

УДК 535.137

## ЛИНЕЙНЫЕ И НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЫ ПОЛОСКОВОГО ВОЛНОВОДА

Перескоков В. С., Дзедолик И. В.\*

Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени  
В.И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия  
\*E-mail: [igor.dzedolik@cfuv.ru](mailto:igor.dzedolik@cfuv.ru)

Теоретически исследованы линейные и нелинейные плазмон-поляритонные моды металлического полоскового волновода, расположенного на диэлектрической подложке. Рассмотрены непрерывный и импульсный режимы.

**Ключевые слова:** полосковый волновод, плазмон-поляритонные линейные и нелинейные моды, плазмон-поляритонный импульс.

**PACS:** 73.20.Mf

### ВВЕДЕНИЕ

Плазмон-поляритоны (ПП) привлекают внимание исследователей в связи с задачами передачи сигналов и управления электромагнитными полями оптических частот в ПП-устройствах, создания оптических процессоров, спазеров, других устройств и элементов плазмонной техники [1–7]. Сигналы в ПП-устройствах передаются между элементами плазмонной цепи по полосковым волноводам, расположенным на диэлектрической подложке и окруженным диэлектрической средой [8–12].

Цель работы – теоретически исследовать процесс генерации мод ПП в металлическом полосковом волноводе при непрерывном и импульсном возбуждении в оптическом диапазоне в линейном и нелинейном режимах и сравнить их свойства. Анализ свойств линейных и нелинейных мод полоскового волновода позволит выбрать требуемые режимы работы ПП-элементов.

### 1. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЫ ПОЛОСКОВОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим формирование линейных ПП мод в металлическом полосковом волноводе с размерами поперечного сечения  $2a \times 2b$  с диэлектрической и магнитной проницаемостями  $\epsilon_1, \mu_1$ , расположенного на подложке с параметрами  $\epsilon_3, \mu_3$ , и окруженного с трех сторон средой с параметрами  $\epsilon_2, \mu_2$ , (рис. 1). Полосковый волновод в рассматриваемом случае симметричен относительно оси  $x$ , но асимметричен относительно оси  $y$  из-за разных диэлектрической и магнитной проницаемостей сред 2 и 3. Диэлектрическая проницаемость металла на оптических частотах является комплексной величиной с отрицательной действительной частью  $\epsilon_M = -\epsilon'_M + i\epsilon''_M$ . Поэтому постоянные распространения мод плазмон-поляритонов  $\beta = \beta' + i\beta''$  также будут комплексными величинами. Их мнимые части

характеризуют затухание ПП вдоль оси  $z$ , т.е. определяют длину распространения ПП в металлическом слое  $L = 1/2\beta''$  [4].

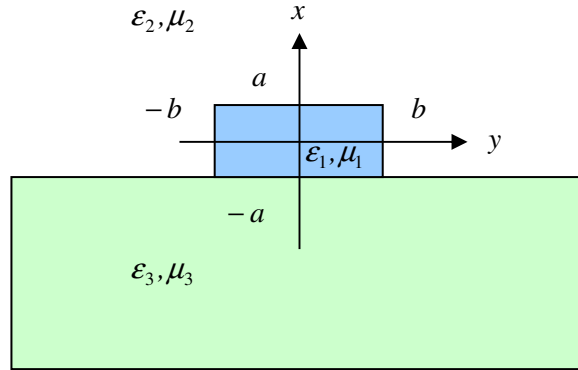


Рис. 1. Полосковый волновод на диэлектрической подложке

Диэлектрические проницаемости сред имеют вид [6]:

$$\varepsilon_M(\omega) = 1 + \frac{\omega_{IM}^2}{\Omega_{\perp M}^2 - \omega^2 - i\Gamma_M \omega} - \frac{\omega_{eM}^2}{\omega^2 + i\omega_M \omega}$$

в металле, и

$$\varepsilon_D(\omega) = 1 + \frac{\omega_{ID}^2}{\Omega_{\perp D}^2 - \omega^2 - i\Gamma_D \omega} + \frac{\omega_{eD}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\Gamma_D \omega}$$

в диэлектрической среде, где  $\omega_0$  –

электронная резонансная частота,  $\Omega_{\perp}$  – резонансная частота кристаллической решетки,  $\omega_l^2 = 4\pi e^2 N_l / m_l$  – ионная плазменная частота,  $\omega_e^2 = 4\pi e^2 N_e / m_e$  – электронная плазменная частота,  $\omega_M, \Gamma_M, \Gamma_D$  – частоты релаксации в металле и диэлектрике.

Компоненты электрического и магнитного векторов ПП удовлетворяют уравнениям Максвелла  $\nabla \times \mathbf{H} = c^{-1} \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -c^{-1} \mu \partial \mathbf{H} / \partial t$ . Выражения для поперечных компонент поля ПП  $E_x, E_y$  и  $H_x, H_y$ , пропорциональных  $\sim \exp(i\beta z - i\omega t)$ , в средах 1, 2 и 3 имеют вид (Приложение А)

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i}{q_m^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_0 \mu_m \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), & H_x &= -\frac{i}{q_m^2} \left( k_0 \varepsilon_m \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ E_y &= \frac{i}{q_m^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - k_0 \mu_m \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & H_y &= \frac{i}{q_m^2} \left( k_0 \varepsilon_m \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $q_m^2 = k_0^2 \varepsilon_j \mu_j - \beta^2$ ,  $m = 1, 2, 3$ . Продольные компоненты поля ПП  $E_z$  и  $H_z$  удовлетворяют уравнению

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + q_m^2 \right) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (2)$$

Граничные условия для тангенциальных компонент поля ПП должны выполняться во всех точках верхней и нижней, правой и левой границ полоскового волновода, в том числе, в точках  $x = \pm a$ ,  $y = 0$ , и  $x = 0$ ,  $y = \pm b$  (рис. 1). В областях 2 и 3 компоненты полей должны убывать при удалении от границ волновода, поэтому представим продольные компоненты в области 2 в виде  $E_{2z} = A_2 \exp(-\alpha_2 x)$ ,  $H_{2z} = B_2 \exp(-\alpha_2 x)$  при  $x \geq a$ , и  $E_{3z} = A_3 \exp(\alpha_3 x)$ ,  $H_{3z} = B_3 \exp(\alpha_3 x)$  при  $x \leq -a$ ;  $E_{2z} = A_2 \exp(-\alpha_2 y)$ ,  $H_{2z} = B_2 \exp(-\alpha_2 y)$  при  $y \geq b$ , и  $E_{2z} = A_2 \exp(\alpha_2 y)$ ,  $H_{2z} = B_2 \exp(\alpha_2 y)$  при  $y \leq -b$ . Для выполнения граничных условий во всех точках границ выбираем четное решение уравнений (2) для продольных компонент мод (Приложение А)

$$\begin{aligned} E_z &= A_1 \cos(\kappa x) \cos(\gamma y), \\ H_z &= B_1 \cos(\kappa x) \cos(\gamma y), \end{aligned} \quad (3)$$

тогда поперечные компоненты мод (1) будут иметь вид

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{i}{q_1^2} \{ \beta \kappa A_1 \sin(\kappa x) \cos(\gamma y) + k_0 \mu_1 B_1 \cos(\kappa x) \sin(\gamma y) \}, \\ E_y &= -\frac{i}{q_1^2} \{ \beta \gamma A_1 \cos(\kappa x) \sin(\gamma y) - k_0 \kappa \mu_1 B_1 \sin(\kappa x) \cos(\gamma y) \}, \\ H_x &= \frac{i}{q_1^2} \{ k_0 \gamma \epsilon_1 A_1 \cos(\kappa x) \sin(\gamma y) - \beta \kappa B_1 \sin(\kappa x) \cos(\gamma y) \}, \\ H_y &= -\frac{i}{q_1^2} \{ k_0 \kappa \epsilon_1 A_1 \sin(\kappa x) \cos(\gamma y) + \beta \gamma B_1 \cos(\kappa x) \sin(\gamma y) \}, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\kappa^2 + \gamma^2 = q_1^2$ .

Характеристические уравнения для поперечных компонент волновых векторов  $\kappa$  и  $\gamma$  четных мод получаем из граничных условий на стенках волновода (Приложение А)

$$\frac{\cos(\kappa a)}{\cos(\gamma b)} = \exp[\alpha_2(b-a)], \quad (5)$$

$$\frac{\mu_2 \alpha_2 q_3^2}{\mu_3 \alpha_3 q_2^2} = \exp[(\alpha_2 - \alpha_3)a]. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) нужно дополнить характеристическими уравнениями, полученными из уравнений (2) в волноводе

$$k_0^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 - \gamma^2 - \beta^2 = 0, \quad (7)$$

и в областях 2 и 3

$$k_0^2 \varepsilon_2 \mu_2 + \alpha_2^2 - \beta^2 = 0, \quad (8)$$

$$k_0^2 \varepsilon_3 \mu_3 + \alpha_3^2 - \beta^2 = 0. \quad (9)$$

Постоянную распространения моды в волноводе найдем из уравнения (7)  $\beta = (k_0^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 - \gamma^2)^{1/2}$ . Исключая постоянную распространения  $\beta$  из уравнений (8) и (9), получаем поперечные декременты волновых векторов в областях 2 и 3

$$\alpha_2 = [k_0^2 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2) - \kappa^2 - \gamma^2]^{1/2}, \quad (10)$$

$$\alpha_3 = [k_0^2 (\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_3 \mu_3) - \kappa^2 - \gamma^2]^{1/2}. \quad (11)$$

Решения системы уравнений (7)–(11) определяют значения компонент волновых векторов мод  $\kappa$ ,  $\gamma$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  и  $\beta$  соответствующей моды. Волноводная мода исчезает при равенстве нулю постоянной распространения  $\beta = (k_0^2 \varepsilon_1 \mu_1 - \kappa^2 - \gamma^2)^{1/2} = 0$ , то есть при  $q_1 = k_0 (\varepsilon_1 \mu_1)^{1/2}$ , откуда находим частоту отсечки моды  $\omega_c = cq (\varepsilon_1 \mu_1)^{-1/2}$ , где  $q_1 = (\kappa^2 + \gamma^2)^{1/2}$ .

## 2. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЫ ПОЛОСКОВОГО ВОЛНОВОДА

Рассмотрим формирование нелинейных мод плазмон-поляритонов в полосковом волноводе (рис. 1). Уравнение для электрического вектора, полученное из уравнений Максвелла, имеет вид  $\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) + k_0^2 \mu \varepsilon \mathbf{E} = 0$ , где  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_m + 4\pi \chi_{(3)} (E_x^* E_x + E_y^* E_y + E_z^* E_z)$  – нелинейная диэлектрическая проницаемость сред 1, 2 и 3,  $\chi_{(3)}$  – диэлектрическая восприимчивость третьего порядка,  $\mu \rightarrow \mu_m$ ,  $\mathbf{E} \sim \exp(-i\omega t)$ . Полагаем, что диэлектрическая проницаемость волновода если изменяется, то плавно, на расстояниях порядка половины длины волны плазмон-поляритонов, то есть  $\nabla \ln \varepsilon \approx 0$ . Тогда из теоремы Гаусса для электрического вектора  $\nabla(\varepsilon \mathbf{E}) = (\nabla \varepsilon) \mathbf{E} + \varepsilon \nabla \mathbf{E} = 0$  находим, что  $\nabla \mathbf{E} = -(\nabla \ln \varepsilon) \mathbf{E} \approx 0$ . В этом случае уравнение для электрического вектора можно представить в виде системы уравнений для его компонент.

Представляя решения системы уравнений для полоскового волновода в форме мод с медленно меняющимися амплитудами [6, 13–16]

$$E_j = \frac{1}{4} \tilde{E}_j(z) (e^{i\kappa x} + e^{-i\kappa x}) (e^{i\gamma y} + e^{-i\gamma y}) \exp(i\beta z), \text{ где } \tilde{E}_j(z) \text{ – действительные амплитуды.}$$

Пренебрегая несинхронными пространственными гармониками  $\sim e^{\pm i2\kappa x}$  и  $e^{\pm i2\gamma y}$  в

слагаемых  $E_j^* E_j = \frac{1}{16} \tilde{E}_j^2 (2 + e^{i2kx} + e^{-i2kx}) (2 + e^{i2y} + e^{-i2y})$ , получаем систему уравнений для амплитуд мод (Приложение Б)

$$\frac{d^2 E_j}{dz^2} + i2\beta \frac{dE_j}{dz} + \bar{K}^2 E_j + \frac{1}{4} k_0^2 \bar{\chi} E_j \sum_{j'=x,y,z} E_{j'}^2 = 0, \quad (12)$$

где  $\bar{K}^2 = k^2 - \kappa^2 - \gamma^2 - \beta^2$ ,  $k^2 = k_0^2 \mu_1 \varepsilon_1$ ,  $\bar{\chi} = 4\pi\mu_1 \chi_{(3)}$ ,  $j = x, y, z$ .

Систему уравнений (12) можно представить в виде одного уравнения для величины  $I = \sum_{j=x,y,z} \tilde{E}_j^2$ , пропорциональной плотности энергии поля ПП. Умножая уравнения системы (12) на соответствующие амплитуды компонент полей  $\tilde{E}_j$  и складывая, получаем уравнение для непрерывного возбуждения волновода

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 I}{dz^2} + i\beta \frac{dI}{dz} + \bar{K}^2 I + \frac{1}{4} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = f_1(z), \quad (13)$$

где  $f_1(z) = \sum_{j=x,y,z} (d\tilde{E}_j/dz)^2$ . Учитывая, что в уравнении (13)

$k^2 = k_0^2 \mu (\varepsilon'_{(1)} + i\varepsilon''_{(1)}) \equiv k'^2 + ik''^2$  – комплексная величина, можно разделить его действительную и мнимую части

$$\frac{d^2 I}{dz^2} + 2\bar{K}^2 I + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 2f(z), \quad (14)$$

$$\beta \frac{dI}{dz} + \bar{K}^2 I = 0. \quad (15)$$

Решение линейного уравнения (15)  $I = I_0 \exp(-\bar{K}^2 z)$  характеризует диссипацию энергии при распространении ПП вдоль оси волновода. Аналитическое решение нелинейного уравнения (14) имеет форму кноидальных волн – периодических нелинейных волн, если учесть медленность изменения амплитуд и пренебречь правой частью, полагая  $(d\tilde{E}_j/dz)^2 \rightarrow 0$ , (Приложение В)

$$I = \tilde{a} cn^2(\Phi, \tilde{k}) + \tilde{b} sn^2(\Phi, \tilde{k}), \quad (16)$$

где  $\Phi = \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{k_0^2 \bar{\chi}}{3}} z \right)$ ,  $\tilde{k} = \sqrt{\frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a} - \tilde{c}}}$  – модуль эллиптического интеграла

первого рода  $F(\varphi, \tilde{k})$ , постоянные  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$  определяются из уравнений  $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = 3p^2/k_0^2\bar{\chi}$ ,  $\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{a}\tilde{c} = 0$ ,  $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = -6\bar{K}^2/k_0^2\bar{\chi}$ ,

$$p^2 = \left( \frac{dI}{dz} \right)_0^2 + 2\bar{K}^2 I_0^2 + \frac{1}{3} k_0^2 \bar{\chi} I_0^3, \quad \varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) \Big|_a^I. \quad (16)$$

представлен на рис. 2.

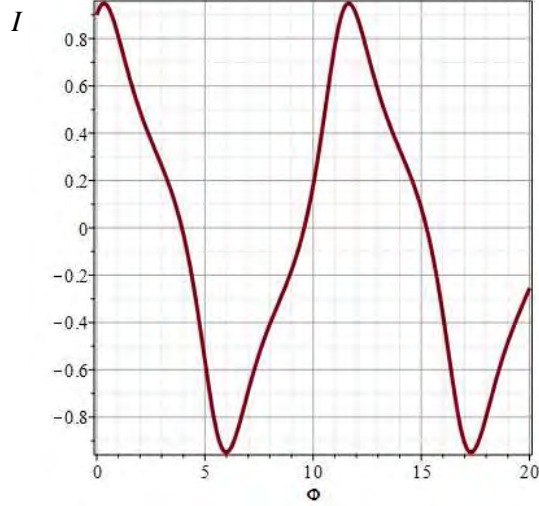


Рис. 2. Кноидальная волна  $I(\Phi)$  плазмон-поляритонов в полосковом волноводе (все величины нормированные,  $\tilde{a} = 0.9, \tilde{b} = 0.3, \tilde{k} = 0.97$ )

При  $\tilde{b} \cong \tilde{c}$  модуль  $\tilde{k} \rightarrow 1$ ,  $cn^2(\Phi, \tilde{k}) \rightarrow \cosh^{-2}(\Phi)$ ,  $sn^2(\Phi, \tilde{k}) \rightarrow \tanh^2(\Phi)$ , и плотность энергии определяется соотношением

$$I = (\tilde{a} - \tilde{b}) \cosh^{-2}(\Phi) + \tilde{b}. \quad (17)$$

Из выражения (17) следует, что этом частном случае соотношения параметров волновода плотность энергии плазмон-поляритонов убывает вдоль оси волновода  $z$  пропорционально  $\sim \cosh^{-2}(\Phi)$  даже без учета диссипации.

Из сравнения выражений для линейной моды ПП  $I_L = \sum_{j=x,y,z} E_j^2 \sim \exp(i2\beta z)$  (выражения (4)–(5)) и для нелинейной моды  $I_{NL} = \sum_{j=x,y,z} \tilde{E}_j^2 \sim cn(\Phi) + sn(\Phi)$

(выражение (16)) следует, что в нелинейном режиме происходят ангармонические пульсации плотности энергии ПП вдоль оси волновода (рис. 2) в отличие от гармонического изменения плотности энергии в линейном режиме. Период пульсаций плотности энергии ПП  $\sim I_{NL}$  зависит от величины диэлектрической восприимчивости  $\chi_{(3)}$  волновода. Этот эффект аналогичен возбуждению и трансформации нелинейных мод в оптическом волокне [15, 16].

### 3. ИМПУЛЬСЫ В НЕЛИНЕЙНОМ ПОЛОСКОВОМ ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим динамику импульса ПП в нелинейном полосковом волноводе. При распространении импульсов в нелинейном полосковом волноводе необходимо учитывать нелинейный отклик среды  $\varepsilon(t)$ , зависящий от времени [6]. Распространение импульсов в полосковом волноводе с учетом нелинейных эффектов может быть описано с помощью уравнения для электрического вектора

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon \mu \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \text{ где } \varepsilon \rightarrow \varepsilon_m + \bar{\chi} I(t) \text{ неявно зависит от времен через медленно}$$

меняющиеся во времени амплитуды  $\tilde{E}_j(t, z)$  компонент электрического вектора

$$E_j = \frac{1}{4} \tilde{E}_j(t, z) (e^{ix} + e^{-ix}) (e^{iy} + e^{-iy}) \exp(i\beta z - i\omega t).$$

Из лабораторной системы отсчета перейдем в подвижную систему отсчета с помощью введения «смещенного времени»  $\tau = t - z/v$ , где  $v = d\omega/dk = \text{const}$  – скорость импульса. Скорость импульса определим как

$$v = (dk/d\omega)^{-1} = c \left[ \sqrt{\mu \varepsilon'_{(1)}} (1 + d \ln \varepsilon'_{(1)} / 2d\omega) \right]^{-1}. \text{ Тогда получаем уравнение для}$$

импульсного возбуждения волновода (Приложение Г)

$$(1 - a_1 I) \frac{d^2 I}{d\tau^2} - a_2 \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 - a_3 \frac{dI}{d\tau} + a_4 I + a_5 I^2 = 2\bar{f}'_2, \quad (18)$$

$$\text{где } a_1 = \frac{3k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad a_2 = \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega^2} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad a_3 = \frac{2k_0^2 \varepsilon''_{(1)}}{\omega} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1},$$

$$a_4 = 2\bar{K}^2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad a_5 = \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1}, \quad \bar{f}'_2 = f'_2 \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right)^{-1}. \text{ Вблизи}$$

вершины импульса при  $d\tilde{E}_j/d\tau \rightarrow 0$  из (18) получаем уравнение с насыщением нелинейности для плотности энергии импульса

$$\frac{d^2 I}{d\tau^2} = \frac{a_4 I + a_5 I^2}{a_1 I - 1}. \quad (19)$$

В частном случае, при соотношении параметров импульса и волновода  $\ln|a_1 I - 1| \ll b_1^{-1} b_2 (a_1 I - 1)^2$ , решение уравнения (19) имеет вид (Приложение Д)

$$I = \frac{(4b_2 G_0 - b_3^2)^{1/2}}{2a_1 b_2} \sinh(a_1 \sqrt{b_2} \tau + \tau_0) + \frac{2b_2 - b_3}{2a_1 b_2}, \quad (20)$$

где  $G_0 = \left(\frac{dI}{d\tau}\right)_0^2 - b_1 \ln|a_1 I_0 - 1| - b_2 (a_1 I_0 - 1)^2 - 2b_3 (a_1 I_0 - 1)$ ,  $b_1 = 2\left(\frac{a_4}{a_1^2} + \frac{a_5}{a_1^3}\right)$ ,  $b_2 = \frac{a_5}{a_1^3}$ ,

$b_3 = 2\left(\frac{a_4}{a_1^2} + \frac{2a_5}{a_1^3}\right)$ ,  $\tau_0 = \operatorname{ar sinh} \frac{2b_2(a_1 I_0 - 1) + b_3}{(4b_2 G_0 - b_3^2)^{1/2}}$ . Анализ решения (20) показывает, что

импульс, поданный на вход в нелинейный полосковый волновод, возбуждает ударную волну, распространяющуюся по волноводу (рис. 3).

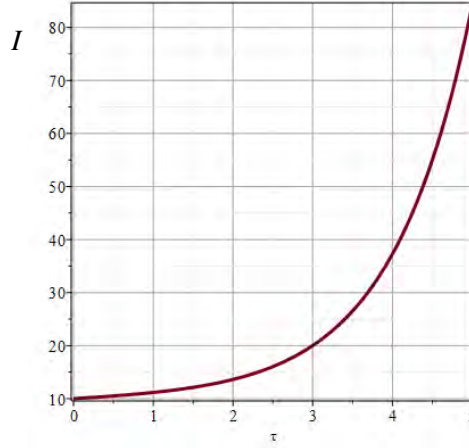


Рис. 3. Ударная волна  $I(\tau)$ , возбужденная импульсом в полосковом волноводе (все величины нормированные)

Если плотность энергии плазмон-поляритонного импульса не слишком велика  $a_1 I \ll 1$ , и насыщения нелинейности не возникает, то вблизи вершины импульса уравнение (18) можно представить в виде

$$\frac{d^2 I}{d\tau^2} + a_4 I + a_5 I^2 = 0. \quad (21)$$

Решение уравнения (21) имеет вид (Приложение Е)

$$I = \tilde{a} c n^2(\Phi, \tilde{k}) + \tilde{b} s n^2(\Phi, \tilde{k}), \quad (22)$$

где  $\Phi = \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{2a_5}{3}} \tau \right)$ ,  $\tilde{k} = \sqrt{\frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a} - \tilde{c}}}$ ,  $\tilde{a} \tilde{b} \tilde{c} = 3\xi^2 / 2a_5$ ,  $\tilde{a} \tilde{b} + \tilde{b} \tilde{c} + \tilde{a} \tilde{c} = 0$ ,

$\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = -3a_4 / 2a_5$ ,  $\xi^2 = \left(\frac{dI}{dz}\right)_0^2 + a_4 I_0^2 + \frac{2a_5}{3} I_0^3$ ,  $\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) \Big|_{\tilde{a}}^{I_0}$ . Из

выражения (22) следует, что импульс, поданный на вход волновода, в общем случае не сохраняет свою форму, но возбуждает в волноводе нелинейные волны.



При соотношении параметров  $\tilde{b} \cong \tilde{c}$ ,  $\tilde{k} \rightarrow 1$ , ПП импульс распространяется в нелинейном полосковом волноводе в форме солитона с пьедесталом (рис. 4)

$$I = (\tilde{a} - \tilde{b}) \cosh^{-2}(\Phi) + \tilde{b}. \quad (23)$$

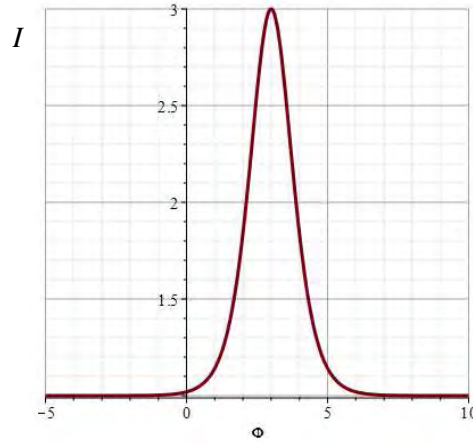


Рис. 4. Плазмон-поляритонный импульс  $I(\Phi)$  в полосковом волноводе (все величины нормированные,  $\tilde{a} = 3, \tilde{b} = 1$ )

Для реализации режима распространения солитонного импульса параметры импульса и волновода должны удовлетворять уравнениям  $\tilde{a}\tilde{b}^2 = 3\xi^2/2a_5$ ,  $\tilde{a} + 2\tilde{b} = -3a_4/2a_5$ . Тогда  $\tilde{a} = -2\tilde{b} - 3a_4/2a_5$ , а  $\tilde{b}$  определяется действительными решениями кубического уравнением

$$\tilde{b}^3 + (3a_4/4a_5)\tilde{b}^2 + 3\xi^2/4a_5 = 0. \quad (24)$$

Набор корней уравнения (24) имеет вид  $\tilde{b}_1 = A_1 + A_2$ ,  $\tilde{b}_{2,3} = -\left[ (1 \pm i\sqrt{3})A_1 + (1 \mp i\sqrt{3})A_2 \right] / 2$ , где  $A_{1,2} = \left( -q/2 \pm \sqrt{Q} \right)^{1/3}$ ,  $q = 2(3a_4/4a_5)^3/27 + 3\xi^2/4a_5$ ,  $p = -(3a_4/4a_5)^2/3$ ,  $Q = p^3/27 + q^2/4$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Линейные моды полоскового волновода распространяются в форме гармонических волн. При этом поперечная структура линейных мод описывается произведением синусов и косинусов с числом максимумов и минимумов, зависящим от поперечных размеров, диэлектрической и магнитной проницаемостей волновода.

Нелинейные моды полоскового волновода распространяются в форме кноидальных волн, период которых зависит от нелинейной диэлектрической восприимчивости третьего порядка среды волновода. При этом поперечная структура нелинейных мод может быть аппроксимирована произведением гармонических функций, если плотность энергии поля ПП не слишком велика, и нет необходимости учитывать нелинейные эффекты в поперечном поле мод, что обычно реализуется на практике.

Импульсное возбуждение полоскового волновода приводит к возникновению в нем кноидальных волн ПП, либо солитонного импульса с пьедесталом, что зависит от соотношения параметров возбуждающего импульса и волновода.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ А

Уравнения Максвелла  $\nabla \times \mathbf{H} = c^{-1} \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t$ ,  $\nabla \times \mathbf{E} = -c^{-1} \mu \partial \mathbf{H} / \partial t$  для линейных мод волновода  $\sim \exp(i\beta z - i\omega t)$  имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y &= -i \frac{\omega \varepsilon}{c} E_x, & \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y &= i \frac{\omega \mu}{c} H_x, \\ -\frac{\partial H_z}{\partial x} + i\beta H_x &= -i \frac{\omega \varepsilon}{c} E_y, & -\frac{\partial E_z}{\partial x} + i\beta E_x &= i \frac{\omega \mu}{c} H_y, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= -i \frac{\omega \varepsilon}{c} E_z, & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= i \frac{\omega \mu}{c} H_z. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Из системы уравнений (A.1) получаем выражения для поперечных компонент поля ПП  $E_x, E_y$  и  $H_x, H_y$ ,

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{i}{q^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + k_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), & H_x &= -\frac{i}{q^2} \left( k_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), \\ E_y &= \frac{i}{q^2} \left( \beta \frac{\partial E_z}{\partial y} - k_0 \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right), & H_y &= \frac{i}{q^2} \left( k_0 \varepsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

где  $q^2 = k_0^2 \varepsilon \mu - \beta^2$ . Для продольных компонент поля  $E_z$  и  $H_z$  получаем уравнения второго порядка

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + q^2 \right) \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (\text{A.3})$$

В волноводе решения для продольных компонент  $\{E_z, H_z\} \rightarrow \psi(x, y)$  представим в факторизованной форме  $\psi(x, y) = X(x)Y(y)$ . Тогда из уравнения

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + q^2 \right) \psi = 0 \text{ получаем два уравнения } \frac{d^2 X}{dx^2} + \kappa^2 X = 0 \text{ и } \frac{d^2 Y}{dy^2} + \gamma^2 Y = 0,$$

где  $\kappa^2 + \gamma^2 = q^2$ . Общие решения этих уравнений имеют вид

$$\begin{aligned} X &= A_1 \sin(\kappa x) + B_1 \cos(\kappa x), \\ Y &= A_2 \sin(\gamma y) + B_2 \cos(\gamma y). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Представим частные решения  $\psi$  для продольных компонент поля в волноводе в виде

$$\psi_{SS}(x, y) = A \sin(\kappa x) \sin(\gamma y), \quad (\text{A.5})$$

$$\psi_{SC}(x, y) = A \sin(\kappa x) \cos(\gamma y), \quad (\text{A.6})$$

$$\psi_{CS}(x, y) = A \cos(\kappa x) \sin(\gamma y), \quad (\text{A.7})$$

$$\psi_{CC}(x, y) = A \cos(\kappa x) \cos(\gamma y). \quad (\text{A.8})$$

Приравнивая соответствующие компоненты полей мод на верхней границе, а также на нижней границе волновода, и соответствующих областей, получаем уравнения для амплитуд полей. Приравнивая компоненты полей  $E_z$  на границах волновода: в точке  $x = a, y = 0$ ,  $A_1 \cos(\kappa a) = A_2 \exp(-\alpha_2 a)$ , и в точке  $x = 0, y = b$ ,  $A_1 \cos(\gamma b) = A_2 \exp(-\alpha_2 b)$ , получаем характеристическое уравнение для поперечных компонент волновых векторов четной моды

$$\frac{\cos(\kappa a)}{\cos(\gamma b)} = \exp[\alpha_2(b - a)]. \quad (\text{A.9})$$

Приравнивая компоненты полей на границах:  $E_y$  в точке  $x = a, y = 0$ ,  $\mu_1 \frac{\kappa}{q_1^2} B_1 \sin(\kappa a) = \mu_2 \frac{\alpha_2}{q_2^2} B_2 \exp(-\alpha_2 a)$ , и  $E_y$  в точке  $x = -a, y = 0$ ,  $\mu_1 \frac{\kappa}{q_1^2} B_1 \sin(\kappa a) = \mu_3 \frac{\alpha_3}{q_3^2} B_2 \exp(-\alpha_3 a)$ , получаем характеристическое уравнение

$$\frac{\mu_2 \alpha_2 q_3^2}{\mu_3 \alpha_3 q_2^2} = \exp[(\alpha_2 - \alpha_3)a]. \quad (\text{A.10})$$

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Векторное уравнение  $\nabla^2 \mathbf{E} - \nabla(\nabla \mathbf{E}) + k_0^2 \mu \epsilon \mathbf{E} = 0$  представим в виде системы уравнений

$$\frac{\partial^2 E_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_j}{\partial z^2} + \left( k^2 + k_0^2 \bar{\chi} \sum_{j'=x,y,z} E_{j'}^* E_{j'} \right) E_j = 0, \quad (\text{Б.1})$$

где  $k^2 = k_0^2 \mu \epsilon_{(1)}$ ,  $\bar{\chi} = 4\pi\mu\chi_{(3)}$ ,  $j = x, y, z$ . Решения системы уравнений (Б.1) для полоскового волновода в форме мод с медленно меняющимися амплитудами  $E_j = \frac{1}{4} \tilde{E}_j(z) (e^{ikx} + e^{-ikx}) (e^{i\gamma y} + e^{-i\gamma y}) \exp(i\beta z)$ , где  $\tilde{E}_j(z)$  – действительные амплитуды.

Тогда, пренебрегая несинхронными пространственными гармониками  $\sim e^{\pm i2kx}$ ,  $e^{\pm i2\gamma y}$  в слагаемых  $E_j^* E_j = \frac{1}{16} \tilde{E}_j^2 (2 + e^{i2kx} + e^{-i2kx}) (2 + e^{i2\gamma y} + e^{-i2\gamma y})$ , из (Б.1) получаем систему уравнений для амплитуд мод

$$\frac{d^2 \tilde{E}_j}{dz^2} + i2\beta \frac{d\tilde{E}_j}{dz} + \bar{K}^2 \tilde{E}_j + \frac{1}{4} k_0^2 \bar{\chi} \tilde{E}_j \sum_{j'=x,y,z} \tilde{E}_{j'}^2 = 0, \quad (\text{Б.2})$$

где  $\bar{K}^2 = k^2 - \kappa^2 - \gamma^2 - \beta^2$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ В

Представим уравнение (14)  $\frac{d^2 I}{dz^2} + 2\bar{K}^2 I + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 0$  в форме

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dz} \left( \frac{dI}{dz} \right)^2 + \left( 2\bar{K}^2 I + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 \right) \frac{dI}{dz} = 0, \quad \text{и} \quad \text{проинтегрируем} \quad \text{его}$$

$$\int_{I_0}^I d \left( \frac{dI}{dz} \right)^2 = - \int_{I_0}^I \left( 4\bar{K}^2 I + k_0^2 \bar{\chi} I^2 \right) dI, \quad \text{находим} \quad \text{первый} \quad \text{интеграл}$$

$$\left( \frac{dI}{dz} \right)^2 - \left( \frac{dI}{dz} \right)_0^2 = -2\bar{K}^2 I^2 - \frac{1}{3} k_0^2 \bar{\chi} I^3 + 2\bar{K}^2 I_0^2 + \frac{1}{3} k_0^2 \bar{\chi} I_0^3. \quad \text{Второй интеграл уравнения}$$

ищем в виде эллиптического интеграла  $\int_{I_0}^I \frac{dI}{\left( p^2 - 2\bar{K}^2 I^2 - k_0^2 \bar{\chi} I^3 / 3 \right)^{1/2}} = z$ , где

$$p^2 = \left( \frac{dI}{dz} \right)_0^2 + 2\bar{K}^2 I_0^2 + \frac{1}{3} k_0^2 \bar{\chi} I_0^3. \quad \text{Представим эллиптический интеграл в виде}$$

$$\int_{\tilde{a}}^I \frac{dI}{\left[ (\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I) \right]^{1/2}} - \int_{\tilde{a}}^{I_0} \frac{dI}{\left[ (\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I) \right]^{1/2}} = -\sqrt{\frac{k_0^2 \bar{\chi}}{3}} z,$$

где  $(\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I) = 3p^2 / k_0^2 \bar{\chi} - 6\bar{K}^2 I^2 / k_0^2 \bar{\chi} - I^3$ , а постоянные  $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$  определяются из уравнений  $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = 3p^2 / k_0^2 \bar{\chi}$ ,  $\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{a}\tilde{c} = 0$ ,

$\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = -6\bar{K}^2 / k_0^2 \bar{\chi}$ . Интегрируя, получаем  $\frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) = \varphi_0 - \sqrt{\frac{k_0^2 \bar{\chi}}{3}} z$ , где

$F(\varphi, \tilde{k})$  – эллиптический интеграл первого рода,  $\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\tilde{a} - I}{\tilde{a} - \tilde{b}}}$ ,  $\tilde{k} = \sqrt{\frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a} - \tilde{c}}}$

модуль эллиптического интеграла,  $\tilde{a} > x > \tilde{b} > \tilde{c}$ ,

$\varphi_0 = \int_{\tilde{a}}^{I_0} \frac{dI}{[(\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I)]^{1/2}} = \frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) \Big|_{\tilde{a}}^{I_0}$ . Обращая эллиптический интеграл,

получаем  $\varphi = \sqrt{\frac{\tilde{a} - I}{\tilde{a} - \tilde{b}}} = \operatorname{sn} \left[ \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{k_0^2 \bar{\chi}}{3}} z \right), \tilde{k} \right]$ , откуда находим

$I = \tilde{a} \operatorname{cn}^2(\Phi, \tilde{k}) + \tilde{b} \operatorname{sn}^2(\Phi, \tilde{k})$ , где  $\Phi = \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{k_0^2 \bar{\chi}}{3}} z \right)$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Пренебрегая несинхронными пространственными гармониками  $\sim e^{\pm i2kx}, e^{\pm i2y}$ ,

из векторного уравнения  $\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \epsilon \mu \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial z^2} - \frac{k_0^2 \epsilon_{(1)}}{\omega^2} \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial t^2} + i2\beta \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial z} + i2 \frac{k_0^2 \epsilon_{(1)}}{\omega} \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial t} + \bar{K}^2 \tilde{E}_j \\ & - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \tilde{E}_j - 2 \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} \frac{\partial I}{\partial t} \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial t} + i2 \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega} \frac{\partial I}{\partial t} \tilde{E}_j \\ & - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} I \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial t^2} + i2 \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega} I \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial t} + \frac{1}{4} k_0^2 \bar{\chi} I \tilde{E}_j = 0. \end{aligned} \quad (\Gamma.1)$$

где  $j = x, y, z$ . Умножая уравнения системы (Г.1) на соответствующие амплитуды  $\tilde{E}_j$  и складывая, получаем уравнение для плотности энергии плазмон-поляритонов в виде

$$\begin{aligned} & \sum_{j=x,y,z} \left[ \tilde{E}_j \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial z^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \tilde{E}_j \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial t^2} \right] \\ & + i\beta \frac{\partial I}{\partial z} + i \frac{k_0^2 \varepsilon_{(1)}}{\omega} \frac{\partial I}{\partial t} + \bar{K}^2 I \\ & - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} \left( \frac{\partial I}{\partial t} \right)^2 + i3 \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega} \frac{\partial I}{\partial t} I + \frac{1}{4} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 0. \end{aligned} \quad (\Gamma.2)$$

Представим первое слагаемое с суммой в уравнении (Г.2) в виде  $\sum_{j=x,y,z} \left[ \tilde{E}_j \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial z^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \tilde{E}_j \frac{\partial^2 \tilde{E}_j}{\partial t^2} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \right] - f_2(z)$ ,

где  $f_2(z) = \sum_{j=x,y,z} \left[ \left( \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial z} \right)^2 - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \left( \frac{\partial \tilde{E}_j}{\partial t} \right)^2 \right]$ , тогда уравнение (Г.2) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 I}{\partial z^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} + i2\beta \frac{\partial I}{\partial z} + i2 \frac{k_0^2 \varepsilon_{(1)}}{\omega} \frac{\partial I}{\partial t} + 2\bar{K}^2 I \\ & - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega^2} \left( \frac{\partial I}{\partial t} \right)^2 + i6 \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega} \frac{\partial I}{\partial t} I + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 2f_2(z). \end{aligned} \quad (\Gamma.3)$$

Перейдем в подвижную систему отсчета с помощью введения «смещенного времени»  $\tau = t - z/v$ , где  $v = d\omega/dk = const$  – скорость импульса. Тогда уравнение (Г.3) принимает вид

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{3\bar{\chi}}{4} I \right) \right] \frac{d^2 I}{d\tau^2} - i \frac{2\beta}{v} \frac{dI}{d\tau} + i \frac{2k_0^2 \varepsilon_{(1)}}{\omega} \frac{dI}{d\tau} + 2\bar{K}^2 I \\ & - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega^2} \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 + i \frac{3k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega} \frac{dI}{d\tau} I + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 2f_2(z), \end{aligned} \quad (\Gamma.4)$$

где  $f_2(z) = \left[ \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2}{\omega^2} \left( \varepsilon_{(1)} + \frac{\bar{\chi}}{4} I \right) \right] \sum_{j=x,y,z} \left( \frac{d\tilde{E}_j}{d\tau} \right)^2$ . Разделим действительные и мнимые

части в уравнении (Г.4), получаем два уравнения

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{v^2} - \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega^2} \right) \frac{d^2 I}{d\tau^2} - \frac{2k_0^2 \varepsilon''_{(1)}}{\omega} \frac{dI}{d\tau} + 2\bar{K}^2 I \\ & - \frac{3k_0^2 \bar{\chi}}{4\omega^2} I \frac{d^2 I}{d\tau^2} - \frac{k_0^2 \bar{\chi}}{2\omega^2} \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 + \frac{1}{2} k_0^2 \bar{\chi} I^2 = 2f'_2(z), \end{aligned} \quad (\Gamma.5)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{k_0^2 \varepsilon''_{(1)}}{\omega^2} \frac{d^2 I}{d\tau^2} + 2 \left( \frac{k_0^2 \varepsilon'_{(1)}}{\omega} - \frac{\beta}{v} \right) \frac{dI}{d\tau} + 2 \overline{\overline{K}}''^2 I \\
 & + \frac{3k_0^2 \overline{\chi}}{2\omega} \frac{dI}{d\tau} I = 2f_2''(z).
 \end{aligned} \tag{Г.6}$$

Уравнение (Г.5) описывает динамику плотности энергии импульса плазмон-поляритонов в нелинейном полосковом волноводе, а уравнение (Г.6) характеризует диссипацию энергии импульса при распространении его вдоль волновода.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ Д

Представим уравнение (19)

$$\frac{d^2 I}{d\tau^2} = \frac{a_4 I + a_5 I^2}{a_1 I - 1}$$

в форме

$$\frac{d}{d\tau} \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 = 2 \frac{a_4 I + a_5 I^2}{a_1 I - 1} \frac{dI}{d\tau}$$

и проинтегрируем его  $\int_{I_0}^I d \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 = 2a_4 \int_{I_0}^I \frac{IdI}{a_1 I - 1} + 2a_5 \int_{I_0}^I \frac{I^2 dI}{a_1 I - 1}$ , получаем

$$\left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 - \left( \frac{dI}{d\tau} \right)_0^2 = \frac{2a_4}{a_1^2} (a_1 I - 1 + \ln|a_1 I - 1|) + \frac{a_5}{a_1^3} \left[ (a_1 I - 1)^2 + 4(a_1 I - 1) + 2 \ln|a_1 I - 1| \right].$$

Отсюда находим первый интеграл уравнения

$$\left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 = 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{a_5}{a_1^3} \right) \ln|a_1 I - 1| + \frac{a_5}{a_1^3} (a_1 I - 1)^2 + 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{2a_5}{a_1^3} \right) (a_1 I - 1) + G_0,$$

где  $G_0 = \left( \frac{dI}{d\tau} \right)_0^2 - 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{a_5}{a_1^3} \right) \ln|a_1 I_0 - 1| - \frac{a_5}{a_1^3} (a_1 I_0 - 1)^2 - 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{2a_5}{a_1^3} \right) (a_1 I_0 - 1)$ . Второй

интеграл уравнения имеет вид  $\int_{X_0}^X (b_1 \ln|X| + b_2 X^2 + b_3 X + G_0)^{-1/2} dX = a_1 \tau$ , где

$X = a_1 I - 1$ ,  $b_1 = 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{a_5}{a_1^3} \right)$ ,  $b_2 = \frac{a_5}{a_1^3}$ ,  $b_3 = 2 \left( \frac{a_4}{a_1^2} + \frac{2a_5}{a_1^3} \right)$ . Перепишем интеграл в

форме  $\int_{X_0}^X (\ln|X| + b_1^{-1} b_2 X^2 + b_1^{-1} b_3 X + b_1^{-1} G_0)^{-1/2} dX = a_1 \sqrt{b_1} \tau$  и пренебрежем  $\ln|X|$  по

сравнению с остальными слагаемыми под корнем, находим интеграл  $\int_{X_0}^X (b_1^{-1}b_2X^2 + b_1^{-1}b_3X + b_1^{-1}G_0)^{-1/2} dX = \frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_2}} \operatorname{arc\,sinh} \frac{2b_2X + b_3}{(4b_2G_0 - b_3^2)^{1/2}} \Big|_{X_0}^X$ . Тогда получаем

$$\operatorname{arc\,sinh} \frac{2b_2X + b_3}{(4b_2G_0 - b_3^2)^{1/2}} = a_1\sqrt{b_2}\tau + \tau_0, \quad \text{где} \quad \tau_0 = \operatorname{arc\,sinh} \frac{2b_2(a_1I_0 - 1) + b_3}{(4b_2G_0 - b_3^2)^{1/2}}, \quad \text{то есть}$$

решение уравнения в данном приближении имеет вид  $I = \frac{(4b_2G_0 - b_3^2)^{1/2}}{2a_1b_2} \operatorname{sinh}(a_1\sqrt{b_2}\tau + \tau_0) + \frac{2b_2 - b_3}{2a_1b_2}$ .

### ПРИЛОЖЕНИЕ Е

Уравнение (21)

$$\frac{d^2I}{d\tau^2} + a_4I + a_5I^2 = 0$$

представим в форме

$$\frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 + (a_4I + a_5I^2) \frac{dI}{d\tau} = 0,$$

проинтегрируем и находим первый интеграл  $\left( \frac{dI}{d\tau} \right)^2 = -a_4I^2 - \frac{2a_5}{3}I^3 + \xi^2$ , где

$\xi^2 = \left( \frac{dI}{d\tau} \right)_0^2 + a_4I_0^2 + \frac{2a_5}{3}I_0^3$ . Второй интеграл уравнения ищем в виде эллиптического

интеграла  $\int_{I_0}^I \frac{dI}{(\xi^2 - a_4I^2 - 2a_5I^3/3)^{1/2}} = \tau$ , тогда получаем

$$\int_{\tilde{a}}^I \frac{dI}{[(\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I)]^{1/2}} - \int_{\tilde{a}}^{I_0} \frac{dI}{[(\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I)]^{1/2}} = -\sqrt{\frac{2a_5}{3}}\tau,$$

где  $(\tilde{a} - I)(\tilde{b} - I)(\tilde{c} - I) = 3\xi^2/2a_5 - 3a_4I^2/2a_5 - I^3$ ,  $\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} = 3\xi^2/2a_5$ ,  $\tilde{a}\tilde{b} + \tilde{b}\tilde{c} + \tilde{a}\tilde{c} = 0$ ,  $\tilde{a} + \tilde{b} + \tilde{c} = -3a_4/2a_5$ . Интегрируя получаем

$\frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) = \varphi_0 - \sqrt{\frac{2a_5}{3}}\tau$ , где  $F(\varphi, \tilde{k})$  – эллиптический интеграл первого рода,

$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\tilde{a} - I}{\tilde{a} - \tilde{b}}}$ ,  $\tilde{k} = \sqrt{\frac{\tilde{a} - \tilde{b}}{\tilde{a} - \tilde{c}}}$  – модуль эллиптического интеграла,  $\tilde{a} > x > \tilde{b} > \tilde{c}$ ,



$$\varphi_0 = \frac{2}{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}} F(\varphi, \tilde{k}) \Big|_{\tilde{a}}^{I_0}. \quad \text{Обращая эллиптический интеграл, получаем}$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{\tilde{a} - I}{\tilde{a} - \tilde{b}}} = \operatorname{sn} \left[ \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{2a_5}{3}} \tau \right), \tilde{k} \right], \quad \text{откуда находим}$$

$$I = \tilde{a} cn^2(\Phi, \tilde{k}) + \tilde{b} sn^2(\Phi, \tilde{k}), \text{ где } \Phi = \frac{\sqrt{\tilde{a} - \tilde{c}}}{2} \left( \varphi_0 - \sqrt{\frac{2a_5}{3}} \tau \right).$$

### Список литературы

1. Barnes W. L., Dereux A., and Ebbesen T. W. Surface plasmon subwavelength optics // *Nature*. 2003. Vol. 424. P. 824–830.
2. Krasavin A. V., Zayats A. V., Zheludev N. I. Active control of surface plasmon–polariton waves // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. 2005. Vol. 7. P. S85–S89.
3. Климов В. В. Наноплазмоника. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2010. 480 с.
4. Майер С. А. Плазмоника: теория и приложения. М. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 296 с.
5. Stockman M. I. Nanoplasmonics: past, present, and glimpse into future // *Optics Express*. 2011. Vol. 19. P. 22029–22106.
6. Dzedolik I. V. Solitons and Nonlinear Waves of Phonon-Polaritons and Plasmon-Polaritons. New York : Nova Science Publishers, 2016. 151 p.
7. Формирование плазмонных импульсов при кооперативном распаде экситонов квантовых точек вблизи металлической поверхности / А. В. Шестериков, М. Ю. Губин, М. Г. Гладуш, А. В. Прохоров // *ЖЭТФ*. 2017. Т. 151. Вып. 1. С. 24–39.
8. Ярив А. Введение в оптическую электронику. М. : Высшая школа, 1983. 398 с.
9. Адамс М. Введение в теорию оптических волноводов. М. : Мир, 1984. 512 с.
10. Dai D., He S. A silicon-based hybrid plasmonic waveguide with a metal cap for a nano-scale light confinement // *Optics Express*. 2009. Vol. 17. No. 19. P. 16646–16653.
11. Huang C.-C. Ultra-long-range symmetric plasmonic waveguide for high-density and compact photonic devices // *Optics Express*. 2013. Vol. 21. No. 24. P. 29544–29557.
12. Mode properties in metallic and non-metallic plasmonic waveguides / W. Liu, Y. Chen, X. Hu, L. Wen, L. Jin, Q. Su, Q. Chen // *Applied Optics*. 2017. Vol. 56. No. 16. P. 4861.
13. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. М. : Наука, 1990. 432 с.
14. Кившарь Ю. С., Агравал Г. П. Оптические солитоны. От волоконных световодов до фотонных кристаллов. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. 648 с.
15. Дзедолик И. В., Дзедолик А. И. Нелинейные моды оптического волокна // *Письма в ЖТФ*. 2002. Т. 28. Вып. 10. С. 7–12.
16. Dzedolik I. V. Transformation of sinusoidal electromagnetic and polarization waves into cnoidal waves in an optical fibre // *Ukrainian Journal of Physical Optics*. 2008. Vol. 9. No. 4. P. 226–235.

## LINEAR AND NONLINEAR MODES OF STRIP WAVEGUIDE

*Pereskokov V. S., Dzedolik I. V.\**

*Physics and Technology Institute, V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia*

\*E-mail: [igor.dzedolik@cfuv.ru](mailto:igor.dzedolik@cfuv.ru)

Linear and nonlinear plasmon polariton modes of a metal strip waveguide that located on a dielectric substrate are studied theoretically. Continuous-wave and pulsed operations are considered.

**Keywords:** strip waveguide, plasmon polariton linear and nonlinear modes, plasmon polariton pulse.

### References

1. W. L. Barnes, A. Dereux, T. W. Ebbesen, *Nature* **424**, 824 (2003).
2. A. V. Krasavin, A. V. Zayats, N. I. Zheludev, *Journal of Optics A : Pure and Applied Optics* **7**, S85 (2005).
3. V. V. Klimov, *Nanoplasmonics* (Moscow : FIZMATLIT, 2010) [in Russian].
4. S. A. Maier, *Plasmonics : Fundamental and Applications* (New York: Springer, 2007).
5. M. I. Stockman, *Optics Express* **19**, 22029 (2011).
6. I. V. Dzedolik, *Solitons and Nonlinear Waves of Phonon-Polaritons and Plasmon-Polaritons* (New York: Nova Science Publishers, 2016).
7. A. B. Shesterikov, M. Yu. Gubin, M. G. Gladush, A. V. Prokhorov, *Journal of Experimental and Theoretical Physics* **124**, No. 1, 18 (2017) [in Russian].
8. A. Yariv, *Introduction to Optical Electronics* (Holt, Rinehart and Winston, 1976).
9. M. J. Adams, *An Introduction to Optical Waveguides* (John Wiley and Sons, 1981).
10. D. Dai, S. He, *Optics Express* **17**, No. 19, 16646 (2009).
11. C.-C. Huang, *Optics Express* **21**, No. 24, 29544 (2013).
12. W. Liu, Y. Chen, X. Hu, L. Wen, L. Jin, Q. Su, Q. Chen, *Applied Optics* **56**, No. 16, 4861 (2017).
13. M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, A. P. Sukhorukov, *Theory of waves* (Moscow: Nauka, 1990) [in Russian].
14. Yu. S. Kivshar, G. P. Agrawal, *Optical solitons: from fibers to photonic crystals* (Academic Press, 2003).
15. I. V. Dzedolik, A. I. Dzedolik, *Technical Physics Letters* **28**, No. 5, 7 (2002).
16. I. V. Dzedolik, *Ukrainian Journal of Physical Optics* **9**, No. 4, 226 (2008).

*Поступила в редакцию 02.11.2017 г. Принята к публикации 22.12.2017 г.  
Received November 02, 2017. Accepted for publication December 22, 2017*