

УДК 621.3.045.12

**СИНТЕЗ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ, СОЗДАЮЩИХ ОДНОРОДНОЕ
МАГНИТНОЕ ПОЛЕ**

Клевец Н. И.

*Академия биоресурсов и природопользования, Крымский федеральный университет имени
В. И. Вернадского, Симферополь 295492, Россия*

E-mail: pmsolution@mail.ru

В работе рассмотрены простейшие маловитковые токопроводящие системы, состоящие из круговых витков. Системы синтезированы интегральным методом. Показано, что создание высоко однородного поля во внутренней рабочей области токопроводящих систем, состоящих из малого числа круговых витков, невозможно. Найдены размеры рабочих областей и отношений токов в системах, при которых поле отличается от однородного не более, чем на 1%. Описана методика и приведен пример сравнения различных токопроводящих систем по многим критериям.

Ключевые слова: магнитное поле, токопроводящая система, система Гельмгольца, система Баркера, система Браунбека, система Гаррета, система Максвелла, синтез, многокритериальное ранжирование альтернатив.

PACS: 41.20.Gz

ВВЕДЕНИЕ

Однородные магнитные поля широко используются в научных исследованиях, измерительных приборах и большом количестве технических устройств. По-видимому, первой токопроводящей системой (ТПС), создающей однородное магнитное поле (ОМП), была хорошо известная система Гельмгольца (СГ), состоящая из двух соосных проводников (катушек) в виде окружностей, по которым текут одинаковые токи. В связи с тем, что к системам, создающим ОМП, предъявляются различные дополнительные требования СГ подвергалась усовершенствованию на протяжении уже более 150 лет с момента ее изобретения¹. В настоящее время известно много ТПС, создающих постоянное поле на оси вблизи центра [1–6]. Наиболее полное исследование таких систем выполнено Гарретом [3]. Маловитковые системы исследовались исключительно с использованием метода локального синтеза (см. п.1). При этом степень однородности их поля в объеме ТПС исследована недостаточно полно, так как локальный синтез не ориентирован на такие исследования. Однако исследование области однородности поля в рабочем объеме ТПС имеет важное практическое значение, в связи с чем тема статьи является актуальной и в настоящее время [7]. Здесь рассмотрены некоторые

¹ Гельмгольц Г. Доклад на заседании физического общества. Берлин. 16 марта 1849 г.

простейшие маловитковые ТПС; выполнен их синтез, с использованием интегрального метода, и сравнительный анализ по многим критериям.

Цель исследования – синтез ТПС с малым числом витков, создающих ОМП в объеме рабочей области системы (РОС) и их сравнительный анализ.

1. ПОДХОДЫ К ПРОЕКТИРОВАНИЮ ТОКОПРОВОДЯЩИХ СИСТЕМ, СОЗДАЮЩИХ ОДНОРОДНОЕ ПОЛЕ

В практике проектирования ТПС, создающих ОМП, широкое распространение получили два метода синтеза: локальный и интегральный [1–6]. *Локальный метод синтеза* представляет собой процедуру разложения поля пары симметричных витков с одинаковым током в ряд Тейлора в цилиндрической системе координат. При этом разложение поля выполняется в геометрическом центре ТПС. Затем, решая системы алгебраических уравнений, подбирают геометрические параметры и токи в витках системы таким образом, чтобы исключить несколько первых членов ряда. Это обеспечивает высокую степень постоянства поля ТПС на ее продольной оси вблизи центра системы (на оси поле имеет только аксиальную компоненту). Этот метод весьма прост в реализации и для маловитковых систем может быть выполнен без использования ЭВМ. Отметим, что вследствие симметричного расположения витков с одинаковыми токами относительно плоскости симметрии $z=0$, в этой плоскости поле имеет лишь одну аксиальную компоненту, практически постоянную в круге малого радиуса с центром, совпадающим с центром ТПС. Таким образом, при локальном синтезе ТПС предполагается, что поле системы однородно в шаре малого радиуса, расположенного в центре системы, однако это выполняется с хорошей точностью для весьма малых относительных объемов РОС².

Интегральный метод синтеза (ИМС) ТПС представляет собой процедуру разложения заданного векторного поля по неортонормированному базису, функции которого представляют собой поля витков с единичными токами. При этом требуемое поле задают в объеме РОС. В дальнейшем мы будем задавать только однородное поле, описываемое выражением $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{k}$, где B_0 – величина поля в центре системы, $\mathbf{k}$ – единичный вектор, направленный вдоль оси системы. Применение ИМС позволяет найти соотношение токов в витках системы, при котором критерий оценки погрешности воспроизведения поля в РОС достигает минимального значения. Как правило, в качестве указанного критерия принимают относительное среднеквадратичное отклонение поля от требуемого в РОС. Исходными данными для ИМС являются количество, размеры и координаты витков с током, размеры РОС и закон распределения поля в ней. Кроме того, для расчетов необходимо указать количество точек РОС, в которых будет задано поле. Отметим, что при использовании ИМС требуемое поле часто задают на оси системы [1–6]. При этом получают поля с очень высокой "однородностью". В действительности

² В действительности поле имеет высокую степень однородности в малом эллипсоиде, вытянутом вдоль оси системы.

РОС всегда имеет некоторый объем (желательно максимально большой), поэтому задавать требуемое поле и оценивать точность его воспроизведения необходимо в объеме РОС. Для синтеза систем, создающих однородное поле в объеме РОС, подходит только ИМС, которым мы и воспользуемся ниже.

2. РАСЧЕТ ПОЛЯ СИСТЕМЫ КРУГОВЫХ ТОКОВ

Все, рассматриваемые ниже, ТПС представляют собой совокупность круговых витков с током. В связи с этим приведем формулы для расчета поля кругового витка с током в цилиндрической системе координат, ось аппликат которой перпендикулярна плоскости витка [8]:

$$B_r(r, z) = \frac{\mu_0 I (z - z_0)}{2\pi\rho \left[(z - z_0)^2 + (r + \rho)^2 \right]^{1/2}} \left[-K + \frac{(z - z_0)^2 + r^2 + \rho^2}{(z - z_0)^2 + (r - \rho)^2} E \right], \quad (1)$$

$$B_z(r, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi \left[(z - z_0)^2 + (r + \rho)^2 \right]^{1/2}} \left[K + \frac{r^2 - \rho^2 - (z - z_0)^2}{(z - z_0)^2 + (r - \rho)^2} E \right], \quad (2)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, I – величина тока в витке, r, z_0 – радиус витка с током и координата его центра, ρ, z – координаты точки наблюдения поля,

$K(k) = \int_0^{\pi/2} d\beta / \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta}$ – полный эллиптический интеграл первого рода,

$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \beta} d\beta$ – полный эллиптический интеграл второго рода,

$k = \sqrt{4r\rho / [(z - z_0)^2 + (r + \rho)^2]}$ – модуль эллиптических интегралов.

В качестве РОС выберем цилиндр с высотой равной его диаметру (рис. 1). Однородное поле будем задавать в объеме РОС. Во всех рассматриваемых здесь случаях будем требовать, чтобы в РОС поле имело только одну постоянную по величине аксиальную компоненту $B_z = const$. Радиальная компонента поля должна быть равна нулю во всей РОС.

Можно показать [1–7], что в центре РОС, рассматриваемых здесь ТПС, поле "практически однородно" при определенных геометрических параметрах и соотношениях токов в проводниках. Однако во многих важных случаях поле должно быть однородно с высокой степенью точности в максимально большом объеме системы. Поэтому мы и рассматриваем РОС в виде цилиндра, показанного на рис. 1.

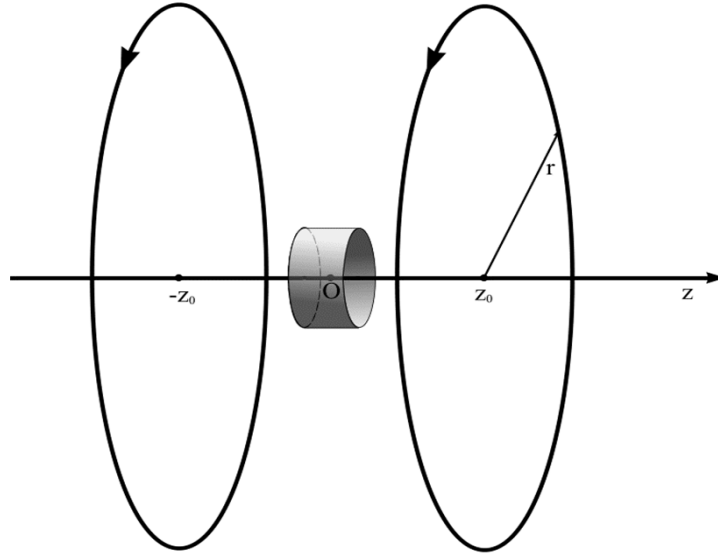


Рис. 1. Система Гельмгольца

Степень отклонения поля в РОС от однородного будем оценивать по величине его относительного среднеквадратичного отклонения (СКО) от заданного значения:

$$\Delta = \| \mathbf{B} - \mathbf{B}_0 \| / \| \mathbf{B}_0 \|, \quad (3)$$

где вертикальные линии обозначают Евклидову норму вектора в РОС, $\mathbf{B}$ – поле системы, $\mathbf{B}_0$ – требуемое поле в РОС.

Отметим, что в [1–5, 7] для оценки качества поля, создаваемого системой, используют меру относительного отклонения поля от константы на оси системы:

$$\delta(z) = [B_0 - B(z)]/B_0, \quad (4)$$

где B_0 – поле в центре РОС, $B(z)$ – поле в точке наблюдения, расположенной на оси системы. Оценка (4) является менее жесткой, чем оценка (3), так как вычисляется только для точек, расположенных на оси системы.

В таблице 1 приведены оптимальные параметры 3х- и 4х-витковых систем, часто используемых на практике. Для всех систем индекс 1 относится к виткам ближайшим к плоскости симметрии систем, индекс 2 – к удаленным от плоскости симметрии виткам; N – число витков в системе, h – высота РОС, D_1 – диаметр витка, B_0 – поле в геометрическом центре системы при $I_1 = 1$ А, P – коэффициент потребляемой мощности системы.

В 3х-витковых системах Максвелла и Баркера первый виток лежит в плоскости симметрии системы, два других расположены симметрично относительно этой плоскости на расстоянии z_2 . Все 4х-витковые системы состоят из двух пар соосных витков, расположенных симметрично относительно плоскости $z = 0$.

Оптимальные параметры систем получены методом локального синтеза и взяты из указанных источников³. Приведенная в табл. 1 высота РОС соответствует относительному СКО поля от однородного приблизительно равному 1%. Поле в центре системы рассчитано для оптимального отношения токов, показанного в табл. 1, и $R_1 = 0,05$ м. Коэффициент потребляемой мощности рассчитан по формуле:

$$P = \sum_{n=1}^N I_n^2 R_n, \quad (5)$$

где I – ток в витке, R_n – радиус витка. Здесь предполагается, что витки систем выполнены из провода с одинаковыми физическими свойствами. В этом случае электрическое сопротивление витков будет прямо пропорционально их радиусам (удельное сопротивление материала и площадь сечения провода в формуле (5) не учитываются).

Таблица 1. Оптимальные параметры ТПС

Система	Оптимальные геометрические параметры систем	$\frac{I_2}{I_1}$	$\frac{h}{D_1}$	$B_0 \cdot 10^{-5}, T$	P, A ² ·м
1	2	3	4	5	6
Гельмгольца	$N = 2; z = 0,5R$	1,00	0,38	1,798	0,100
Максвелла	$N = 3; R_2 = \sqrt{4/7}R_1;$ $z_1 = 0; z_2 = \sqrt{3/4}R_1$	49/32	0,43	2,54	0,255
	$N = 4; R_2 = 0,672R_1;$ $z_1 = 0,298R_1; z_2 = 1,188R_2$	1,47	0,41	1,937	0,362
Баркера	$N = 3; R_2 = R_1;$ $z_1 = 0; z_2 = 0,760R_2$	1,88	0,55	3,644	0,454
	$N = 4; R_2 = R_1;$ $z_1 = 0,243R_1; z_2 = 0,941R_2$	2,26	0,65	4,501	0,611
Браунбека	$N = 4; R_2 = 0,764R_1;$ $z_1 = 0,278R_1; z_2 = 0,846R_1$	1,00	0,57	3,295	0,176
Гаррета	$N = 4; R_2 = 0,265R_1;$ $z_1 = 0,435R_1; z_2 = z_1$	0,02	0,39	1,971	0,100

Рассчитано автором с использованием данных [2, 3, 5].

³ В [5] для 3х-проводной системы Баркера приведено ошибочное значение отношения токов в два раза большее оптимального.

Как следует из данных табл. 1, максимальный объем РОС с приемлемым СКО поля от однородного имеет 4х-витковая система Баркера. Эта же система создает наибольшее поле в РОС, что является ее несомненным достоинством. При этом, в ней наблюдается наибольшее отличие токов в парах витков и максимальный коэффициент потребляемой мощности, что является ее существенным недостатком.

3. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ СИНТЕЗ ТОКОПРОВОДЯЩИХ СИСТЕМ

Увеличить объем области однородности поля рассматриваемых систем можно путем корректировки отношения токов в парах проводников. Это можно сделать только с помощью интегрального синтеза систем. В данном пункте приведена методика определения соотношения токов в витках системы, обеспечивающего минимальное среднеквадратичное отклонение поля от требуемого распределения в РОС, а также результат ее применения к исследуемым системам.

Поле системы витков с током можно представить, как суперпозицию полей отдельных витков:

$$\sum_{n=1}^N I_n \cdot B_n = B_0, \quad (6)$$

где I_n – ток в n -м витке, N – количество витков в системе, B_n – поле n -го витка при единичном токе, рассчитанное по формулам (1), (2), B_0 – поле системы.

Если в (6) задать B_0 равным желаемому полю в РОС, то это равенство превратится в систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно неизвестных токов в проводниках. Поле системы следует вычислять с учетом симметрии расположения проводников и с учетом того, что в каждой симметричной паре проводников токи одинаковы по величине и направлению. Это означает, что СЛАУ для определения оптимального соотношения токов будет иметь только два столбца (и два неизвестных тока). При этом, она будет сильно переопределена, т.к. количество точек в РОС, в которых необходимо получить однородное поле, исчисляется несколькими десятками. Кроме того, для численного решения, СЛАУ (6) должна быть расписана покомпонентно, а это еще в два раза увеличивает количество ее строк.

Современные системы автоматических вычислений содержат встроенные функции для исследования и решения различных СЛАУ. Расчеты поля рассмотренных здесь систем выполнены в системе автоматизированных вычислений Mathcad. При этом СЛАУ решались методом сингулярного разложения с помощью встроенной функции *svd* [9].

Алгоритм расчета оптимального отношения токов в парах витков системы при фиксированных ее геометрических параметрах состоит из следующих шагов:

- 1) задать геометрические размеры колец системы;
- 2) задать геометрические размеры РОС;
- 3) рассчитать количество точек наблюдения поля в РОС и их координаты;
- 4) рассчитать компоненты поля каждой пары витков с одинаковыми токами в

- точках наблюдения поля по формулам (1), (2) и сформировать матрицу СЛАУ;
- 5) задать поле в точках наблюдения в виде $(B_z(r, z) = B_0; B_r(r, z) = 0)$, т.е. покомпонентно задать правую часть СЛАУ (6);
 - 6) решить СЛАУ относительно неизвестных токов и разделить полученные токи на величину тока в витках ближайших к центру системы (выразить токи в относительных единицах);
 - 7) рассчитать поле системы с нормированными токами в геометрическом центре системы и точках наблюдения;
 - 8) вычислить степень отклонения поля от однородного по формуле (3), в которой B_0 равно полю в центре системы.

Отметим, что после выполнения п. 6 приведенного алгоритма, токи в паре витков, расположенных ближе к плоскости симметрии системы, или витке, лежащем в плоскости симметрии, будут равны 1 А.

Для определения максимального размера РОС, в которой поле имеет желаемую степень однородности, расчеты по данному алгоритму должны многократно выполняться с п. 2. При вычислениях количество точек наблюдения поля подбиралось таким образом, чтобы размеры площадок, в центре которых они находились, приблизительно, были равны 1×1 мм.

В таблице 2 приведены результаты синтеза ТПС с помощью интегрального метода. В столбце 3 приведены относительные размеры высот РОС систем, при которых результаты синтеза систем обоими методами совпадают. Как следует из данных шестого столбца табл. 2, в данном случае совпадают и оптимальные отношения токов в парах витков. Исключение составляет 3х-витковая система Максвелла. Оптимальное отношение токов для этой системы, приведенное в [1, см. табл. 1], получается для РОС с отношением $h / D_1 = 0,568$. При этом погрешность воспроизведения поля в РОС равна 3,1 %.

Таблица 2. Оптимальные параметры ТПС, полученные методом интегрального синтеза

Система	Число витков	$\left(\frac{h}{D_1}\right)_0$	$\left(\frac{h}{D_1}\right)_{0,1}$	$\left(\frac{h}{D_1}\right)_1$	$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)_0$	$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)_{0,1}$	$\left(\frac{I_2}{I_1}\right)_1$
1	2	3	4	5	6	7	8
Максвелла	3	0,14	0,32	0,48	47/36	1,32	1,40
	4	0,12	0,42	0,56	0,682	0,68	0,66
Баркера	3	0,10	0,38	0,56	1,882	1,86	1,75
	4	0,20	0,49	0,66	2,260	2,25	2,19
Браунбека	4	0,34	0,44	0,59	1,000	0,96	0,93
Гаррета	4	0,16	0,30	0,39	0,025	0,02	0,02

Рассчитано автором

Отметим, что данные третьего и шестого столбцов табл. 2 описывают область системы с очень высокой однородностью поля (СКО порядка 0,001%).

В четвертом и пятом столбцах приведены относительные размеры РОС, при которых СКО поля систем от однородного не превышает 0,1% и 1%, соответственно. В седьмом и восьмом столбцах приведены оптимальные отношения токов в парах витков, соответствующие размерам РОС из столбцов 4 и 5.

Как следует из данных таблицы 2, с увеличением размеров РОС погрешность воспроизведения однородного поля увеличивается, а отношение токов уменьшается. Однако, в 3х-витковой системе Максвелла оптимальное отношение токов растет с ростом величины РОС. Анализ данных столбца 3 таблицы 2 позволяет сделать предположение, что 4х-витковые системы Баркера и Браунбека должны быть наиболее устойчивы к малым погрешностям изготовления, т.к. их рабочие области имеют наибольшие размеры. Относительно 3х-витковой системы Максвелла можно сделать вывод о том, что отношение токов равное $47/36 = 1,306$ также обеспечит большую устойчивость системы к погрешностям изготовления. Данное свойство отмеченных систем имеет важное практическое значение для систем, использующихся в метрологии и ЯМР-томографии.

Следует также обратить внимание на то, что в системе Баркера, состоящей из витков одинакового диаметра, токи в удаленных от центра системы витках существенно больше, чем во внутренних витках. Анализ оптимальных значений токов во внешних витках других 4х-проводных систем, дает основания предположить, что для создания однородного поля необходимо использовать многовитковые ТПС с уменьшающимися радиусами внешних витков (см. рис. 5). Это предположение строго обосновано в [10].

На рисунке 2 показано поле рассмотренных систем, на аксиальной оси. Расчеты поля выполнены для систем, имеющих радиус $R_1 = 0,05$ м. Токи в витках систем взяты из восьмого столбца таблицы 2. Нумерация графиков на рис. 2 соответствует нумерации ТПС сверху вниз из таблиц 1 и 3.

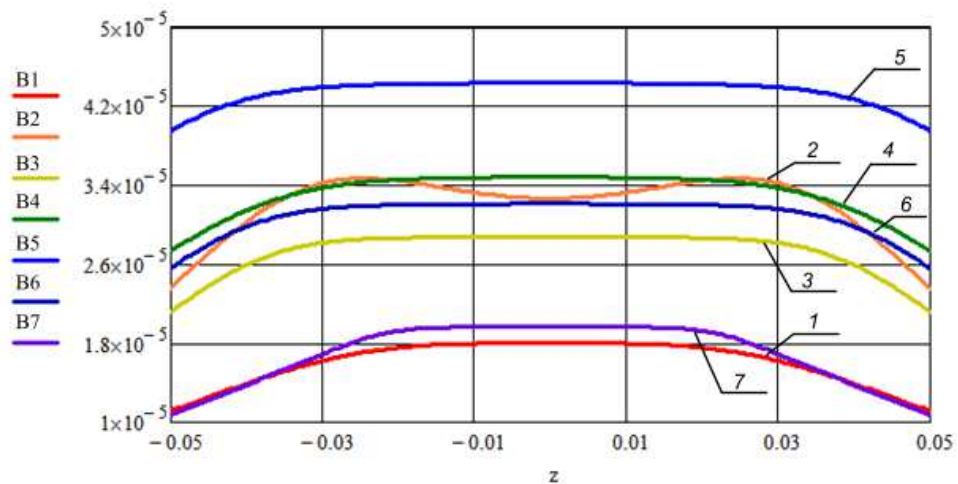


Рис. 2. Поле на продольной оси ТПС

Снижение величины индукции в центре 3х-проводной системы Максвелла (кривая 2) связано с тем, что эта система синтезирована по критерию (3), т. е. обеспечивалась однородность поля в объеме.

На рисунках 3–5 показаны силовые линии поля (левый рисунок) некоторых систем, а также карты линий уровня модуля магнитной индукции (правый рисунок). Большой пунктирный квадрат соответствует областям, в которых относительное СКО поля от однородного не превышает 1%. Малый квадрат соответствует областям, в которых поле отклоняется от однородного не более, чем на 0,001%. Соответствующее отношение токов в витках систем приведено в таблице 2.

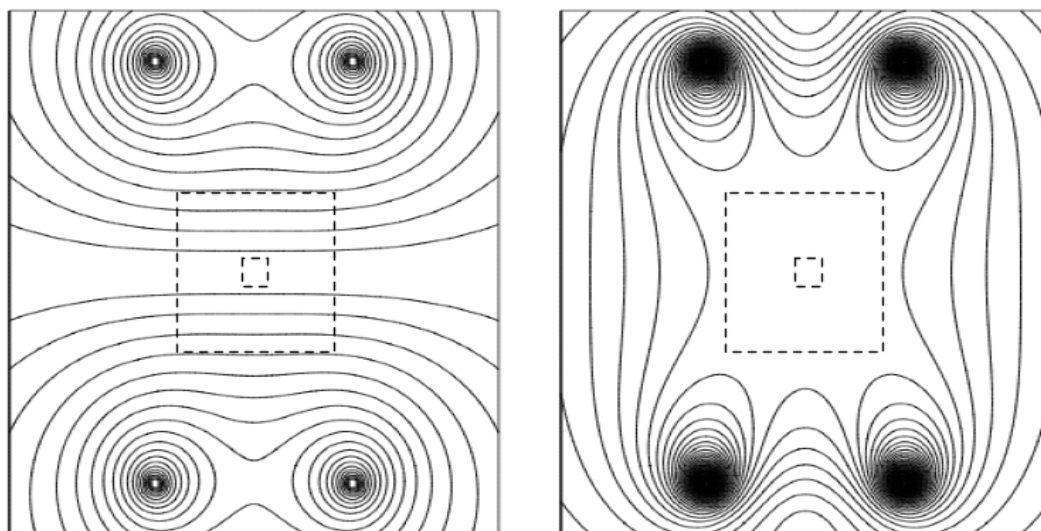


Рис. 3. Поле системы Гельмгольца

4. ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ СЛАУ И СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Синтез ТПС относится к обратным задачам магнитостатики. Хорошо известно, что эти задачи некорректно поставлены по Адамару [6, 11, 12]. На практике это может проявляться в неустойчивости решения задачи к малым вариациям геометрических параметров системы. В нашем случае этот эффект отсутствует, т.к. все системы имеют малое число витков, которые, к тому же, значительно удалены друг от друга. В случае сведения задачи синтеза к решению СЛАУ, проверить корректность модели можно с помощью критерия единственности решения [13, с. 203], согласно которому СЛАУ имеет единственное решение, если ранг матрицы равен числу ее столбцов (неизвестных). При расчетах это условие проверялось с помощью встроенной функции `rank` системы Mathcad. При этом оно выполнялось для всех систем. В системе Mathcad также имеется встроенная функция для вычисления спектра матрицы (`svds`) и затем спектрального числа обусловленности.

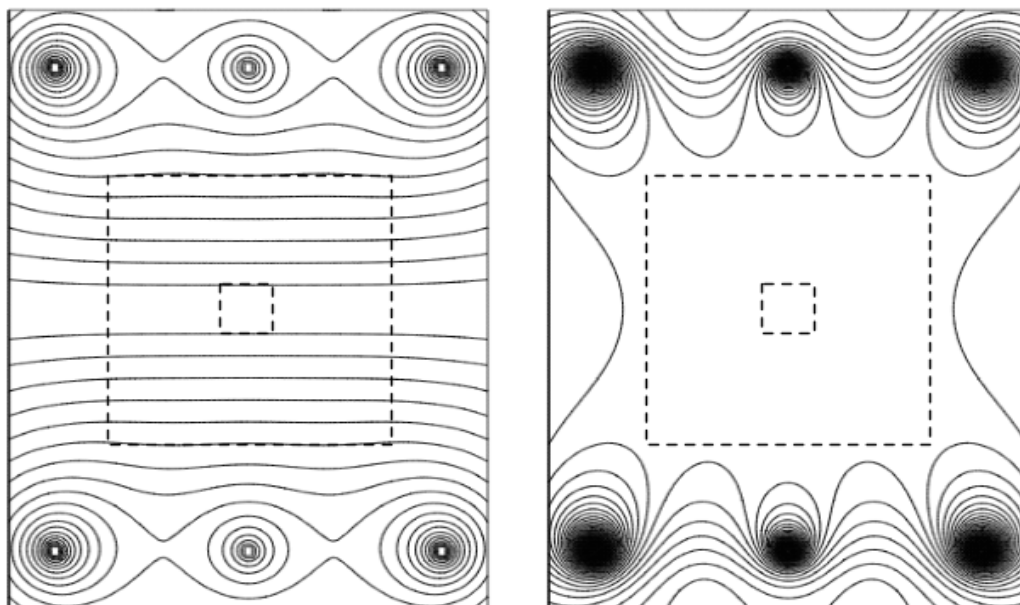


Рис. 4. Поле 3х-витковой системы Баркера

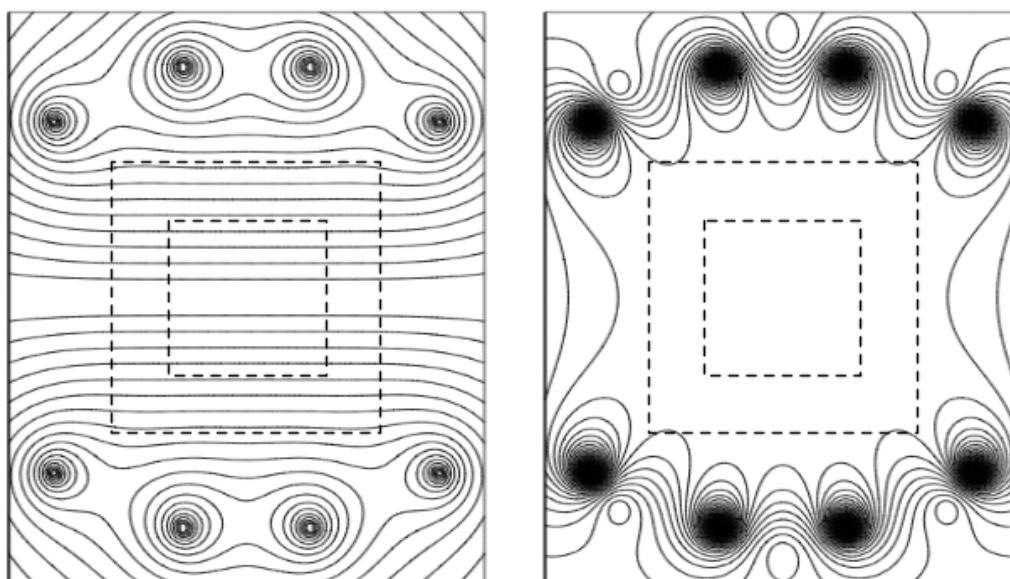


Рис. 5. Поле системы Браунбека

Проведенные исследования СЛАУ показали, что их число обусловленности не превосходит 100. Таким образом применение устойчивого к вычислительным погрешностям метода решения плохо обусловленных СЛАУ (svd) в нашем случае избыточно, однако удобно, т.к. подпрограмма svd решает переопределенные СЛАУ.

Вторая проблема, возникающая при решении задач синтеза, – корректное задание требуемого поля в РОС. Эта проблема возникает в связи с тем, что желаемое распределение поля в РОС (в нашем случае однородное) далеко не всегда может быть получено с помощью синтезируемой системы заданной геометрии. Для исследования вопроса существования решения СЛАУ можно воспользоваться теоремой Кронекера-Капели [13, с. 201], согласно которой, для существования решения СЛАУ ранг ее расширенной матрицы должен совпадать с рангом основной матрицы. К сожалению, в нашем случае это условие не выполняется ни для одной из рассмотренных систем ни при каких размерах РОС. Это означает, что с помощью рассмотренных ТПС невозможно даже теоретически создать абсолютно однородное поле в объемной рабочей области.

5. ИНТЕГРАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СИСТЕМ

Выбор ТПС для практической реализации выполняют с использованием нескольких критериев, учитывающих технико-экономическую ситуацию и личные предпочтения лица, принимающего решения (ЛПР); в качестве последнего может выступать экспертный совет. В связи с этим приведем пример многокритериальной оценки рассматриваемых ТПС.

В настоящее время известно много различных методов многокритериального ранжирования альтернатив (МКРА). При правильном использовании все они должны давать приблизительно одинаковый результат. Ниже мы воспользуемся квалиметрическим методом [14].

Методика МКРА состоит из следующих этапов:

1. Выбор показателей для описания альтернатив (сравниваемых объектов).
2. Задание весовых коэффициентов показателей.
3. Определение типа показателей (стимуляторы, дестимуляторы).
4. Задание эталонных значений показателей в соответствии с их типом.
5. Задание значений показателей, при которых объект считается браком, т.е. не удовлетворяет базовым требованиям.
6. Оценка (измерение, расчет) показателей каждого объекта.
7. Приведение оценок показателей к сопоставимому виду.
8. Расчет интегрального показателя качества (ИПК) альтернатив.
9. Ранжирование альтернатив по убыванию (возрастанию) ИПК.
10. Содержательная интерпретация ранжированного ряда альтернатив.

Для сравнения альтернативных вариантов ТПС возьмем следующие критерии: число витков в системе, размер области однородности поля, отношение токов в витках, величину поля в центре системы, потребляемую мощность и технологичность конструкции изделия. Выбор показателей, используемых для МКРА, должен тщательно обосновываться [14]. Однако здесь мы не будем этого делать, а лишь отметим, что все они существенно влияют на технические параметры ТПС, а также стоимость их изготовления и эксплуатации.

Весовые коэффициенты показателей позволяют учесть технико-экономические условия и предпочтения ЛРП при ранжировании альтернатив по ИПК. Обычно их

задают в баллах, например, по 10-балльной шкале с последующей нормировкой их суммы на единицу по формуле:

$$w_i = w_i / \sum_{n=1}^N w_n, i = 1, \dots, N, \quad (7)$$

где w_n – ненормированное значение весового коэффициента n -го показателя, N – количество показателей, описывающих объект.

Показатели сравниваемых объектов, которые должны иметь максимально возможную (желаемую) величину называются стимуляторами. В нашем случае такими показателями являются: размер области однородности поля, величина поля в центре системы и технологичность конструкции изделия. Соответственно, дестимуляторами называются показатели, которые должны иметь минимально возможное значение, в нашем случае это: число витков в системе, отношение токов в витках и потребляемая мощность, которую мы оцениваем с помощью коэффициента потребляемой мощности P (см. табл. 1).

Эталонные значения показателей могут быть заданы экспертным методом. В нашем случае в качестве эталонных значений показателей целесообразно взять лучшие значения всех показателей, используемых при оценке ТПС.

Бракованные значения показателей также могут быть заданы экспертным методом, либо в качестве таковых могут быть взяты увеличенные, например, на 5% эталонные значения показателей-стимуляторов и уменьшенные на 5% эталонные значения показателей-дестимуляторов. В дальнейшем мы воспользуемся вторым способом задания эталонных значений показателей.

Технические показатели сравниваемых ТПС нами рассчитаны выше и представлены в табл. 1, 2. Для оценки технологичности конструкции изделий (ТКИ) необходимо разработать технологические карты изготовления ТПС. Здесь мы этого делать не будем, а выполним оценку ТКИ экспертным методом, принимая во внимание геометрические параметры систем и отношение токов в витках. Оценка ТКИ выразим в баллах по 10-балльной шкале. При этом воспользуемся только нечетными числами, как рекомендовано в [15] для увеличения "разрешения" оценок ТПС.

Приведение оценок показателей к сопоставимому виду (нормировка на единицу вектора показателя) является одним из этапов МКРА, который порождает большое разнообразие методов. Здесь мы воспользуемся методом, предложенным в [14]. При этом показатели-стимуляторы должны быть преобразованы путем расчета относительных разностей по формуле:

$$a_{ij} = \frac{a_{ij} - B_i}{E_i - B_i}, \quad (8)$$

а показатели-дестимуляторы – по формуле:

$$a_{ij} = \frac{B_i - a_{ij}}{B_i - E_i}; \quad (9)$$

где E_i – эталонное значение i -го показателя; B_i – бракованное значение i -го показателя.

Расчет ИПК альтернатив также может быть выполнен многими способами, мы воспользуемся мерой сходства объектов с эталоном в виде взвешенного среднего показателей объекта:

$$Q = \sum_{n=1}^N w_n \cdot q_n, \quad (10)$$

В (10) весовые коэффициенты w_n должны быть нормированы на единицу, а показатели объекта q_n – приведены к сопоставимому виду по одной из формул (8) – (9), в соответствии с типом показателя. Для наглядности ИПК, полученные по формуле (10), целесообразно выразить в относительных единицах.

Данные, необходимые для вычисления ИПК исследуемых ТПС, в соответствии с описанной методикой, приведены в таблице 3. В таблице показатели-стимуляторы имеют тип, обозначенный "1", а дестимуляторы – "0".

Таблица 3. Данные для расчета ИПК

№	Система	Число витков	h/D_1	I_2/I_1	$B_0 \cdot 10^{-5}, T$	$P, A^2 \cdot m$	ТКИ	ИПК
1	Гельмгольца	2	0,38	1,00	1,798	0,100	9	0,99
2	Максвелла	3	0,48	1,40	3,192	0,198	5	0,74
3		4	0,56	0,66	2,874	0,129	3	0,33
4	Баркера	3	0,56	1,75	3,479	0,357	9	0,92
5		4	0,66	2,19	4,431	0,579	7	0,82
6	Браунбека	4	0,60	0,97	3,209	0,172	7	1
7	Гаррета	4	0,39	0,02	1,967	0,100	7	0,63
Тип показателя		0	1	0	1	0	1	
Вес		7	9	5	7	7	9	

Рассчитано автором

В последнем столбце табл. 3 приведены ИПК рассматриваемых ТПС, рассчитанные по описанной выше методике. Столбчатая диаграмма ИПК показана на рис. 6. На оси абсцисс указаны номера рассмотренных ТПС, на оси ординат – относительные значения их ИПК. Как видим, по уровню ИПК исследуемые ТПС расположились в следующем порядке: система Браунбека, система Гельмгольца, 3х-проводная система Баркера. Поле этих систем показано на рисунках 3-5. Отметим,

что в реальных условиях оценки технологичности систем и весовые коэффициенты показателей могут быть другими, что приведет к другим значениям ИПК.

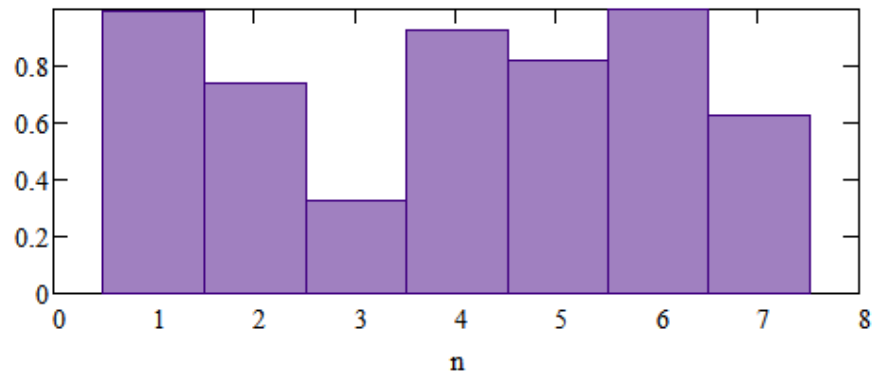


Рис. 6. Интегральные показатели качества ТПС

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные исследования показали, что классические маловитковые ТПС, рассчитанные методом локального синтеза, создают однородное поле с погрешностью менее 1% в сравнительно малых объемах. Использование интегрального синтеза позволяет скорректировать оптимальное соотношение токов в витках систем и несколько увеличить область однородности поля. Наибольшую рабочую область в виде цилиндра с высотой равной диаметру имеет 4х-витковая система Баркера, наименьшую – 2х-витковая система Гельмгольца. Анализ СЛАУ, являющихся математическими моделями ТПС, показал, что создать однородное поле в объеме с помощью маловитковых систем невозможно.

В связи с тем, что при практической реализации ТПС необходимо учитывать несколько технико-экономических и технологических показателей, для окончательного выбора системы целесообразно использовать многокритериальные методы ранжирования альтернатив. Проведенные исследования показали, что простейшая 2х-витковая система Гельмгольца, имеющая относительно малую область однородности поля, выгодно отличается по другим показателям, что делает ее наиболее распространенной на практике в случае рабочих областей малых размеров.

В настоящее время известно много различных ТПС, предназначенных для создания ОМП в рабочей области. Большинство из них спроектировано для рабочей области, совпадающей с осью системы. При этом степень однородности поля в объеме РОС не исследуется. Известны также ТПС, создающие ОМП в рабочем объеме, но имеющие низкую технологичность конструкции, в связи с чем целесообразно попытаться упростить конструкцию таких систем без ущерба для однородности поля. Еще один слабо изученный вопрос касается влияния погрешностей изготовления ТПС на однородность поля в рабочей области. Все

перечисленные вопросы имеют важное практическое значение и требуют рассмотрения.

Список литературы

1. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме. Т. II. – М. : Наука, 1989. С. 283–284.
 2. McKeehan L. W. Combinations of circular currents for producing uniform magnetic fields // Review of Scientific Instruments. 1936. Vol. 7. P. 150–153.
 3. Garret M. W. Thick cylindrical coil systems for strong magnetic fields with field or gradient homogeneities of the 6th to 20th order // Journal of Applied Physics. 1967. No. 38. P. 2563–2586.
 4. Caprari R. S. Optimal current loop systems for producing uniform magnetic fields // Measurement Science and Technology. 1995. Vol. 6, No. 5. P. 593–597.
 5. Средства измерений параметров магнитного поля / Ю. В. Афанасьев, Н. В. Студенцов, В. Н. Хорев [и др.]. Л. : Энергия. Ленингр. отд-ние, 1979. С. 40.
 6. Луганский Л. Б. Синтез полей в соленоидальных магнитных системах (обзор) // Приборы и техника эксперимента. 1992. № 4. С. 9–36.
 7. Baranov P., Baranova V. Modeling axial 8-coil system for generating uniform magnetic field in COMSOL // MATEC Web of Conferences, Vol. 48, 03001, 2016. P. 1–6.
 8. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электромагнитное поле. М. : Высш. шк. 1986. С. 103–104.
 9. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. – М. : Мир. 1980. С. 210–255.
 10. Цейтлин Л. А. Об одной возможности получения однородного магнитного поля // Журнал технической физики. 1957. Т. XXVII. Вып. 12. С. 2792–2793.
 11. Adamiak K. Synthesis of homogeneous magnetic field in internal region of cylindrical solenoid // Archiv für Elektrotechnik. 1980. No. 62. P. 75–79.
 12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М. : Наука, 1979. 285 с.
 13. Воеводин В. В., Воеводин Вл. В. Энциклопедия линейной алгебры. Электронная система ЛИНЕАЛ. СПб. : БХВ-Петербург, 2006. 544 с.
 14. Азгальдов Г. Г. Теория и практика оценки качества товаров (основы квалиметрии). – М. : Экономика, 1982. 256 с.
 15. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М. : Радио и связь, 1993. 278 с.
-

SYNTHESIS OF SIMPLE SYSTEMS THAT PRODUCE HOMOGENEOUS MAGNETIC FIELD

Klevets N. I.

*Academy of Bioresources and Environmental Management, V. I. Vernadsky Crimean Federal
University, Simferopol 295492, Russia
E-mail: pmsolution@mail.ru*

The simple current systems generating homogeneous magnetic field in working volume are considered. The problem of synthesis of the system is reduced to the solution of the system of linear algebraic equations with respect to unknown currents in circular loops. It is shown that highly homogeneous field cannot be created by means of the circular loops with current in the working volume of system. The maximum working volumes of the systems, in which the field differs from the homogeneous distribution on not more, than 0.001%, 0.1% and 1%, are found. The technique of systems comparison by many criteria is offered, and the example of such comparison is given.

Keywords: magnetic field, current system, Barker's system, Braunbek's system, Garret's system, Helmholtz's system, Maxwell's system, synthesis, multi-criteria ranking.

References

1. J. C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism* **II**, Sec. 714, 715.
2. L. W. McKeehan, *Review of Scientific Instruments*, No. 7, 150–153 (1936).
3. M. W. Garret, *Journal of Applied Physics*, No. 38, 2563–2586 (1967).
4. R. S. Caprari, *Measurement Science and Technology* **6**, No. 5, 593–597 (1995).
5. Y. A. Afanac'ev et al, *Sredstva izmerenij parametrov magnitnogo polia* [Divises for magnetic fields measurement] (Energia, Leningrad, 1979), P. 40. [in Russian].
6. L. B. Lugansky, *J. Phys. E : Sci. Instrum.* No. 4, 9–36 (1992).
7. P. Baranov, V. Baranova, *MATEC Web of Conferences* **48**, 03001, 1–6 (2016).
8. L. A. Bessonov, *Teoreticheskie osnovy elektrotehniki. Electromagnitnoe pole* [Teoretical basises of electrical engineering. Electromagnetic field] (Vyssh. shkola, Moscow, 1986), Pp. 103–104. [in Russian].
9. G. Forsythe, M. Malcolm, C. Moler, *Mashinnye metody matematicheskikh vychislenij* [Computer methods for mathematical computations] (Mir, Moscow, 1980), Pp. 210–255.
10. L. A. Ceitlin, *Journal of technical physics* **XXVII**, No. 12, 2792–2793 (1957).
11. K. Adamiak, *Archiv für Elektrotechnik*, No. 62, 75–79 (1980).
12. A. N. Tichonow, W. J. Arsenin, *Metody reshenia nekorrektnykh zadach* [Methods of solving incorrect problems] (Nauka, Moscow, 1974) [in Russian].
13. V. V. Voevodin, V. V. Voevodin, *Encyclopedia linejnoj algebry. Electronnaja sistema LINEAL* [Encyclopedia of line algebra. Electronic system LINEAL] (BHV-Peterburg, Sanct-Peterburg, 2006) [in Russian].
14. G. G. Azgaldov, *Teorija i praktika ocenki kachestva tovarov (osnovy kvalimetrii)* [Theory and practice of goods quality estimation (fundamentals of qualimetry)] (Ekonomika, Moscow, 1982) [in Russian].
15. T. Saaty, *Planirovanie reshenij. Metod analiza ierarhij* [Decision making. The analytic hierarchy process] (Radio i svjaz', Moscow, 1993) [in Russian].

Поступила в редакцию 27.10.2017 г. Принята к публикации 22.12.2017 г.

Received October 27, 2017. Accepted for publication December 22, 2017