta)) f(\vartheta) / f_0 < 1, \quad (57)$$

тогда из (52), (57) следует, что при  $\varphi \rightarrow \infty$

$$\alpha(\eta) \rightarrow 0, f(\vartheta) \rightarrow 0. \quad (58)$$

Таким образом, в выражении для функции распределения скалярного поля (48), функции  $\alpha(\eta)$  и  $f(\vartheta)$  ограничены и для всех значений переменных  $\eta \in (-\infty; +\infty)$  и  $z \in (-\infty; +\infty)$  изменяются в пределах

$$0 \leq \alpha(\eta) \leq 1, 0 \leq f(\vartheta) \leq f_0. \quad (59)$$

Ниже приведен пример функций  $\alpha(\eta)$  и  $f(\vartheta)$ , удовлетворяющих найденным условиям

$$\alpha(\eta) = \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon + (\xi\eta)^2} \right\}, \quad (60)$$

$$f(\vartheta) = f_0 \exp \left\{ -\mu \left( 1 - \exp \left\{ -\frac{1}{(\zeta\vartheta)^2} \right\} \right) \right\}, \quad (61)$$

где константы  $\xi$  и  $\zeta$  – определяют размер «толщину» кольца, внутри которого сконцентрировано скалярное поле, по переменным  $\eta$  и  $z$ , соответственно, а как следует из (4.14), (4.15), при  $\Delta z \rightarrow 0$   $\Delta \eta \rightarrow 0$

$$\xi \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow \infty, \quad (62)$$

при этом положительные константы  $\varepsilon$  и  $\mu$  обеспечивают выполнение условий (46), (47), при  $z = Z(\theta)$ ,  $\eta \rightarrow 0$ ,  $\Delta z \rightarrow 0$ ,  $\Delta \eta \rightarrow 0$ , а именно, при  $\Delta z \ll 1$ ,  $\Delta \eta \ll 1$

$$\varepsilon \ll 1, \mu \gg 1, \quad (63)$$

а при дальнейшем сжатии в одномерный объект (нуль-струну), то есть при  $\Delta z \rightarrow 0$ ,  $\Delta \eta \rightarrow 0$

$$\varepsilon \rightarrow 0, \mu \rightarrow \infty. \quad (64)$$

Используя (49), (60), (61) для (48) получаем выражение одного из возможных выражений функции распределения безмассового вещественного скалярного поля, компоненты тензора энергии-импульса, для которого в пределе сжатия в одномерный объект асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии-импульса исследуемой замкнутой нуль-струны.

Отметим, что вид функции распределения (48), не является общим, а ее выбор нужно рассматривать как один из возможных способов «размазывания» нуль-струны. Вид функции распределения скалярного поля должен влиять на гравитационные свойства модели струны в виде трубки скалярного поля. Однако

поскольку нуль-струне соответствует случай, в котором скалярное поле стягивается в одномерный объект, то способ «размазывания» в предельных случаях (62), (64) не может быть существенен.

На рис. 2 для функции  $\varphi$ , определяемой равенствами (48), (60), (61), для значений констант  $\xi = \zeta = 3$ , представлены распределения скалярного поля, по переменным  $x \in [-12; 12]$ ,  $y \in [-12; 12]$  для фиксированного момента времени  $t = 10$ , при  $z = 0$ , которые соответствуют разным выражениям функции  $Z(\theta)$ , а именно: а)  $Z(\theta) = \cos(2\theta)$ , б)  $Z(\theta) = \cos(5\theta)$ , в)  $Z(\theta) = \sin^2(2\theta) + \cos(3\theta)$ ,  $Z(\theta) = \sin^2(4\theta) + \cos^2(5\theta)$ . На этих рисунках черным цветом выделена область, где  $\varphi \rightarrow 0$ .

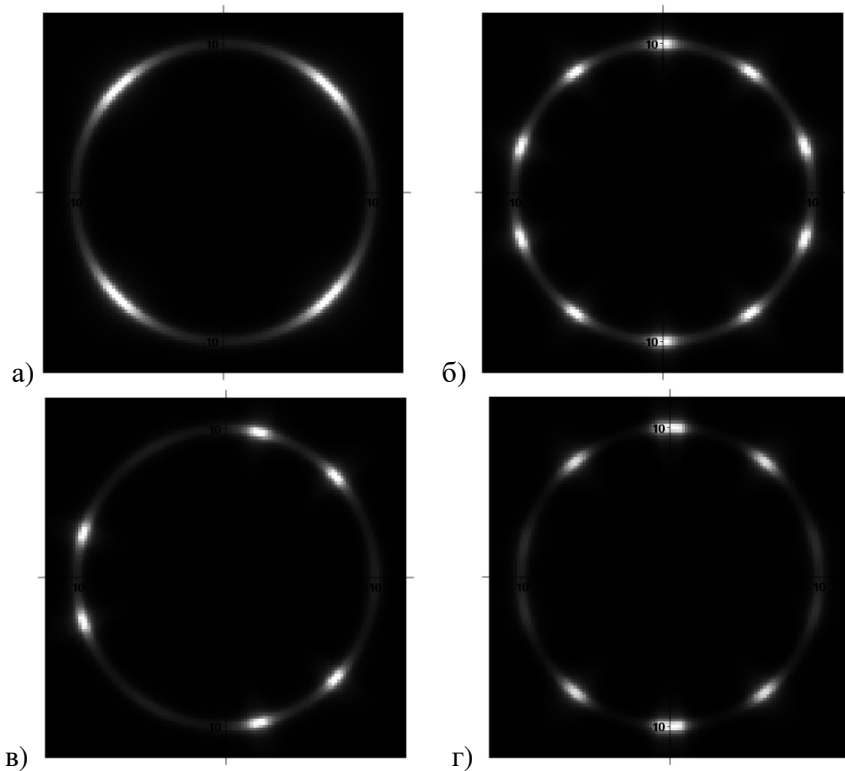


Рис. 2. Распределение скалярного поля в сечении  $z = 0$ , которые соответствуют различным функциям  $Z(\theta)$

На рис. 3 представлены распределения скалярного поля в плоскости  $z = Const$ , определяемые равенствами (48), (60), (61), для функции  $Z(\theta) = \cos(3\theta)$ ,  $t = 10$ ,



которые соответствуют разным значениям констант  $\xi, \zeta$ , а именно: а)  $\xi = \zeta = 1.1$ , б)  $\xi = \zeta = 3$ , в)  $\xi = \zeta = 6$ .

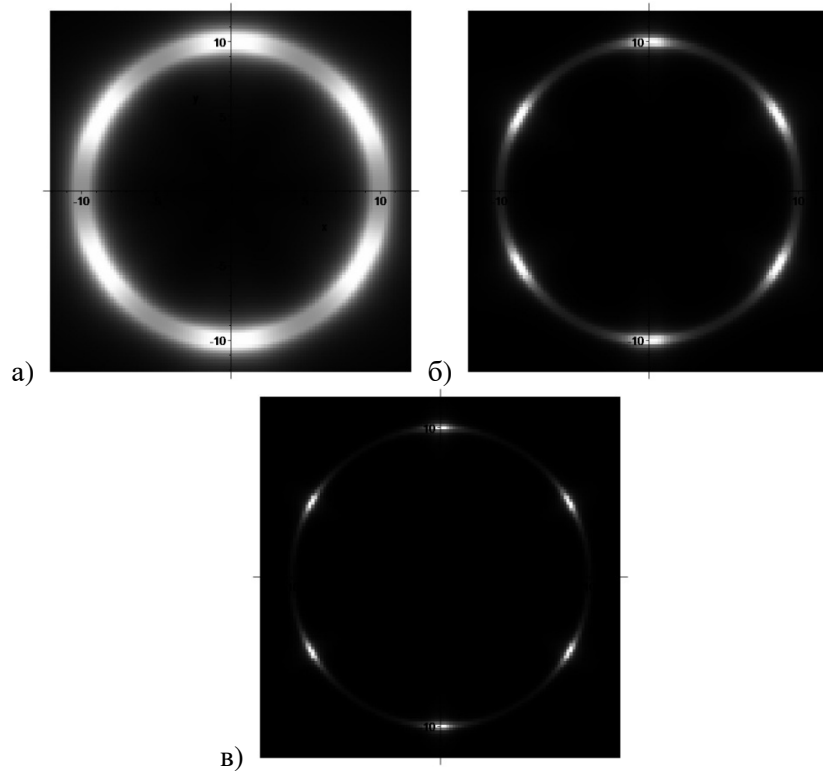


Рис. 3. Распределение скалярного поля в сечении  $z = const.$ , которые соответствуют различным значениям констант  $\xi, \zeta$

Из рис. 3 непосредственно видно, что с увеличением значений констант  $\xi$  и  $\zeta$  область, в которой функция распределения скалярного поля существенно отлична от нуля, сужается, что соответствует уменьшению «толщины» кольца, в котором сконцентрировано скалярное поле.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнивая систему уравнений Эйнштейна, построенную для распределения вещественного безмассового скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой области», с системой уравнений Эйнштейна для замкнутой радиально расширяющейся нуль-струны с осевой симметрией, мы нашли условия, при выполнении которых в пределе сжатия скалярного поля в одномерный объект (нуль-струну) компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии-импульса замкнутой

нуль-струны. Предложен вид функции распределения, описывающего движение скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой области» и радиально увеличивающий свой размер. Приведен пример распределения скалярного поля, удовлетворяющего найденным условиям. Продолжением данной работы будет интегрирование уравнений Эйнштейна с целью поиска особенностей гравитационного поля замкнутых нуль-струн с осевой симметрией, а также исследованию влияния формы нуль-струн образующих газ на его возможные свойства.

*В работе приведены результаты выпускной квалификационной работы Бабаджан Раисы-Довлеты Александровны.*

#### Список литературы

1. Bennet D. P. Formation and Evolution of Cosmic Strings. Cambridge University Press, 1990. 530 p.
2. Peebles P. J. E. Principles of Physical Cosmology. Princeton University Press, 1994. 736 p.
3. Linde A. D. Particle Physics and Inflationary Cosmology. Harwood, Chur, 1990. 380 p.
4. Vachaspati T., Vilenkin A. Formation and Evolution of Cosmic Strings // Phys. Rev. D. 1984. Vol. 30, No. 10. P. 2036–2045.
5. Vilenkin A., Shellard E. P. S. Cosmic string and other topological defects. Cambridge University Press, 1994. 580 p.
6. Copeland E. J., Kibble T. W. B. Cosmic strings and superstrings // Proc. Roy. Soc. 2010. 466. P. 623–657.
7. Cui Y., Morrissey D. E. Non-Thermal Dark Matter from Cosmic Strings // Phys.Rev. D. 2008. Vol. 79, № 8. P. 1060–1082.
8. Chernoff D. F., Tye S.-H. H. Inflation, string theory and cosmic strings // Int. J. Mod. Phys. 2015. Vol. 24, 3. P. 1153–1203.
9. Planck Collaboration XXV 2014, A&A, 571, A25.
10. Bandos I. A., Zheltukhin A. A. Null super p-brane quantum theory in 4-dimensional space-time // Fortschr. Phys. 1993. Vol. 4. P. 619.
11. Bandos I. A., Zheltukhin A. A. Hamiltonian mechanics and absence of critical dimensions for null membranes // Sov. J. Nucl. Phys. 1989. Vol. 50, No. 3. P. 556.
12. Zheltukhin A. A. Hamiltonian structure of the antisymmetric action of a string // JETP Lett. 1987. Vol. 46. P. 262.
13. Roshchupkin S. N., Zheltukhin A. A. Friedmann universes and exact solutions in string cosmology // Class. Quantum. Grav. 1995. Vol. 12. P. 2519.
14. Lelyakov A. P. Solution to the Einstein equations for a «spread» closed null string of constant radius // Gravitation and Cosmology. 2015. Vol. 21, No. 3. P. 200–207.
15. Lelyakov A. P. Dynamics of a null string in the gravitational field of a closed null string of constant radius // Gravitation and Cosmology. 2015. Vol. 21, No. 4. P. 309–318.
16. Lelyakov O. P., Karpenko A. S., Babadzhan R.-D. O. Scalar-field potential distribution for a closed «thick» null string moving in the plane  $z=0$  // Ukr. J. Phys. 2014. Vol. 59, No. 5. P. 547–554.
17. Lelyakov O. P., Karpenko A. S., Babadzhan R.-D. O. Dynamics of a non-rotating test null string in the gravitational field of a closed «thick» null string radially expanding or collapsing in the plane  $z=0$  // Ukr. J. Phys. 2014. Vol. 59, No. 11. P. 1114–1125.
18. Lelyakov A. P., Karpenko A. S. Dynamics of a probe null string in the gravitational field of a closed null string radially collapsing in the plane // Theoretical and Mathematical Physics. 2017. Vol. 190, P. 140–153.
19. Lelyakov A. P. Peculiarities of null string motion in the gravitational field of a radially expanding or radially collapsing multistring system // Gravitation and Cosmology. 2017. Vol. 23, P. 50–62.

**FUNCTION OF DISTRIBUTION FOR CLOSED NULL STRINGS WITH AXIAL SYMMETRY RADIALLY INCREASING ITS SIZE**

**Babadzhan R.-D. A., Lelyakov A. P.\***

*Institute of Physics and Technology, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

\*E-mail: [lelyakov\\_a\\_p@cfuv.ru](mailto:lelyakov_a_p@cfuv.ru)

A form of the distribution function describing the motion of a scalar field concentrated inside a «thin region» and radially increasing its size is proposed. Conditions are found under which, in the limit of compression of a scalar field in a one-dimensional object (null string), the components of the energy-momentum tensor of a scalar field asymptotically coincide with the components of the energy-momentum tensor of a closed null string moving along the same trajectory.

**Keywords:** null string, gravitational field, distribution function.

**References**

1. D. P. Bennet, *Formation and Evolution of Cosmic Strings* (Cambridge University Press, 1990).
2. P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1994).
3. A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, Chur, 1990).
4. T. Vachaspati, A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **30**, 2036 (1984).
5. A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic string and other topological defects* (Cambridge University Press, 1994).
6. E. J. Copeland, T., W. B. Kibble, *Proc. Roy. Soc.* **466**, 623 (2010).
7. Y. Cui, D. E. Morrissey, *Phys. Rev. D* **79**, 1060 (2008).
8. D. F. Chernoff, S.-H. H. Tye, *Int. J. Mod. Phys.* **24**, 1153 (2015).
9. Planck Collaboration XXV, *A&A*, 571, A25 (2014).
10. I. A. Bandos, A. A. Zheltukhin, *Fortschr. Phys.* **4**, 619 (1993).
11. I. A. Bandos, A. A. Zheltukhin, *Sov. J. Nucl. Phys.* **50**, 556 (1989).
12. A. A. Zheltukhin, *JETP Lett.* **46**, 262 (1987).
13. S. N. Roshchupkin, A. A. Zheltukhin, *Class. Quantum. Grav.* **12**, 2519 (1995).
14. A. P. Lelyakov, *Gravitation and Cosmology* **21**, 200 (2015).
15. A. P. Lelyakov, *Gravitation and Cosmology* **21**, 309 (2015).
16. O. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, R.-D. O. Babadzhan, *Ukr. J. Phys.* **59**, 547 (2014).
17. O. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, R.-D. O. Babadzhan, *Ukr. J. Phys.* **59**, 1114 (2014).
18. A. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, *Theoretical and Mathematical Physics* **190**, 140 (2017).
19. A. P. Lelyakov, *Gravitation and Cosmology* **23**, 50 (2017).

*Поступила в редакцию 07.06.2017 г. Принята к публикации 26.11.2017 г.  
Received June 07, 2017. Accepted for publication November 26, 2017*

УДК 535.015

## FRACTIONAL OPTICAL VORTICES: STABILITY DECAY AND TRANSFORMATION

Volyar A. V., Alexeyev C. N., Egorov Yu. A., Akimova. Ya. E.\*

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Vernadsky Prospekt 4, Simferopol 295007, Russia

\*E-mail: [yana\\_akimova\\_1994@mail.ru](mailto:yana_akimova_1994@mail.ru)

In this paper we studied the shaping and evolution of singular beams bearing optical vortices with fractional topological charges both in uniform and non-uniform anisotropic media. Starting from representation of the fractional-order vortex states as a superposition of an infinite number of integer-order vortices with certain energy distributions (the vortex spectra) we showed that the smooth wave front of the fractional vortex beam can either decay into an asymmetric array of integer-order vortices or, vice versa, the array of optical vortices can form a smooth helicoid-shaped wave front. We showed that by superimposing a finite number of the fractional-order vortex beams one can shape symmetric singular beams with arbitrary valued topological charges. We demonstrated that in biaxial crystals under the condition of the conical diffraction the fractional-order vortices are unstable. We also demonstrated that the circular fiber array with a space-variant birefringence is an appropriate medium for fractional-order vortex beams.

**Keywords:** optical vortices, fractional topological charges, the fractional-order supermodes, hidden phase, the array of optical vortices.

**PACS:** 41.85. -p

### INTRODUCTION

The unexpected prediction of vortices with half of a quantum unit of circulation in superfluid  $^3\text{He}$  in the 1970s [1] at first provoked bewilderment among physicists because the problem was far from an obvious understanding. The fact is that the quantized circulation is connected with a superfluid flow and can have integer values only. For a long time, that prediction had been considered as a mathematical misunderstanding until J. Jang et. al. [2–4] have experimentally revealed half-quantum vortices in different condensed-matter systems from Bose-Einstein condensates to spin-triplet superconductors. To match the experimental results of the half-integer circulations with a generally accepted conception, the deficient phase  $\pi$  (a half-integer order of the circulation) came to be called the “hidden phase” that is not connected with the circulation of the mass current but is induced by the circulation of the spin current in Cooper pairs [4]. In other words, the spin-orbit interaction plays here the key part.

At last, there appeared a new approach for describing such physical processes based on analogy between spinor Bose-Einstein condensates and singular optical systems (see e.g. [5] and references therein).

At the same time, the optical states with fractional orders of the energy circulation are not so a drastic problem for flows of optical fields both in scalar and vector cases as it turns out to be for the superfluid cases (Fermi liquids). Nevertheless, propagation processes of singular beams bearing optical vortices with fractional-order topological charges face also the key questions of a structural stability of optical states under propagation or other negligibly small perturbations.

Past recent years of singular optic's [6] development have been marked by the surge of interest to optical vortices with fractional topological charges [7, 18]. The first announcement of the fractional-order vortex instability in principle was reported by Soskin et al [7, 8] for the vortices produced by a computer-generated hologram while the vortices propagate in free space. The authors observed experimentally evolution of vortex beams with different half-integer order topological charges. If the vortex beam at the hologram has a nearly C-shaped form, far from the hologram the beam breaks out onto a great number of integer-order vortices.

Later, Berry starting from analogy with the Aharonov-Bohm effect in quantum mechanics and hydrodynamics [9] has theoretically shown the splitting of an optical vortex of the fractional-order into infinite chain of the integer-order vortices [10]. He caught sight of a deep analogy between the quantum and the optical singularities. Besides, Berry denoted that the fractional-order vortex propagation results inevitably in decaying the initial phase structure in free space, i.e. the fractional-order vortex beams are structurally unstable ones under the propagation.

These reports stimulated a new chain of theoretical and experimental investigations [11–15] that confirmed the decay of fractional-order vortices into an infinite number of integer-order vortices. Although most of mathematical models of the fractional vortices is based on the Bessel-Gaussian beam presentation (see e.g. [13, 14], authors of the paper [15] supplemented the analysis with the Laguerre-Gaussian beams. Difference between these approaches lies in different contribution of the individual integer-order vortices in the complex field when the fractional-order beam evolves through the optical medium. Some typical features of such dynamical transformations were considered experimentally in the recent paper [18].

On the other hand, authors of the paper [17] found out a strange behavior of the vortex-beam with a half-order topological charge for the erf-Gaussian ( $erf - G$ ) beams. The smooth wave front of the fractional vortex beam can either decay into an asymmetric array of integer-order vortices or, vice versa, the array of optical vortices can be gathered together forming a smooth wave front with a helicoid-shaped phase distribution.

Authors of the paper [21] remarked also unusual behavior of the orbital angular momentum  $l_z$  (OAM). At first glance it seems that the fractional-order vortex topological charge is an indicator of the OAM of singular beams at least records nearest values to its physical quantity. In some first papers [14, 27] authors obtained a nearly linear dependence between  $l_z$  and a topological charge  $p$  on the base of assessed theoretical results. However, the computer simulation of the process and physical analysis [21] revealed a complex behavior of the function  $l_z(p)$ . Small values of the charge  $p < 10$  correspond to a nearly linear dependence  $l_z \sim p$  with a small amplitude of oscillations. The growth of the value  $p > 10$  results in increasing the amplitude of oscillations between the values  $l_z = \text{integer}(p)$  and  $p = 0$ . The presented results are evidence of a complex interference coupling between a great numbers of the integer-order vortices in a fractional-order vortex beam.

One more unexpected property of the fractional-order vortex beams revealed the authors of the paper [16]. They tried to answer experimentally the question: can the fractional-order vortex-beams control the states of the integer-order ones? They achieved a success using two beams: the pump and probe ones.

The pump beam is of a topological dipole field consisting of two  $\frac{1}{2}$ -order vortices with opposite signs of their charges. The pump beam lays a course in a nonlinear medium for the probe singular beam of a smaller intensity. Changing parameters of the dipole they can steer the state of the probe beam. In fact, the fractional-order topological dipole is not destroyed inside the nonlinear medium forming the waveguide channel for the probe beam.

## 1. FREE SPACE PROPAGATION OPTICAL QUARKS

As a rule, a beam field in a complex optical system contains a lot of simple composition Laguerre-Gaussian (LG), Hermit-Gaussian (HG), Bessel-Gaussian (BG) etc beams bearing an energy-limited optical flux. Each element of these mathematical constructions is an optical vortex-beam bearing an integer-order topological charge. Some of such beam combinations possess of extraordinary properties. The singular beam behavior depends on the energy distribution among the integer-order vortices and their phase parameters i.e. a spectral density  $\rho(p)$  of optical vortices. A striking example is a fractional-order vortex beam. Its properties are defined by both the value of the topological charge  $p$  and type of its complex amplitude (BG, LG, etc).

In the following sub-sections, we set a task to uncover the basic properties of different types of the fractional-order vortex beams and to build up from them the integer-order vortex beams.

### A. Optical quarks as a fractional optical vortex

Let us consider, at first, typical vector supermodes in free space or a uniform isotropic medium made up of the Bessel-Gaussian beams. We focus our attention on monochromatic wave beams with the carrier frequency  $\omega$  that enables us to exploit the vector Helmholtz equation for the vector potential  $\mathbf{A}$  under the condition of Lorentz gauge [17]. The electric  $\mathbf{E}$  and magnetic  $\mathbf{H}$  fields can be defined as

$$\mathbf{E} = ik \left[ \mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) \right], \quad \mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (1)$$

with the wavenumber  $k$ .

Our interest is the paraxial approximation where  $|\partial_z^2 \mathbf{A}| \ll |k^2 \mathbf{A}|$  so that the longitudinal components  $E_z$  and  $H_z$  can be expressed in terms of the transverse  $\mathbf{E}_\perp$  and  $\mathbf{H}_\perp$  ones

$$E_z \approx \frac{i}{k} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{E}_{\perp}, \quad H_z \approx \frac{i}{k} \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{H}_{\perp}, \quad \nabla_{\perp} \equiv \mathbf{e}_x \partial_x + \mathbf{e}_y \partial_y. \quad (2)$$

For the beam propagating along the  $z$ -axis of the complex amplitude  $\mathbf{A}$  of the vector potential  $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z) e^{ikz}$  obeys the paraxial wave equation

$$\left( \nabla_{\perp}^2 + 2ik\partial_z \right) \mathbf{A}_{\perp} = 0. \quad (3)$$

The choice of the vector  $\mathbf{A}$  is defined by a type of the wave beam. If we take, for example, the vector  $\mathbf{A}$  to be directed along the  $x$ -axis (a linearly polarized basis)  $\mathbf{A} = \mathbf{e}_x A_{\perp} \exp(ikz)$  then the solution to the vector wave equation is reduced to the scalar equation (3) for the function  $\Psi(x, y, z) = A_{\perp}$  with the solution [20]

$$\Psi = NF(X, Y)G(x, y, z), \quad (4)$$

where

$$G(x, y, z) = \exp\left(i \frac{k r^2}{2Z}\right) / Z \quad (5)$$

stands for the Gaussian envelope,  $Z = z - iz_0$ ,  $z_0 = kw_0^2 / 2$  is the Rayleigh length with the radius of the beam waist  $w_0$ ,  $X = x/Z$ ,  $Y = y/Z$ ,  $N = w_0 \exp\left(-\frac{K^2}{2ikZ}\right)$ ,  $r^2 = x^2 + y^2$  and  $K$  is the arbitrary beam parameter that can take on both the real and complex values.

At the same time the function  $F(X, Y)$  obeys the two dimensional Helmholtz equation

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + K^2 \right) F = 0. \quad (6)$$

In the cylindrical coordinates the solution to the equation (6) can be written as

$$F_p(R, \varphi) = \int_0^{2\pi} \exp\left\{i \left[ p\varphi' - KR \cos(\varphi' - \varphi) \right]\right\} d\varphi', \quad (7)$$

Here the parameter  $p \in (-\infty, \infty)$  is arbitrary real value,  $R^2 = X^2 + Y^2$ . The real part of the parameter  $K$  is connected with the half angle  $\theta$  of the plane wave's cone of the Bessel beam.

Such a representation of the beam charge  $p \in (-\infty, \infty)$  enables us to expand any regular complex beam into the series over different fractional-charged optical vortices just as it can be presented in the form of the series over different integer-order charged optical ones.

To obtain the explicit form of the function  $F_p$  in (7) let us use the Fourier transformation

$$e^{ip\phi} = \frac{e^{i\pi p} \sin(\pi p)}{\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{im\phi}}{p-m}. \quad (8)$$

The parameter  $p$  here can be regarded as a fractional topological charge, that is responsible for the array of the integer-order vortices with topological charges  $m = -\infty \dots -1, 0, 1, \dots +\infty$  with the spectral vortex density  $\rho(p) = (p-m)^{-1}$ . When  $p = m$  all terms of the series vanish except the term  $e^{im\phi}$ . In a general case the function  $\rho(p)$  can be defined by a preassigned way as, for example, in the paper [15] for Laguerre-Gaussian beams, but for our purposes we restrict its dependence to the simplest case of  $\rho(p) = (p-m)^{-1}$ .

On the other hand the definition of the Bessel function is

$$2\pi i^m J_m(KR) = \int_0^{2\pi} \exp\{i[m\phi + K \cos \phi]\} d\phi \quad (9)$$

with  $\phi = \phi' - \varphi$ . As a result, we find

$$|p\rangle = \Psi(r, \varphi, z, p) = 2NG(r, z) \sin(\pi p) e^{i\pi p} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^m e^{im\varphi}}{p-m} J_m(KR), \quad (10)$$

Thus, the fractional topological charge  $p$  can serve as a global parameter of the complex optical beam. The obtained equation implies two possible propagation processes depending on the value of the  $K$  – parameter. The real  $K$  – parameter is associated with the phase front wreathed by a net of integer-charged vortices at the initial  $z = 0$  plane. For example, when propagating, the vortices with  $p = 1/2$  begin to form a group in such a way that the vortex net vanishes. There appears the smooth wave front looking like the helix with the phase shift  $\Delta\Phi = \pi$  and the C-shaped intensity distribution. For the imaginary value of the  $K$  – parameter, the process evolves in the opposite direction [17]. Consider such a process in details.

### B. Half integer-order vortices beams

The fractional-order vortex beams permit us to construct unusual wave structures with the broken axial symmetry. In contrast to the usual axial symmetric TE and TM



modes with a local linear polarization in each point of the beam, the broken symmetry of the TE and TM mode beams with a fractional order  $p = \pm 1/2$  vortices in each polarized component contains local elliptic polarizations at different points of the beam cross-section under the conditions  $E_z = 0$  for *TE* and  $H_z = 0$  for *TM* beams along the beam length. The broken symmetry of the vector field dictates the choice of the basis in the form of circularly polarized components.

From the equations (2) we obtain for the TE mode ( $E_z = 0, A_z = 0$ )

$$\partial_x E_x = -\partial_y E_y \text{ or } \partial_x A_x = -\partial_y A_y \quad (11)$$

and

$$\partial_x H_x = -\partial_y H_y \text{ or } \partial_x A_y = -\partial_y A_x \quad (12)$$

for the *TM* mode ( $H_z = 0, A_z = 0$ ).

It is convenient to employ the circularly polarized basis

$$A_+ = A_x - iA_y, \quad A_- = A_x + iA_y \quad (13)$$

and a beam vortex structure needs new complex coordinates

$$u = x + iy = r e^{-i\varphi}, \quad v = x - iy = r e^{i\varphi} \quad (14)$$

so that

$$\begin{aligned} \partial_u &= \partial_x - i\partial_y = \frac{e^{-i\varphi}}{2} \left( \partial_r - \frac{i}{r} \partial_\varphi \right), \\ \partial_v &= \partial_x + i\partial_y = \frac{e^{i\varphi}}{2} \left( \partial_r + \frac{i}{r} \partial_\varphi \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Then we find for *TE* modes  $A_+ = \partial_u \Psi_p$ ,  $A_- = -\partial_v \Psi_p$  or

$$\begin{aligned} E_+ &= N \left[ \partial_u F_p + ik \frac{v}{2Z} F_p \right] G, \\ E_- &= -N \left[ \partial_v F_p + ik \frac{u}{2Z} F_p \right] G, \end{aligned} \quad (16)$$

where the function  $F_p$  obeys eq.(7).

In optical paraxial cases, where  $|\partial_{u,v} F_p| \ll k |F_p|$ , we can use the approximation

$$E_+ \approx iN k \frac{v}{2Z} F_p G, \quad E_- \approx -iN k \frac{u}{2Z} F_p G. \quad (17)$$

Similarly we obtain *TM* mode beams

$$E_+ \approx iN k \frac{v}{2Z} F_p G, \quad E_- \approx iN k \frac{u}{2Z} F_p G. \quad (18)$$

Half-order  $(2n+1)/2$ -vortex-beams occupy a special place among variety of the fractional-charged optical fields because they can be easily and reliably generated at the initial plane by q-plates [23], photonic crystals [24] and arrays of microchip lasers [25]. Special types of singular beams with the fractional topological charges and fractional orbital angular momentum (OAM) in the closed form (e.g, erf-G beams and others) have been recently considered in number of papers [17, 18, 21, 26].

In this sub-section we will obtain the general closed form of the half-order vortex beams.

As a basic point we take the equation (7) and rewrite it in the form of

$$F_p(R, \phi) = Ke^{i\frac{2n+1}{2}\phi} \int_{-\phi/2}^{\pi-\phi/2} e^{i(2n+1)\phi} e^{-iKR\cos 2\phi} d\phi. \quad (19)$$

Remember that

$$\begin{aligned} \cos(2n+1)\phi d\phi &= \sum_{j=0}^{[n+1/2]} (-1)^j C_n^{2j} \sin^{2j} \phi \cos^{n-2j} \phi = \\ &= \sum_{j=0}^{[n+1/2]} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^{n-j} C_{2n+1}^{2j} C_{n-j}^m \sin^{2(j+m)} \phi d(\sin \phi), \\ \sin(2n+1)\phi d\phi &= \sum_{j=0}^n (-1)^j C_{2n+1}^j \sin^{2j+1} \phi \cos^{2(n-j)} \phi = \\ &= -\sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^{2j} (-1)^{m+j} C_{2n+1}^j C_{2j}^m \cos^{2(n-j+m)} \phi d(\cos \phi), \end{aligned} \quad (20)$$

$C_n^m$  – a binomial coefficient.

For example,

$$\begin{aligned} \cos 3\phi &= (1 - 4\sin^2 \phi) d(\sin \phi), \\ \sin 3\phi &= -(4\cos^2 \phi - 1) d(\cos \phi). \end{aligned} \quad (21)$$

After substituting (20) into (19) and integrating [22] we obtain

$$F_p = F_n = Ke^{i\frac{2n+1}{2}\phi} \left\{ \sum_{j=0}^{[n+1/2]} \sum_{m=0}^{n-j} (-1)^{n+j} C_{2n+1}^{2j} C_{n-j}^m F_{m,j}^{(s)} + \sum_{j=0}^n \sum_{m=0}^{2j} (-1)^{m+j} C_{2n+1}^j C_{2j}^m F_{m,j}^{(c)} \right\}, \quad (22)$$

where

$$\begin{aligned}
 F_{j,m}^{(s)} &= \frac{\Gamma\left(j+m+\frac{1}{2}\right) - \Gamma\left(j+m+1/2, -2iKR \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)}{(-2iKR)^{1/2+j+m}}, \\
 F_{j,m}^{(c)} &= -\frac{\Gamma\left(j+m+\frac{1}{2}\right) - \Gamma\left(j+m+1/2, 2iKR \cos^2 \frac{\varphi}{2}\right)}{(2iKR)^{1/2+j+m}},
 \end{aligned} \tag{23}$$

$\Gamma(n, x)$  stands for the incomplete Gamma function.

For example, the fractional beam with  $p = 3/2$  is described by the expression

$$\begin{aligned}
 \Psi_{3/2} &= \frac{NG}{\sigma} K \left\{ F_{3/2}^{(s)} + iF_{3/2}^{(c)} \right\} e^{i\frac{3}{2}\varphi}, \\
 F_{3/2}^{(s)} &= -\left\{ 4\sqrt{\Re} \sin \frac{\varphi}{2} e^{-\Re \sin^2 \frac{\varphi}{2}} + \sqrt{\pi} (\Re - 2) \operatorname{erf} \left( \sqrt{\Re} \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right\} / \sqrt{\Re}, \\
 F_{3/2}^{(c)} &= \left\{ 4\sqrt{-\Re} \cos \frac{\varphi}{2} e^{-\Re \cos^2 \frac{\varphi}{2}} - \sqrt{\pi} (\Re + 2) \operatorname{erf} \left( \sqrt{-\Re} \cos \frac{\varphi}{2} \right) \right\} / \sqrt{-\Re}, \\
 \Re &= 2iKR.
 \end{aligned} \tag{24}$$

It is useful to mark that the function  $\Psi_{3/2}$  in eq. (24) is a periodic one with the period  $2\pi$  despite the factors  $\cos \frac{\varphi}{2}$  and  $\sin \frac{\varphi}{2}$  in the functions  $F_{3/2}^{(c,s)}$ . In order to prove it, it is necessary to take into account the factor  $e^{i\frac{3}{2}\varphi}$  in the function  $\Psi_{3/2}$  and oddness of the function  $\operatorname{erf}(x)$ .

The presented above results are of a new family of asymmetric scalar vortex beams with  $p = \pm(2n+1)/2$  that we call Gamma-Gaussian beams ( $\Gamma-G$  beams) referring to the complex amplitude  $\Psi_p$ . The  $\Gamma-G$  beams are a natural generalization of the  $\operatorname{erf}-G$  beams [17] over all set of half integer-order vortex topological charges.

Typical representatives of the  $\Gamma-G$  family of the singular beams are shown in Fig. 1. Thus, the field distributions at the beam cross-section depend essentially on the value of the  $K$  - parameter. When the  $K$  - parameter has a pure real value (Fig. 1) the intensity distribution has a  $C$  - like profile at  $z=0$  with the only half-integer order vortices near the center (see e.g. [17]).

However, when propagating the intensity profile is drastically transformed turning into broken Bessel beam at the length  $z \gg z_0$  with integer-order vortices scattering over the beam cross-section. For the pure imaginary  $K$  – parameter ( $|K|$  is constant), the process is reversed.

The phase distributions shown in Fig. 1 (b) illustrate a complex phase structure for different half-order vortex topological charges.

A smooth growth of the phase up to  $\Phi = \pi/2$  for  $p = 1/2$  is replaced by the phase oscillations in the broken second branch of the two-leaved helicoid for the topological charge  $p = 3/2$ . The phase loss is  $\Delta\Phi = \pi/2$ . The same phase construction is observed for the topological charge  $p = 5/2$  where the third branch of the three-leaved helicoid lacks also the phase  $\Delta\Phi = \pi/2$ . All phase losses are accompanied by smooth variations. The sign alternation  $p \rightarrow -p$  changes the direction of the helicoid twist.

All the above equations enable us to build a great number of asymmetric transverse electric  $TE$  and transverse magnetic  $TM$  beams. Some of them are shown in Fig. 2.

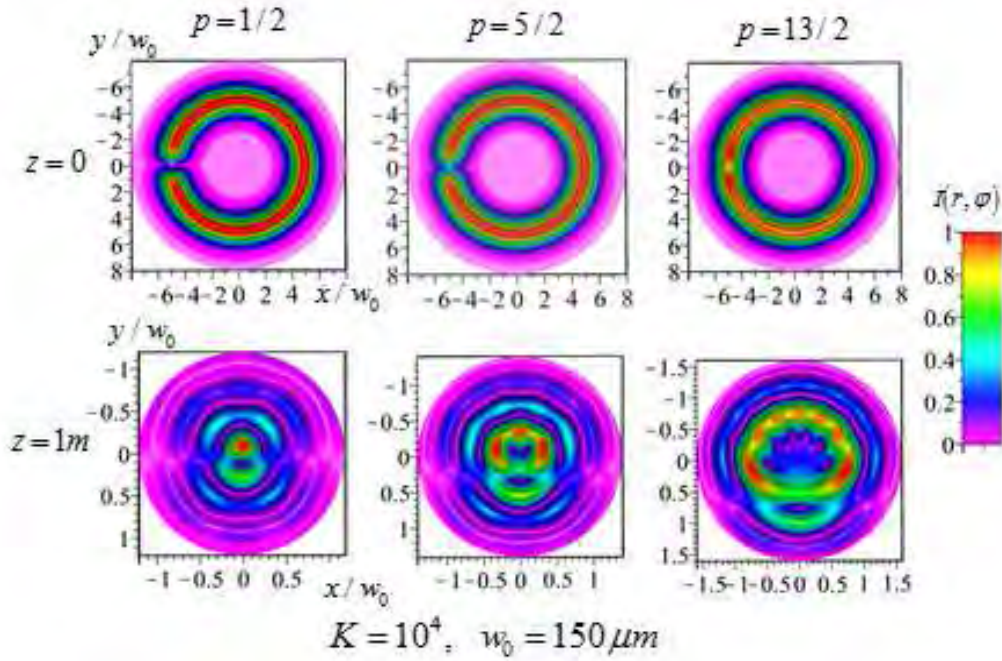


Fig. 1. (a) Intensity distributions of the Gamma-Gaussian ( $G - \Gamma$ ) beams with different topological charges  $p$  at the initial plane and at the far diffraction zone

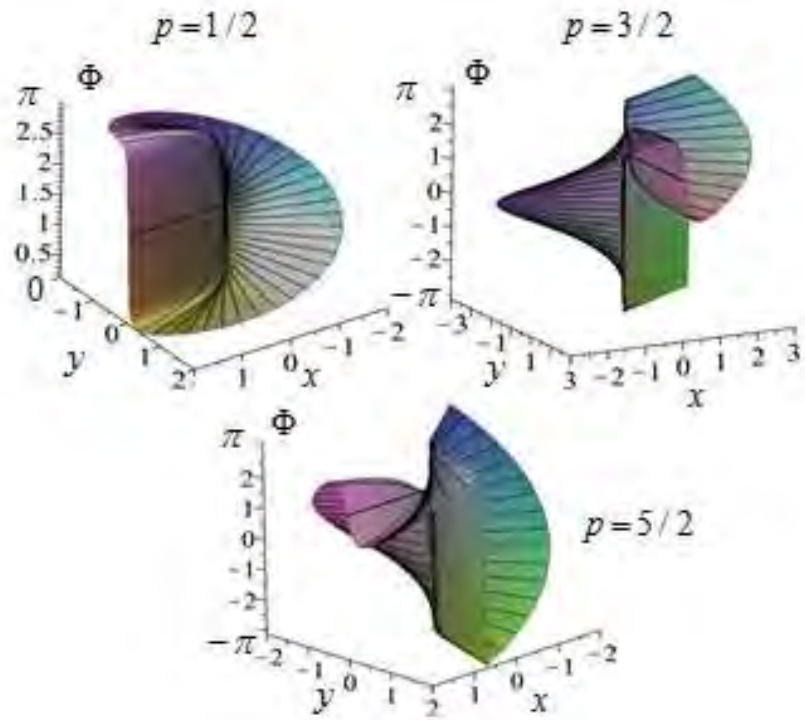


Fig. 1. (b). Phase distributions  $\Phi(r, \varphi)$  at the initial plane  $z = 0$

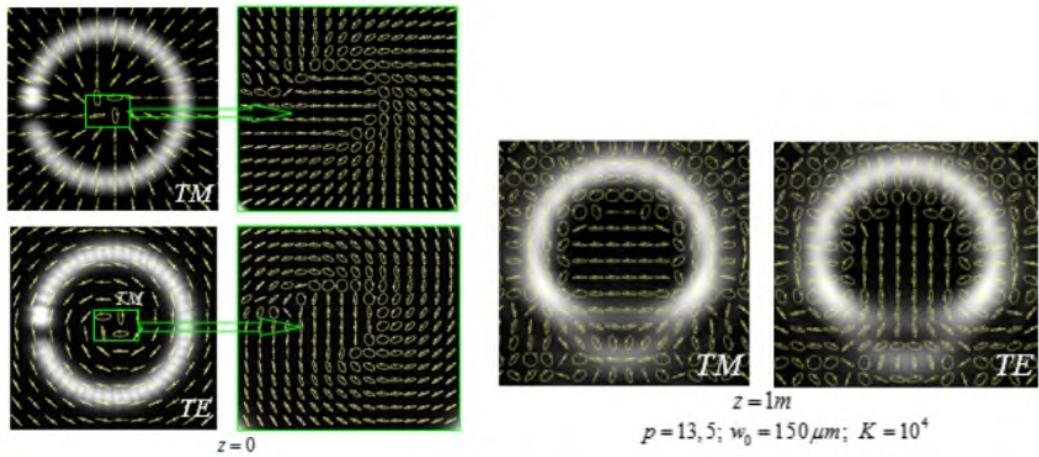


Fig. 2. The field distributions of the  $\Gamma - G$  beams for different topological charges at the background of the intensity distributions

The fine structure of these fields is reshaped along the beam length, so that the beams are structurally unstable under propagation in free space. In contrast to standard TE and TM modes the asymmetric paraxial beam fields in Fig. 2 are elliptically polarized at each point of the beam cross-section with distinctive orientations of the ellipse axes. Near the optical axis, the field tends to form two polarization singularities of a kind (the star or lemon [12]). Far from the center, the directions of the linear polarization are wound into Archimedean (for TE) and logarithmic (for TM) spirals.

The peculiar feature of the  $\Gamma-G$  beams is also their capacity to gather together integer-order vortices into one with the fractional topological charge at far diffraction zone when the  $K$  – parameter is a pure real value while a pure imaginary value of the  $K$  – parameter induces the reverse process – the fractional vortex decays into an infinite number of integer-order vortices. Such beam behavior reflects the inherent processes in the fractional-order vortex structures in contrast to the representation of the inevitable vortex decaying.

In essence, all types of the considered above fractional order beams are the structurally unstable under propagation.

### C. Shaping the integer-order vortex beams

Can the fractional-order vortex beams form a stable state of the singular beam with the centered integer-order vortex? This a key question of our consideration here.

At first, we will analyze a dipole structure consisting of two orthogonal states  $|p\rangle$  and  $|-p\rangle$ :

$$|p, -p\rangle = |p\rangle + |-p\rangle = Q \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^m m e^{im\varphi}}{p^2 - m^2} J_m(KR), \quad (25)$$

where  $Q = 2NG(r, z) \sin(\pi p) e^{i\pi p}$ . The state (25) we can regard as the initial topological dipole.

After rotating the initial dipole through an angle  $\varphi_q = \frac{\pi}{q}$  (Fig. 3) so that

$\varphi \rightarrow \varphi + \frac{\pi}{q}$  we obtain

$$|p, -p, q\rangle = Q \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^m m e^{im\varphi}}{p^2 - m^2} J_m(KR) e^{im\frac{\pi}{q}}. \quad (26)$$

Superposition of the equations (25) and (26) gives a new dipole

$$\begin{aligned}
 |p, -p, \pm\rangle &= |p, -p\rangle + |p, -p, q\rangle = \\
 &= Q \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^m m e^{im\varphi}}{p^2 - m^2} J_m(KR) \left(1 \pm e^{\frac{im\pi}{q}}\right). \quad (27)
 \end{aligned}$$

If  $q=1$  the terms with  $m = 2m' + 1$  for a sign (+) vanish while the residual terms forming the state

$$|p, 2, +\rangle = i4Q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m) \sin(2m\varphi)}{p^2 - (2m)^2} J_{2m}(KR). \quad (28)$$

In turn, for a sign (-), the terms with  $m = 2m'$  vanish and we find the state

$$|p, 2, -\rangle = -4Q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{[(2m+1)] \sin[(2m+1)\varphi]}{p^2 - [(2m+1)]^2} J_{2m+1}(KR). \quad (29)$$

The first state (28) does not contain any optical vortices but only the set of edge dislocations of the order  $p=2$  as well as the equation (29) with  $p=1$ .

In order to obtain high-order beams, e.g. with  $p=4$ , we set a phase difference between two dipole states (30) equal to  $\Delta\varphi_n = \pi$ . As a result one obtains

$$|p, 4, \pm\rangle = Q \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-1)^m \frac{(2m) e^{i2m\varphi} (1 \pm e^{im\pi})}{p^2 - (2m)^2} J_{2m}(KR) \quad (30)$$

so that the two states are

$$|p, 4, +\rangle = i2Q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(4m) \sin(4m\varphi)}{p^2 - (4m)^2} J_{4m}(KR) \quad (31)$$

for the sign (+), and

$$|p, 4, -\rangle = i2Q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(4m+2) \sin(4m+2)\varphi}{p^2 - (4m+2)^2} J_{4m}(KR). \quad (32)$$

for the sign (-)

By means of such a recurring procedure one finds the general expressions

$$|p, 2s\rangle = i2Q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(4sm) \sin(4sm\varphi)}{p^2 - (4sm)^2} J_{4sm}(KR), \quad s = 1, 2, \dots, \quad (33)$$

$$|p, 2s+1\rangle = -2Q \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [2s(2m+1)+1] \frac{\sin[2s(2m+1)+1]\varphi}{p^2 - [2s(2m+1)+1]^2} J_{2s(2m+1)+1}(KR), \quad (34)$$

$$s = 0, 1, 2, \dots$$

where  $s$  is a number of the recurring transformations, whereas  $2s$  and  $2s+1$  are topological indices of the wave constructions.

The following step is to rotate the initial dipole through an angle  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ . Such a transformation turns sine in (33) and (34) into cosine at  $m=0$  at arbitrary index  $s$ . As a result we obtain the states with the centered optical vortices of the required integer-order topological charges  $l=2s$  or  $l=2s+1$

$$|p, \pm l\rangle = |p, s\rangle_0 \pm i |p, s\rangle_{\pi/2}. \quad (35)$$

Intensity distributions of the axially symmetric fields shown in Fig. 3a, c illustrate the optical constructions built up of the broken fractional vortex-beams on the base of the expressions (33) and (34).

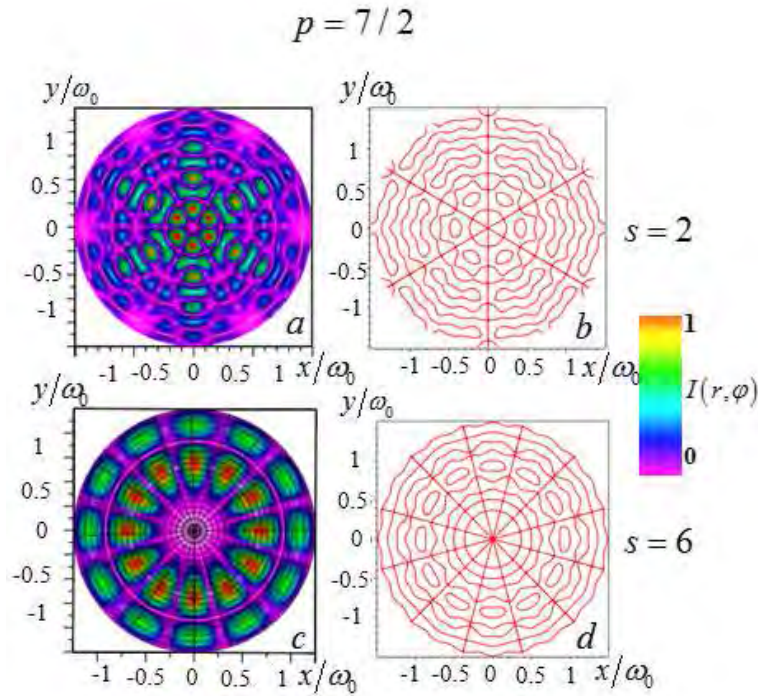


Fig. 3. Intensity distributions and L-lines of the axially symmetric beams shaped by the fractional-order vortex beams



Astonishing feature of these structures is that there are no optical vortices in them. Instead we see in Fig. 3b, d the curlie-wurlie of the degenerated edge dislocations (L-lines [48]) webbing tightly around the beam pattern. Three (Fig. 3 b) and six (Fig. 3 d) nodal lines intersect each other at the axis.

As a result, expressions (35) and (36) are responsible for shaping the optical tracery shown in Fig. 4 consisting of the interchangeable arranged vortex arrays and degenerated edge dislocations around the centered optical vortex with the topological charges  $l = 3$  and  $l = 6$ .

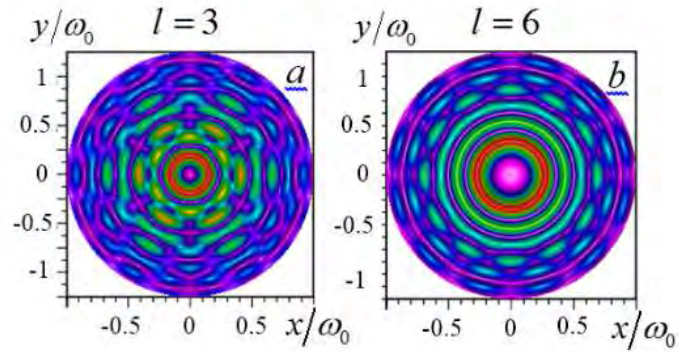


Fig. 4. Intensity beam distributions with centered higher-order vortices and complex vortex framing

Thus, a simple rotation of two topological dipoles through discrete angles (Fig. 5) enables us to form singular beams with the required, centered integer-order optical vortices.

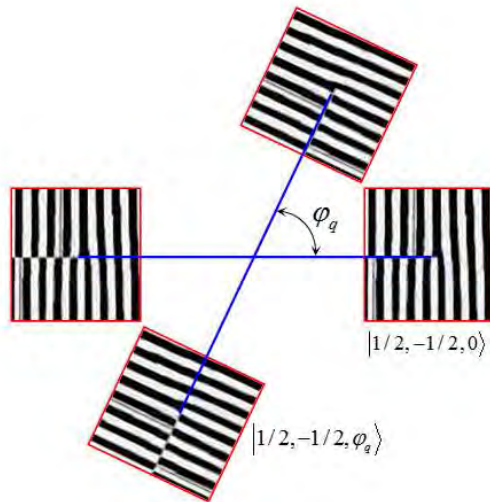


Fig. 5. The sketch of the topological dipole and its angular rotation

When propagating such a complex beam transforms its framing far from the axis while the central part preserves the singular structure.

At the same time, all the beam states (both with the integer-order and fractional-order vortices) in free space or uniform isotropic media are degenerated, i.e. have the same propagation constants independent on the topological charge values. The choice of the beam representation in one or other basis is determined by the intrinsic symmetry of the optical system. Despite the fractional vortex beam degeneracy in free space, the results presented above enable us to originate new vortex-beam constructions that can open their extraordinary properties in non-uniform anisotropic media as we will see it later.

Also, the problem of the “hidden phase” of the fractional-order vortices [4] in the circularly polarized field components slipped out from our consideration since the fractional-order vortex, as a rule, decays into an infinite number of the integer-order vortices under propagation.

However, the exclusion is the  $\Gamma-G$  beams that can either break down the fractional vortex into a set of integer-order vortices or, vice-versa, gather them together into one fractional vortex at far diffraction zone. The control for these counter-directed processes brings into effect the modulation of the beam parameter  $K$ .

Further we consider two examples of the possible manifestations of the fractional-order vortex beams in the uniform and non-uniform anisotropic media with the distinctive intrinsic symmetry.

## 2. DECAY OF OPTICAL QUARKS IN UNIAXIAL IN BIAXIAL CRYSTALS

### A. General remarks

The fractional-charged beams propagating in uniaxial crystals has been partially regarded in [26] for the vortex beams in states  $|\pm 1/2\rangle$  (the so-called erf-G beams). Authors showed conversion between the states  $|\pm 1/2\rangle$  and  $|1/2 \pm 2\rangle$  in circular polarized components. It is easily to generalize this rule to arbitrary states  $|p\rangle$  and  $|p \pm 2\rangle$ . However all the states with different fractional-order vortices are degenerated.

Alternatively, biaxial crystals have one interesting type of the dielectric tensor singularity – Hamilton’s diabolical point [28] that defines particular behavior of the vortex beams propagating along one of the crystal optical axes – so called the conical refraction predicted by Hamilton due to a peculiar space-variant birefringence (see Fig. 6).

The internal conical refraction is in spreading a narrow light beam propagating along the crystal optical axis into a hollow cone [29]. The initial circular polarization of the beam splits into a cone of local linear polarizations in such a way that the electric vector  $\mathbf{E}$  rotates though an angle  $\pi$  after a full path tracing around the cone axis as shown in Fig. 6. Generalization of Hamilton’s approach onto Gaussian beams introduces corrections into a fine structure of the field propagation and distribution [28]. The phenomenon is called the conical diffraction. The conical form of the beam suggested the solutions of the problem in the form of Bessel beams. At the same time, the polarization distribution in Fig.6 has also much in common with that of *erf* –  $G$  and  $\Gamma-G$  beams in Fig. 4 [17].

Little misalignments of the field patterns far from the optical axis can be referred to a complex structure of the fractional-charged vortex beams.

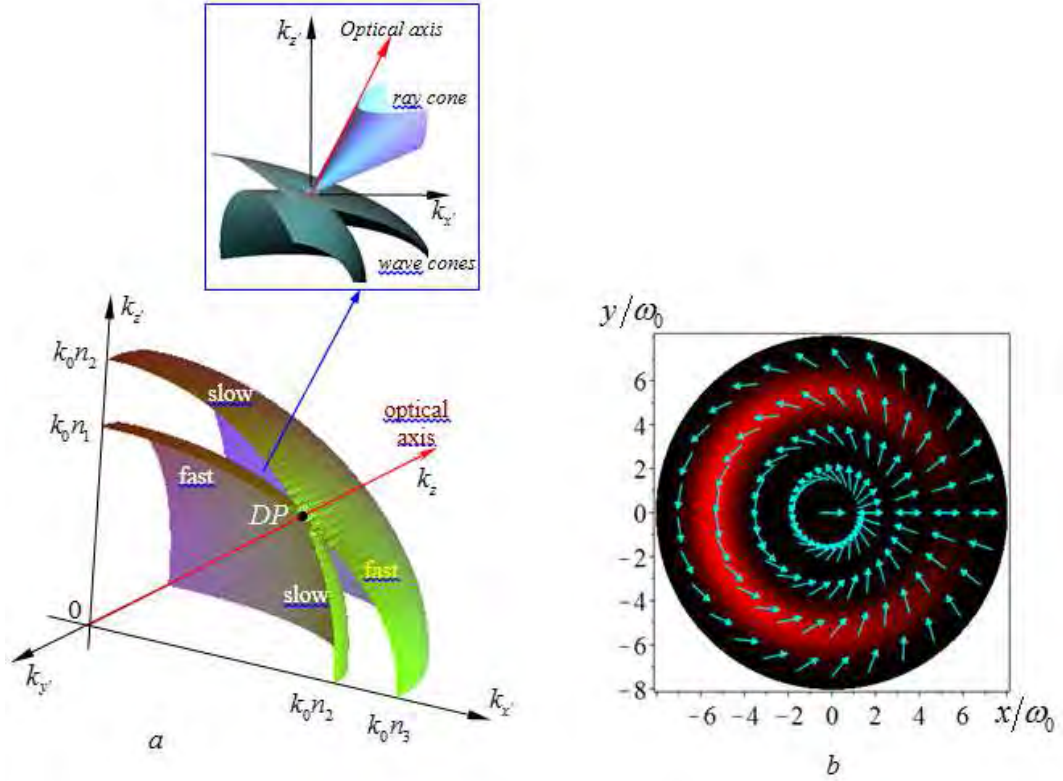


Fig. 6. (a) The shaping of a diabolic point (DP) in a biaxial crystal as intersection of two wave surfaces. The *callout illustrates* places of the ray and wave cones of the conical refraction; (b) Space-variant directions of the biaxial crystal birefringence under the conditions of the conical refraction on the background of the beam intensity

The unexpected results presented in the papers [29, 30, 31, 32] have shown that the uniaxial crystal exhibits a tendency to turn into a biaxial one after twisting it around the optical axis. The space-variant symmetric field of TE or TM eigen modes inherent to a uniaxial crystal [33] at the initial plane  $z=0$  transforms into the asymmetric field distribution similar to that shown in Fig. 6. In contrast to the standard conical diffraction in the typical biaxial crystals, the intensity distribution in the twisted uniaxial crystal has not the pronounced C-shaped form or the circular form with Poggendorff rings [29] but the pattern gets smeared over the cross-section with the singular point at the axis. Nevertheless, the fine structure of the pattern can be controlled by means of either mechanical or electrical devices.

The presented results point out on the fact that eigen mode beams of the conical diffraction and adjoining phenomena are worth searching among the fractional-order vortex-beams.

Thus, the aim of the following sub-section is to study the propagation and conversion of the fractional-order vortex-beams of the Bessel type along one of the optical axes of the biaxial crystal. We will focus our attention to the question: could the input beam field with a space variant polarization identical to that of the crystal birefringence (say, the state  $|p\rangle$ ) propagate without structural perturbation (to be the propagation-invariant wave constructions)? If yes, then we can expect the fractional-order mode beam to be an eigen mode of the medium.

### B. The theoretical treatment

The underlying idea of our treatment leans on the constitutive papers [34–37] where authors consider evolution of the electric field  $\mathbf{E}$  (rather than the electric displacement  $\mathbf{D}$ ) of Bessel beams in biaxial crystals under the condition of conical diffraction. The fact is that the wave normal is not directed along the beam propagation in a biaxial crystal so that there appear additional terms in the vector wave equation because of changes in the permittivity tensor. In our case we can use this tensor in the form [37]

$$\hat{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_a & 0 & -\epsilon_{13} \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ -\epsilon_{13} & 0 & \epsilon_b \end{pmatrix}, \quad (36)$$

where  $\epsilon_a = \epsilon_1 + \epsilon_3 - \epsilon_1\epsilon_3 / \epsilon_2$ ,  $\epsilon_b = \epsilon_1\epsilon_3 / \epsilon_2$ ,  $\epsilon_{13} = \sqrt{\epsilon_1\epsilon_3(\epsilon_2 - \epsilon_1)(\epsilon_3 - \epsilon_2)} / \epsilon_2$ ,  $n_1^2 = \epsilon_1$ ,  $n_2^2 = \epsilon_2$ ,  $n_3^2 = \epsilon_3$  are the principal refractive indices of the crystal along the axes  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ .

The optical axis directed at the angle  $\theta$  to the axis  $z'$

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{\epsilon_3(\epsilon_2 - \epsilon_1)}{\epsilon_1(\epsilon_3 - \epsilon_2)}}. \quad \epsilon_1 < \epsilon_2 < \epsilon_3$$

passes through a diabolic point where slow (s) and fast (f) wave fronts are tangent to each other as shown in Fig. 7.

Author of the papers [35, 38] showed that the circularly polarized beam components with the spectral function at the crystal input  $A(k_\perp)$  ( $k_\perp$  is the transverse wavenumber of the initial beam), are

$$\begin{aligned}
 E_+(r, \varphi, z) &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} e^{im'\varphi} \int i^{m'} k_{\perp} A_{m'}(k_{\perp}) J_{m'}(k_{\perp} r) \exp\left(-i \frac{k_{\perp}^2}{2k_b} z\right) \cos(\gamma_0 k_{\perp} z) dk_{\perp} e^{i\beta z}, \\
 E_-(r, \varphi, z) &= - \sum_{m'=-\infty}^{\infty} i^{m'} e^{i(m'+1)\varphi} \int k_{\perp} A_{m'}(k_{\perp}) J_{m'+1}(k_{\perp} r) \exp\left(-i \frac{k_{\perp}^2}{2k_b} z\right) \sin(\gamma_0 k_{\perp} z) dk_{\perp} e^{i\beta z}.
 \end{aligned}
 \tag{37}$$

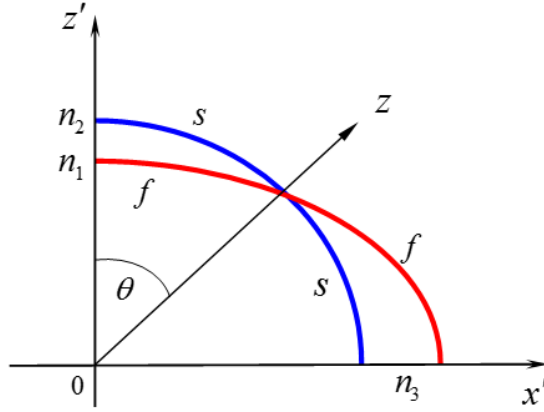


Fig. 7. Sketch of the surface of normals of the slow (s) and fast wavefronts and the optical axis direction

It means that the right-hand circularly polarized beam bearing a series of the vortex-beams of the  $m$ -order and a complex angular spectral distribution  $A(k_{\perp})$  at the crystal input stimulates an excitation of a series of the vortex-beams of the  $m+1$  – order with the same angular spectrum  $A(k_{\perp})$  in the left-hand circularly polarized component.

Similarly, it can be shown that the composition of the vortex beams of the  $m+1$  – order with the spectral distribution  $A(k_{\perp})$  in the left circularly polarized component at the crystal input excites a series of a series of the vortex-beams of the  $m$  – order with the same angular spectrum  $A(k_{\perp})$  in the right-hand circularly polarized component, i.e.

$$\begin{aligned}
 E_+(r, \varphi, z) &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} e^{im'\varphi} i^{m'} \int k_{\perp} A_{m'}(k_{\perp}) J_{m'}(k_{\perp} r) \exp\left(-i \frac{k_{\perp}^2}{2k_b} z\right) \sin(\gamma_0 k_{\perp} z) dk_{\perp} e^{i\beta z}, \\
 E_-(r, \varphi, z) &= \sum_{m'=-\infty}^{\infty} i^{m'} e^{i(m'+1)\varphi} \int k_{\perp} A_{m'}(k_{\perp}) J_{m'+1}(k_{\perp} r) \exp\left(-i \frac{k_{\perp}^2}{2k_b} z\right) \cos(\gamma_0 k_{\perp} z) dk_{\perp} e^{i\beta z}.
 \end{aligned}
 \tag{38}$$

The circularly polarized single Bessel beam  $E_+^{in} = J_m(k_\perp r) \exp(im\varphi) e^{ik_z z}$  with integer-order topological charge  $m$ , directed along the crystal optical axis (axis  $z$  in Fig. 7), has the conical spectral distribution  $A(k_\perp = k_\perp^{(0)}) = \text{const}$ . In order to obtain the beam propagation of such a beam it is sufficient to multiply eq. (37) by the factor  $\delta(k_\perp - k_\perp^{(0)})$ , and taking into account  $m' \rightarrow m$  we find

$$\mathbf{E}_1 = \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m(k_\perp r) \exp(im\varphi) \cos(\gamma_0 k_\perp z) \\ -J_{m+1}(k_\perp r) \exp[i(m+1)\varphi] \sin(\gamma_0 k_\perp z) \end{pmatrix} \exp\left(-i \frac{k_\perp^2}{2k_b} z\right) e^{i\beta z}, \quad (39)$$

where  $\beta = n_2 z$ ,  $k_b = k n_2 / 2(1 + \varepsilon_2 / \varepsilon_b)$ ,  $\gamma_0 = \varepsilon_{13} / 2\varepsilon_b$ .

Similar to that we can obtain from eq. (38) for the initial field in the form  $E_-^{in} = -J_{m+1}(k_\perp r) \exp[i(m+1)\varphi] e^{ik_z z}$  the expression

$$\mathbf{E}_2 = \begin{pmatrix} E_+ \\ E_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_m(k_\perp r) \exp(im\varphi) \sin(\gamma_0 k_\perp z) \\ J_{m+1}(k_\perp r) \exp[i(m+1)\varphi] \cos(\gamma_0 k_\perp z) \end{pmatrix} \exp\left(-i \frac{k_\perp^2}{2k_b} z\right) e^{i\beta z}. \quad (40)$$

Combination  $\mathbf{E}_1 \pm i\mathbf{E}_2$  of (39) and (40) gives

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_m(k_\perp r) \exp(im\varphi) \\ J_{m+1}(k_\perp r) \exp\left[i(m+1)\varphi - i\frac{\pi}{2}\right] \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{k_\perp^2}{2k_b} + \gamma_0 k_\perp + \beta\right)z} \quad (41)$$

and

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_m(k_\perp r) \exp(im\varphi) \\ J_{m+1}(k_\perp r) \exp\left[i(m+1)\varphi + \frac{\pi}{2}\right] \end{pmatrix} e^{i\left(\frac{k_\perp^2}{2k_b} - \gamma_0 k_\perp + \beta\right)z} \quad (42)$$

The equations (41) and (42) show that such fields with space-variant polarization can propagate through the crystal without any structural transformations but with different

propagation constants  $\beta_\pm = \frac{k_\perp^2}{2k_b} \pm \gamma_0 k_\perp + \beta$ .

Difference between the propagation constants  $\beta_\pm$  of the mode beams is connected with rotation of the mode fields  $\mathbf{E}_1$  and  $\mathbf{E}_2$  through an angle  $\pi$ . Fig. 6 demonstrates the situation when the local directions of the space-variant birefringence  $\Delta n(\varphi)$  of the crystal coincides with the local directions of the local field distribution that corresponds

the propagation constant  $\beta_+$ . The field rotation at the angle  $\varphi_0 = \pi$  results in changing the sign of the local birefringence  $\Delta n(\varphi) \rightarrow -\Delta n(\varphi)$  that corresponds to replacement  $\beta_+ \rightarrow \beta_-$ .

The polarization state distribution of the s at the mode beam cross-section (6) has a complex form in contrast to the standard structure shown in Fig. 6. A typical space-variant polarization illustrates Fig. 8 for the mode index  $m = 6$ .

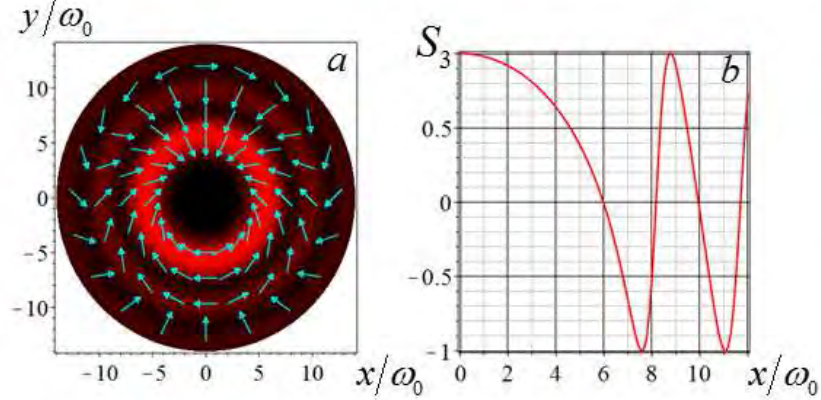


Fig. 8. The polarization state distribution of the mode beam with the index  $m = 6$  (a) and (b) the dependence of the ellipticity degree  $S_3(r)$  along the beam radius

Directions of the polarization ellipse axes  $\psi$  are depicted on the background of the mode intensity distribution. The ellipticity states specified by the Stokes parameter  $S_3$  as a function of radial position in Fig. 8 b oscillate from the right-hand  $S_3 = 1$  to left-hand  $S_3 = -1$  states. However, the ellipticity  $S_3$  preserves its value along the azimuth direction  $\hat{\phi}$ . Although the path-tracing around the beam axis through an angle  $\varphi = \pi$  is accompanied by the ellipse rotation through an angle  $\psi = \pi/2$ , the full path-tracing results in reinstating both the polarization state and beam phase. Such a space-variant polarization of the eigen mode manifest itself in the ring pattern of intensity distribution while the linear space-variant polarization is in line with  $C$ -shaped distribution in Fig. 6.

The partial solutions (41) and (42) in the form of eigen modes can be extended to a general solution as a superposition of (41) or (42) with different values of indices  $m$ . In particular, the mode field  $\mathbf{E}_p^{(+)}$  with the propagation constant  $\beta_+$  and the fractional topological charge  $p$  in the right-hand component can be presented as

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_p^{(+)} &= c_p \left( \begin{array}{c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^m J_m(k_{\perp} r) \exp(im\varphi)}{p-m} \\ - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^{m+1} J_{m+1}(k_{\perp} r) \exp[i(m+1)\varphi]}{p-m} \end{array} \right) e^{i\beta_+ z} = \\
 &= c_p \left( \begin{array}{c} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^m J_m(k_{\perp} r) \exp(im\varphi)}{p-m} \\ - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{i^{m+1} J_{m+1}(k_{\perp} r) \exp[i(m+1)\varphi]}{p+1-(m+1)} \end{array} \right) e^{i\beta_+ z} = \begin{pmatrix} |p\rangle \\ -c_{p+1} |p+1\rangle \end{pmatrix} \exp(-i\beta_+ z),
 \end{aligned} \tag{43}$$

where  $c_p = \sin \pi p e^{ip\pi}$ . Similar to that we can write down the mode field  $\mathbf{E}_p^{(-)}$  with the propagation constant  $\beta_-$ :

$$\mathbf{E}_p^{(-)} = \begin{pmatrix} |p\rangle \\ i c_{p+1} |p+1\rangle \end{pmatrix} \exp(-i\beta_- z), \tag{44}$$

with  $\beta_{\pm} = \frac{k_{\perp}^2}{2k_b} \pm \gamma_{in} k_{\perp} - \beta$  and we employ the expression (44).

Typical field distributions on the background of the beam intensity is shown in Fig. 9 for the  $|0.5\rangle$  and  $|7.5\rangle$  fractional states.

We calculated the states for the potassium gadolinium tungstate  $\text{KGd}[\text{WO}_4]_2$  (KGW) biaxial crystal with refractive indices  $n_1 = 2.013, n_2 = 2.045, n_3 = 2.086$ , for the wavelength  $\lambda = 0.63 \mu\text{m}$ , so that the crystal and beam control parameters are  $\gamma_{in} \approx 0.0087 \text{ rad}$ ,  $\varepsilon_b \approx 4,224$ ,  $k_{\perp} \approx 1.74 \cdot 10^5 \text{ m}^{-1}$ . We found the beams in all beam states to have a linear polarization at the cross-section. In contrast to the integer-order vortex charges (see Fig. 8), an angle rotation of the linear polarization  $\psi$  of the fractional-order states is multiple to  $\pi$  after a full path-tracing around the axis and depends on both the topological charge  $p$  and a transverse position  $r$ . Besides, we found that the greater the value of the parameter  $k_{\perp}$  the greater the number of polarization variations along the radial  $\hat{\mathbf{r}}$  directions.



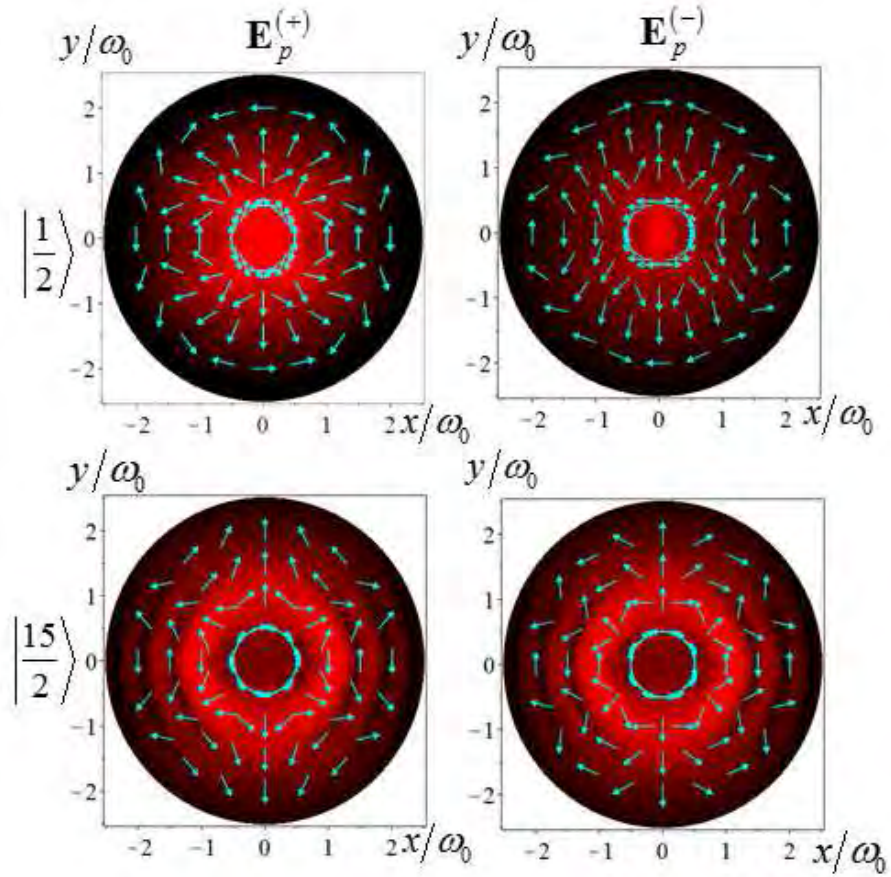


Fig. 9. Field distributions of the fractional-order vortex beam in the potassium gadolinium tungstate KGW biaxial crystal

The beat length in our case equals to  $L_B = 2\pi / (\gamma_{in} k_{\perp}) \approx 4.15 \text{ mm}$ . It means that the states  $|p\rangle$  and  $|p+1\rangle$  appear alternately at this length while the eigen mode states (43) and (44) in Fig. 9 emerge at the lengths  $L_{e,o} = \pi(2n+1) / (4\gamma_{in} k_{\perp})$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$

Thus, the right-hand circularly polarized Bessel beam with the  $p$ - fractional-order vortex at the crystal input induces the beam with  $p+1$ - fractional-order vortex at the left-hand circular polarization at some crystal length  $z$ . At the beam length  $z = \frac{\pi}{2\gamma k_{\perp}}(2n+1)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  all energy state is transported from  $|p\rangle$  into  $|p+1\rangle$  state. However the eigen modes  $\mathbf{E}_p^{(\pm)}$  for different charges  $p$  have the same propagation constants (i.e. are degenerated). Any superposition of the fractional-order vortex beams obeys the same transformations (45) as the single field states.

Thus, the energy transport of the conical diffraction process in biaxial crystals is carried out from  $E_+$  component in  $|p\rangle$  state into  $E_-$  component in  $|p+1\rangle$  state and vice-versa for wide types of the field structure of fractional-order vortex beams. However, difference of the propagation constants between the orthogonal field components is the same for all types of the fractional-order vortex-beams. There is not an appropriate physical mechanism in the biaxial crystals that could make the polarization structure of the beam to follow the singular structure with the fractional-order index of the birefringence directions. As a result the biaxial crystals cannot maintain the single fractional-order vortex beams without their decay into a set of the integer-order vortices.

Let us now peer more attentively into shaping the beam structure in space-variant birefringent media.

### CONCLUSION

Different types of symmetry of optical media are the key points that specify properties of the singular beam propagation. It is such starting points that were the base of our consideration. At first, we have considered variety of vector fractional-order vortex beams that can be transmitted through free space or a uniform isotropic medium. Among them the Gamma-Gaussian beams (the  $\Gamma-G$  beams, in particular, the erf-G beams) occupy a special place. The fact is that in contrast to the prevalent opinion about decaying the initial fractional-order vortex into a cloud of integer-order vortices, the  $\Gamma-G$  beams either break apart of the fractional vortex or, vice-versa, gather together integer-order vortices into one fractional-order vortex at far diffractive zone. However, all types of such vortex beams are unstable under propagation.

On the other hand, we revealed that singular beams with the stable centered integer-order vortices can be formed by four fractional-order vortices. Such constructions remains stable for different values of the topological charges  $p$ .

We found that the space-variant birefringence with one singular point shown in Fig.6 is inherent in the fractional-order vortex-beams at the crystals input under the condition of the conical diffraction. Typical scenario of the beam propagation here evolves in such a way that the topological charges of the fractional-order vortices in the circularly polarized components of vector beams differ from each other in one unit. The difference between the propagation constants of the components is independent on the value  $p$ . It means that the biaxial crystal does not feel distinction between the fractional- and integer-order vortex beams. The same processes we observe also in the so-called  $q$ -plates, Moreover the polarization states at the beam cross-section are distributed by the complex way far from that of the birefringent directions in the crystal. Naturally the fractional-order vortex beams in the biaxial crystals and  $q$ -plates are also unstable one under propagation.

### References

1. M. S. Soskin and M. V. Vasnetsov, *Prog. Opt.* **42**, 219 (2001).
2. I. Basisty, M. Soskin, M. Vasnetsov, *Opt. Commun.* **119**, 604 (1995).
3. I. Basisty, et al., *J. Opt. A-Pure Appl. Op.* **6**, S166 (2004).
4. M. V. Berry et al., *Eur. J. Phys.* **1**, 154 (1980).

5. M. V. Berry, *J. Opt. A – Pure Appl. Op.* **6**, 259 (2004).
6. G. E. Volovik and V. P. Mineev, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **24**, 605 (1976).
7. J. Jang et al., *Science* **331**, 186 (2011).
8. S. W. Seo, S. Kang, W. J. Kwon, and Yong-il Shin, *Phys. Rev. Lett.* **115**, 051301 (2015).
9. J. A. Sauls, *Physics* **9**, 148 (2016).
10. A. Hansen, J. T. Schuliz, N. P. Bigelow, *Optica* **3**, 355 (2016).
11. S. Tao, W. Lee, X. Yuan, *Appl. Opt.* **43**, 122 (2004).
12. J. Leach, E. Yao, and M. J. Padgett, *New J. Phys.* **6**, 71 (2004).
13. H. Garcia, J. Gutierrez-Vega, *J. Opt. Soc. Am. A* **26**, 794 (2009).
14. J. C. Gutiérrez-Vega and C. López-Mariscal, *J. Opt. Soc. Am. A* **10**, 015009 (2008).
15. F. G. Mitri, *Opt. Lett.* **36**, 606–608 (2011).
16. Yiqi Fang et al., *Phys. Rev. A* **95**, 023821 (2017).
17. T. A. Fadeyeva et al., *Opt. Lett.* **37**, 1397 (2012).
18. T. A. Fadeyeva, A. F. Rubass, R. V. Aleksandrov, A. V. Volyar, *J. Opt. Soc. Am. B* **31**, 798 (2014).
19. G. Maleshkov, D. Neshev, A. Dreischuh, *Phys. Rev. A* **80**, 053828 (2009).
20. C. Alexeyev et al., *Opt. Lett.* **42**, **4**, 783 (2017).
21. A. P. Kiselev, *Opt. Spectrosc.* **96**, 479 (2004).
22. F. Cardano, E. Karimi, S. Slussarenko, L. Marrucci, Corrado de Lisio, E. Santamato, *Appl. Opt.* **51**, C1 (2012).
23. Daohong Song, Cibo Lou, Liqin Tang, Zhuoyi Ye, Jingjun Xu, Zhigang Chen, *Int. J. Optics* **27385** (2012).
24. A. Yu. Okulov, *J. Mod. Optics* **2**, 241 (2008).
25. T. Fadeyeva, A. Rubass, I. Valkov, A. Volyar, *J. Opt.* **14**, 044020 (2012).
26. A. P. Prudnikov, Yu. A. Brychkov, O. I. Marichev. *Integrals and Series* (Gordon & Breach Science Publishers/CRC Press, 1992), Vol. 1–5, p. 615.
27. V. V. Kotlyar, A. A. Kovalev, V. A. Soifer, *Comp. Opt.* **38**, 410 (2014)
28. M. V. Berry, M. R. Jeffrey, *Prog. Opt.* **50**, 13 (2007).
29. M. V. Berry, M. R. Jeffrey, J. G. Lunney, *Proc. R. Soc. A* **462**, 1629 (2006).
30. I. Skab, Yu. Vasytkiv, V. Savaryn, R. Vlokh, *J. Opt. Soc. Am. A* **28**, 633 (2011).
31. I. Skab, Yu. Vasytkiv, V. Savaryn, R. Vlokh, *Ukr. J. Phys. Opt.* **11**, 193 (2010).
32. T. A. Fadeyeva, C. N. Alexeyev, P. M. Anischenko, A. V. Volyar, *Appl. Opt.* **51**, C1 (2012).
33. Yu. A. Egorov, T. A. Fadeyeva, A. V. Volyar, *J. Optics A: Pure and Appl. Opt.* **6**, S217 (2004).
34. N. S. Kazak, N. A. Khilo, A. A. Ryzhevich, *Quantum Electron.* **29**, 1020 (1999).
35. V. Belyi, T. King, N. Kazak, N. Khilo, E. Katranji, A. Ryzhevich, *Proc. SPIE* **4403**, 229 (2001).
36. V. N. Belyi, N. Khilo, *J. Opt.* **15**, 4018 (2013).
37. T. King, W. Hogervorst, N. Kazak, N. Khilo, and A. Ryzhevich, *Opt. Commun.* **187**, 407 (2001).
38. N. A. Khilo, *Opt. Commun.* **286**, 1 (2013).

---

## ДРОБНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ВИХРИ: УСТОЙЧИВОСТЬ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

*Воляр А. В., Алексеев К. Н., Егоров Ю. А., Акимова Я. Е.\**

*Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия*

*\*E-mail: [yana.akimova.1994@mail.ru](mailto:yana.akimova.1994@mail.ru)*

В данной работе мы изучили формирование и эволюцию сингулярных пучков, переносящих оптические вихри с дробным топологическим зарядом как в однородной, так и неоднородной анизотропной среде. Вихри дробного порядка могут быть представлены как суперпозиция бесконечного числа вихрей целочисленного порядка с определенным распределением энергии (вихревые

спектры). В работе показано, что гладкий волновой фронт вихря с дробным топологическим зарядом может распадаться на асимметричный массив целых вихрей, либо наоборот, массив оптических вихрей может образовывать гладкий геликоидальный волновой фронт. Показано, что наложением конечного числа вихревых пучков дробного порядка можно сформировать пучки с произвольными значениями топологических зарядов. Мы продемонстрировали, что в двухосных кристаллах при условии конической дифракции дробные вихри не устойчивы, а также, что кольцевые массивы волокон с пространственной вариацией двулучеприлобления являются подходящей средой для вихревых пучков дробного порядка.

**Ключевые слова:** оптически вихри, дробный топологический заряд, супермоды дробного порядка, скрытая фаза, массив оптических вихрей.

### Список литературы

1. Soskin M. S., Vasnetsov M. V., Singular optics // Prog. Opt. 2001. Vol. 42. P. 219.
2. Basisty I., Soskin M., Vasnetsov M., Optical wavefront, dislocations and their properties // Opt. Commun. 1995. Vol. 119. P. 604.
3. Synthesis and analysis of optical vortices with fractional topological charge / Basisty I., Slyusar V., Soskin M., et al. // J. Opt. A-Pure Appl. Op. 2004. Vol. 6. P. 166.
4. Wavefront dislocations in the Aharnov-Bohn effect and its water wave analogue / Berry M. V., Chambers R. G., Large M. D. et al. // Eur. J. Phys. 1980. Vol. 1. P. 154.
5. Berry M. V., Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps // J. Optics. A. 2004. Vol. 6. P. 259.
6. Volovik G. E., Mineev V. P., Linear and point peculiarities in superfluid  $^3\text{He}$  // Pis'ma Zhurnal. Eksp. Teor. Fiziki. 1976. Vol. 24. P. 605.
7. Observation of Half-Height Magnetization Steps in  $\text{Sr}_2\text{RuO}_4$  / J. Jang et al. // Science 2011. Vol. 331. P. 186.
8. Periodic shedding of vortex dipoles from a moving penetrable obstacle in a Bose-Einstein condensate / Seo S. W., Kang S., Know W. J., and Yong-il Shin // Physical Review A. 2015. Vol. 92. P. 033613.
9. J. A. Sauls, Viewpoint: Half-Quantum vortices in superfluid helium // Physics. 2016. Vol. 9. P. 148.
10. Hansen A., Schuliz J. T., Bigeliw N. P., Singular atom optics with spinor Bose-Einstein condensates // Optica. 2016. Vol. 3(4), P. 355.
11. Tao S., Lee W., Yuan X., Experimental study of holographic generation of fractional Bessel beams // Appl. Opt. 2004. Vol. 43. P. 122.
12. Leach J., Yao E., Padgett M. J., Observation of the vortex structure of a non-integer vortex beam // New J. Phys. 2004. Vol. 6. P. 71.
13. Garcia H., Diffraction of plane waves by finite radius spiral phase plates of integer and fractional topological charge // J. Gutierrez-Vega, J. Opt. Soc. Am. A. 2009. Vol. 26. P. 794.
14. Gutiérrez-Vega J. C., López-Mariscal C., Nondiffracting vortex beams with continuous orbital angular momentum order dependence // J. Opt. Soc. Am. A. 2008. Vol. 10. P. 015009.
15. Mitri F. G., Vector wave analysis of an electromagnetic high-order Bessel vortex beam of fractional type // Opt. Lett. 2011. Vol. 36. P. 606.
16. Magnet-controlled surface defect modes of photonic crystal / Yiqi Fang et al. // Phys. Rev. A. 2017. Vol. 95, P. 023821.
17. Vector erf-Gaussian beams: fractional optical vortices and asymmetric TE and TM modes / Fadeyeva T. A., Alexeyev C. N., Rubass A., Volyar A. V. // Opt. Lett. 2012. Vol. 37. P. 1397.
18. Does the optical angular momentum change smoothly in fractional charged vortex beams? / Fadeyeva T. A., Alexeyev C. N., Rubass A., Volyar A. V. // Journal of the Optical Society of America B. 2014. Vol. 31. P. 798.
19. Maleshkov G., Neshev D., Dreischuh A., Nonlinear beam steering by fractional vortex dipoles // Phys. Rev. A. 2009. Vol. 80, P. 053828.

20. Transmission of fractional topological change via circular arrays of anisotropic fibers / Alexeyev C. N., Kovalyava A. F., Rubass A. F., Volyar A. V., Yavorsky M. A. // Opt. Lett. 2017. Vol. 42. P. 783.
21. Kiselev A. P., New structures in paraxial Gaussian beams // Opt. Spectrosc. 2004. Vol. 96. P. 479.
22. Polarization pattern of vector beams generated by q-plates with different topological changes / Cardano F., Karimi E., Slussarenko S., Marrucci L., Corrado de Lisio, Santamato E. // Appl. Opt. 2012. Vol. 51. P. 1.
23. Experiments on linear and nonlinear localization of optical vortices in optically induced photonic lattices / Daohong Song, Cibo Lou, Liqin Tang, Zhuoyi Ye, Jingjun Xu, Zhigang Chen // Int. J. Optics 2012. ID 27385. P. 10.
24. Okulov A. Yu., 3D-vortexlabyrinths in the near field of solid-state microchip laser // J. Mod. Optics 2008. Vol. 52(2). P. 241.
25. Fractional optical vortical in a uniaxial crystal / T. Fadeyeva, A. Rubass, I. Valkov, A. Volyar // J. Opt. 2012. Vol. 14, 044020.
26. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I., Direct laplace transforms // Integrals and Series : Gordon & Breach Science Publishers/CRC Press, 1992. Vol. 1–5. P. 615.
27. Kotlyar V. V., Kovalev A. A., Soifer V. A., Diffraction free asymmetric elegant Bessel beams with fractional orbital angular momentum // Comp. Opt. 2014. Vol. 38. P. 4.
28. Berry M. V., Jeffrey M. R., Conical diffraction: Hamilton's diabolical into at the heart of crystal optics // Prog. Opt. 2007. Vol. 50. P. 13.
29. Berry M. V., Jeffrey M. R., Lunney J. G., Conical diffraction: observations and theory // Proc. R. Soc. A 2006. Vol. 462. P. 1629.
30. Optical anisotropy induced by torsion stresses in LiNbO<sub>3</sub> crystals: Appearance of an optical vortex / Skab I., Vasyukiv Yu., Savaryn V., Vlokh R. // J. Opt. Soc. Am. 2011. Vol. 28. P. 633.
31. Skab I., Vasyukiv Yu., Savaryn V., Vlokh R., Relations for optical indicatrix parameters at the crystal torsion // Ukr. J. Phys. Opt. 2010. Vol. 11. P. 193.
32. Engineering of the space-variant linear polarization vortex-beams in biaxially induced crystals / Fadeyeva T. A., Alexeyev C. N., Anischenko P. M., Volyar A. V. // Appl. Opt. 2012. Vol. 51. C1.
33. Egorov Yu. A., Fadeyeva T. A., Volyar A. V., Fine structure of singular beams in crystals: colors and polarization // J. Optics A: Pure and Appl. Opt. 2004. Vol. 6. P. 217.
34. Kazak N. S., Khilo N. A., Ryzhevich A. A., Generation of Bessel light beams under the conditions of internal conical refraction // Quantum Electron. 1999. Vol. 29. P. 1020.
35. Methods of formation and nonlinear conversion of Bessel optical vortices / V. Belyi, T. King, N. Kazak, N. Khilo, E. Katranji, A. Ryzhevich, // Proc. SPIE 2001. Vol. 4403. P. 229.
36. Belyi V. N., Khilo N., Spin-to-orbital angular momentum conversion for Bessel beams propagating along the optical axes of homogeneous uniaxial and biaxial crystals // J. Opt. 2013. Vol. 15. P. 4018.
37. Formation of higher-order Bessel light beams in biaxial crystals / King T., Hogervorst W., Kazak N., Khilo N., Ryzhevich A. // Opt. Commun. 2001. Vol. 187. P. 407.
38. Khilo N. A., Conical diffraction and transformation of Bessel beams in biaxial crystals // Opt. Commun. 2013. Vol. 286. P. 1.

*Поступила в редакцию 22.06.2017 г. Принята к публикации 26.11.2017 г.  
Received June 22, 2017. Accepted for publication November 26, 2017*

**УДК 535**

**АНАЛИЗ СВОЙСТВ ПОЛЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ПОСЛЕ  
МУЛЬТИПЛЕКСИРОВАНИЯ ПУЧКОВ ЛАГЕРРА-ГАУССА В  
МАЛОМОДОВОМ ВОЛОКНЕ**

*Ильсова А. А.\*, Халилов С. И., Рыбась А. Ф.*

*Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия*

*\*E-mail: [arife-ilyasova@mail.ru](mailto:arife-ilyasova@mail.ru)*

В работе экспериментально показана возможность мультиплексирования сложного сигнала, несущего оптические вихри, в оптическом маломодовом волокне с  $V = 3.8$  и создаваемого пучками Лагерра-Гаусса с топологическим зарядом  $l = + - 1$  и циркулярной поляризацией  $s = + - 1$ . Тем самым удалось увеличить количество каналов для передачи информации в волокне, что обеспечит дополнительную степень свободы для мультиплексирования данных в волоконно-оптических линиях связи.

**Ключевые слова:** пучки Лагерра-Гаусса, мультиплексирование, топологический заряд, поляризация.

**PACS:** 42.81.Uv

**ВВЕДЕНИЕ**

Объем трафика данных через интернет достигает ограничений, налагаемых волоконно-оптическими нелинейными эффектами [1]. Типичным способом увеличения пропускной способности в оптических системах связи является мультиплексирование множества независимых каналов данных. Например, несколько независимых каналов данных могут быть расположены на различных длинах волн, с различными поляризациями, соответствующими мультиплексированию с разделением по длине волны, и мультиплексированию с разделением по поляризации [1].

Ранее в данных методах использовались стандартные Гауссовы пучки [1]. В своей работе мы использовали пучки Лагерра-Гаусса, известные как оптические вихри [2], которые при распространении в оптическом волокне благодаря спин-орбитальному взаимодействию имеют разные постоянные распространения, что позволит увеличить количество каналов для передачи информации в волокне. Передача информации в волокне с помощью оптических вихрей является одной из наиболее перспективных технологий увеличения скорости передачи данных. Хорошо известно [3–5], что поле излучения маломодового оптического волокна обычно содержит точки сингулярности, положение которых зависит от условий возбуждения, внешних возмущений и ориентации поляризатора, размещенного на выходе излучения из волокна. Единственным способом анализа процессов в волокне является сканирование тонкой структуры поля излучения этого волокна.

В работе экспериментально исследуется процесс мультиплексирования сложного сигнала, передаваемого пучками с различными типами поляризации и различными топологическими зарядами.

## 1. МОДЕЛЬ

Впервые о полях с фазовыми сингулярностями упоминается в статье Дж. Наем и М. Берри [3], где авторы дают подробный анализ особых состояний поля с геликоидальным волновым фронтом и различными его модификациями. Такие особенности поля авторы назвали дислокациями волнового фронта. Особое внимание было уделено чисто винтовой дислокации, которая была названа оптическим вихрем. И в настоящее время оптические вихри привлекают к себе внимание благодаря своим уникальным свойствам, имеющим значительное практическое значение.

Под дислокацией волнового фронта скалярного поля понимается требование одновременного обращения в нуль действительной и мнимой части поля. В частности, под дислокацией электромагнитного поля понимается требование равенства нулю действительной и мнимой частей однородно поляризованного в поперечном сечении электромагнитного поля. Математически это условие можно записать, учитывая то, что одновременно действительная и мнимая часть волновой функции обращается в нуль

$$\begin{cases} \operatorname{Re} \Psi(x, y, z) = 0, \\ \operatorname{Im} \Psi(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Решая эту систему уравнений, получаем особую линию, на которой действительная и мнимая части напряженности электрического и магнитного полей обращаются в нуль, а фаза поля является неопределенной. Эта линия и будет траекторией дислокации волнового фронта.

Свойства сингулярностей скалярных оптических полей наиболее ярко проявляются в пучках Лагерра-Гаусса  $LG_{ll}$  (оптические вихри). Волновой фронт пучков Лагерра-Гаусса  $LG_{ll}$  из-за неопределенности фазы в точке дислокации имеет вид прямого геликоида, а направление закрутки спирали геликоида определяет знак топологического заряда  $l$ . Расстояние между двумя «плоскостями» на одном листе геликоида равно длине волны. Оптический вихрь параксиального пучка может быть описан простым выражением

$$\Psi = (x \pm iy)^l \quad (2)$$

Известно, что в дальнем поле дифракции фундаментального гауссова пучка на краю диэлектрического клина формируется цепочка оптических вихрей. Механизм формирования оптического вихря при дифракции гауссова пучка на клине довольно прост [4]. Необходимо, чтобы гауссов пучок падал на поверхность прозрачного диэлектрического клина таким образом, что одна часть проходила по свободному пространству, а другая через клин.

## 2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для экспериментального исследования процесса мультиплексирования сигнала в маломодовом волокне была собрана экспериментальная установка (рис. 1). Принцип исследования пучка заключается в том, что после разделения линейно поляризованного пучка на два пучка, имеющих различное состояние поляризации (рис. 2) и различные знаки топологического заряда, мультиплексировать сигнал. При этом на выходе волокна, проанализировав суперпозицию пучков по модовому составу, мы можем различить входной сигнал. Отличие пучков по орбитальным угловым моментам возможно осуществить интерферометрическими методами, при измерении состояний поляризации с помощью поляризационных фильтров.

В волокне из-за спин-орбитального взаимодействия угловых моментов пучков, состояние топологических зарядов оптических вихрей и состояние поляризации пучков, смешиваются. Для выяснения основных поляризационных процессов, протекающих в волокне, мы использовали дифференциальный Стокс-поляриметр, позволяющий измерять распределение состояния поляризации излучения в каждом пикселе изображения и выводить соответствующую карту на дисплей компьютера.

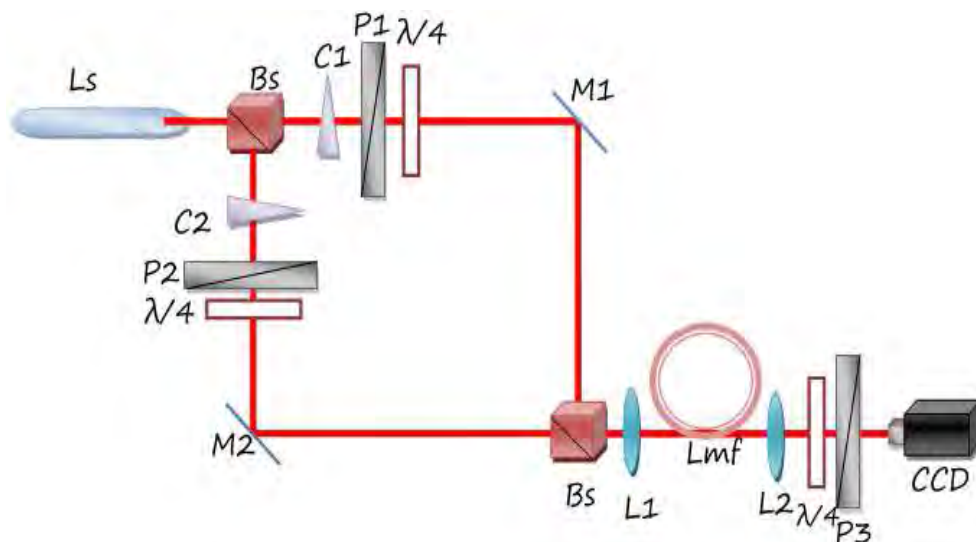


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: (Ls) лазер, (P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub>) поляризаторы, ( $\lambda/4$ ) четвертьволновая пластинка, (Bs<sub>1</sub>, Bs<sub>2</sub>) делительные кубики, (L<sub>1</sub>, L<sub>2</sub>) линзы, (M<sub>1</sub>, M<sub>2</sub>) зеркала, (C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>) диэлектрические клинья, (Fmf) маломодовое волокно ( $V = 3.4$ ), (CCD) камера



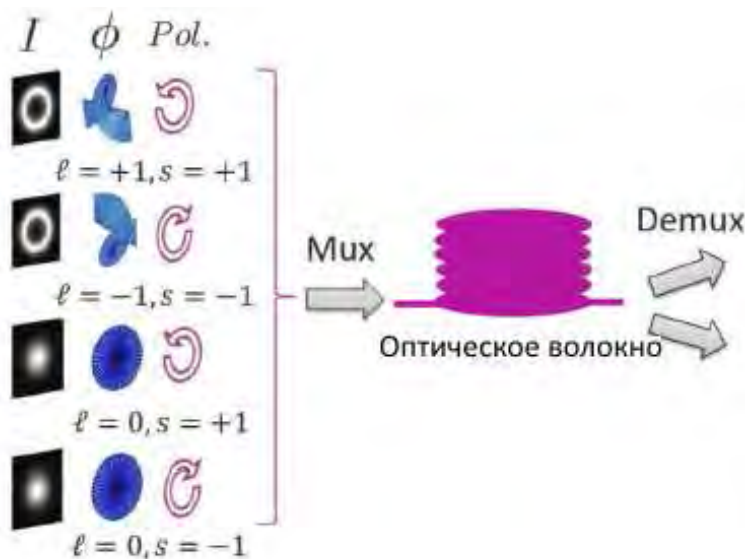


Рис. 2. Преобразование спина  $s = \pm 1$  реализуется с четвертьволновой пластиной

Линейно поляризованное излучение He-Ne (Ls1) лазера с длиной волны  $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ , проходя через делительный кубик ( $B_{s1}$ ), являющейся частью равноплечного интерферометра Маха-Цендера, разделяется на два пучка. Каждый из пучков Гаусса проходит через диэлектрический клин ( $C_1$  и  $C_2$ ) и дифрагирует, рождая оптические вихри. Данным метод генерации оптического вихря был использован в связи с простотой реализации и большой энергетической эффективностью, что является важным для возбуждения оптического волокна. Далее, для получения неоднородно поляризованного излучения, оба пучка проходили через поляризаторы ( $P_1$  и  $P_2$ ) и составную фазовую пластинку, настроенную так, чтобы при прохождении пластинки излучение лазера приобретало циркулярную поляризацию разных знаков (рис. 2). Затем два пучка сводились на делительном кубике поляризационного фильтра ( $B_{s2}$ ), тем самым пучки мультиплексировались. Маломодовое волокно, возбуждалось светом, прошедшим через микрообъектив ( $L_1$ ).

В работе использовалось навитое волокно [5] (рис. 3).

Было показано, что в зависимости от количества витков и шага  $H$  между витками можно добиться таких условий, при которых происходит высветка высших мод. Таким образом, вдоль оптической оси оптического волокна распространяется вихревая мода. Интерференционные картины пучков с разными топологическими зарядами после сведения на делительном кубике поляризационного фильтра ( $B_{s2}$ ) можно увидеть на рис. 4.

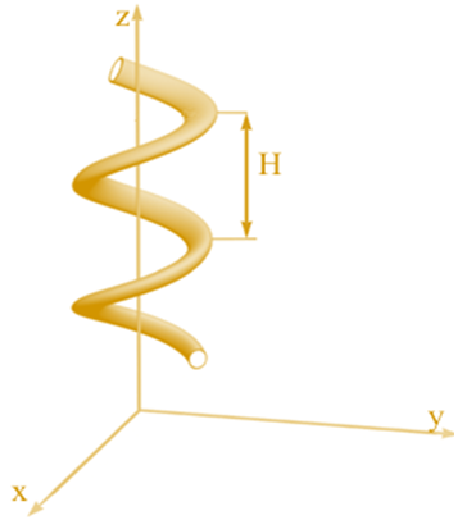


Рис. 3. Модель навитого малоимодового волокна

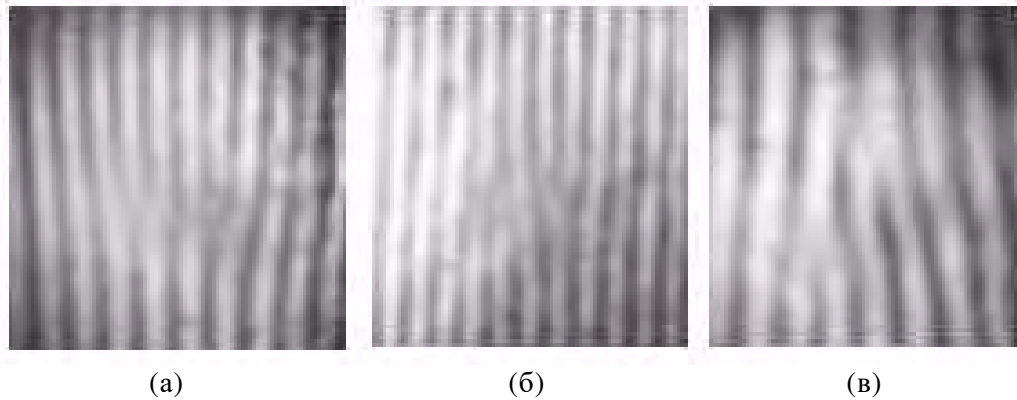


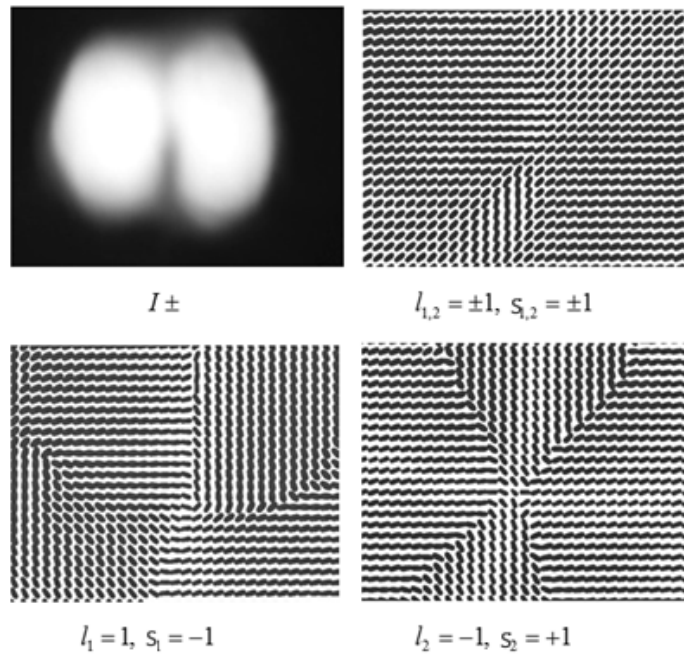
Рис. 4. Интерферограмма двух пучков с зарядами: а)  $l_1 = +1, l_2 = +1$ ; б)  $l_1 = +1, l_2 = -1$ ; в)  $l_1 = -1, l_2 = -1$

Для того что бы определить какие поляризационные процессы протекают в волокне мы воспользовались Стокс – поляриметром, с помощью которого можно измерить распределение поляризации, соответствующее каждому пикселю изображения и вывести поляризационную карту на экран монитора. Параметры Стокса рассчитывались по формулам

$$\begin{aligned}
 S_0 &= I_r + I_l & S_1 &= 2I_x - S_0 \\
 S_2 &= 2I_{\frac{\pi}{4}} - S_0 & S_3 &= I_r - I_l,
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

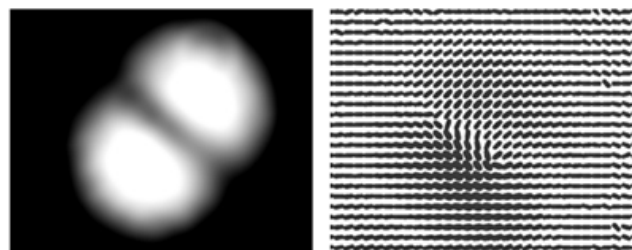
где  $I_r, I_l$  являются интенсивностями правоциркулярной и левоциркулярной компонент светового потока, соответствующие ориентации  $\lambda/4$  – пластины вдоль  $y$ -оси, а оси пропускания поляризатора под углами  $\alpha = 3\pi/4$  и  $\alpha = \pi/4$  к  $y$ -оси, в то время, как  $I_x, I_y$  – соответствуют  $\alpha = 0$  и  $\alpha = \pi/4$  при том же положении оси четверть волновой пластины. Все полученные изображения фиксировались и обрабатывались с помощью программы Дифференциальный Поляриметр [6].

В ходе эксперимента были получены картины распределение интенсивности и распределения состояний поляризации сложного сигнала на выходе маломодового волокна (рис. 5 а, б, в).



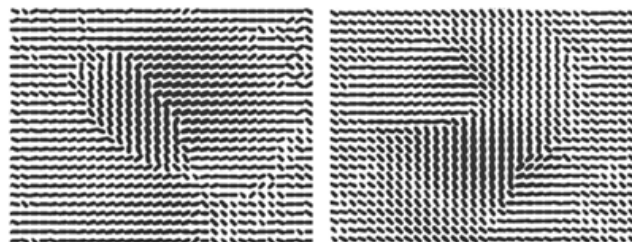
(а)

Рис. 5. а) Распределение интенсивности и карта распределения состояний поляризации сложного сигнала на выходе маломодового волокна: топологический заряд пучков  $l_1 = +1, l_2 = -1$  и поляризацией  $s_1 = -1, s_2 = +1$



$I \pm$

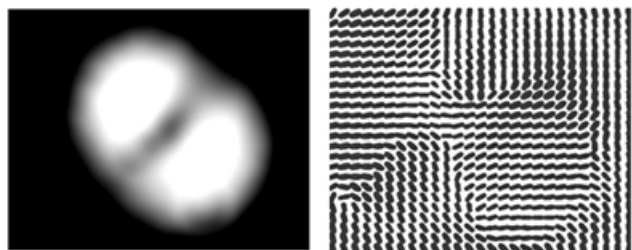
$l_{1,2} = +1, s_{1,2} = -1$



$l_1 = +1, s_1 = -1$

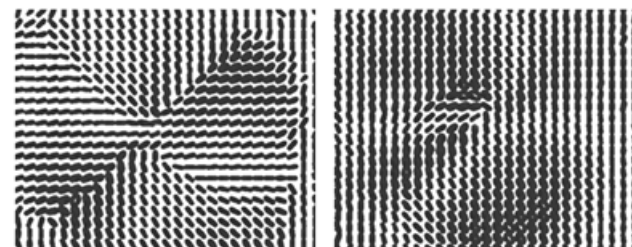
$l_2 = +1, s_2 = -1$

(б)



$I \pm$

$l_{1,2} = \pm 1, s_{1,2} = +1$



$l_1 = -1, s_1 = +1$

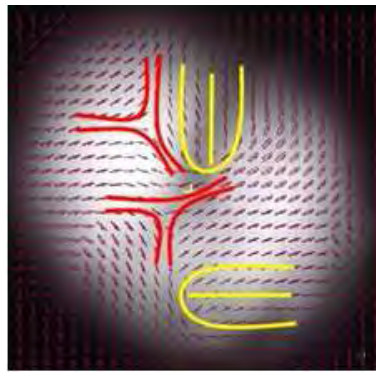
$l_2 = +1, s_2 = +1$

(в)

Продолжение Рис. 5. Распределение интенсивности и карта распределения состояний поляризации сложного сигнала на выходе маломодового волокна: б) топологический заряд пучков  $l_1 = l_2 = +1$  и поляризацией  $s_{1,2} = -1$ ; в)  $l_1 = -1$  и  $l_2 = +1, s_{1,2} = +1$

Распределение интенсивности и поляризации, представленное на рисунке 5а, для пучков с длиной волны  $\lambda = 0,63 \mu m$ , топологическими зарядами  $l_1 = +1$  и  $l_2 = -1$  соответствует ортогональным  $s_1 = -1, s_2 = +1$  циркулярным поляризациям. Распределение интенсивности и поляризации (рис. 5б) соответствует пучкам с одинаковым топологическим зарядом  $l_1 = l_2 = +1$  и левоциркулярной  $s_{1,2} = -1$  поляризацией. Распределение интенсивности и поляризации (рис. 5 в) соответствует пучкам с топологическими зарядами  $l_1 = -1$  и  $l_2 = +1$  и правоциркулярными  $s_{1,2} = +1$  поляризациями.

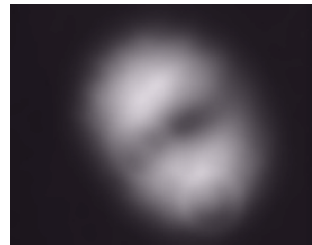
Множество поляризационных портретов пучков, содержат небольшое число поляризационных сингулярностей, в частности, по терминологии Дж.Ная их называют «звезда», «лимон» и «монстр» [7]. Типичное распределение состояния поляризации пучков с ортогональной поляризацией выполненное на фоне распределения интенсивности светового потока демонстрирует рис. 6 (а).



(а)



(б)



(в)



(г)

Рис. 6. а) Суммарная поляризационная картина пучков имеющих ортогональную поляризацию с выделенными омбиликами.

Распределение интенсивности пучков: б) пучок с топологическим зарядом  $l = +1$ ;

в) пучок с топологическим зарядом  $l = -1$ , г) суммарная интенсивность пучков

Показаны интенсивности первого и второго пучка отдельно, а также суммарная интенсивность двух ортогональных пучков (рис. 6 б, в). В соответствии с классификацией Ная в нашем случае они соответствуют сингулярностям типа «звезда» и «лимон». Зная поляризационную картину после волокна, мы можем анализировать модовый состав поля излучения и состав сигнала на входе в волокно.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами был предложен метод, который позволяет повысить пропускную способность оптических волокон и повысить защищенность существующих каналов оптоволоконной связи. Экспериментально исследован процесс мультиплексирования сложного сигнала, несущего оптические вихри в оптическом маломодовом волокне, создаваемого пучками с различным топологическим зарядом и с различной поляризацией. Тем самым показано, что возможно мультиплексировать сложный сигнал, состоящий из двух или более пучков в оптическом волокне, тем самым увеличить количество каналов в волокне.

По картинам распределения поляризации при помощи сингулярностей осуществлен анализ сигнала. Обнаружено, что топологический индекс  $C$ -точек [7], соответствует заряду исходных пучков. Зная поляризационную картину после волокна, возможно анализировать модовый состав поля излучения и состав сигнала на входе в волокно. Проанализировав суперпозицию пучков по модовому составу, можно различить входной сигнал, проведя его окончательное демультиплексирование.

### Список литературы

1. Terabit-Scale Orbital Angular Momentum Mode Division Multiplexing in Fibers / N. Bozinovic, Y. Yue, et al. // *Science*. 2013. Vol. 340. P. 1545–1548.
2. Singularities in waves and rays / M. Berry // *Physics of defects*. Les Houches Session XXXV. Amsterdam: North-Holland, 1980. P. 453–543.
3. Dislocations in wave trains / J. F. Nye, M. V. Berry // *Proceedings of Royal Society of London A*. 1974. Vol. 336. P. 165–190.
4. Формирование оптических вихрей в процессе дифракции цвета на диэлектрическом клине / В. Г. Шведов, Я. В. Издебская, А. Н. Алексеев, А. В. Воляр // *Письма в ЖТФ*. 2002. Т. 28, Вып. 6. С. 51–58.
5. Higher order modes and topological phase in the coiled elliptical weakly guiding optical fibres / С. N. Alexeyev, В. P. Lapin, М. А. Yavorsky // *Ukrainian journal of physical optics*. 2008. Vol. 9, № 1. P. 34–50.
6. Патент на полезную модель 168752 РФ, МПК G01J 4/04. Устройство для определения и исследования распределения поляризации / А. Ф. Рыбась, А. О. Погребная; заявитель и патентообладатель ФГАОУВО Крымский федеральный университет им. В.И. Вернадского; заявл. 01.08.2016; опубл. 17.02.2017 Бюл. № 5.
7. Natural Focusing and Fine Structure of Light: Caustics and Wave Dislocations / J. F. Nye // Bristol: Institute of Physics Publishing. 1999. P. 328.
8. Оптика сингулярностей поля маломодового волокна. I. Циркулярные дислокации / А. В. Воляр, Т. А. Фадеева // *Оптика и спектроскопия*. 1998. Т. 85. №. 2. С. 287–294.

**ANALYSIS OF THE PROPERTIES OF RADIATION FIELD AFTER  
MULTIPLEXING THE LAGUER-GAUSS BEAMS INTO A LOW-MODE  
OPTICAL FIBER**

*Ilyasova A. A.\*, Halilov S. I., Rubass A. F.*

*Institute of Physics and Technology, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol  
295007, Russia*

*\*E-mail: [arife-ilyasova@mail.ru](mailto:arife-ilyasova@mail.ru)*

The possibility of multiplexing of the complex signal which are carried out by optical vortex in an optical low-mode fiber with  $V = 3.8$  and created by Lagguere-Gaussian beams with a topological charge  $l = + - 1$  and circular polarization  $s = + - 1$ , are experimentally shown. Thus, it was possible to increase the number of channels for transmitting information at the optical fiber, which would provide an additional degree of freedom for multiplexing data in fiber-optical communication lines.

**Keywords:** Lagger-Gauss beams, multiplexing, topological charge, polarization.

**References**

1. N. Bozinovic, Y. Yue, Y. Ren, M. Tur, P. Kristensen, H. Huang, A. E. Willner, S. Ramachandran, *Science* **340**, 1545–1548 (2013).
2. M. Berry, Physics of defects. Les Houches Session XXXV. Amsterdam: North- Holiand, 453–543 (1980).
3. J. F. Nye, M. V. Berry, Proceedings of Royal Society of London A. **336**, 165–190 (1974).
4. V. G. Shvedov, Y. V. Izdebsky, A. N. Alekseev, A. V. Volyar, *Pis'ma Zh. Tech. Fiz.*, Issue 6, 51–58 (2002) [in Russian].
5. Alexeyev C. N., Lapin B. P., Yavorsky M. A., *Ukrainian journal of physical optics* **9**, № 34–50 (2008).
6. A. F. Rubass, A. P. Pogrebnaya, RF Patent 168752 Byull., No. 5 (2017).
7. J. F. Nye, Bristol: Institute of Physics Publishing, 328 (1999).
8. A. V. Volyar, T. A. Fadeyeva, *Optics and spectroscopy* **85**, No. 2, 287–294 (1998).

*Поступила в редакцию 29.06.2017 г. Принята к публикации 26.11.2017 г.  
Received June 29, 2017. Accepted for publication November 26, 2017*

УДК 535.137

## ИНДИКАЦИЯ ПЛАЗМОН-ПОЛЯРИТОННЫХ ВИХРЕЙ С ПОМОЩЬЮ НАНОЗОНДА

Горишний В. А., Перескоков В. С., Дзедолик И. В.\*

Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия  
\*E-mail: [igor.dzedolik@cfuv.ru](mailto:igor.dzedolik@cfuv.ru)

На границе металла и диэлектрика с помощью оптического излучения могут быть возбуждены поверхностные плазмон-поляритоны (ППП) при выполнении соответствующих граничных условий. При отражении от области неоднородности в металлическом слое падающие и рассеянные ППП интерферируют. В интерференционном поле возникают сингулярные точки, в которых фаза вектора Пойнтинга ППП имеет винтовую дислокацию. Такие вихри ППП на поверхности металла можно обнаружить с помощью зонда, представляющего собой металлический нанопровод, расположенный над вихрем. При этом в нанозонде возбуждается мода ППП с направлением циркулярной поляризации, зависящим от топологического заряда вихря.

**Ключевые слова:** поверхностный плазмон-поляритон, плазмон-поляритонный вихрь, нанопровод.

PACS: 73.20.Mf

### ВВЕДЕНИЕ

В последние годы генерация, управление и регистрация плазмонных волн [1–6] привлекают большое внимание исследователей в связи с перспективой создания плазмонных процессоров с быстродействием, превосходящим быстродействие полупроводниковых процессоров в  $\sim 10^5$  раз. Такое превосходство в скорости плазмонных процессоров над традиционными полупроводниковыми процессорами обусловлено их работой на оптических частотах  $\sim 10^{14}$  Гц в отличие от мегагерцовых частот  $\sim 10^9$  Гц функционирования полупроводниковых устройств.

Плазмонные волны возбуждаются электромагнитным полем в проводящих средах, в частности, на границе металла с диэлектрической средой [1]. На плоской границе раздела проводящей и диэлектрической сред электромагнитной волной могут быть возбуждены поверхностные плазмон-поляритоны (ППП) с компонентами поля  $E_y, E_z, B_x \sim \exp(-i\omega t + i\beta y + \alpha_M z)$  в проводящей среде, и в диэлектрической среде  $E_y, E_z, B_x \sim \exp(-i\omega t + i\beta y - \alpha_0 z)$ , где  $\alpha_M > 0$ ,  $\alpha_0 > 0$  – поперечные декременты компонент поля. ППП локализуются с двух сторон границы раздела двух сред, затухают вдоль нормальной к границе раздела сред оси  $z$ , а распространяются по продольной оси  $y$ .

Диэлектрическая проницаемость металла  $\varepsilon_M \sim 1 - \omega_e^2 / \omega^2$  зависит от отношения плазменной электронной частоты  $\omega_e$  и частоты электромагнитной волны  $\omega$ , и может иметь как положительное, так и отрицательное значение. При выполнении граничных условий  $-\varepsilon_M \alpha_0 = \varepsilon_0 \alpha_M$  в области отрицательных значений



диэлектрической проницаемости металла  $\varepsilon_M < 0$  и положительных значений диэлектрической проницаемости среды  $\varepsilon_0 > 0$  в диапазоне оптических частот ППП распространяются в тонком слое вдоль границы раздела сред. В области неоднородности в металле при положительных значениях диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_M > 0$ , например, в отверстии в металлическом слое, граничные условия нарушаются, ППП рассеиваются на границе области неоднородности. В последнем случае прямые и отраженные волны плазмон-поляритонов интерферируют. Интерференция ППП, падающих и отраженных от области неоднородности с криволинейной конфигурацией границы, приводит к возникновению ряда эффектов, в частности, к фокусировке ППП, а также к формированию вихрей [7–11]. При отражении ППП от криволинейной границы неоднородности на поверхности металла в интерференционном поле возникают сингулярные точки, в которых образуются вихри ППП с винтовой дислокацией фазы [12–15]. При этом топология интерференционного поля зависит от конфигурации границы.

ППП на поверхности металла можно наблюдать с помощью методов ближнепольной микроскопии. Сканирующая ближнепольная оптическая микроскопия (Scanning Near-Field Optical Microscopy, SNOM) [16] появилась как продолжение и развитие методов сканирующей зондовой микроскопии, позволивших позиционировать измерительный зонд с точностью до долей ангстрема над поверхностью образца. Первоначально измерительный зонд в SNOM изготавливался в виде заостренного конца световода с апертурой 50 – 100 нм, покрытого металлическим слоем. Пропускающая способность такого зонда резко падает при уменьшении диаметра входного отверстия, а сигнал экспоненциально затухает в оптическом волокне. Помимо этого, происходит размытие краев изображения из-за возбуждения плазмонных волн в металлической оболочке зонда. Предложенный в 2000 году метод безапертурной сканирующей ближнепольной оптической микроскопии (Apertureless Scanning Near-Field Optical Microscopy, ASNOM) [16] позволил резко повысить пространственное разрешение до 0.8 нм. Метод ASNOM заключается в использовании в качестве измерительного зонда заостренного проводника, закрепленного на кантилере атомно-силового микроскопа. Этот металлический нанозонд служит штыревой антенной, регистрирующей ближнее поле исследуемого объекта.

Напряженность поля вблизи острия нанозонда превосходит амплитуду поля на сканируемой поверхности металла на несколько порядков [16]. Взаимодействие нанозонда с наблюдаемым объектом наиболее эффективно, когда электрический вектор в ближнем поле направлен нормально к поверхности металла вдоль оси нанозонда. Вихрь ППП на поверхности металла имеет нормальную компоненту электрического поля. Поэтому вихрь ППП должен эффективно возбуждать сигнал в нанозонде – металлическом нанопроводе, расположенном над сингулярной точкой интерференционного поля. Сигнал в нанозонде возбуждается в форме поверхностной моды с циркулярной поляризацией [17–18]. При этом плазмонные поверхностные волны распространяются вдоль нанопровода на расстояния в десятки и сотни длин волн. Такой сигнал можно регистрировать как методами

ASNOM, так и с помощью различных датчиков, реагирующих на электромагнитное излучение с выходного конца нанопровода (наноантенны) (см. список литературы обзора [16]).

Цель работы – исследовать условия возбуждения мод ППП с циркулярной поляризацией сигнала в металлическом нанопроводе, расположенном над вихрем ППП, который сформирован на плоской поверхности металла.

### 1. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ МОД ППП НА ПОВЕРХНОСТИ МЕТАЛЛА

На плоской поверхности немагнитного металла с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_M$ , граничащего с диэлектрической средой с проницаемостью  $\varepsilon_0$ , при граничном условии  $-\varepsilon_M \alpha_0 = \varepsilon_0 \alpha_M$  может быть возбуждена ТМ-мода ППП с компонентами поля  $E_y, E_z, B_x$  [1], распространяющаяся вдоль оси  $y$ ,

$$\begin{aligned} E_y &= -i \frac{c \alpha_0 A e^{-\alpha_0 z}}{\omega \varepsilon_0} \exp(i \phi_{TM}), \\ E_z &= \frac{c \beta_M A e^{-\alpha_0 z}}{\omega \varepsilon_0} \exp(i \phi_{TM}), \\ B_x &= A e^{-\alpha_0 z} \exp(i \phi_{TM}), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $A = const$ ,  $\alpha_0 = (\beta_M^2 - c^{-2} \omega^2 \varepsilon_0)^{1/2}$  – поперечный декремент моды вдоль нормальной к границе сред оси  $z$  в диэлектрике с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_0$ ,  $\beta_M = c^{-1} \omega (\varepsilon_M \varepsilon_0)^{1/2} (\varepsilon_M + \varepsilon_0)^{-1/2}$  – постоянная распространения,  $\phi_{TM} = \beta_M y - \omega t$  – фаза ТМ-моды ППП. ТМ-мода ППП, распространяющаяся вдоль оси  $y$ , имеет плоский волновой фронт параллельный поперечной оси  $x$ .

ТМ-мода падает на границу области неоднородности в слое металла, граничные условия распространения ППП нарушаются, ППП отражаются от границы под углом  $\varphi$  относительно нормали к касательной к границе в данной точке. При отражении ТМ-моды от границы неоднородной области в металле формируется Е-мода ППП. Волновые векторы ППП ТМ-моды, отраженных от криволинейной границы, поворачиваются на угол  $2\varphi$  против часовой стрелки, или на угол  $-2\varphi$  по часовой стрелке в данной точке границы. Отраженные ППП распространяются под углами  $\pm 2\varphi$  по отношению к продольной оси  $y$ . Компоненты поля Е-моды, которая формируется отраженными ППП, имеют вид [12–15]

$$\begin{aligned} E_{xE} &= -i \frac{c \alpha_0 A e^{-\alpha_0 z} \sin 2\varphi}{\omega \varepsilon_0} \exp(i \phi_E), \quad E_{yE} = i \frac{c \alpha_0 A e^{-\alpha_0 z} \cos 2\varphi}{\omega \varepsilon_0} \exp(i \phi_E), \\ E_{zE} &= \frac{c \beta_M A e^{-\alpha_0 z}}{\omega \varepsilon_0} \exp(i \phi_E), \quad B_{xE} = -A e^{-\alpha_0 z} \cos 2\varphi \exp(i \phi_E), \\ B_{yE} &= -A e^{-\alpha_0 z} \sin 2\varphi \exp(i \phi_E), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\phi_E = \beta(|x| \sin 2\varphi - y \cos 2\varphi) - \omega t$  – фаза Е-моды ППП.

Компоненты вектора Пойнтинга ППП на поверхности металла при интерференции ТМ-моды и Е-моды имеют вид

$$S_{xM} = -\frac{c}{4\pi} E_z B_y, \quad S_{yM} = \frac{c}{4\pi} E_z B_x, \quad S_{zM} = \frac{c}{4\pi} (E_x B_y - E_y B_x), \quad (3)$$

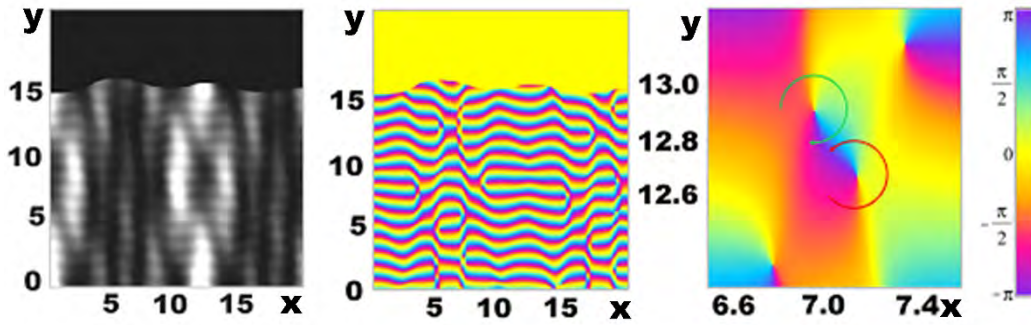
где  $E_x = E_{xE}$ ,  $E_y = E_{yTM} + E_{yE}$ ,  $E_z = E_{zTM} + E_{zE}$ ,  $B_x = B_{xTM} + B_{xE}$ ,  $B_y = B_{yE}$ . Топология интерференционной картины ППП определяется фокусировкой (дефокусировкой) при отражениях ППП от криволинейной границы неоднородной области. В точку поверхности металла с координатами  $(x, y)$  приходят три ППП: падающий, отраженный под углом  $+\theta$ , и отраженный под углом  $-\theta$ , где  $\theta = 2\varphi = \arctan(|x|/y_m)$  – угол отражения ППП; после отражения угол  $\theta = const$  для ППП. Компоненты вектора Пойнтинга ППП (3) можно представить в виде  $S_{jM} = S_{jA} \exp(i\phi_{jM})$ , где  $S_{jA} = [(Re S_j)^2 + (Im S_j)^2]^{1/2}$  – амплитуда,  $\phi_{jM} = \arctan(Im S_j / Re S_j)$  – фаза,  $(Re S_{jM} + i Im S_{jM}) = S_{jA}^{|j|} \exp(i\phi_{jM})$ . При обходе по замкнутому контуру вокруг сингулярных точек, в которых  $Re S_{jM} = 0$  и  $Im S_{jM} = 0$ , фаза  $\phi_{jM}$  ППП изменяется на величину, кратную  $2\pi$ , то есть  $\oint d\mathbf{r} \nabla \phi_{jM} = \oint d\phi_{jM} = 2\pi \cdot j_M$ , где  $j_M = \pm 1, \pm 2, \dots$  – топологический заряд вихря [19]. В сингулярной точке волновой фронт приобретает спиральную форму, и возникает винтовая дислокация волнового фронта.

Компоненты интерференционного поля в точке  $(x, y)$  имеют вид

$$\begin{aligned} E_x &= iA_T \sin \theta \{ \exp(i\phi_E^-) - \exp(i\phi_E^+) \}, \\ E_y &= -iA_T \{ \exp(i\phi_{TM}) - \cos \theta [\exp(i\phi_E^-) + \exp(i\phi_E^+)] \}, \\ E_z &= A_z \{ \exp(i\phi_{TM}) + \exp(i\phi_E^-) + \exp(i\phi_E^+) \}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} B_x &= -A_0 \cos \theta \{ \exp(i\phi_E^-) + \exp(i\phi_E^+) \}, \\ B_y &= A_0 \{ \exp(i\phi_{TM}) + \sin \theta [\exp(i\phi_E^-) - \exp(i\phi_E^+)] \}, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $A_z = A_0 \varepsilon_0^{-1} [\varepsilon_0 \varepsilon_M / (\varepsilon_0 + \varepsilon_M)]^{1/2}$ ,  $A_T = A_0 \varepsilon_0^{-1} [\varepsilon_0 \varepsilon_M / (\varepsilon_0 + \varepsilon_M) - \varepsilon_0]^{1/2}$ ,  $A_0 = A e^{-\alpha_0 z}$ ,  $\phi_{TM} = \beta_M Y - \omega t$ ,  $\phi_E^\pm = \beta_M [|x| \sin(\pm\theta) - Y \cos \theta] - \omega t$ ,  $Y = y + y_m$ . Распределение компонент вектора Пойнтинга (3) при интерференции ППП в рассматриваемом случае представлено на рис. 1 [12, 13].



(а) – амплитуда, (б) – фаза, (в) – фазовые вихри ППП

Рис. 1. Интерференционная картина нормальной к поверхности металла компоненты вектора Пойнтинга  $S_{zM}$  при отражении ППП от криволинейной границы неоднородности,  $\lambda_0 = 0.6 \mu m$ ,  $\epsilon_M = -8.77 + i1.37$  (золото). Топологические заряды вихрей:  $M = +1$  (красная стрелка, против часовой),  $M = -1$  (зеленая стрелка, по часовой), размеры по осям отложены в микрометрах

В точках поверхности металла, в которых амплитуды электрического и магнитного полей интерференционного поля ППП равны нулю (рис. 1 (а)), образуются плазмон-поляритонные вихри (рис. 1 (в)). В интерференционном поле ППП, представленном на рис. 1, вихри возникают в точках пересечения трех ППП, например, в выделенной области (рис. 1 (в)). Вихрь ППП имеет топологический заряд  $M = +1$  (красная стрелка против часовой) или  $M = -1$  (зеленая стрелка по часовой).

## 2. МОДЫ ППП МЕТАЛЛИЧЕСКОГО НАНОПРОВОДА

Рассмотрим процесс формирования мод ППП в немагнитном металлическом нанопроводе с круговым сечением радиуса  $a$  при возбуждении монохроматическим полем с частотой  $\omega$ . Зависимость компонент электромагнитного поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  от времени выбираем в форме  $\exp(-i\omega t)$ . Тогда уравнения Максвелла для компонент поля принимают вид  $\nabla \times \mathbf{B} = -i\epsilon k_0 \mathbf{E}$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = ik_0 \mathbf{B}$ , где  $k_0 = \omega/c$ . Перейдем в цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ . Решения системы уравнений Максвелла выбираем в форме мод ППП, распространяющихся по поверхности провода вдоль его оси  $z$  с угловой зависимостью  $\varphi$ ,  $E, B \sim \exp(i\varphi + i\beta z)$ , где  $= 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  – азимутальное число,  $\beta$  – постоянная распространения моды. В этом случае система уравнений преобразуется к виду

$$\frac{-B_z - \beta B_\varphi}{r} = -\epsilon k_0 E_r, \quad \frac{-E_z - \beta E_\varphi}{r} = k_0 B_r,$$

$$\begin{aligned} i\beta B_r - \frac{\partial B_z}{\partial r} &= -i\varepsilon k_0 E_\varphi, & i\beta E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} &= ik_0 B_\varphi, \\ \frac{1}{r} B_\varphi + \frac{\partial B_\varphi}{\partial r} - \frac{i}{r} B_r &= -i\varepsilon k_0 E_z, & \frac{1}{r} E_\varphi + \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} - \frac{i}{r} E_r &= ik_0 B_z. \end{aligned} \quad (6)$$

Представление полевых уравнений в виде системы (6) позволяет выразить поперечные компоненты мод  $E_\varphi, E_r, B_\varphi, B_r$  через продольные компоненты  $E_z, B_z$ :

$$E_r = \frac{1}{k^2} \left( -i\beta \frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{k_0}{r} B_z \right), \quad E_\varphi = \frac{1}{k^2} \left( \frac{\beta}{r} E_z + ik_0 \frac{\partial B_z}{\partial r} \right), \quad (7)$$

$$B_r = -\frac{1}{k^2} \left( i\beta \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{\varepsilon k_0}{r} E_z \right), \quad B_\varphi = \frac{1}{k^2} \left( \frac{\beta}{r} B_z - i\varepsilon k_0 \frac{\partial E_z}{\partial r} \right), \quad (8)$$

где  $k^2 = \beta^2 - \varepsilon k_0^2$ . Уравнения для продольных компонент мод  $E_z$  и поля  $B_z$  имеют вид

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial r} - \left( k^2 + \frac{2}{r^2} \right) E_z = 0, \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_z}{\partial r} - \left( k^2 + \frac{2}{r^2} \right) B_z = 0. \quad (10)$$

Учтем, что внутри металлического провода диэлектрическая проницаемость согласно теории Друде-Лоренца равна  $\varepsilon = 1 - \omega_e^2 / (\omega^2 + i\omega_M \omega)$ , где  $\omega_e^2 = 4\pi e^2 n_0 / m$  – квадрат электронной плазменной частоты,  $\omega_M$  – частота релаксации. На частотах ППП вплоть до оптических  $\omega < \omega_e$  диэлектрическая проницаемость металла имеет отрицательную действительную часть  $\varepsilon = -\varepsilon' + i\varepsilon''$ . Для продольных компонент мод ППП уравнение в металле можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 F_M}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F_M}{\partial r} + \left( k_M^2 - \frac{2}{r^2} \right) F_M = 0, \quad (11)$$

где  $k_M^2 = (\varepsilon' - i\varepsilon'')k_0^2 - \beta^2$ . На поверхности металлического провода, окруженного воздухом  $\varepsilon_0 = 1$ , уравнение для продольных компонент мод ППП имеет вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \left( k^2 + \frac{2}{r^2} \right) F = 0, \quad (12)$$

где  $k^2 = \beta^2 - k_0^2 > 0$ . Решения уравнения (11) выбираем в форме функций Бесселя  $J(k_M r)$ , а решение уравнения (12) – в форме функций Макдональда  $K(kr)$ . Тогда продольные компоненты мод ППП представим в виде

$$E_{zM} = A \frac{J(ur/a)}{J(u)}, \quad B_{zM} = B \frac{J(ur/a)}{J(u)}, \quad (13)$$

$$E_{z0} = A \frac{K(wr/a)}{K(w)}, \quad B_{z0} = B \frac{K(wr/a)}{K(w)}, \quad (14)$$

где  $u = ak_M$ ,  $w = ak$ . Поперечные компоненты мод ППП (7)–(8) с учетом выражений (13) и (14) принимают вид

$$E_{r0} = \frac{a^2}{w^2} \left( -iA \frac{\beta w K'(wr/a)}{a K(w)} + B \frac{k_0 K(wr/a)}{r K(w)} \right), \quad (15)$$

$$E_{\varphi 0} = \frac{a^2}{w^2} \left( A \frac{\beta K(wr/a)}{r K(w)} + iB \frac{k_0 w K'(wr/a)}{a K(w)} \right), \quad (16)$$

$$B_{r0} = -\frac{a^2}{w^2} \left( iB \frac{\beta w K'(wr/a)}{a K(w)} + A \frac{k_0 K(wr/a)}{r K(w)} \right), \quad (17)$$

$$B_{\varphi 0} = \frac{a^2}{w^2} \left( B \frac{\beta K(wr/a)}{r K(w)} - iA \frac{k_0 w K'(wr/a)}{a K(w)} \right), \quad (18)$$

$$E_{rM} = -\frac{a^2}{u^2} \left( -iA \frac{\beta u KJ'(ur/a)}{a J(u)} + B \frac{k_0 J(ur/a)}{r J(u)} \right), \quad (19)$$

$$E_{\varphi M} = -\frac{a^2}{u^2} \left( A \frac{\beta J(ur/a)}{r J(u)} + iB \frac{k_0 u J'(ur/a)}{a J(u)} \right), \quad (20)$$

$$B_{rM} = \frac{a^2}{u^2} \left( iB \frac{\beta u J'(ur/a)}{a J(u)} + A \frac{k_0 \varepsilon_M J(ur/a)}{r J(u)} \right), \quad (21)$$

$$B_{\varphi M} = -\frac{a^2}{u^2} \left( B \frac{\beta J(ur/a)}{r J(u)} - iA \frac{k_0 \varepsilon_M u J'(ur/a)}{a J(u)} \right), \quad (22)$$

где штрих обозначает производную по аргументу. Таким образом, выражения для продольных компонент (13)–(14) и поперечных компонент (15)–(22) мод полностью описывают моды ППП с циркулярной поляризацией в металлическом нанопроводе с круговым сечением.

Приравнивая тангенциальные компоненты мод на границе провода  $r = a$ , получаем систему уравнений для амплитуд

$$\beta \left( \frac{1}{w^2} + \frac{1}{u^2} \right) A + ik_0 \left( \frac{J'(u)}{uJ(u)} + \frac{K'(w)}{wK(w)} \right) B = 0, \quad (23)$$

$$-ik_0 \left( \frac{\varepsilon_M J'(u)}{uJ(u)} + \frac{K'(w)}{wK(w)} \right) A + \beta \left( \frac{1}{w^2} + \frac{1}{u^2} \right) B = 0. \quad (24)$$

Приравнивая определитель системы уравнений (23)–(24) к нулю, получаем дисперсионное уравнение для определения постоянных распространения мод ППП

$$\left( \frac{J'(u)}{uJ(u)} + \frac{K'(w)}{wK(w)} \right) \left( \frac{\varepsilon_M J'(u)}{uJ(u)} + \frac{K'(w)}{wK(w)} \right) = \frac{\beta^2}{k_0^2} \left( \frac{1}{w^2} + \frac{1}{u^2} \right)^2. \quad (25)$$

Из трансцендентного уравнения (25) с помощью численных методов можно найти постоянные распространения мод  $\beta_m$ , где  $m=1,2,\dots$  – номер корня цилиндрической функции, т.е. радиальный индекс моды. Амплитуду магнитного поля можно определить через амплитуду электрического поля из уравнений (23) или (24)

$$B = i \frac{\beta u^2 + w^2}{k_0 u^2 w^2} \left( \frac{J'(u)}{uJ(u)} + \frac{K'(w)}{wK(w)} \right)^{-1} A, \quad (26)$$

$$B = i \frac{k_0 u^2 w^2}{\beta u^2 + w^2} \left( \frac{\varepsilon_M J'(u)}{uJ(u)} + \frac{K'(w)}{wK(w)} \right) A. \quad (27)$$

Для мод с азимутальным индексом  $m=0$  из уравнения (25) получаем два дисперсионных уравнения

$$\frac{K_0'(w)}{wK_0(w)} + \frac{J_0'(u)}{uJ_0(u)} = 0, \quad (\text{ТЕ-моды}) \quad (28)$$

$$\frac{\varepsilon_M J_0'(u)}{uJ_0(u)} + \frac{K_0'(w)}{wK_0(w)} = 0. \quad (\text{ТМ-моды}) \quad (29)$$

При стремлении азимутального индекса моды к нулю  $m \rightarrow 0$  и неравенстве нулю выражения в скобках из выражения (26) получаем  $B=0$ . В этом случае продольная компонента магнитного поля моды равна нулю  $B_z^0=0$ . Такие моды ППП являются поперечно-магнитными (ТМ), для них имеет место дисперсионное уравнение (29). Из выражения (27) при  $m \rightarrow 0$  и неравенстве нулю выражения в скобках получаем, что должно  $A \rightarrow 0$ . В этом случае продольная компонента электрического поля равна нулю  $E_z^0=0$ . Такие моды ППП являются поперечно-электрическими (ТЕ), для них имеет место дисперсионное уравнение (28). В общем случае при  $m \neq 0$  моды ППП имеют все шесть компонент электромагнитного поля.

### 3. ВОЗБУЖДЕНИЕ МОД ППП В МЕТАЛЛИЧЕСКОМ НАНОПРОВОДЕ

Если над точкой расположения вихря на поверхности металла разместить нанозонд в виде металлического провода с круговым сечением радиуса  $a$ , то при выполнении граничных условий в зонде будут возбуждаться волны в форме мод ППП (15)–(22) с циркулярной поляризацией. Компоненты вектора Пойнтинга мод ППП, распространяющихся вдоль провода, имеют вид

$$S_{rW} = \frac{c}{4\pi} (E_\varphi B_z - E_z B_\varphi), S_{\varphi W} = -\frac{c}{4\pi} (E_r B_z - E_z B_r), S_{zW} = \frac{c}{4\pi} (E_r B_\varphi - E_\varphi B_r). \quad (30)$$

В сингулярной точке интерференционного поля ППП на поверхности металла нормальная компонента  $S_{zM}$  вектора Пойнтинга вихря ППП имеет топологический заряд  $\pm M$  (рис. 1 (в)). Для того, чтобы в проводе нанозонда возбудилась поверхностная волна, поток энергии ППП должен быть направлен вдоль оси провода,  $S_{zM} \rightarrow S_{zW}$ . При этом должны быть согласованы тангенциальные компоненты ППП (14)  $E_{z0}$  на поверхности провода и нормальная к поверхности металла компонента (4)  $E_z$  в точках окружности  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2$ , где  $x_0, y_0$  – координаты центра вихря. В этом случае возбуждаются моды ППП на поверхности нанопровода с радиусом сечения  $r = a$ . С учетом того, что поток энергии вихря ППП затухает на расстоянии  $\sim 1/2\alpha_0$  от поверхности металла, торец нанопровода зонда должен находиться над поверхностью металла на высоте  $\Delta z < 1/2\alpha_0$ .

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Распространяющиеся по поверхности металла ППП и рассеянные на криволинейной границе неоднородности в металле ППП интерферируют. При интерференции ППП возникают сингулярные точки, в которых образуются вихри с винтовой дислокацией фазы. Такие вихри ППП на поверхности металла будут возбуждать моды с циркулярной поляризацией в металлическом нанопроводе, размещенном над сингулярной точкой, при выполнении граничных условий на поверхности нанопровода. Граничные условия возбуждения мод ППП в металлическом нанопроводе зонда состоят в согласовании нормальной компоненты электрического поля вихря ППП на поверхности металла и продольной компоненты моды нанопровода. При этом торец нанопровода должен находиться над поверхностью металла на высоте не более, чем обратная величина удвоенного поперечного декремента нормальной компоненты электрического вектора вихря ППП. Направление циркулярной поляризации моды ППП нанозонда зависит от топологического заряда вихря ППП на поверхности металла.

Таким образом, индикация плазмон-поляритонных вихрей, сформировавшихся на поверхности металла, возможна с помощью нанозонда. Управление вихрями ППП на границе металла и диэлектрика, их последующая индикация с помощью нанозондов позволят реализовать новые элементы плазмонных цепей, плазмонные логические устройства и процессоры с быстродействием, превосходящим в десятки тысяч раз быстродействие существующих полупроводниковых устройств.



**Список литературы**

1. Barnes W. L., Dereux A., Ebbesen T. W. Surface plasmon subwavelength optics // *Nature*. 2003. Vol. 424. P. 824–830.
2. Zayats A. V., Smolyaninov I. I. Near-field photonics: surface plasmon polaritons and localized surface plasmons // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. 2003. Vol. 5. P. S16–S50.
3. Майер С. А. Плазмоника: теория и приложения. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 296 с.
4. Климов В. В. Наноплазмоника. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. 480 с.
5. Stockman M. I. Nanoplasmonics: past, present, and glimpse into future // *Optics Express*. 2011. Vol. 19. P. 22029–22106.
6. Dzedolik I. V. Solitons and Nonlinear Waves of Phonon-Polaritons and Plasmon-Polaritons. New York: Nova Science Publishers, 2016. 154 p.
7. Hecht B., Bielefeld H., Novotny L., Inouye Y., Pohl D. W. Local excitation, scattering, and interference of surface plasmons // *Physical Review Letters*. 1996. Vol. 77. P. 1889–1892.
8. Kim H., Park J., Cho S.-W., Lee S.-Y., Kang M., Lee B. Synthesis and dynamic switching of surface plasmon vortices with plasmonic vortex lens // *Nano Letters*. 2010. Vol. 10. P. 529–536.
9. Boriskina S. V., Reinhard B. M. Adaptive on-chip control of nano-optical fields with optoplasmonic vortex nanogates // *Optics Express*. 2011. Vol. 19. No. 22. P. 22305–22315.
10. Zhou H., Dong J., Zhou Y., Zhang J., Liu M., Zhang X. Designing appointed and multiple focuses with plasmonic vortex lenses // *IEEE Photonics Journal*. 2015. Vol. 7. No. 4. 4801007.
11. Kamchatnov A. M., Pavloff N. Interference effects in the two-dimensional scattering of microcavity polaritons by an obstacle: phase dislocations and resonances // *European Physical Journal D*. 2015. Vol. 69: 32.
12. Dzedolik I. V., Pereskokov V. Formation of vortices by interference of surface plasmon polaritons // *Journal of the Optical Society of America A*. 2016. Vol. 33. No. 5. P. 1004–1009.
13. Dzedolik I. V., Lapayeva S., Pereskokov V. Vortex lattice of surface plasmon polaritons // *Journal of Optics*. 2016. Vol. 18. No. 7. 074007.
14. Dzedolik I. V., Pereskokov V. Cnoidal waves, solitons and vortices in the flow of polaritons // *Journal of Physics: Conference Series*. 2016. Vol. 737. 012006.
15. Дзедолик И. В., Перескоков В. С. Топология плазмон-поляритонных вихрей на адаптивном зеркале // *Оптика атмосферы и океана*. 2016. Т. 29. № 11. С. 954–959.
16. Казанцев Д. В., Кузнецов Е. В., Тимофеев С. В., Шелаев А. В., Казанцева Е. А. Безапертурная микроскопия ближнего оптического поля // *Успехи физических наук*. 2017. Т. 187. № 3. С. 277–295.
17. Ruting F., Fernandez-Dominguez F. I., Martin-Moreno L., Garcia-Vidal F. J. Subwavelength chiral surface plasmons that carry tunable orbital angular momentum // *Physical Review B*. 2012. Vol. 86. 075437.
18. Toyoda K., Takahashi F., Takizawa S., Tokizane Y., Miyamoto K., Morita R., Omatsu T. Transfer of light helicity to nanostructures // *Physical Review Letters*. 2013. Vol. 110. 143603.
19. Dennis M. R., O’Holleran K., Padgett M. J. Singular optics: optical vortices and polarization singularities // *Progress in Optics*. 2009. Vol. 53. P. 293–363.

## INDICATION OF PLASMON POLARITON VORTICES BY NANOPROBE

Gorishniy V. A., Pereskokov V. S., Dzedolik I. V.\*

*Physics and Technology Institute, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia**\*E-mail: [igor.dzedolik@cfuv.ru](mailto:igor.dzedolik@cfuv.ru)*

Surface plasmon polaritons (SPPs) can be excited by optical radiation on the boundary of metal and dielectric, when the corresponding boundary conditions are satisfied. The incident and scattered SPPs interfere when they reflected from the area of inhomogeneity in the metal layer. In the interference field, the singular points appear where the phase of the SPP Poynting vector has a screw dislocation. The probe can detect the SPP vortices, which is a metal nanowire that is located above the vortex on the surface of the metal. In this case, the SPP mode with the circular polarization direction is excited in the nanoprobe, and the mode polarization depends on the topological charge of the vortex.

**Keywords:** surface plasmon polariton, plasmon polariton vortex, nanowire.

## References

1. W. L. Barnes, A. Dereux, T. W. Ebbesen, *Nature*, **424**, 824–830 (2003).
2. A. V. Zayats, I. I. Smolyaninov, *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*, **5**, S16–S50 (2003).
3. S. A. Maier, *Plasmonics: Fundamental and Applications* (New York: Springer, 2007).
4. V. V. Klimov, *Nanoplasmonics* (Moscow: FIZMATLIT, 2010) [in Russian].
5. M. I. Stockman, *Optics Express*, **19**, 22029–22106 (2011).
6. I. V. Dzedolik, *Solitons and Nonlinear Waves of Phonon-Polaritons and Plasmon-Polaritons* (New York: Nova Science Publishers, 2016).
7. B. Hecht, H. Bielefeld, L. Novotny, Y. Inouye, D. W. Pohl, *Physical Review Letters*, **77**, 1889–1892 (1996).
8. H. Kim, J. Park, S.-W. Cho, S.-Y. Lee, M. Kang, B. Lee, *Nano Letters*, **10**, 529–536 (2010).
9. S. V. Boriskina, B. M. Reinhard, *Optics Express*, **19**, No. 22, 22305–22315 (2011).
10. H. Zhou, J. Dong, Y. Zhou, J. Zhang, M. Liu, X. Zhang, *IEEE Photonics Journal*, **7**, No. 4, 4801007 (2015).
11. A. M. Kamchatnov, N. Pavloff, *European Physical Journal D*, **69**: **32** (2015).
12. I. V. Dzedolik, V. Pereskokov, *Journal of the Optical Society of America A*, **33**, No. 5, 1004–1009 (2016).
13. I. V. Dzedolik, S. Lapayeva, V. Pereskokov, *Journal of Optics*, **18**, No. 7, 074007 (2016).
14. I. V. Dzedolik, V. Pereskokov, *Journal of Physics: Conference Series*, **737**, 012006 (2016).
15. I. V. Dzedolik, V. S. Pereskokov, *Atmospheric and Oceanic Optics*, **30**, No. 2, 203–208 (2017).
16. D. V. Kazantsev, E. V. Kuznetsov, S. V. Timofeev, A. V. Shelaev, E. A. Kazantseva, *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, **187**, No. 3, 277–295 (2017) [in Russian].
17. F. Ruting, F. I. Fernandez-Dominguez, L. Martin-Moreno, F. J. Garcia-Vidal, *Physical Review B*, **86**, 075437 (2012).
18. K. Toyoda, F. Takahashi, S. Takizawa, Y. Tokizane, K. Miyamoto, R. Morita, T. Omatsu, *Physical Review Letters*, **110**, 143603 (2013).
19. M. R. Dennis, K. O'Holleran, M. J. Padgett, *Progress in Optics*, **53**, 293–363 (2009).

*Поступила в редакцию 14.06.2017 г. Принята к публикации 26.11.2017 г.  
Received June 14, 2017. Accepted for publication November 26, 2017*

**УДК 537.87**

## **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕЗОНАТОРНОГО ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИМ КОНЦЕНТРАТОРОМ**

***Полетаев Д. А. \*, Соколенко Б. В.***

***Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия***

***\*E-mail: [poletaevda@cfuv.ru](mailto:poletaevda@cfuv.ru)***

В работе рассматривается предложенная конструкция апертуры измерительного преобразователя с концентратором электрического поля. Проведен теоретический расчет и анализ данной структуры. Осуществлено численное моделирование распределения модуля напряженности электрического поля вблизи апертуры при различных параметрах измерительной апертуры. Численная модель базируется на прямом численном методе конечных элементов. В результате численного моделирования выявлено повышение локализации модуля напряженности электрического поля вблизи апертуры.

***Ключевые слова:*** СВЧ, измерительный преобразователь, апертура, коаксиальный волновод, численное моделирование.

***PACS:*** 98.80. ± k

### **ВВЕДЕНИЕ**

Весьма перспективным методом СВЧ диагностики является метод микроволновой микроскопии. Это обусловлено высокой чувствительностью, неразрушаемостью объекта исследования при проведении исследований, экспрессностью, бесконтактностью, возможностью исследования не только поверхности образца, но и объемной приповерхностной области [1]. Метод микроволновой микроскопии широко применяется для исследования высокотемпературных сверхпроводников, диэлектриков, полупроводников, малоразмерных биообъектов [1]. Основным элементом микроволнового микроскопа является измерительный преобразователь (ИП) [2]. Наиболее чувствительными являются резонансные ИП [2]. Апертура измерительного преобразователя предназначена для осуществления взаимодействия поля ИП с образцом, а также для согласования выходного сопротивления ИП с сопротивлением образца. На сегодняшний день широко применяется коаксиальная апертура [2]. Это обусловлено ее простотой и возможностью регулировки связи с образцом в широких пределах.

Электрофизические параметры образца (относительная диэлектрическая проницаемость и тангенс угла потерь) взаимодействуя с резонансным измерительным преобразователем посредством апертуры изменяет его информационные параметры: добротность и резонансную частоту [1, 2].

Пространственное разрешение современных микроволновых микроскопов уступает аналогичному параметру оптических и атомно-силовых [1]. Это связано с невозможностью одновременно увеличить локализацию зондирующего электрического поля в подапертурной области и обеспечить высокую

чувствительность [2]. Ранние схемы микроволновых микроскопов применяли в качестве измерительного преобразователя чисто четвертьволновый коаксиальный резонатор [1]. Пространственное разрешение таких приборов составляло около 10 мкм [1]. Для коаксиальной апертуры с заостренной центральной жилой наблюдается эффект «громоотвода» [1]. Данный эффект состоит в высокой концентрации электрического поля на острие. Это позволяет увеличить пространственное разрешение всего микроволнового микроскопа. Явление обуславливается обратно пропорциональной зависимостью напряжённости электрического поля от радиуса острия проводника, аналогично электростатическому случаю [3]. Недостаток данной конструкции состоит в значительных излучательных потерях, а, следовательно, малой разрешающей способности и низкой добротности всего измерительного преобразователя. Для усиления локализации электрического поля и уменьшения излучения из открытого торца разработана апертура в виде сужающегося коаксиала [1]. Такая конструкция позволяет получить пространственное разрешение для диэлектрических материалов около 1 мкм.

В оптике широко используются оптические линзы [4]. Эти объекты осуществляют фокусировку электромагнитной волны в подапертурной области. Представляется целесообразным исследовать возможность увеличения пространственного разрешения измерительного преобразователя для микроволнового микроскопа за счет повышения степени локализации зондирующего электрического поля в подапертурной области при использовании диэлектрического концентратора.

Целью работы является численное исследование конструкции измерительного преобразователя с диэлектрическим концентратором для микроволнового микроскопа.

## 1. ИССЛЕДУЕМАЯ МОДЕЛЬ

Общий вид коаксиальной апертуры с диэлектрической линзой для измерительного преобразователя приведен на рис. 1. Она включает отрезок коаксиального волновода, длиной  $L$ , состоящий из центральной жилы, с радиусом  $R_1$  и внутренним радиусом  $R_2$ . На торце апертуры помещена полусфера, радиусом  $R$  из диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ . Торцы апертуры нагружены на свободное пространство. Одномодовый режим Т-волны коаксиальной линии обеспечивается на частотах [5]:

$$f < c/\pi(R_1 + R_2) , \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме.

Параметры коаксиальной апертуры (по рис. 1) выбраны, согласно (1), данных литературных источников [1–3] следующими:  $R_2/\lambda = 0,05$ ;  $R_1/R_2 = 0,01$ ;  $L/\lambda = 0,4$ ;  $R = R_1$ , при  $\lambda = 8$  мм. Материал стенок коаксиального волновода и центральной жилы – идеальный проводник.

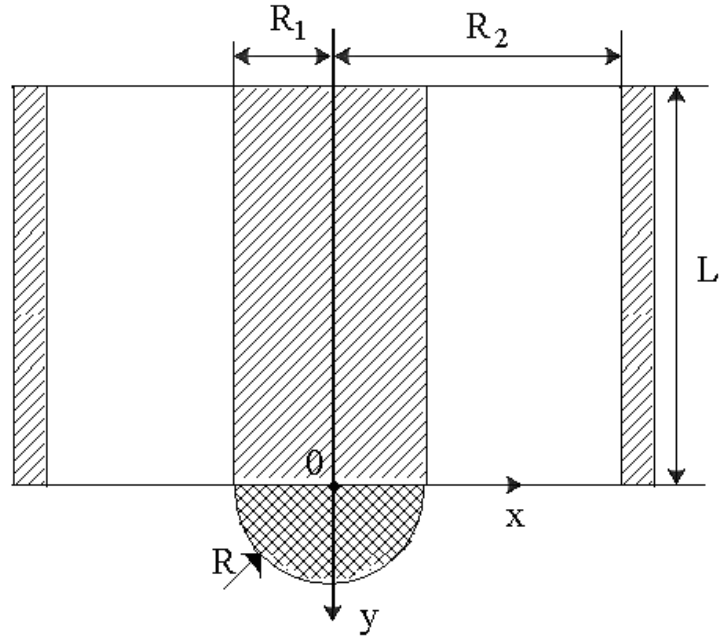


Рис. 1. Коаксиальная апертура измерительного преобразователя

Распределение электромагнитных полей вблизи апертуры рассчитывалось прямым численным методом конечных элементов [6]. При этом пространство модели разбивалось на ряд тетраэдров, в каждом из которых решались следующие волновые уравнения методом конечных элементов [6]:

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{E}) - k^2 \varepsilon \mathbf{E} = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times (\mu^{-1} \nabla \times \mathbf{H}) - k^2 \varepsilon \mathbf{H} = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{E}$  – вектор напряженности электрического поля;  $k$  – комплексное волновое число;  $\varepsilon$  – комплексная диэлектрическая проницаемость;  $\mu$  – относительная магнитная проницаемость;  $\mathbf{H}$  – вектор напряженности магнитного поля.

Граничные условия имели вид [6]:

$$\mathbf{E}_T = Z_s (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_T), \quad (4)$$

где  $\mathbf{E}_T$ ,  $\mathbf{H}_T$  – тангенциальная компоненты вектора напряженности электрического и магнитного полей, соответственно;  $Z_s$  – поверхностное сопротивление;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 2 представлена рассчитанная численным методом зависимость нормированных на максимальное значение модуля напряженности электрического поля модулей напряженности электрического поля от расстояния  $y$  до точки  $o$  (на рис. 1) при изменении относительной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  полусферы. На графиках (по рис. 2) явно заметен скачок модуля напряженности электрического поля на границе раздела сред с различными относительными диэлектрическими проницаемостями. Как видно из рис. 2, модуль напряженности электрического поля достигает своего максимума для полусферы с  $\varepsilon=12$  на расстоянии равном радиусу центральной жилы.

На рис. 3 представлена рассчитанная численным методом зависимость нормированных на максимальное значение модуля напряженности электрического поля модулей напряженности электрического поля от расстояния  $x$  до точки  $o$  (на рис. 1) при изменении относительной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon$  полусферы на расстоянии  $y = R_1$ . Наилучшая фокусировка наблюдается для полусферы с  $\varepsilon=12$ .

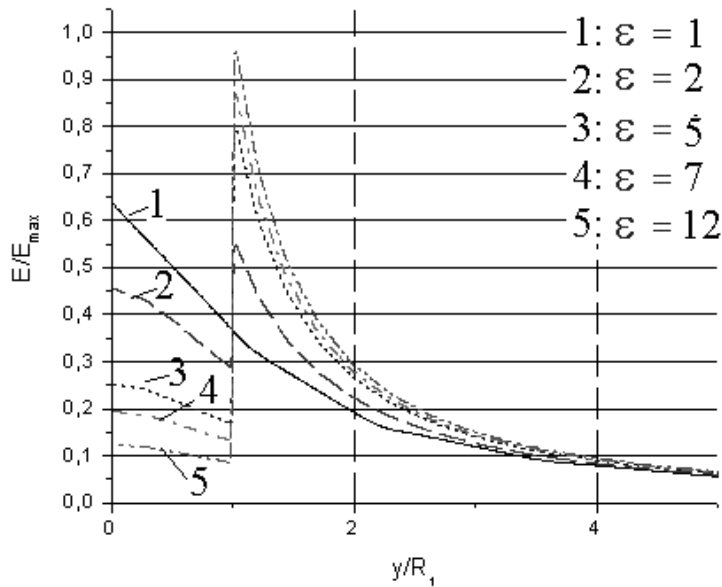


Рис. 2. Распределение напряженности электрического вблизи апертуры поля по вертикали

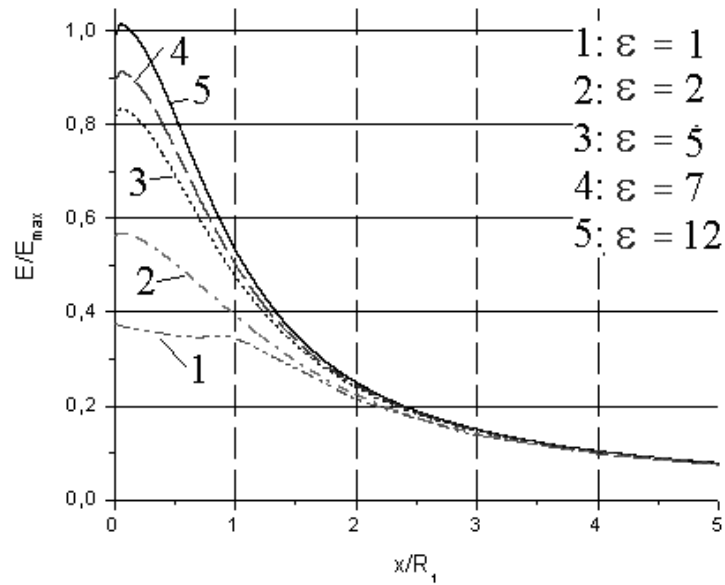


Рис. 3. Распределение напряженности электрического поля вблизи апертуры по горизонтали

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе предложена конструкция апертуры для измерительного преобразователя микроволнового микроскопа с диэлектрическим концентратором. Построена ее численная модель, получены результаты. На их основании сделан вывод об увеличении степени локализации электрического поля в подапертурной области.

Результаты работы могут быть применены для проектирования апертур для измерительных преобразователей современных микроволновых микроскопов. В дальнейшем планируется исследовать зависимость степени локализации электрического поля от геометрических размеров полусферы.

### Список литературы

1. Chen L., Ong C., Neo C. Microwave electronics measurement and materials characterization. Southern Gate, John Wiley & Sons Ltd, 2004. 537 p.
2. Gordiyenko Yu. Ye., Gud Yu. I., Poletaev D. A. Influence of oscillatory and radiation losses on the characteristics of microwave converters with coaxial measurement aperture // Telecommunications and radio engineering. 2011. No. 2, P. 149–157.
3. Gordienko Yu. E., Gud Y. I., Larkin S. Y., Slipchenko N. I. Resolution of cavity probes of scanning microwave microscopy // Conference proceedings of 22nd International Crimean conference microwave and telecommunication technology. 2012. Vol. 1. P. 619–620.
4. Sokolenko B., Poletaev D., Rubass A., Volyar A. The conversion of phase structure of singular beams spreading in uniaxial crystal // Journal of Physics. 2016. Vol. 735, No. 1. P. 1–5.
5. Кураев А. А., Попкова Т. Л., Сеницын А. К. Электродинамика и распространение радиоволн. Минск, бестпринт, 2013. – 500 с.
6. Григорьев А. Д. Электродинамика и техника СВЧ. Москва, высшая школа, 1990. – 335 с.

**MODELING PARAMETERS OF RESONATOR MEASURING CONVERTER  
WITH DIELECTRIC CONCENTRATOR**

*Poletaev D. A. \*, Sokolenko B. V.*

*Physics and Technology Institute, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

*\*E-mail: [poletaevda@cfuv.ru](mailto:poletaevda@cfuv.ru)*

In the article construction of a resonator measuring converter with an electric field concentrator is considered. The method of microwave microscopy is a very promising method because of its high sensitivity and expressness. This method does not destroy the sample. The method of microwave microscopy is widely used to study high-temperature superconductors, dielectrics, semiconductors, small-sized bioobjects. The main element of the microwave microscope is a measuring converter. The most sensitive are the resonant measuring converters. The aperture of the measuring converter is constructed for the interaction of the field with the sample, and also for matching the output resistance with the sample resistance. Today, a coaxial aperture is widely used because of its simplicity. Electrophysical parameters of the sample (relative dielectric constant and loss angle tangent) affect the converter's information parameters (q-factor and resonant frequency). The spatial resolution of modern microwave microscopes is less than in optical and atomic-force microscopes. There are impossible to increase the localization of the probing electric field and provide high sensitivity simultaneously. The early models of microwave microscopes used a quarter-wave coaxial resonator as a measuring converter. The spatial resolution of such devices was about 10  $\mu\text{m}$ . For a coaxial aperture with a pointed central core, the effect of a "lightning rod" is observed. This effect consists in a high concentration of electric field on the tip. This allows to increase the spatial resolution of the whole microwave microscope. The disadvantage of this construction is big radiative losses, and low quality factor of the entire measuring converter. Optical lenses are widely used in optics. It seems useful to investigate the possibility of increasing the spatial resolution of the measuring converter for a microwave microscope by increasing the localization of the probe electric field by using a dielectric concentrator. The aim of the work is modelling the parameters of measuring converter with a dielectric concentrator.

**Keywords:** microwave, measuring converter, aperture, coaxial waveguide, modelling.

**References**

1. L. Chen, C. Ong, C. Neo, *Microwave electronics measurement and materials characterization* (Southern Gate, John Wiley & Sons Ltd, 2004) 537 p.
2. Yu. Ye. Gordiyenko, Yu. I. Gud, D. A. Poletaev, *Telecommunications and radio engineering*, No. 2 149–157 (2011).
3. Yu. E. Gordienko, Y. I. Gud, S. Y. Larkin, N. I. Slipchenko, "Resolution of cavity probes of scanning microwave microscopy" in *Conference proceedings of 22nd International Crimean conference microwave and telecommunication technology* (Vol. 1; 2012) Pp. 619–620.
4. B. Sokolenko, D. Poletaev, A. Rubass, A. Volyar, *Journal of Physics* **735**, No. 1, 1–5 (2016).
5. A. A. Kuraev, T. L. Popkova, A. K. Sinicyn, *Ehlektrodinamika i rasprostranenie radiovoln* [*Electrodynamics and propagation of radio waves*] (Minsk : Bestprint, 2013) 500 p. [in Russian].
6. A. D. Grigorev, *Ehlektrodinamika i tekhnika SVCH* [*Electrodynamics and microwave technique*]. (Moskva : Vysshaja Shkola, 1990) 335 p. [in Russian].

*Поступила в редакцию 24.06.2017 г. Принята к публикации 26.11.2017 г.  
Received June 24, 2017. Accepted for publication November 26, 2017*



**УДК 537.9**

## **СУЖЕНИЕ ЛИНИИ ЯМР В СИСТЕМАХ С ВНУТРЕННЕЙ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ПОДВИЖНОСТЬЮ**

*Рябушкин Д. С.*

*Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия  
E-mail: [druabushkin@cfuv.ru](mailto:druabushkin@cfuv.ru)*

Рассмотрены возможности сужения линии ядерного магнитного резонанса (ЯМР) в твердых телах с диполь-дипольным взаимодействием ядер при наличии стохастических процессов. В качестве модели выбран гаусс-марковский процесс. Показано, что использование импульсных последовательностей WHH-4 и MREV-8 позволяет эффективно сужать сигнал в системах с малой и высокой интенсивностью внутренних движений. В области медленных движений возможности данных серий ограничены.

**Ключевые слова:** ядерный магнитный резонанс, линия поглощения, сужающие последовательности, спад свободной прецессии, моменты линии ЯМР.

**PACS:** 74.25.nj

### **ВВЕДЕНИЕ**

Спектры ЯМР, в принципе, отражают все взаимодействия, присутствующие в образце. Но, как правило, эти взаимодействия различны по своей интенсивности и потому огибающая спектра соответствует наиболее сильному из них (как правило, диполь-дипольному), в то время как детали слабых взаимодействий скрыты от исследователя. В настоящее время существует ряд методик, позволяющих нейтрализовать диполь-дипольные взаимодействия в твердых телах. К наиболее популярным из них относятся многоимпульсные серии WHH-4 и MREV-8 [1–8]. Обычно при анализе данных последовательностей считается, что решетка является жесткой. Между тем, вопрос о влиянии внутренней молекулярной подвижности в твердых телах на эффективность сужения линии ЯМР возникает, как минимум, по двум причинам. Во-первых, подвижность приводит к сужению линии ЯМР, ибо при наличии случайных процессов локальные поля подвергаются усреднению. Во-вторых, внутренняя подвижность плохо сказывается на согласованном движении магнитных моментов ядер под действием импульсов. Таким образом, представляет интерес вопрос о том, какая из этих двух тенденций является определяющей и есть ли здесь какая-либо зависимость от интенсивности внутренних молекулярных движений.

В настоящей работе вычислены сигналы спада свободной прецессии (ССП) в многочастичных системах при наличии в них стохастического процесса гаусс-марковского типа. Проанализирован вопрос о применимости сужающих серий к системам с различной интенсивностью внутренних движений.

ССП В СЕРИЯХ WHH-4 И MREV-8

Рассмотрим гомоядерную систему, содержащую ядра со спином, отличным от нуля. В этом случае гамильтониан диполь-дипольного взаимодействия в приближении сильного поля имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j} D_{zz}^{ij} (2I_{iz}I_{jz} - I_{ix}I_{jx} - I_{iy}I_{jy}), \quad (1)$$

где  $D_{zz}^{ij}$  есть  $zz$ -компонента тензора диполь-дипольного взаимодействия [2].

В равновесном состоянии при наличии сильного постоянного магнитного поля, направленного вдоль оси  $z$ , оператор матрицы плотности имеет вид

$$\bar{\rho}(0) = I_z. \quad (2)$$

С помощью подготовительного импульса, не входящего в состав сужающих серий, преобразуем (2) в

$$\bar{\rho}(0) = I_y. \quad (3)$$

Подвергнем спиновую систему воздействию серии WHH-4, т.е. совокупности резонансных  $90^\circ$ -градусных импульсов  $90^\circ_x - 2\tau - 90^\circ_x - \tau - 90^\circ_y - 2\tau - 90^\circ_y - \tau$ .

Наблюдение ведется в момент времени  $6\tau$ . Будем считать, что каждому импульсу соответствует оператор поворота, влиянием спин-спиновой релаксации в течение действия каждого импульса пренебрегаем.

В интервалах между импульсами оператор матрицы плотности развивается под действием гамильтониана внутренних взаимодействий в соответствии с уравнением Лиувилля

$$\dot{\rho} = i[\rho, H]. \quad (4)$$

Таким образом, в момент времени  $0^+$  (сразу после первого импульса серии) оператор  $\rho$  примет вид

$$\rho(0)^+ = e^{-i\frac{\pi}{2}I_x} I_y e^{i\frac{\pi}{2}I_x}. \quad (5)$$

В момент времени  $2\tau^-$  (непосредственно перед вторым импульсом) оператор матрицы плотности превратится в

$$\bar{\rho}(2\tau) = e^{-i\int_0^{2\tau} H(t')dt'} e^{-i\frac{\pi}{2}I_x} I_y e^{i\frac{\pi}{2}I_x} e^{-i\int_0^{2\tau} H(t')dt'}. \quad (6)$$

Продолжая так и далее, получим оператор матрицы плотности в момент

времени  $6\tau$  и используем его для вычисления сигнала по общей формуле

$$G(t) = \text{Tr}(\rho(t)I_y) / \text{Tr}(I_y^2). \quad (7)$$

Для вычисления следа в (7) воспользуемся полным набором собственных функций гамильтониана (1). Кроме того, примем в качестве модели гаусс-марковский процесс, для которого

$$\langle \omega(t')\omega(t'') \rangle = \bar{M}_2 + \Delta M_2 e^{-\frac{|t'-t''|}{\tau_c}}, \quad (8)$$

где  $\bar{M}_2$  – второй момент линии поглощения в быстроподвижной системе,  $\Delta M_2$  – разность вторых моментов линий в жесткой и быстроподвижной системах,  $\tau_c$  – время корреляции, то есть среднее время жизни системы в заданной решеточной конфигурации [9].

Окончательно находим:

$$G(6\tau) = \exp \left[ -\Delta M_2 \tau_c^2 \left( 4 \frac{\tau}{\tau_c} - 5 + 4e^{-\frac{\tau}{\tau_c}} + 4e^{-\frac{2\tau}{\tau_c}} - 4e^{-\frac{3\tau}{\tau_c}} + e^{-\frac{4\tau}{\tau_c}} \right) \right] \quad (9)$$

На рис. 1 представлена зависимость сигнала в момент времени  $6\tau$  от  $\tau/\tau_c$  при значениях параметра  $\Delta M_2 \tau_c^2 = 0,5$ ; 1; 2 (сверху вниз). Как видно, данная зависимость имеет типичный для импульсных экспериментов характер, отражающий спад сигнала при нагревании образца и его восстановление при высоких температурах.

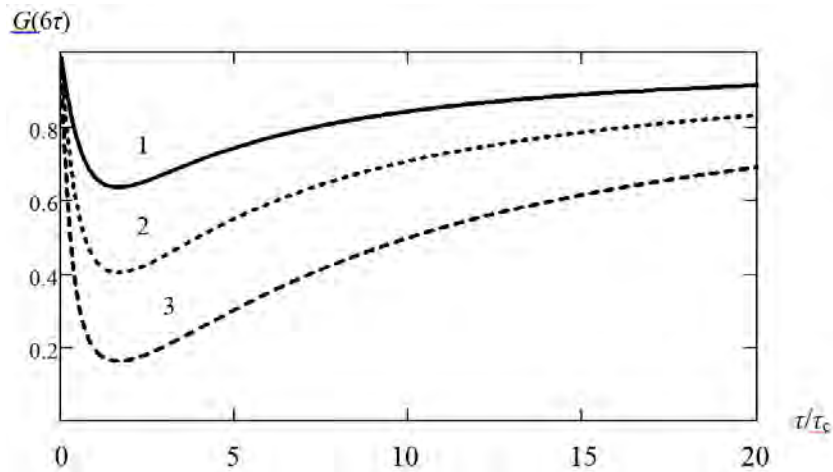


Рис. 1. Зависимость сигнала в момент времени  $6\tau$  от безразмерной величины  $\tau/\tau_c$  при значениях параметра  $\Delta M_2 \tau_c^2 = 0,5$  (кривая 1), 1 (кривая 2), 2 (кривая 3)

Для выяснения вопроса о возможности сужения линии ЯМР при наличии стохастических процессов было проведено сравнение полученного выражения с обычным спадом свободной прецессии, регистрируемым после одного 90-градусного импульса:

$$G(t) = \exp \left[ -\frac{1}{2} \bar{M}_2 t^2 - \Delta M_2 \tau_c^2 \left( \frac{t}{\tau_c} + e^{-\frac{t}{\tau_c}} - 1 \right) \right]. \quad (10)$$

Сравнение (9) и (10) показывает, что член с  $\bar{M}_2$  отсутствует в первой из этих формул. Между тем даже при выполнении условия  $\bar{M}_2 \ll M_2$  его присутствие играет важную роль при интенсивных тепловых движениях. На рис. 2 представлены ССП, построенные по формуле (9) (сплошная линия), и по формуле (10) (прерывистая линия).

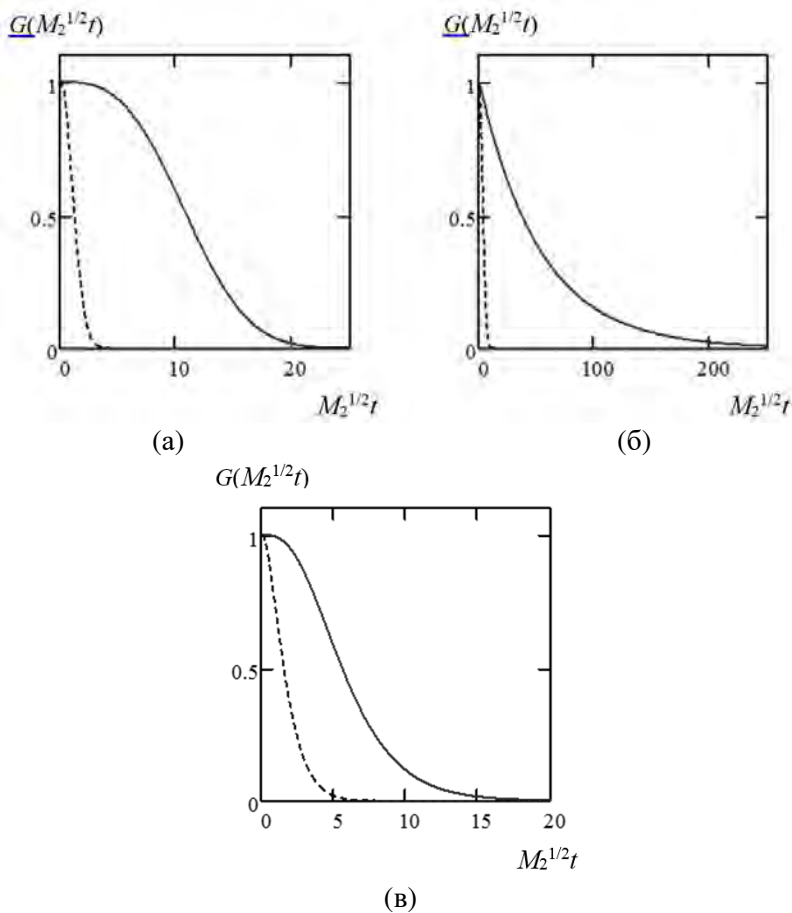


Рис. 2. Спад свободной прецессии и отклик системы на серию WHH-4 в жесткой (а) и быстроподвижной (б) системах, а также при температурах, относящихся к переходной области (в)

При этом в (9) принималось, что  $t = 6\tau$ . Отношение второго момента суженной движением линии ко второму моменту линии жесткой системы равнялось достаточно характерному значению 10. В качестве безразмерного параметра выбиралась величина  $M_2\tau_c^2$ , в качестве безразмерной переменной –  $M_2^{1/2}t$ . Случай (а) соответствует жесткой системе ( $M_2\tau_c^2 = 100$ ), при этом спад после сужающей серии затухает намного медленнее обычного ССП. Данное обстоятельство указывает на сужение линии поглощения. Аналогичная картина наблюдается и для быстроподвижной системы ( $M_2\tau_c^2 = 0,001$ ), см. случай (б). Что касается переходной области, соответствующей медленным движениям ( $\Delta M_2\tau_c^2 = 0,5$ ), случай (в), то здесь различие сигналов минимально.

Расчет, выполненный для серии MREV-8, дает довольно громоздкий по сравнению с (9) результат, который обладает теми же временными и температурными особенностями, что и отклик на действие серии WHH-4.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассмотрен вопрос о возможности сужения линии поглощения ЯМР в системах с доминированием диполь-дипольного взаимодействия при наличии внутренней молекулярной подвижности. Показано, что серии WHH-4 и MREV-8 позволяют частично нейтрализовать влияние диполь-дипольного взаимодействия в близких к жестким и быстроподвижным системам. В области медленных движений (т.е. в переходной области) эффективность данных последовательностей минимальна, что говорит о значительном влиянии стохастических эффектов при формировании откликов на сужающие серии.

### Список литературы

1. Haeberlen U. High resolution NMR in solids: selective averaging. N. Y. : Academic Press, 1976. 204 p.
  2. Mehring M. Principles of High Resolution NMR in solids. Berlin : Springer Verlag, 1976. 344 p.
  3. Хеберлен У., Меринг М. ЯМР высокого разрешения в твердых телах. М. : Мир, 1980. 504 с.
  4. Уо Дж. Новые методы ЯМР в твердых телах. М. : Мир, 1978, 178 с.
  5. Сергеев Н. А., Рябушкин Д. С. Основы квантовой теории ядерного магнитного резонанса. М. : Логос, 2013. 272 с.
  6. Сликтер Ч. Основы теории магнитного резонанса. М. : Мир, 1981. 448 с.
  7. Waugh J. S., Huber L. M., Haeberlen U. Approach to High-Resolution NMR in Solids // Phys. Rev. 1968. Vol. 20. Num. 5. Pp. 180–182.
  8. Rhim W.-K., Elleman D. D., Vaughan R. W. Enhanced resolution for solid state NMR // J. Chem. Phys. 1973. Vol. 58. Pp. 1772–1773.
  9. Lowe I. J. Motionally Narrowed NMR Line Shapes in Solids // Proceedings of the IV AMPERE International Summer School, Pula, 1977, P. 343.
-

NMR LINE NARROWING IN SYSTEMS WITH INTERIOR MOLECULAR  
MOBILITY

Ryabushkin D. S.

*Institute of Physics and Technology, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol  
295007, Russia**E-mail: [druabushkin@cfuv.ru](mailto:druabushkin@cfuv.ru)*

The possibilities of narrowing the nuclear magnetic resonance (NMR) line in solids with dipole-dipole interaction of nuclei in the presence of stochastic processes are considered. The Gauss-Markov process is chosen as the model. It is shown that the use of pulse sequences WHH-4 and MREV-8 allows to narrow the signal effectively in the rigid and fast-moving systems. In the area of slow motions the capabilities of these series are limited.

**Keywords:** nuclear magnetic resonance, absorption line, narrowing sequences, free precession decay, moments of the NMR line.

## References

1. U. Haeberlen, *High resolution NMR in solids: selective averaging* (Academic Press, N. Y., 1976).
2. M. Mehring, *Principles of High Resolution NMR in solids* (Springer Verlag, Berlin, 1976).
3. U. Haeberlen, M. Mehring, *YMR vyisokogo razresheniya v tverdyih telah [High resolution NMR in solids]* (Mir, Moscow, 1980) [in Russian].
4. J. Waugh, *Novyye metody YMR v tverdyih telah [New methods of NMR in solids]* (Mir, Moscow, 1978) [in Russian].
5. N. A. Sergeev, D. S. Ryabushkin, *Osnovyi kvantovoi teorii yadernogo magnitnogo rezonansa [Fundamentals of nuclear magnetic resonance quantum theory]* (Logos, Moscow, 2013) [in Russian].
6. C. Slichter, *Osnovyi teorii magnitnogo rezonansa [Principles of Magnetic Resonance]* (Mir, Moscow, 1981) [in Russian].
7. J. S. Waugh, L. M. Huber, U. Haeberlen, *Phys. Rev.* **20**, 180–182 (1968).
8. W.-K. Rhim., D. D. Elleman, R. W. Vaughan, *J. Chem. Phys.* **58**, 1772–1773 (1973).
9. I. J. Lowe, “Motionally Narrowed NMR Line Shapes in Solids” in *Proceedings of the IV AMPERE International Summer School*, Pula, 1977, P. 343.

*Поступила в редакцию 18.06.2017 г. Принята к публикации 26.11.2017 г.  
Received June 06, 2017. Accepted for publication November 26, 2017*

УДК 538.911+539.58

## АНАЛИЗ МЕЖИОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В КРИСТАЛЛЕ FeVO<sub>3</sub>

Яценко А. А., Синани Г. А., Яценко А. В.\*

Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия

\*E-mail: [yatsenkoav@cfuv.ru](mailto:yatsenkoav@cfuv.ru)

В рамках эмпирического подхода проведен анализ межсионных взаимодействий в слабом антиферромагнетике FeVO<sub>3</sub>. Установлена комбинация параметров потенциала Борна-Майера-Хаггинса для связей (O – O) и (B – O), которая отвечает, как устойчивости ионов в структуре, так и известным упругим свойствам кристалла FeVO<sub>3</sub>.

**Ключевые слова:** FeVO<sub>3</sub>, компьютерное моделирование, упругие свойства.

**PACS** 60.51.Ah, 62.20.dj

### ВВЕДЕНИЕ

Компьютерное моделирование (КМ) является одним из современных информативных методов исследования структуры и физических свойств веществ в конденсированном состоянии [1]. Такое моделирование проводится либо с использованием подхода «из первых принципов» (*ab initio*), либо с использованием полуэмпирических методов. Для моделирования «из первых принципов» обычно применяются дорогостоящие коммерчески доступные специализированные программные пакеты, так как разработка оригинального адекватного программного обеспечения практически невозможна.

В основе полуэмпирических методов КМ лежит расчет потенциала и напряженности внутрискристаллического электрического поля на всех структурно-неэквивалентных ионах в элементарной ячейке кристалла, а также энергии и силы межсионного отталкивания, вызванной перекрытием внешних электронных оболочек соседних ионов. Именно полуэмпирический подход обычно и используется для анализа структуры и свойств борсодержащих соединений [2–10], а для описания взаимодействий отталкивания применяется потенциал Борна-Майера-Хаггинса (БМХ). Потенциал БМХ для парного взаимодействия ионов *i*-го и *j*-го сорта имеет следующий вид:

$$(W_r)_{ij} = \lambda_{ij} \exp(-r_{ij}/\rho_{ij}) + C_{ij}/r_{ij}^6 \quad (1)$$

где  $(W_r)_{ij}$  – энергия отталкивания,  $r_{ij}$  – расстояние между ионом *i*-го и *j*-го сорта, а  $\lambda_{ij}$ ,  $\rho_{ij}$  и  $C_{ij}$  – параметры потенциала. При этом выражение для энергии *i*-го иона приобретает вид:

$$W_i = q_i\varphi_i - \mathbf{p}_i\mathbf{E}_i + \sum_{k=1}^n (W_r)_{ik} \quad (2)$$

где  $q_i$  и  $\mathbf{p}_i$  – соответственно эффективный заряд и электрический дипольный момент  $i$ -го иона,  $\varphi_i$  и  $\mathbf{E}_i$  – потенциал и напряженность электрического поля в точке расположения этого иона,  $n$  – число ближайших соседей. Отметим, что дипольный вклад в энергию при проведении КМ в борсодержащих соединениях учитывается достаточно редко [4], а эффективные заряды ионов обычно считаются равными формальным:  $q_B = +3|e|$ ,  $q_{Fe} = +3|e|$ ,  $q_O = -2|e|$ , где  $|e|$  – абсолютное значение заряда электрона [2–5, 8].

Известная информация о параметрах потенциала БМХ в борсодержащих оксидах приведена в табл. 1. Кратчайшее расстояние (B – O) в этих соединениях составляет величину порядка (1.3–1.4) Å [2, 11], поэтому целесообразно провести сравнение приведенных в табл. 1 параметров для связей (B – O) для этого диапазона межатомных расстояний по отвечающим им значениям энергии отталкивания  $W_{(B-O)}$  и силы межоионного отталкивания  $\mathbf{F}_{(B-O)}$ .

Таблица 1. Известные параметры потенциала БМХ в борсодержащих соединениях

Параметры потенциала БМХ						$\beta$	ссылка
$\lambda_{(B-O)}$ , eV	$\rho_{(B-O)}$ , Å	$C_{(B-O)}$ , эВ·Å <sup>6</sup>	$\lambda_{(O-O)}$ , eV	$\rho_{(O-O)}$ , Å	$C_{(O-O)}$ , эВ·Å <sup>6</sup>		
1843	0.169	0	1919.8	0.284	-	0.984	[2]
592	0.192	0	8207	0.235	-	1.028	[2]
761	0.29	0	352.7	0.35	-	0.095	[3]
848	0.286	0	5486	0.239	22.17	0.011	[4]
529.3	0.29	0	648	0.29	-	0.457	[5]
984	0.29	0	1888	0.29	-	0.285	[6, 7]
815	0.29	0	1889	0.29	-	0.038	[8]
537.3	0.198	0	141704	0.183	-	0.968	[9]
1164.8	0.198	0	141704	0.183	-	0.818	[9]
180390	0.124	0	9027	0.265	85	0.315	[10]

Выражение для  $\mathbf{F}_{(B-O)}$  легко получается из (1) с учетом того, что параметром  $C$  в данном случае можно пренебречь:

$$|\mathbf{F}_{(B-O)}| = \frac{\lambda_{(B-O)}}{\rho_{(B-O)}} \exp\left(-\frac{r}{\rho_{(B-O)}}\right) = \frac{W_{(B-O)}}{\rho_{(B-O)}} \quad (3)$$

Результаты расчета  $W_{(B-O)}$  и  $|\mathbf{F}_{(B-O)}|$  для пяти наборов параметров потенциала БМХ из табл. 1 приведены на рис. 1.

Наглядно видно, что в рассмотренном диапазоне значений  $r_{(B-O)}$  получаемые значения  $W_{(B-O)}$  и  $|\mathbf{F}_{(B-O)}|$  различаются очень существенно и ни один из рассмотренных наборов не может быть выбран, как предпочтительный для проведения КМ свойств оксидных борсодержащих соединений семейства ABO<sub>3</sub> (A = Fe, Al, Ga) без проверки их применимости к конкретному объекту.



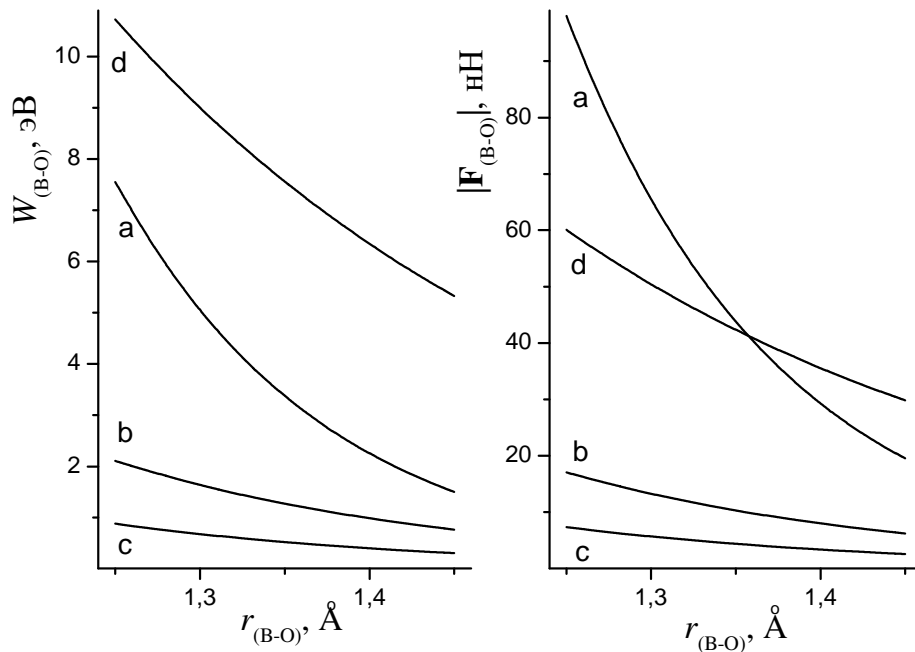


Рис. 1. Зависимости энергии  $W_{(B-O)}$  и силы  $|F_{(B-O)}|$  отталкивания от расстояния  $r_{(B-O)}$  для некоторых наборов потенциала БМХ для связей (В – О) из табл. 1

Исходя из вышеизложенного, основной целью данной статьи является проверка и оптимизация известных наборов параметров потенциала БМХ для взаимодействия (В – О) и (О – О) на примере кристалла бората железа  $FeVO_3$  в рамках упрощенной модели точечных зарядов.

### 1. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ИОНОВ КИСЛОРОДА В $FeVO_3$

В условиях термодинамического равновесия суммарная сила, действующая на каждый ион любого кристалла, должна быть тождественно равна нулю, а энергия кристаллической решетки – минимальна. Кристалл  $FeVO_3$  имеет точечную группу симметрии  $3m$ , а структура этого кристалла такова [12], что позиции ионов  $V^{3+}$  и  $Fe^{3+}$  за счет симметрии ближайшего кислородного окружения являются заведомо устойчивыми. Поэтому искомые наборы параметров потенциала БМХ должны удовлетворять как минимум условию устойчивости ионов кислорода.

В рамках используемой модели  $i$ -я компонента ( $i = x, y, z$ ) результирующей силы  $F$ , действующей на выделенный ион, может быть представлена в виде:

$$F_i = q_{eff} E_i + (F_r)_i \quad (4)$$

где  $q_{eff}$  – эффективный заряд иона;  $E_i$  –  $i$ -я компонента вектора  $E$ ,  $F_r$  – результирующая сила отталкивания, действующая на этот же ион. Таким образом, несоответствие используемых наборов параметров потенциала БМХ условию

устойчивости ионов кислорода может быть охарактеризовано соотношением  $\beta = |(\mathbf{F}_c - \mathbf{F}_r) / \mathbf{F}_c|$ , где  $\mathbf{F}_c$  – кулоновская сила, действующая на выделенный ион кислорода.

На первом этапе была проведена проверка пригодности известных наборов параметров потенциала БМХ связей (В – О) и (О – О) для проведения анализа структуры кристалла FeVO<sub>3</sub>. Расчеты локального электрического поля  $\mathbf{E}$  в структуре FeVO<sub>3</sub> были проведены по точечной ионной модели с использованием формальных значений зарядов ионов и структурных данных, приведенных в [12]. Далее, в предположении, что  $\lambda_{(Fe-O)} = 1102$  эВ и  $\rho_{(Fe-O)} = 0.329$  Å [14] для всех наборов потенциала БМХ были рассчитаны отвечающие им значения параметра  $\beta$ . Результаты расчета  $\beta$  также приведены в табл. 1.

Для дальнейшего анализа были выбраны три набора параметров потенциала БМХ для взаимодействия (О – О) из табл. 1, отвечающих минимальному значению  $\beta$ , а также два альтернативных набора параметров, известных из литературы [14, 15]. Эти наборы представлены в табл. 2. Значения  $\lambda_{(O-O)}$  и  $\rho_{(O-O)}$  фиксировались, а параметры потенциала  $\lambda_{(B-O)}$  и  $\rho_{(B-O)}$  варьировались в диапазонах (200 – 14000) эВ и (0.145 – 0.345) Å с дискретностью 1 эВ и 0.001 Å соответственно для поиска таких комбинаций  $\lambda_{(B-O)}$  и  $\rho_{(B-O)}$ , которые отвечают значению  $\beta \leq 0.005$ . Однако этому условию для каждого набора отвечает до 50 комбинаций параметров потенциала отталкивания для пары (В – О). В табл. 2 приведены предельные комбинации – с минимальными значениями  $\rho_{(B-O)}$  и отвечающие им значения энергии отталкивания  $(W_r)_{э.я.}$ , приходящейся на элементарную ячейку кристалла.

Таблица 2. Предельные комбинации параметров потенциала БМХ связей (В – О), отвечающие устойчивости ионов кислорода при выбранных значениях  $\lambda_{(O-O)}$  и  $\rho_{(O-O)}$

№	Параметры потенциала БМХ						$(W_r)_{э.я.}$ , эВ	Ссылка
	$\lambda_{(O-O)}$ , eV	$\rho_{(O-O)}$ , Å	C	$\lambda_{(B-O)}$ , eV	$\rho_{(B-O)}$ , Å	C		
1	352.7	0.35	-	13436	0.165	0-	169.54	[2]
				1009	0.265	0	213.95	
2	1889	0.29	-	13271	0.163	0	164.82	[7]
				913	0.264	0	205.78	
3	5486	0.239	-	14132	0.163	0	158.01	[3]
				973	0.265	0	201.72	
4	8547	0.219	-	13476	0.165	0	158.06	[15]
				1012	0.264	0	202.61	
5	22764	0.149	-	13624	0.167	0	160.91	[14]
				1114	0.264	0	208.97	

Из табл. 2 видно, что предельные значения возможных комбинаций параметров потенциала БМХ для связей (В – О) для всех рассматриваемых наборов достаточно близки, как и соответствующие значения  $(W_r)_{э.я.}$ .

## 2. АНАЛИЗ УПРУГИХ СВОЙСТВ FeVO<sub>3</sub>

Для дальнейшего сужения количества возможных комбинаций параметров потенциала БМХ было выбрано соответствие расчетного и экспериментально определенного значений модуля одноосного сжатия  $k_c$  и коэффициента Пуассона  $\mu$ . Согласно [16]  $k_c = 0.0038 \text{ ГПа}^{-1}$ , а значение  $\mu$  было рассчитано из известных данных о упругих свойствах FeVO<sub>3</sub> [12]:  $\mu \cong 4.0$ . В пределах выполнения закона Гука изменение энергии кристалла, приходящейся на объем элементарной ячейки кристалла в гексагональном представлении  $(\Delta W)_1$  при одноосном изотермическом сжатии можно представить в следующем виде:

$$(\Delta W)_1 = 0.5 \cdot \varepsilon^2 \cdot V \cdot k_c^{-1} \quad (5)$$

где  $V$  – объем элементарной ячейки,  $\varepsilon = -\delta c/c$  – относительное изменение постоянной элементарной ячейки  $c$ . При  $\varepsilon = 0.08$  значение  $(\Delta W)_1$  составляет величину 1.408 эВ.

При заданном значении  $\varepsilon = 0.08$  и варьировании  $\mu$  можно рассчитать изменение энергии кристалла  $(\Delta W)_2$ , приходящееся на элементарную ячейку кристалла в соответствии с (2). Рассчитывая  $(\Delta W)_2$  для комбинаций параметров потенциала отталкивания, отвечающих условию  $\beta \leq 0.005$ , можно установить комбинацию, которая отвечает условию  $(\Delta W)_1 = (\Delta W)_2$  при  $\mu = 4$ . Результаты расчета  $(\Delta W)_2$  для ряда комбинаций параметров потенциала отталкивания приводятся на рис. 2.

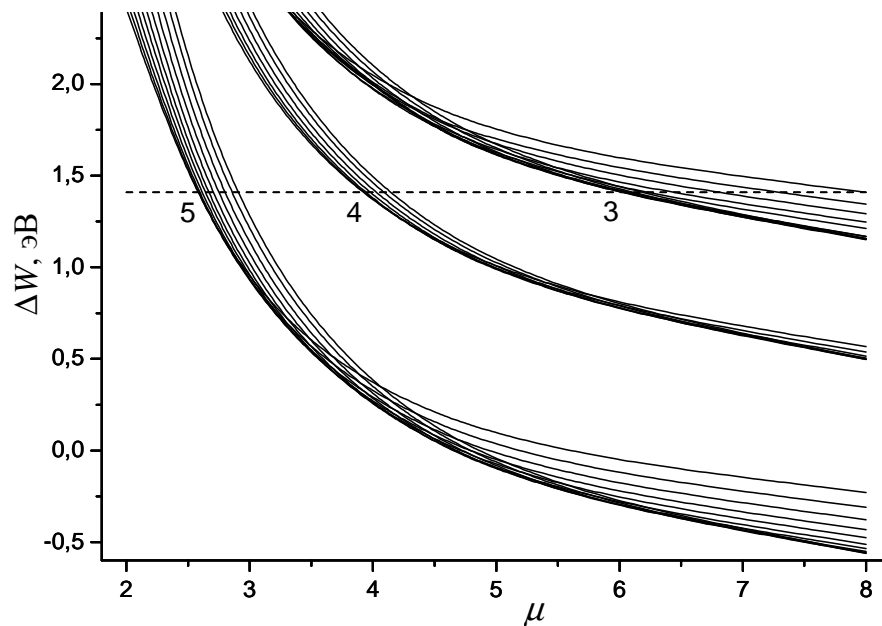


Рис. 2. Изменение энергии кристалла при одноосном сжатии для наборов № 3, 4, 5 при разных значениях коэффициента Пуассона. Пунктиром представлено значение  $(\Delta W)_1 = 1.408$  эВ

Таким образом, соответствие экспериментально установленных и промоделированных упругих свойств кристалла FeVO<sub>3</sub> обеспечивает только одна из возможных комбинаций параметров потенциала отталкивания. Этой комбинацией является предельная комбинация для набора №4 :  $\lambda_{(B-O)} = 13476$  эВ и  $\rho_{(B-O)} = 0.165$  Å.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что наборы потенциала БМХ связей (В – О) и (О – О), установленные ранее для различных борсодержащих оксидных соединений при применении к кристаллу бората железа FeVO<sub>3</sub> не обеспечивают устойчивости ионов кислорода в кристаллической структуре. В результате проведенного выше анализа условия устойчивости ионов и соответствия экспериментально установленных и расчетных значений модуля одноосного сжатия и коэффициента Пуассона получен такой набор параметров потенциала БМХ, который может быть использован при моделировании структуры и свойств соединений типа GaVO<sub>3</sub> и AlVO<sub>3</sub>, а также моделировании локализации ионов бора в виде примеси в других кислородно октаэдрических соединениях.

### Список литературы

1. Dove. M. T. Structure and Dynamics: An atomic view of Materials. Oxford University Press.: New York , 2002. 334 p.
2. Computer modeling of B<sub>2</sub>O<sub>3</sub>: part I. New interatomic potentials, crystalline phases and predicted polymorps /A. Takada, C. R. A. Catlow, G. D. Price // J. Phys.: Condens. Matter. 1995. Vol. 7. P. 8659–8692.
3. Dynamic processes during displacement cascades in oxide glasses: A molecular-dynamic study / J. M. Delaye, D. Ghaleb // Phys. Rev. B. 2000. Vol. 61. P. 14481–14494.
4. Structural study of Na<sub>2</sub>O-B<sub>2</sub>O<sub>3</sub>-SiO<sub>2</sub> glasses from molecular simulations using a polarizable force field / F. Pacaud, J. Delaye, T. Charpentier et al. // J. Chem. Phys. 2017. Vol. 147. 161711.
5. Composition and temperature dependence of cesium-boron glasses by molecular dynamics / A. Vegiri, C-P. E. Varsamis, E. I. Kamitos // J. Chem. Phys. 2005. Vol. 123. 014508.
6. Diffusion of sodium ions in borosilicate glasses by molecular dynamics method / M. S. Meikhal // Z. Phys. B. – Condensed Matter. 1991. Vol. 84. P. 309–313.
7. A molecular dynamic calculation of the structure of B<sub>2</sub>O<sub>3</sub> glass / T. F. Soules // J. Chem. Phys. 1980. Vol. 73. P. 4032–4036.
8. Molecular dynamic simulation of Eu<sup>3+</sup>- doped sodium borate glasses and their fluorescence spectra / K. Hirao, N. Soga // J. Am. Ceram. Soc. 1985. Vol. 68. P. 515–521.
9. A potential model for single crystals of Li<sub>2</sub>O-B<sub>2</sub>O<sub>3</sub> system based on non-equivalence of boron atoms / V. V. Maslyuk, T. Bredov, H. Pfnur // Eur. Phys. J. B. 2004. Vol. 41. P. 281–287.
10. Borosilicate glass potential for radiation damage simulatons / K. Jolley, R. Smith, K. Joseph // Nucl. Instr. And Meas. B. 2015. Vol. 352. P. 140–144.
11. Flux growth and crystal structure refinement of calcite-type borate GaBO<sub>3</sub> / S. Wang, N. Ye, K. R. Poeppelmeier // Crystals. 2015. Vol. 5. P. 252–260.
12. Diehl R., Jantz W., Nolang B. I., Wettling W. Growth and properties of iron borate, FeVO<sub>3</sub>. in: Current topics in Materials Science. Vol. 11. Elsevier. 1984. P. 244–386.
13. Analysis of the electronic polarizability of ions in weak ferromagnetic FeVO<sub>3</sub> crystals / M. B. Strugatskii, A. A. Yatsenko, A. V. Yatsenko // Functional Mater. 2006. Vol. 13. P. 310–312.

14. Potential models for ionic oxides / G. V. Levis, C. R. A. Catlow // *J. Phys. C.: Solid St. Phys.* 1985. Vol. 18. P. 1149–1161.
15. Simulation of the OH<sup>-</sup> group location in the cubic phase of BaTiO<sub>3</sub> crystals / A. V. Yatsenko, A. A. Yatsenko // *Cryst. Report.* 2012. Vol. 57. P. 264–269.

## ANALYSIS OF THE INTERIONIC INTERACTIONS IN FeBO<sub>3</sub> CRYSTAL

*Yatsenko A. A., Sinani G. A., Yatsenko A. V.\**

*Institute of Physics and Technology, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

\*E-mail: [yatsenkoav@cfuv.ru](mailto:yatsenkoav@cfuv.ru)

Some features of computer simulation of the structure and properties of boron-containing oxide compounds are considered on the example of the weak antiferromagnetic FeBO<sub>3</sub>. Within the framework of the empirical approach, an analysis of the Born-Mayer-Huggins potential sets for the (O-O) and (B-O) bonds known from the literature is carried out.

On the basis of the fulfillment of the condition of the equilibrium state of all ions in the crystal lattice and the correspondence of the experimentally established and simulated elastic properties of FeBO<sub>3</sub>, a combination of the Born-Mayer-Huggins potential parameters for the (O-O) and (B-O) bonds is estimated, which meets these requirements and substantially differs from known ones.

This combination can be used to simulate the structure and properties of compounds such as GaBO<sub>3</sub> and AlBO<sub>3</sub>, and also to simulate the localization of boron as impurity ion in other oxygen-octahedral compounds.

**Keywords:** FeBO<sub>3</sub>, computer simulations, elastic properties.

### References

1. M. T. Dove. *Structure and Dynamics: An atomic view of Materials* (Oxford University Press.: New York, 2002) 334 p.
2. A. Takada, C. R. A. Catlow, G. D. Price, *J. Phys.: Condens. Matter.* **7**, 8659–8692 (1995).
3. J. M. Delaye, D. Ghaleb, *Phys. Rev. B.* **61**, 14481–14494 (2000).
4. F. Pacaud, J. Delaye, T. Charpentier, L. Cormier, M. Salanne, *J. Chem. Phys.* **147**, 161711 (2017).
5. A. Vegiri, C-P. E. Varsamis, E. I. Kamitos. *J. Chem. Phys.* **123**, 014508 (2005).
6. M. S. Meikhail, *Z. Phys. B. – Condensed Matter.* **84**, 309–313 (1991).
7. T. F. Soules, *J. Chem. Phys.* **73**, 4032–4036 (1980).
8. K. Hirao, N. Soga, *J. Am. Ceram. Soc.* **68**, 515–521 (1985).
9. V. V. Maslyuk, T. Bredov, H. Pfnur, *Eur. Phys. J. B.* **41**, 281–287 (2004).
10. K. Jolley, R. Smith, K. Joseph, *Nucl. Instr. And Meas. B.* **352**, 140–144 (2015).
11. S. Wang, N. Ye, K. R. Poeppelmeier, *Crystals* **5**, 252–260 (2015).
12. R. Diehl, W. Jantz, B. I. Nolang, W. Wuttling. “Growth and properties of iron borate, FeBO<sub>3</sub>” in: *Current topics in Materials Science.* **11**, 244–386, Elsevier (1984).
13. M. B. Strugatskii, A. A. Yatsenko, A. V. Yatsenko, *Functional Mater.* **13**, 310–312 (2006).
14. G. V. Levis, C. R. A. Catlow, *J. Phys. C.: Solid St. Phys.* **18**, 1149–1161 (1985).
15. A. V. Yatsenko, A. A. Yatsenko, *Cryst. Report* **57**, 264–269 (2012).

*Поступила в редакцию 04.06.2017 г. Принята к публикации 26.11.2017 г.  
Received June 04, 2017. Accepted for publication November 26, 2017*

# БИОФИЗИКА И МЕДИЦИНСКАЯ ФИЗИКА

## BIOPHYSICS AND MEDICAL PHYSICS

*Вестник Физико-технического института  
Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского  
Том 1 (67–69). № 2. 2017. С. 85–94  
Journal of Physics and Technology Institute of V. I. Vernadsky Crimean Federal University  
Volume 1 (67–69). No. 2. 2017. P. 85–94*

УДК 616-009 + 616-02

### МЕДИКО-БИОЛОГИЧЕСКИЕ И ПСИХОСОМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ СИНДРОМА ХРОНИЧЕСКОЙ УСТАЛОСТИ У СТУДЕНТОВ МЕДИЦИНСКОГО ВУЗА

*Карнович А. В.<sup>1</sup>, Григорьев П. Е.<sup>1\*</sup>, Лускова Ю. С.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Физико-технический институт, ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», Симферополь 295007, Россия*

<sup>2</sup>*Медицинская академия имени С. И. Георгиевского, ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского», Симферополь 295007, Россия*

\*E-mail: [grigorievpe@cfuv.ru](mailto:grigorievpe@cfuv.ru)

В настоящем исследовании на первом этапе выявляли распространенность синдрома эмоционального выгорания как диагностического признака синдрома хронической усталости (СХУ) среди студентов медицинского вуза (выборка 60 студентов в возрасте 18-24 лет). Синдром эмоционального выгорания был обнаружен у 30% исследуемых. Из них у 17% наблюдается фаза напряжения, 28% – резистенции и у 56% – истощения. Испытуемые с СХУ прошли обследование у терапевта и кардиолога. У половины обследованных наблюдается 3 и более диагнозов, и лишь у одного испытуемого не было выявлено ни одного диагноза. Уровни самочувствия и активности у испытуемых с фазами резистентности и истощения (второй и третьей) статистически значимо ниже. Негативная связь фазы эмоционального выгорания с уровнями самочувствия и активности формирует своего рода порочный круг, способствуя дальнейшей соматизации негативных психических проявлений СХУ, разорвать который возможно, с одной стороны, проводя диспансеризацию студентов и настоятельно способствовать их излечению от соматических заболеваний, с другой, уделять внимание психологическим и психосоциальным методам коррекции синдрома эмоционального выгорания.

**Ключевые слова:** синдром хронической усталости, эмоциональное выгорание, студенты медицинского вуза.

**PACS: 42.62.Be**

#### ВВЕДЕНИЕ

По статистическим данным в мире распространенность синдрома хронической усталости (СХУ) составляет от 0,01 до 2,8% [1, 2]; в Великобритании синдрому подвержены около 38% населения [3]. Данное заболевание является актуальным и для стран СНГ не только в медицинском, но также в экономическом и социальном аспектах [4, 5].

Синдром хронической усталости впервые выделен в самостоятельную категорию в 1988 году центром контроля заболеваний (г. Атланта, США) [6, 7].

Синдром хронической усталости классифицируется как состояние, подходящее под классическое понятие «болезнь», и входит в международную классификацию болезней МКБ-10. Это заболевание до конца неизученной этиологии, основным проявлением которого является прогрессирующая усталость, немотивированная

общая слабость, на длительное время лишаящая больного активного участия в повседневной жизни, снижение работоспособности. Больные часто жалуются на головные боли, артралгии, миалгии, снижение памяти, депрессию, расстройства сна, а в ряде случаев – также на субфебрильную температуру, болезненные ощущения в горле, увеличение шейных лимфоузлов [1, 5, 8]. Главным отличием СХУ от обычного переутомления является отсутствие тенденции к полному ее исчезновению даже после продолжительного отдыха, в то время, как типичная усталость носит временный характер и устраняется относительно кратковременным отдыхом [9].

Одним из критериев СХУ является его наличие у пациента его признаков [1] на протяжении не менее 6 месяцев.

Примечательно, что синдром хронической усталости является и психофизиологическим симптомом эмоционального выгорания [10], а некоторые авторы отмечают тождественность СХУ и эмоционального выгорания [11]. Мы также придерживаемся данного мнения исходя из тождественности их симптомов с учетом невыясненной этиологии СХУ.

По В. В. Бойко [12], эмоциональное выгорание – выработанный личностью механизм психологической защиты в форме полного или частичного исключения эмоций (понижения их энергетике) в ответ на избранные психотравмирующие воздействия. В литературе встречаются и другие определения этого состояния: «синдром психического выгорания», «информационный невроз», «синдром менеджера». Синдром (или крайняя степень) эмоционального выгорания выявляется у 13,1%, а высокая степень эмоционального выгорания – у 49,7% врачей первичного звена. Проявления субоптимального СХУ в медицинской практике раз в месяц или чаще наблюдаются у 24,2% врачей первичного звена, и наиболее часто (в 17,7% случаев) это выражается в виде ненадлежащего отношения к пациентам и их проблемам [13].

В связи с актуальностью данной проблемы среди медицинских работников, а, значит, и будущих врачей – студентов медицинского вуза, – задачей данного исследования было выяснение распространенности эмоционального выгорания как маркера СХУ. Лучшее понимание проблемы, предварительный анализ распространенности, а также теоретический анализ этиологических причин СХУ необходимы для разработки методов оказания помощи при СХУ и эмоциональном выгорании студентам медицинского вуза, исходя из их причин, а не исключительно манифестирующих признаков.

## 1. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Среди методик для оценки психических состояний и свойств была выбрана батарея из 3 опросников (В. В. Бойко, А. Белова, «самочувствие-активность-настроение» – САН). Опросник Бойко является, собственно диагностическим критерием для наличия/отсутствия эмоционального выгорания, которое является практически психологическим коррелятом СХУ; опросник Белова определения преобладающего типа темперамента и выявления представленности в нем свойств других типов применялся нами для тестирования гипотезы о большей/меньшей

подверженности лиц с определенным типом темперамента СХУ. Методика САН применялась нами для выявления преобладающего типа динамически изменяющихся психических состояний с относительно устойчивой фазой эмоционального выгорания, что необходимо как с диагностической точки зрения, так и для понимания точки приложения сил при последующих психокоррекционных мероприятиях.

В исследовании добровольно с получением информированного согласия приняли участие 60 студентов 1–4 курсов в возрасте 18–24 лет.

Также была проведена оценка состояния сердечно-сосудистой системы методом снятия и анализа электрокардиограммы. По каждому из обследованных получали заключение терапевта на основании осмотра и сбора анамнеза.

Прежде всего, было проведено тестирование по опроснику В. В. Бойко «Методика диагностики уровня эмоционального выгорания» (адаптированное для студенческой аудитории), который предназначен не только для определения наличия/отсутствия эмоционального выгорания, но и его фазы, стадии. Эмоциональное выгорание выявлено у 18 испытуемых (30% респондентов).

В дальнейшем исследовании принимали участие лишь эти 18 испытуемых с выявленным эмоциональным выгоранием, а, значит, в клиническом отношении – с СХУ, или по крайней мере, состоящими в группе риска по СХУ.

Тестирование по методике САН проводилось на протяжении месяца – в начале и по окончании учебной недели по понедельникам и пятницам. Испытуемые отвечали на вопросы опросника во второй половине дня (после занятий). Данные по методике САН представлены по семибалльной шкале семантического дифференциала от 1 до 7.

Участники также были протестированы по методике А. Белова для определения типа темперамента (Предоставляется 4 блока вопросов, характеризующие каждый тип темперамента).

В качестве математико-статистических методов обработки данных были использованы описательные статистики (средние арифметические и стандартные ошибки среднего), однофакторный дисперсионный анализ (ANOVA) с последующими апостериорными попарными межгрупповыми сравнениями с помощью критерия Тьюки.

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Среди обследованных с СХУ у 17% наблюдается 1 фаза напряжения, у 28% – вторая фаза резистентности, и у 56% – фаза истощения, что является весьма неблагоприятным соотношением. В результате тестирования обследуемых по понедельникам и пятницам в течение четырех недель, после применения однофакторного дисперсионного анализа были получены следующие результаты зависимости самооценки состояний от фазы эмоционального выгорания (таблица 1).



Таблица 1. Описательные статистики показателей самочувствия, активности и настроения (шкала от 1 до 7), и их распределение по фазам эмоционального выгорания

Фаза эмоционального выгорания / Состояние	1 Напряжение	2 Резистентность	3 Истощение	р – значимость различий по ANOVA
Самочувствие	4,65 ± 0,18 <sup>2,3*</sup>	4,09 ± 0,14 <sup>1</sup>	3,82 ± 0,10 <sup>1</sup>	0,00058
Активность	4,70 ± 0,14 <sup>2,3</sup>	3,70 ± 0,14 <sup>1</sup>	3,73 ± 0,10 <sup>1</sup>	0,00002
Настроение	4,69 ± 0,21	4,56 ± 0,17	4,32 ± 0,12	0,23

\* – Примечание: отмечены группы, с которыми у данной группы имеются попарные статистически значимые ( $p < 0,05$ ) по апостериорному критерию Тьюки.

Уровни самочувствия и активности у испытуемых с фазами резистентности и истощения (второй и третьей) значимо ниже, чем у испытуемых с фазой напряжения (первой), в то время, как различия между уровнями самочувствия и активности не столь существенно отличаются у испытуемых с фазами резистентности и истощения. При этом уровень настроения в меньшей степени связан с фактором фазы эмоционального выгорания.

Между полуколичественным значением теста Бойко (фаза и стадия) и количеством установленных диагнозов наблюдается умеренная положительная корреляционная связь (+0,34 по Спирмену). С учетом того, что многие из диагнозов отражают хронические и длительно протекающие заболевания, можно предположить, что наличие такого рода заболеваний различных систем организма, является фактором, провоцирующим утяжеление эмоционального выгорания.

Не было выявлено статистически значимых связей между темпераментом, фазой эмоционального выгорания, а также с уровнями самочувствия, активности и настроения.

В результате обследований у терапевта и кардиолога лишь у одного испытуемого не было выявлено ни одного диагноза; один диагноз – у одного испытуемого, два диагноза – у семерых испытуемых, три диагноза – у шестерых, четыре – у двоих, и пять – у одного. Таким образом, относительно установленных диагнозов соматических заболеваний обнаруживается тревожная тенденция: у половины обследованных наблюдается 3 и более диагнозов, и лишь у одного испытуемого не было выявлено ни одного диагноза.

Среди заболеваний у испытуемых с СХУ преобладали вегето-сосудистая дистония (у девяти обследованных), хронические болезни желудочно-кишечного тракта (у шестерых), неполная блокада правой ножки пучка Гисса сердца (у

четвертых), заболевания опорно-двигательного аппарата (у троих). Среди прочих реже встречающихся (у одного или двоих испытуемых) заболеваний были обнаружены хронический бронхит, мочекаменная болезнь, дисплазия соединительной ткани, полипноэ на амброзию, синдром Рейно, хронический гайморит, брадикардия и тахикардия.

Негативная связь фазы эмоционального выгорания с уровнями самочувствия и активности формирует своего рода порочный круг, способствуя дальнейшей соматизации негативных психических проявлений СХУ, разорвать который возможно, с одной стороны, проводя диспансеризацию студентов и настоятельно способствовать их излечению от соматических заболеваний, с другой, уделять внимание психологическим и психосоциальным методам коррекции синдрома эмоционального выгорания.

Во многих источниках представлены гипотезы о вирусной теории возникновения СХУ. Однако это предположение не подтверждается результатами серологических исследований [12, 15, 16]. Скорее вирусная гипотеза маскируется под влияние внешних факторов (радиационного, токсического, психогенного и их сочетания), как следствие, – возникает депрессия иммунной системы, на фоне которой активизируются вирусные агенты [7, 17]. Таким образом, есть основания полагать, что одна из причин СХУ заключается в нарушениях иммунного ответа [18]. В иммунном статусе больных установлены Т-лимфопения, уменьшение числа Т-хелперов и Т-индукторов, в результате чего иммунорегуляторный индекс «Т-хелперы / Т-супрессоры» существенно снижался [17].

Иммунную теорию патогенеза СХУ напрямую доказывают данные о дисфункции иммунной системы у пациентов с этой патологией. У них отмечаются цитотоксические реакции и повышение уровня иммуноглобулинов G, увеличение уровня цитокинов в плазме крови и в ликворе. При иммунологическом исследовании также выявлено повышение уровня интерлейкина-2 и гамма-интерферона, что сопровождается снижением сывороточных концентраций Ig A, Ig E. Аллергический компонент патогенеза СХУ подтверждается проведением РНК-полимеразных цепных реакций, которые показывают увеличение уровня фактора некроза опухолей-альфа и интерферона-альфа. В то же время снижался уровень интерлейкина-10, как показано в исследовании [12]. "Отмечено, что иммунограммы пациентов характеризовались хронически низким уровнем активности гуморального звена иммунитета. Отмечается нарушение функции Т-лимфоцитов, в частности, – естественных киллеров, причем стимуляция интерлейкина-2 во многих случаях не вызывала восстановления ответа естественных киллеров [8].

Естественно, что одну из ключевых ролей при возникновении СХУ играет нарушение процессов адаптации [4, 18].

При синдроме хронической усталости развивается дисфункция практически всех гормональных систем, но особое внимание уделяется изучению изменений функций гипоталамо-гипофизарно-адренкортикальной системы, ответственной за формирование фенотипической адаптации организма к дестабилизирующим воздействиям, в том числе, – стресс-индуцированным. Изменение функций гипоталамо-гипофизарно-адренкортикальной системы проявляется снижением

уровня циркулирующего кортизола в крови, слюне и моче пациентов с СХУ. Примечательно, что понижение уровня кортизола ассоциируется с проявлением характерных для СХУ (как отмечалось выше) клинических симптомов: чрезмерной усталостью, депрессией, болями в горле и мышцах, нарушением сна. Нарушение функций гипоталамо-гипофизарно-адренокортикальной системы при этом заболевании может быть связано с изменением эндогенного циркадного ритма секреции гормонов (АКТГ и кортизола) [18].

Отмечается нарушение зрения у больных с СХУ: увеличение частоты сосудистой и дистрофической патологии органа зрения. В исследовании [17] сосудистая патология органа зрения выявлена у 70,2% исследуемых, дистрофическая – у 52,8%, сочетанная сосудистая и дистрофическая патология органа зрения диагностирована у 21,1% пациентов. Выявленная патология у пациентов с СХУ значительно превышала частоту аналогичной патологии в контрольной группе. В то же время, не было отмечено достоверных различий выявления аномалий рефракции в группе больных СХУ и соматически здоровых лиц. Следовательно, в патогенезе формирования сосудистой и дистрофической патологии зрительного анализатора у лиц с СХУ существенную роль играют нарушения иммунного статуса, а также ранее выявленные микроциркуляторные сдвиги [17].

Путем оценки вариабельности сердечного ритма, вегетативными пробами с задержкой дыхания, пробой Вальсальвы, оценки дисбаланса симпатико-парасимпатического взаимодействия выявлено признаки дисрегуляции вегетативного баланса у 83% и с проявлениями СХУ [7, 9].

У пациентов с СХУ наблюдался высокий уровень аминокислоты метилролидина, которому присвоено название маркера СХУ-1. Также наблюдается высокий уровень выделения  $\beta$ -аланина, тироксина, аконитовой, янтарной и глутаминовой кислот. Также выделен неопознанный мочевой метаболит, которому присвоено название СХУ-2 [12].

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Среди обследованных с обнаруженным СХУ (30% от общего числа обследованных студентов 1 – 4 курса медицинского вуза) у 17% наблюдается первая фаза напряжения, у 28% – вторая фаза резистентности, и у 56% – фаза истощения, что является весьма неблагоприятным соотношением.

В результате тестирования обследуемых по понедельникам и пятницам в течение четырех недель, после применения однофакторного дисперсионного анализа были получены следующие результаты зависимости самооценки состояний от фазы эмоционального выгорания. Уровни самочувствия и активности у испытуемых с фазами резистентности и истощения (второй и третьей) значимо ниже, чем у испытуемых с фазой напряжения (первой).

В результате обследований у терапевта и кардиолога лишь у одного испытуемого с СХУ не было выявлено ни одного диагноза; один диагноз – у одного испытуемого, два диагноза – у семерых испытуемых, три диагноза – у шестерых, четыре – у двоих, и пять – у одного. Таким образом, относительно установленных

диагнозов соматических заболеваний обнаруживается тревожная тенденция: у половины обследованных с СХУ было 3 и более диагнозов.

В связи полученных нами результатами особого внимания заслуживают данные о том, что, из всех больных СХУ отклонения в психоэмоциональной сфере выявлено 98,7% по опроснику ММРІ [12], что, однако, не умаляет значимость полученных нами результатов, поскольку, в отличие от методики САН (динамически характеризующую изменения психических состояний), показатели ММРІ (многофакторного миннесотского личностного опросника) остаются достаточно стабильными на протяжении жизни и характеризуют психические свойства индивида и личности.

Для уточнения роли различных факторов, дающих вклад в наличие СХУ, по нашему мнению, необходимы: определение уровней мелатонина в моче, тестостерона в крови, гормонов щитовидной железы, фолликулостимулирующего гормона, прогестерона, холинэстеразы (как провоспалительного фактора), проведение общего анализа крови, иммунологического анализа для оценки функционального состояния CD-клеток (имеющих белковую природу и играющих важную роль в иммунном ответе), выявление взаимосвязей между их показателями.

На основании исследования по результатам последующих исследований могут быть сформированы комплексные рекомендации относительно профилактики и лечения синдрома хронической усталости.

#### Список литературы

1. Назар О. В., Тихомир А. И. Синдром хронической усталости – болезнь цивилизации (современный взгляд на проблему) // Семейна медицина 2005. №3. С. 91–93.
2. Бурчинский С. Г. Нейрофармакологические подходы к терапии синдрома хронической усталости // Журнал практичного лікаря: спеціалізоване інформаційне видання. 2005. №1. С. 48–51.
3. Грачев В. И. Синдром хронической усталости, причины, последствия и профилактика [Электронный ресурс] URL: [www.aversnpk.ru/publications/chronic-fatigue-syndrome/](http://www.aversnpk.ru/publications/chronic-fatigue-syndrome/) (дата обращения 01.09.2017).
4. Самойлович В. А., Гутарева Н. В. Значення фізичних чинників в підвищенні резистентності організму студентів з синдромом хронічної втоми // Проблеми медицини. 2002. № 1/2. С. 13–15.
5. Дороженко И. Синдром хронической усталости // Врач. 2001. № 7. С. 7–8.
6. Самойлович В. А., Гутарева Н. В., Тондій Л. Д. Вплив фізичних факторів на біоелектричні властивості клітинних ядер букального епітелію у студентів із синдромом хронічної втоми // Лікарська справа. 2005. №5/6. С. 60–64.
7. Вернер О. М., Мурашко Н. К. Епідеміологія, діагностика і лікування наслідків нейроінфекцій : Синдром хронічної втомлюваності // Лікарська справа. 2012. № 6. С. 78–81.
8. Дидковский Н. А. Синдром хронической усталости // Эфферентная терапия. 2000. Т. 6. № 3. С. 25–31.
9. Мишиев В. Д., Пушкарева Т. Н., Кушнир Ю. А. Депрессивные расстройства в структуре синдрома хронической усталости у женщин репродуктивного возраста : клиника и принципы терапии // Здоровье женщины. 2011. – № 7. – С.90–92.
10. Платонов Ю. П. Психология конфликтного поведения. СПб. : Речь, 2009. 544 с.
11. Матяш А. А. Синдром эмоционального выгорания – синдром менеджера. // [Электронный ресурс] URL: [www.matyash.info/sindrom-emocionalnogo-vygoraniya-sindrom-menedzhera.htm](http://www.matyash.info/sindrom-emocionalnogo-vygoraniya-sindrom-menedzhera.htm) (дата обращения 01.09.2017).
12. Стеблюк В. В., Бурлака О. В. Синдром хронічної втоми: сучасний стан проблеми // Медична реабілітація, курортологія, фізіотерапія. 2000. № 4. С. 29–32.

13. Юрьева Л. Н., Семенихина В. Е. Синдром "эмоционального выгорания" у врачей-психиатров и наркологов: диагностика, профилактика и психокоррекция // [Электронный ресурс] URL : [www.rusnauka.com/NIO/Medecine/jur\\_evasind..rtf.htm](http://www.rusnauka.com/NIO/Medecine/jur_evasind..rtf.htm) (дата обращения 01.09.2017).
  14. Бабанов С. А. Синдром эмоционального выгорания // Врач скорой помощи. 2012. № 10. С. 59–65.
  15. Клебанова В. А. Синдром хронического утомления (обзор) // Гигиена и санитария. 1995. № 1. С. 35–38.
  16. Гиріна О. М., Лемзякова Т. Г., Рудіченко В. М. Синдром хронічної втомиленості у практиці сімейної медицини. Повідомлення 1 // Український медичний часопис. 1999. № 2 (10). С. 77–81.
  17. Фролов В. М., Петруня А. М. Патология органа зрения при синдроме хронической усталости // Вестник офтальмологии. 2003. Т. 119. № 2. С. 45–47.
  18. Фомичева Е. Е., Филатенкова Т. А., Рыбакина Е. Г. Активность гипоталамо-гипофизарно-аденокортикальной системы при индукции синдрома хронической усталости в эксперименте // Российский физиологический журнал им. И.М. Сеченова. 2009. Т. 95. № 1. С. 11–18.
- 

## MEDICAL-BIOLOGICAL AND PSYCHOSOMATIC ASPECTS OF THE CHRONIC FATIGUE SYNDROME IN STUDENTS OF THE MEDICAL HIGH SCHOOL

*Karpovich A. V.<sup>1</sup>, Grigoriev P. E.<sup>1\*</sup>, Luskova Yu. S.<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*Physics and Technology Institute, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

<sup>2</sup>*Medical Academy named after S. I. Georgievsky, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

\*E-mail: [grigorievpe@cfuv.ru](mailto:grigorievpe@cfuv.ru)

The syndrome of chronic fatigue is classified as a condition suitable for the classic concept of "disease", and is included in the international classification of diseases of ICD-10. This disease until the end of unexplored etiology. The main manifestation of which are progressive fatigue, unmotivated general weakness, for a long time depriving the patient of active participation in everyday life, a decline in efficiency. Patients often complain of headaches, arthralgia, myalgia, memory loss, depression, sleep disorders. In some cases also subfebrile temperature, sore throat, cervical lymph nodes are manifested. The main difference between chronic fatigue syndrome and normal fatigue is a lack of a tendency to its complete disappearance, even after a long rest, while typical fatigue is temporary and eliminated by relatively short-term rest. One of the criteria for chronic fatigue syndrome is its still presence in the patient of its signs for at least 6 months. It is noteworthy that the syndrome of chronic fatigue is also a psychophysiological symptom of emotional burnout. Some authors note the identity of syndrome of chronic fatigue and emotional burnout. We also hold this opinion on the basis of the identity of their symptoms, taking into account the unclear etiology of chronic fatigue syndrome. Emotional burnout is a mechanism of psychological defense developed by the individual in the form of a complete or partial exclusion of emotions (a decrease in their energy) in response to selected psychotraumatic effects. According to modern data, the syndrome (or extreme degree) of emotional burnout is revealed in 13.1%, and a high degree of emotional burnout – in 49.7% of primary care physicians. The manifestations of suboptimal syndrome of chronic fatigue in medical practice are observed monthly or more often in 24.2% of primary care physicians,

and most often (in 17.7% of cases) this is expressed as improper treatment of patients and their problems. In connection with the urgency of this problem among medical workers, and, hence, in future doctors – students of a medical high school, – the task of this study was to determine the prevalence of emotional burnout as a marker of chronic fatigue syndrome. As a result, a better understanding of the problem, identification of prevalence, and a theoretical analysis of the etiological causes of syndrome of chronic fatigue is a necessary step for developing methods of assisting with syndrome of chronic fatigue and emotional burnout for medical students, based on their causes, rather than manifestations. At the first stage of present research it was studied the prevalence of emotional burnout syndrome as a diagnostic indication of chronic fatigue syndrome among medical students (sample of 60 students aged 18–24 years). Burnout syndrome was found in 30% of subjects. Of these, 17% of subjects had phase of tension, 28% – phase of resistance and 56% – exhaustion. At the second stage of research persons with chronic fatigue syndrome took part. The subjects were examined by a physician and cardiologist. At half of the surveyed 3 or more diagnoses were detected, and only one subject did not have any diagnoses. In the semi-quantitative value of Boyko test (phase and stage of emotional burnout syndrome) and the number of diagnoses observed a moderate positive Spearman correlation. Under the Belov test for evaluating of temperament, the statistically significant relationship between temperament and emotional burnout phase not been revealed. For this cohort also conducted a test “wellbeing-activity-mood” to assess the psycho-emotional state, for a month at the beginning and at the end of educational week. Levels of wellbeing and activity in subjects with phases of resistance and exhaustion are significantly lower than in subjects with a phase of tension, and the differences between levels of wellbeing and activity is not so different in subjects with phases of resistance and exhaustion. The level of mood is not depended from the phase factor of burnout. The levels of well-being and activity in subjects with phases of resistance and depletion (the second and third) are significantly lower than in subjects with a voltage phase (the first). As a result of the examinations of the therapist and the cardiologist, only one patient with CFS did not have a single diagnosis; one diagnosis – one subject, two diagnoses – seven subjects, three diagnoses – six, four – two, and five – one. In connection with the results obtained by us, special attention should be paid to the data that, out of all patients with chronic fatigue syndrome, abnormalities in the psychoemotional sphere were revealed in 98.7% of the MMPI questionnaire. This result, however, does not detract the significance of the results obtained by us, because, unlike a test “wellbeing-activity-mood” (dynamically characterizing the changes in mental states), results of MMPI are quite stable throughout life and characterize the psychic properties of the personality. To clarify the role of various factors contributing to the presence of chronic fatigue syndrome, it could useful to: determine the levels of melatonin in the urine, testosterone in the blood, thyroid hormones, follicle-stimulating hormone, progesterone, cholinesterase (as a pro-inflammatory factor), conduct a general blood test, analysis for the evaluation of the functional state of CD cells, revealing the relationships between their indices. Based on the study on the results of subsequent studies, comprehensive recommendations for the prevention and treatment of chronic fatigue syndrome can be formed.

**Keywords:** syndrome of chronic fatigue, emotional burnout, students of a medical high school.

### References

1. O. V. Nazar, A. I. Tikhomir, *Simeyna meditsina*, No. 3, 91–93 (2005) [in Russian].
2. S. G. Burchinsky, *Zhurnal praktichnogo líkaryá: spetsialízovane ínformatsýne vidannya*, No. 1, 48–51, (2005) [in Russian].
3. V. I. Grachev, (2017) [in Russian] Available at: [www.aversnpk.ru/publications/chronic-fatigue-syndrome](http://www.aversnpk.ru/publications/chronic-fatigue-syndrome).
4. V. A. Samoilovich, N. V. Gutareva, *Problemy meditsiny*, No. 1/2, 13–15, (2002) [in Ukrainian]
5. Dorozhenok I., *Vrach*. No. 7, 7–8 (2001) [in Russian].
6. V. A. Samoylovich, N. V. Gutareva., L. D. Tondiy, *Líkars'ka sprava*, No. 5/6, 60–64 (2005) [in Ukrainian].
7. O. M. Werner, N. K. Murashko, *Líkars'ka sprava*, No. 6, 78–81, (2012) [in Ukrainian].
8. N. A. Didkovsky, Syndrome of chronic fatigue, *Efferentnaya terapiya*. **6**, No. 3, 25–31 (2000) [in Russian].
9. V. D. Mishiev, T. N. Pushkareva, Yu. A. Kushnir, *Zdorov'ye zhenshchiny*, No. 7, 90–92, (2011) [in Russian].
10. Yu. P. Platonov *Psikhologiya konfliktnogo povedeniya [Psychology of Conflict Behavior]*, (St. Petersburg, Rech, 2009) [in Russian].
11. A. A. Matyash, Available: [www.matyash.info/sindrom-emocionalnogo-vygoraniya-sindrom-menedzhera.htm](http://www.matyash.info/sindrom-emocionalnogo-vygoraniya-sindrom-menedzhera.htm).
12. V. V. Steblyuk, O. V. Burlaka, *Medichna reabílítatsíya, kurortologíya, fízioterapiya*. No. 4, 29–32, (2000) [in Ukrainian].
13. L. N. Yurieva, V. E. Semenikhina, Available: [www.rusnauka.com/NIO/Medecine/jur\\_evasind..rtf.htm](http://www.rusnauka.com/NIO/Medecine/jur_evasind..rtf.htm).
14. S. A. Babanov, *Vrach skoroy pomoshchi*, No. 10, 59–65 (2012) [in Russian].
15. V. A. Klebanova, *Gigiyena i sanitariya*, No. 1, 35–38 (1995) [in Russian].
16. O. M. Girina, T. G. Lemzyakova, V.M. Rudichenko, *Ukraíns'kiy meditsichniy chasopis*, No. 2 (10), 77–81 (1999) [in Ukrainian].
17. V. M. Frolov, A. M. Petrunya. *Vestnik oftal'mologii*, **119**, No 2, 45–47, (2003) [in Russian].
18. E. E. Fomicheva, T. A. Filatenkova, Ye. G. Rybakina, *Rossiyskiy fiziologicheskij zhurnal im. I.M. Sechenova*. **95**, No 1, 11–18 (2009) [in Russian].

Поступила в редакцию 29.06.2017 г. Принята к публикации 26.11.2017 г.  
Received June 29, 2017. Accepted for publication November 26, 2017

## СОДЕРЖАНИЕ

### ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

1. **Функция распределения для замкнутой нуль-струны с осевой симметрией, радиально увеличивающей свой размер**  
Бабаджан Р.-Д. А., Леяков А. П. ..... 5
2. **Fractional optical vortices: stability decay and transformation**  
*Volyar A. V., Alexeyev C. N., Egorov Yu. A., Akimova. Ya. E.* ..... 19
3. **Анализ свойств поля излучения после мультиплексирования пучков лаггерра-гаусса в маломодовом волокне**  
*Ильясова А. А., Халилов С. И., Рыбась А. Ф.* ..... 45
4. **Индикация плазмон-поляритонных вихрей с помощью нанозонда**  
*Горишний В. А., Перескоков В. С., Дзедолик И. В.* ..... 55
5. **Численное исследование параметров резонаторного измерительного преобразователя с диэлектрическим концентратором**  
*Полетаев Д. А., Соколенко Б. В.* ..... 66
6. **Сужение линии ЯМР в системах с внутренней молекулярной подвижностью**  
*Рябушкин Д. С.* ..... 72
7. **Анализ межсионных взаимодействий в кристалле FeVO<sub>3</sub>**  
*Яценко А. А., Синани Г. А., Яценко А. В.* ..... 78

### БИОФИЗИКА И МЕДИЦИНСКАЯ ФИЗИКА

8. **Медико-биологические и психосоматические аспекты синдрома хронической усталости у студентов медицинского ВУЗа**  
*Карпович А. В., Григорьев П. Е., Лускова Ю. С.* ..... 85
- СОДЕРЖАНИЕ** ..... 95



## TABLE OF CONTENTS

### PHYSICS AND MATHEMATICS

1. **Function of distribution for closed null strings with axial symmetry radially increasing its size**  
Babadzhan R.-D. A., Lelyakov A. P. .... 5
2. **Fractional optical vortices : stability decay and transformation**  
Volyar A. V., Alexeyev C. N., Egorov Yu. A., Akimova. Ya. E. .... 19
3. **Analysis of the properties of radiation field after multiplexing the Laguer-Gauss beams into a low-mode optical fiber**  
Ilyasova A. A., Halilov S. I., Rubass A. F. .... 45
4. **Indication of plasmon polariton vortices by nanoprobe**  
Gorishniy V. A., Pereskokov V. S., Dzedolik I. V. .... 55
5. **Modeling parameters of resonator measuring converter with dielectric concentrator**  
Poletaev D. A., Sokolenko B. V. .... 66
6. **NMR line narrowing in systems with interior molecular mobility**  
Ryabushkin D. S. .... 72
7. **Analysis of the interionic interactions in FeBO<sub>3</sub> crystal**  
Yatsenko A. A., Sinani G. A., Yatsenko A. V. .... 78

### BIOPHYSICS AND MEDICAL PHYSICS

8. **Medical-biological and psychosomatic aspects of the chronic fatigue syndrome in students of the medical high school**  
Karpovich A. V., Grigoriev P. E., Luskova Yu. S. .... 85
- TABLE OF CONTENTS ..... 96

Научное периодическое издание, журнал  
Scientific periodical, journal

**Вестник Физико-технического института Крымского  
федерального университета имени В. И. Вернадского**  
**Journal of Physics and Technology Institute**  
**of V. I. Vernadsky Crimean Federal University**

**Том 1 (67–69), № 2**  
**Volume 1 (67–69), No. 2**

**Редакция:**

д-р физ.-мат. наук, проф. Бержанский В. Н. – главный редактор  
канд. физ.-мат. наук, доц. Глумова М. В. – заместитель главного редактора  
канд. физ.-мат. наук Михайлова Т. В. – ответственный секретарь  
Осокин К. С. – технический редактор, корректор

**Компьютерная верстка – Осокин К. С., Михайлова Т. В.**

**Печатается по решению Научно-технического совета Крымского федерального  
университета имени В. И. Вернадского, протокол № 3 от «03» октября 2018 г.**

---

Подписано в печать 03.10.2018. Формат 70×100/16.  
7,88 усл. п. л. 4,33 уч.-изд. л. Тираж 50 экз. Заказ № НП/241.  
Отпечатано в управлении редакционно-издательской деятельности  
ФГАОУ ВО «КФУ им. В. И. Вернадского»  
295051, г. Симферополь, бул. Ленина, 5/7

---

**Адрес редакции:** 295007, Республика Крым, г. Симферополь,  
пр-т Академика Вернадского, д. 4  
**E-mail:** [journal.phys.tech@cfuv.ru](mailto:journal.phys.tech@cfuv.ru)  
**Web-site:** <http://jphystech.cfuv.ru/>  
**Тел.:** +7 (3652) 51-70-95