

ФИЗИКА И МАТЕМАТИКА

PHYSICS AND MATHEMATICS

Вестник Физико-технического института

Крымского федерального университета имени В. И. Вернадского

Том 1 (67–69). № 2. 2017. С. 5–18

Journal of Physics and Technology Institute of V. I. Vernadsky Crimean Federal University

Volume 1 (67–69). No. 2. 2017. P. 5–18

УДК 539.391+514.764.2

Памяти Р.-Д. А. Бабаджан

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ С ОСЕВОЙ СИММЕТРИЕЙ, РАДИАЛЬНО УВЕЛИЧИВАЮЩЕЙ СВОЙ РАЗМЕР

Бабаджан Р.-Д. А., Леяков А. П.*

Физико-технический институт, Крымский федеральный университет имени
В. И. Вернадского, Симферополь 295007, Россия

*E-mail: lelyakov_a_p@cfuv.ru

Предложен вид функции распределения, описывающей движение скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой области» и радиально увеличивающей свой размер. Найдены условия, при которых, в пределе сжатия скалярного поля в одномерный объект (нуль-струну), компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии-импульса замкнутой нуль-струны движущейся по той же траектории.

Ключевые слова: нуль-струна, гравитационное поле, функция распределения.

PACS: 04.60.CF

ВВЕДЕНИЕ

В низкотемпературных системах конденсированного состояния существует много примеров линейных топологических дефектов, например, вихри в сверхтекучем гелии или в атомном Бозе-Эйнштейновском конденсате. Подобные структуры обычно возникают в результате спонтанного нарушения симметрии при фазовых переходах в низкотемпературные фазы.

Космические струны – это аналогичные объекты, которые могли быть сформированы в ранней Вселенной. Они могли образовываться в процессе нарушающих симметрию фазовых переходов предсказанных моделями физики частиц, например, модели, ассоциируемые со спонтанным нарушением симметрии в Теории Великого Объединения [1–5]. Космические струны могут достигать космологических размеров и, несмотря на чрезвычайно небольшую толщину, они достаточно массивны, чтобы давать заметные гравитационные эффекты [6–9].

Нуль-струны реализуют предельный случай нулевого натяжения для космической струны [10–13] (т.е. описывают предельный случай, в котором точки струны могут взаимодействовать только с окружающим (внешним) гравитационным полем (но не друг с другом)). Нуль-струны могли образовываться на ранних этапах эволюции Вселенной и, таким образом, возможно, участвовали в процессах формирования структуры наблюдаемой Вселенной.

Так, в работе [13] была рассмотрена возможность нуль-струнного механизма инфляции для случая D-мерных пространств Фридмана-Робертсона-Уокера (ФРУ). В этой работе была отмечена возможность существования фазы идеального газа нуль-струн (сжимающихся или расширяющихся) и описываемых точным уравнением состояния

$$\rho = P(D-1)$$

Рассматривая эту фазу газа нуль-струн как доминантный источник гравитации в пространствах ФРУ были вычислены возможные скэйлинговые факторы $R(t)$:

$$R_I(t) = [q \cdot (t_c - t)]^{2/D}, \quad t < t_c,$$

$$R_{II}(t) = [q \cdot (t - t_c)]^{2/D}, \quad t > t_c,$$

где $q = (4\pi G_D A / (D-1)(D-2))^{1/2}$, G_D , A , t_c – константы. Решение $R_I(t)$ описывает режим ускоренного сжатия D-мерной Вселенной ($dR/dt < 0$, $d^2R/dt^2 < 0$) с коллапсом в момент $t = t_c$. Второе решение $R_{II}(t)$ описывает режим замедленного расширения Вселенной ($dR/dt > 0$, $d^2R/dt^2 < 0$) из сверхсжатого состояния с нулевым объемом.

Одним из направлений в исследовании газа нуль-струн могут стать задачи о влиянии формы нуль-струны на ее гравитационные свойства. Прежде всего интересно исследовать вопрос о влиянии формы нуль-струны на особенности нуль-струнного газа найденные в работах [14–19], например, на возможность образовывать доменную структуру пространства, заполненного таким газом.

Исследование гравитационных свойств нуль-струны сильно осложняет наличие δ -функций в соответствующем тензоре энергии-импульса, что приводит к проблемам в интегрировании системы уравнений Эйнштейна.

Для того чтобы обойти эту трудность удобно воспользоваться алгоритмом, предложенным в работе [14], а именно, рассматривать компоненты струнного тензора энергии-импульса как предел некоторого «размазанного» распределения, в качестве которого удобно выбрать вещественное безмассовое скалярное поле (поскольку нуль-струна это скалярный «нуль-объект»), а затем стянуть это «размазанное» распределение в нуль-струны требуемой формы и движущуюся по данной траектории, требуя при этом, чтобы компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля, в пределе сжатия, асимптотически совпали с компонентами нуль-струнного тензора энергии-импульса. При таком подходе мы фактически отказываемся от одномерности нуль-струны и переходим к физически обоснованной модели нуль-струны в виде тонкой трубки («размазанной» нуль-струны).

Предлагаемая работа посвящена построению функции распределения вещественного безмассового скалярного поля для «размазанной» замкнутой радиально расширяющейся нуль-струны с осевой симметрией.

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

Тензор энергии импульса для уединенной нуль-струны имеет вид [13]:

$$T^{mn} \sqrt{-g} = \gamma \int d\tau d\sigma x_{,\tau}^m x_{,\tau}^n \delta^4(x^l - x^l(\tau, \sigma)), \quad (1)$$

где индексы m, n, l принимают значения $0, 1, 2, 3$; функции $x^m = x^m(\tau, \sigma)$ определяют траекторию движения нуль-струны; τ и σ параметры на мировой поверхности нуль-струны; $x_{,\tau}^m = \partial x^m / \partial \tau$; g_{mn} – метрический тензор внешнего пространства времени; $g = |g_{mn}|$; $\gamma = \text{const}$.

В цилиндрической системе координат ($x^0 = t, x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = z$) функции $x^\alpha(\tau, \sigma)$, определяющие траекторию движения (мировую поверхность) замкнутой нуль-струны данной задачи, имеют вид

$$t = \tau, \quad \rho = \tau, \quad \theta = \sigma, \quad z = Z(\theta), \quad \tau \in [0, +\infty), \quad \sigma \in [0; 2\pi], \quad (2)$$

где функция $Z(\theta)$ удовлетворяет условиям замкнутости нуль-струны

$$Z(\theta)|_{\theta=0} = Z(\theta)|_{\theta=2\pi} \quad (3)$$

и инвариантности относительно инверсии θ на $-\theta$

$$Z(\theta) = Z(-\theta). \quad (4)$$

Можно отметить, что траекториям (2) соответствует случай радиального расширения замкнутой нуль-струны, при котором форма нуль-струны, определяемая функцией $Z(\theta)$, не зависит от времени, и все точки нуль-струны в каждый момент времени t находятся на одинаковом расстоянии от оси z (находятся на поверхности цилиндра).

На рис. 1 приведены примеры возможных конфигураций замкнутой нуль-струны, которые удовлетворяют (2) и соответствуют выбору: а) $Z(\theta) = \cos(2\theta)$, б) $Z(\theta) = \cos(3\theta)$, в) $Z(\theta) = \cos(5\theta)$, г) $Z(\theta) = \cos^2(5\theta) + \sin^2(4\theta)$.

Подставляя (2) в (1) находим выражения для компонент тензора энергии-импульса нуль-струны траектория движения для которой определяется равенствами (2)

$$T^{mn} \sqrt{-g} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(z - Z(\theta)) \delta(\rho - t). \quad (5)$$

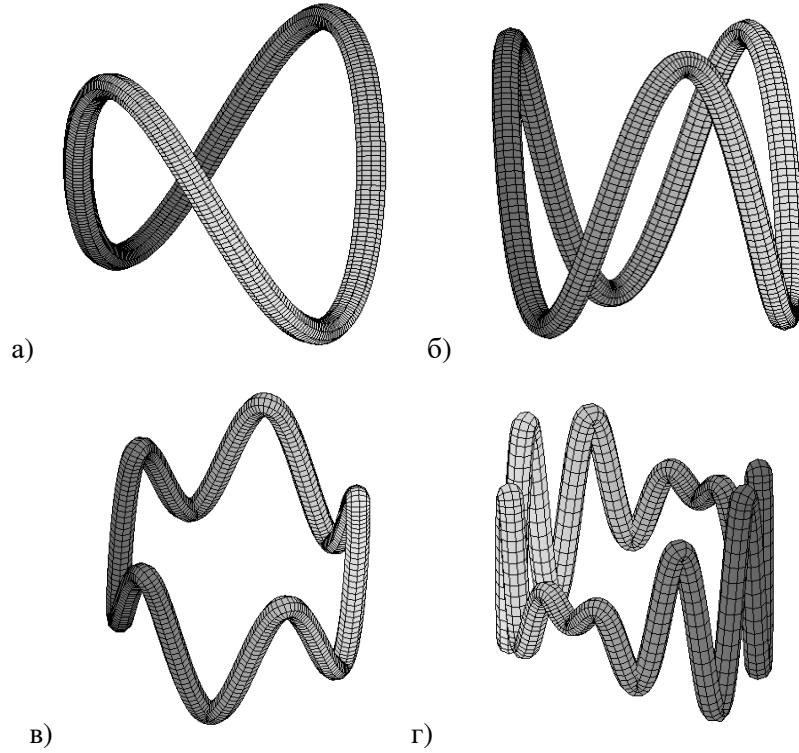


Рис. 1. Примеры конфигураций нуль-струны, удовлетворяющие (2)

Поскольку для траектории (2) форма нуль-струны должна быть инвариантна относительно инверсии θ на $-\theta$ то квадратичная форма пространства-времени должна быть инвариантна относительно инверсии θ на $-\theta$, тогда

$$g_{mn}(t, \rho, \theta, z) = g_{mn}(t, \rho, -\theta, z). \quad (6)$$

Следствием (6) есть

$$g_{02} = g_{12} = g_{32} = 0. \quad (7)$$

Также можно заметить, что квадратичная форма пространства-времени в решаемой задаче должна быть инвариантна относительно одновременной инверсии $z \rightarrow -z$ и инверсии θ на $-\theta + \pi/n$, где n – порядок оси симметрии, тогда

$$g_{mn}(t, \rho, \theta, z) = g_{mn}(t, \rho, -\theta + \pi/n, -z). \quad (8)$$

Откуда

$$g_{03} = g_{31} = 0. \quad (9)$$

Воспользовавшись свободой выбора систем координат в Общей Теории Относительности частично зафиксируем ее выбором

$$g_{01} = 0. \quad (10)$$

Учитывая (4) – (7) квадратичная форма, для решаемой задачи может быть представлена в виде

$$dS^2 = e^{2\nu} (dt)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2 - e^{2\mu} (dz)^2, \quad (11)$$

где ν, μ, A, B – функции переменных t, ρ, θ, z , удовлетворяют условиям (4) и (6), а также очевидному условию (следствие замкнутости нуль-струны)

$$(\nu, \mu, A, B)|_{\theta=0} = (\nu, \mu, A, B)|_{\theta=2\pi}. \quad (12)$$

Компоненты тензора энергии импульса для нуль-струны должны удовлетворять равенству

$$T_{\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (13)$$

Для (5), (11), равенство (13) принимает вид

$$T_0^0 + T_1^1 = \frac{\gamma e^{-\mu}}{\sqrt{B}} \left\{ \frac{e^{\nu}}{\sqrt{A}} - \frac{\sqrt{A}}{e^{\nu}} \right\} \delta(z - Z(\theta)) \delta(\rho - t) = 0, \quad (14)$$

откуда

$$e^{2\nu} = A. \quad (15)$$

Тогда, учитывая (15), квадратичная форма (11) может быть представлена в виде

$$dS^2 = e^{2\nu} \left((dt)^2 - (d\rho)^2 \right) - B(d\theta)^2 - e^{2\mu} (dz)^2, \quad (16)$$

где ν, μ, B – функции переменных t, ρ, θ, z и удовлетворяют условиям (6) и (8).

Анализируя систему уравнений Эйнштейна для квадратичной формы (16), можно доопределить функциональную зависимость метрических функций, а именно:

$$\nu = \nu(\eta, \theta, z), \quad \mu = \mu(\eta, \theta, z), \quad B = B(\eta, \theta, z), \quad \eta = t - \rho, \quad (17)$$

при этом система уравнений Эйнштейна может быть представлена в виде

$$-\mu_{,\eta\eta} - \frac{B_{,\eta\eta}}{2B} - (\mu_{,\eta})^2 + \left(\frac{B_{,\eta}}{2B} \right)^2 + 2\nu_{,\eta} \left(\mu_{,\eta} + \frac{B_{,\eta}}{2B} \right) = \chi T_{00}, \quad (18)$$

$$\frac{B_{,\eta z}}{B} + 2\nu_{,\eta z} - \frac{1}{2} \frac{B_{,\eta}}{B} \frac{B_{,z}}{B} - \frac{B_{,\eta}}{B} \nu_{,z} - \frac{B_{,z}}{B} \mu_{,\eta} - 2\mu_{,\eta} \nu_{,z} = 0, \quad (19)$$

$$e^{2(\nu-\mu)} \left\{ \nu_{,zz} + \frac{B_{,zz}}{2B} + (\nu_{,z})^2 - \left(\frac{B_{,z}}{2B} \right)^2 - \mu_{,z} \nu_{,z} - \frac{B_{,z}}{2B} \left(\mu_{,z} - \nu_{,z} + \frac{B_{,z}}{2B} \right) \right\} + \quad (20)$$

$$+ \frac{e^{2\nu}}{2B} \left\{ \nu_{,\theta\theta} + \mu_{,\theta\theta} + (\nu_{,\theta})^2 + (\mu_{,\theta})^2 - \frac{B_{,\theta}}{2B} (\mu_{,\theta} + \nu_{,\theta}) + \mu_{,\theta} \nu_{,\theta} \right\} = 0,$$

$$\frac{B}{e^{2\mu}} \left(2\nu_{,zz} + 3(\nu_{,z})^2 - 2\nu_{,z} \mu_{,z} \right) - 2\nu_{,\theta} \mu_{,\theta} - (\nu_{,\theta})^2 = 0, \quad (21)$$

$$(\nu_{,z})^2 + \nu_{,z} \frac{B_{,z}}{B} - \frac{e^{2\mu}}{B} \left(2\nu_{,\theta\theta} + 3(\nu_{,\theta})^2 + \nu_{,\theta} \frac{B_{,\theta}}{B} \right) = 0, \quad (22)$$

$$\nu_{,\eta\theta} + \mu_{,\eta\theta} - \frac{B_{,\eta}}{2B} (\nu_{,\theta} + \mu_{,\theta}) - \mu_{,\eta} (\nu_{,\theta} - \mu_{,\theta}) = 0, \quad (23)$$

$$\nu_{,\theta z} + \nu_{,z} (\nu_{,\theta} - \mu_{,\theta}) - \nu_{,\theta} \frac{B_{,z}}{B} = 0. \quad (24)$$

2. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ «РАЗМАЗАННОГО» РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Тензор энергии-импульса для вещественного безмассового скалярного поля имеет вид [3]

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} L, \quad (25)$$

где $L = g^{\alpha\beta} \varphi_{,\alpha} \varphi_{,\beta}$, $\varphi_{,\alpha} = \partial \varphi / \partial x^\alpha$, φ – функция распределения скалярного поля, индексы α, β принимают значения 0, 1, 2, 3. Для обеспечения самосогласованности уравнений Эйнштейна, построенных для (16), (1), будем требовать

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}(\eta, \theta, z) \rightarrow \varphi = \varphi(\eta, \theta, z). \quad (26)$$

Расписывая (25) для (16), (26), находим

$$T_{00} = (\varphi_{,\eta})^2 + \frac{e^{2\nu}}{2} \left(\frac{(\varphi_{,z})^2}{e^{2\mu}} + \frac{(\varphi_{,\theta})^2}{B} \right), \quad (27)$$

$$T_{11} = (\varphi_{,\eta})^2 - \frac{e^{2\nu}}{2} \left(\frac{(\varphi_{,z})^2}{e^{2\mu}} + \frac{(\varphi_{,\theta})^2}{B} \right), \quad (28)$$

$$T_{22} = -\frac{1}{2} \left((\varphi_{,\theta})^2 - \frac{B}{e^{2\mu}} (\varphi_{,z})^2 \right), \quad (29)$$

$$T_{33} = \frac{1}{2} \left((\varphi_{,z})^2 - \frac{e^{2\mu}}{B} (\varphi_{,\theta})^2 \right), \quad (30)$$

$$T_{01} = -(\varphi_{,\eta})^2, \quad T_{12} = \varphi_{,\eta} \varphi_{,\theta}, \quad T_{23} = \varphi_{,z} \varphi_{,\theta}, \quad T_{03} = -T_{13} = \varphi_{,\eta} \varphi_{,z}. \quad (31)$$

Для (16), (17), (27)–(31), система уравнений Эйнштейна может быть представлена в виде

$$-\mu_{,\eta\eta} - \frac{B_{,\eta\eta}}{2B} - (\mu_{,\eta})^2 + \left(\frac{B_{,\eta}}{2B} \right)^2 + 2\nu_{,\eta} \left(\mu_{,\eta} + \frac{B_{,\eta}}{2B} \right) = \chi (\varphi_{,\eta})^2, \quad (32)$$

$$\frac{B_{,\eta z}}{2B} + \nu_{,\eta z} - \frac{1}{4} \frac{B_{,\eta}}{B} \frac{B_{,z}}{B} - \frac{B_{,\eta}}{2B} \nu_{,z} - \frac{B_{,z}}{2B} \mu_{,\eta} - \mu_{,\eta} \nu_{,z} = -\chi \varphi_{,\eta} \varphi_{,z}, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & e^{2(\nu-\mu)} \left\{ \nu_{,zz} + \frac{B_{,zz}}{2B} + (\nu_{,z})^2 - \left(\frac{B_{,z}}{2B} \right)^2 - \mu_{,z} \nu_{,z} - \frac{B_{,z}}{2B} \left(\mu_{,z} - \nu_{,z} + \frac{B_{,z}}{2B} \right) \right\} + \\ & + \frac{e^{2\nu}}{2B} \left\{ \nu_{,\theta\theta} + \mu_{,\theta\theta} + (\nu_{,\theta})^2 + (\mu_{,\theta})^2 - \frac{B_{,\theta}}{2B} (\mu_{,\theta} + \nu_{,\theta}) + \mu_{,\theta} \nu_{,\theta} \right\} = \\ & = -\chi \frac{e^{2\nu}}{2} \left(\frac{(\varphi_{,z})^2}{e^{2\mu}} + \frac{(\varphi_{,\theta})^2}{B} \right), \end{aligned} \quad (34)$$

$$\frac{B}{e^{2\mu}} \left(2\nu_{,zz} + 3(\nu_{,z})^2 - 2\nu_{,z} \mu_{,z} \right) - 2\nu_{,\theta} \mu_{,\theta} - (\nu_{,\theta})^2 = \frac{\chi}{2} \left((\varphi_{,\theta})^2 - \frac{B(\varphi_{,z})^2}{e^{2\mu}} \right), \quad (35)$$

$$(\nu_{,z})^2 + \nu_{,z} \frac{B_{,z}}{B} - \frac{e^{2\mu}}{B} \left(2\nu_{,\theta\theta} + 3(\nu_{,\theta})^2 + \nu_{,\theta} \frac{B_{,\theta}}{B} \right) = \frac{\chi}{2} \left((\varphi_{,z})^2 - \frac{e^{2\mu}}{B} (\varphi_{,\theta})^2 \right), \quad (36)$$

$$\nu_{,\eta\theta} + \mu_{,\eta\theta} - \frac{B_{,\eta}}{2B} (\nu_{,\theta} + \mu_{,\theta}) - \mu_{,\eta} (\nu_{,\theta} - \mu_{,\theta}) = \chi \varphi_{,\eta} \varphi_{,\theta}, \quad (37)$$

$$\nu_{,\theta z} + \nu_{,z} (\nu_{,\theta} - \mu_{,\theta}) - \nu_{,\theta} \frac{B_{,z}}{B} = \chi \varphi_{,\theta} \varphi_{,z}. \quad (38)$$

Рассмотрим полученную систему уравнений (32)–(38) для распределения скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой» замкнутой области, для которой переменные η и z изменяются в пределах

$$\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta], \quad z \in [Z(\theta) - \Delta z; Z(\theta) + \Delta z], \quad (39)$$

где $\Delta\eta$ и Δz – положительные константы, которые определяют «толщину» области

$$\Delta\eta \ll 1, \Delta z \ll 1, \quad (40)$$

а в пределе сжатия такой «тонкой» области в одномерный объект (нуль-струну)

$$\Delta\eta \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0. \quad (41)$$

Тогда пространство-время, в котором движется такая «размазанная» нуль-струна и для которого переменные изменяются в пределах

$$\eta \in (-\infty; +\infty), z \in (-\infty; +\infty), \theta \in [0; 2\pi], \quad (42)$$

условно может быть разделено на три области:

область I, для которой

$$\eta \in (-\infty; -\Delta\eta) \cup (\Delta\eta; +\infty), z \in (-\infty; +\infty), \theta \in [0; 2\pi], \quad (43)$$

область II, для которой

$$\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta], z \in (-\infty; Z(\theta) - \Delta z) \cup (Z(\theta) + \Delta z; +\infty), \theta \in [0; 2\pi], \quad (44)$$

область III, для которой

$$\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta], z \in [Z(\theta) - \Delta z; Z(\theta) + \Delta z], \theta \in [0; 2\pi]. \quad (45)$$

Поскольку при стягивании скалярного поля в струну система уравнений (32)–(38) для скалярного поля должна асимптотически стремиться к системе (18)–(24) для замкнутой нуль-струны, то в областях I и II

$$\varphi \rightarrow 0, \varphi_{,z} \rightarrow 0, \varphi_{,\eta} \rightarrow 0, \varphi_{,\theta} \rightarrow 0. \quad (46)$$

Сравнивая систему уравнений для замкнутой нуль-струны с системой (32)–(38), можно сделать вывод о том, что при стягивании скалярного поля в струну, то есть при $\Delta\eta \rightarrow 0, \Delta z \rightarrow 0$

$$\left\{ (\varphi_{,z})^2; (\varphi_{,\theta})^2; (\varphi_{,\eta} \cdot \varphi_{,z}); (\varphi_{,\eta} \cdot \varphi_{,\theta}); (\varphi_{,\theta} \cdot \varphi_{,z}) \right\} \Big|_{\eta \rightarrow 0, z \rightarrow Z(\theta)} \rightarrow 0, \quad (47)$$

$$(\varphi_{,\eta})^2 \Big|_{\eta \rightarrow 0, z \rightarrow Z(\theta)} \rightarrow \infty, \quad \theta = 0..2\pi.$$

3. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Для полученных условий (46), (47) функцию распределения скалярного поля удобно представить в виде

$$\varphi(\eta, \theta, z) = \ln \left(\frac{1}{(\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(\vartheta))^\gamma} \right), \quad (48)$$

где $\vartheta = \vartheta(z, \theta) = z - Z(\theta)$, γ – некоторая положительная константа, функция

$$\lambda(\eta) = \frac{1}{f_0}(1 - \alpha(\eta)), \quad (49)$$

$f_0 = \text{const}$. Функции $\alpha(\eta)$ и $\lambda(\eta)$ симметричны относительно инверсии η на $-\eta$:

$$\alpha(\eta) = \alpha(-\eta), \quad \lambda(\eta) = \lambda(-\eta). \quad (50)$$

Функция $\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(\vartheta)$ ограничена

$$0 < \alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(\vartheta) \leq 1, \quad (51)$$

функция (48), может принимать значения от

$$\varphi = 0, \text{ при } \alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(\vartheta) = 1, \quad (51)$$

и до

$$\varphi \rightarrow \infty, \text{ при } \alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(\vartheta) \rightarrow 0, \quad (52)$$

причем в области I, в соответствии с (46), (49), (51)

$$\alpha(\eta) \rightarrow 1, \quad \lambda(\eta) \rightarrow 0. \quad (53)$$

Согласно (46), функция распределения скалярного поля в области II стремится к нулю, тогда при $\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta]$ и любом фиксированном значении переменной $z = z_0 \in (-\infty; Z(\theta) - \Delta z) \cup (Z(\theta) + \Delta z; +\infty)$, должно быть выполнено

$$\alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z_0) \rightarrow 1. \quad (54)$$

В области III, для тех же значений $\eta \in [-\Delta\eta; \Delta\eta]$ и при $z = z_0 \in [Z(\theta) - \Delta z; Z(\theta) + \Delta z]$

$$0 < \alpha(\eta) + \lambda(\eta)f(z_0) < 1. \quad (55)$$

Из (53)–(55) следует, что при всех $z \in (-\infty; Z(\theta) - \Delta z) \cup (Z(\theta) + \Delta z; +\infty)$ значения функции $f(z)$ не зависят от z , т.е.

$$f(z) \rightarrow f_0 = \text{const}, \quad (56)$$

При этом $f_0 \neq 0$. Для области III,

$$0 < \alpha(\eta) + (1 - \alpha(\eta))f(\vartheta)/f_0 < 1, \quad (57)$$

тогда из (52), (57) следует, что при $\varphi \rightarrow \infty$

$$\alpha(\eta) \rightarrow 0, f(\vartheta) \rightarrow 0. \quad (58)$$

Таким образом, в выражении для функции распределения скалярного поля (48), функции $\alpha(\eta)$ и $f(\vartheta)$ ограничены и для всех значений переменных $\eta \in (-\infty; +\infty)$ и $z \in (-\infty; +\infty)$ изменяются в пределах

$$0 \leq \alpha(\eta) \leq 1, 0 \leq f(\vartheta) \leq f_0. \quad (59)$$

Ниже приведен пример функций $\alpha(\eta)$ и $f(\vartheta)$, удовлетворяющих найденным условиям

$$\alpha(\eta) = \exp \left\{ -\frac{1}{\varepsilon + (\xi\eta)^2} \right\}, \quad (60)$$

$$f(\vartheta) = f_0 \exp \left\{ -\mu \left(1 - \exp \left\{ -\frac{1}{(\zeta\vartheta)^2} \right\} \right) \right\}, \quad (61)$$

где константы ξ и ζ – определяют размер «толщину» кольца, внутри которого сконцентрировано скалярное поле, по переменным η и z , соответственно, а как следует из (4.14), (4.15), при $\Delta z \rightarrow 0$ $\Delta \eta \rightarrow 0$

$$\xi \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow \infty, \quad (62)$$

при этом положительные константы ε и μ обеспечивают выполнение условий (46), (47), при $z = Z(\theta)$, $\eta \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$, $\Delta \eta \rightarrow 0$, а именно, при $\Delta z \ll 1$, $\Delta \eta \ll 1$

$$\varepsilon \ll 1, \mu \gg 1, \quad (63)$$

а при дальнейшем сжатии в одномерный объект (нуль-струну), то есть при $\Delta z \rightarrow 0$, $\Delta \eta \rightarrow 0$

$$\varepsilon \rightarrow 0, \mu \rightarrow \infty. \quad (64)$$

Используя (49), (60), (61) для (48) получаем выражение одного из возможных выражений функции распределения безмассового вещественного скалярного поля, компоненты тензора энергии-импульса, для которого в пределе сжатия в одномерный объект асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии-импульса исследуемой замкнутой нуль-струны.

Отметим, что вид функции распределения (48), не является общим, а ее выбор нужно рассматривать как один из возможных способов «размазывания» нуль-струны. Вид функции распределения скалярного поля должен влиять на гравитационные свойства модели струны в виде трубки скалярного поля. Однако

поскольку нуль-струне соответствует случай, в котором скалярное поле стягивается в одномерный объект, то способ «размазывания» в предельных случаях (62), (64) не может быть существенен.

На рис. 2 для функции φ , определяемой равенствами (48), (60), (61), для значений констант $\xi = \zeta = 3$, представлены распределения скалярного поля, по переменным $x \in [-12; 12]$, $y \in [-12; 12]$ для фиксированного момента времени $t = 10$, при $z = 0$, которые соответствуют разным выражениям функции $Z(\theta)$, а именно: а) $Z(\theta) = \cos(2\theta)$, б) $Z(\theta) = \cos(5\theta)$, в) $Z(\theta) = \sin^2(2\theta) + \cos(3\theta)$, $Z(\theta) = \sin^2(4\theta) + \cos^2(5\theta)$. На этих рисунках черным цветом выделена область, где $\varphi \rightarrow 0$.

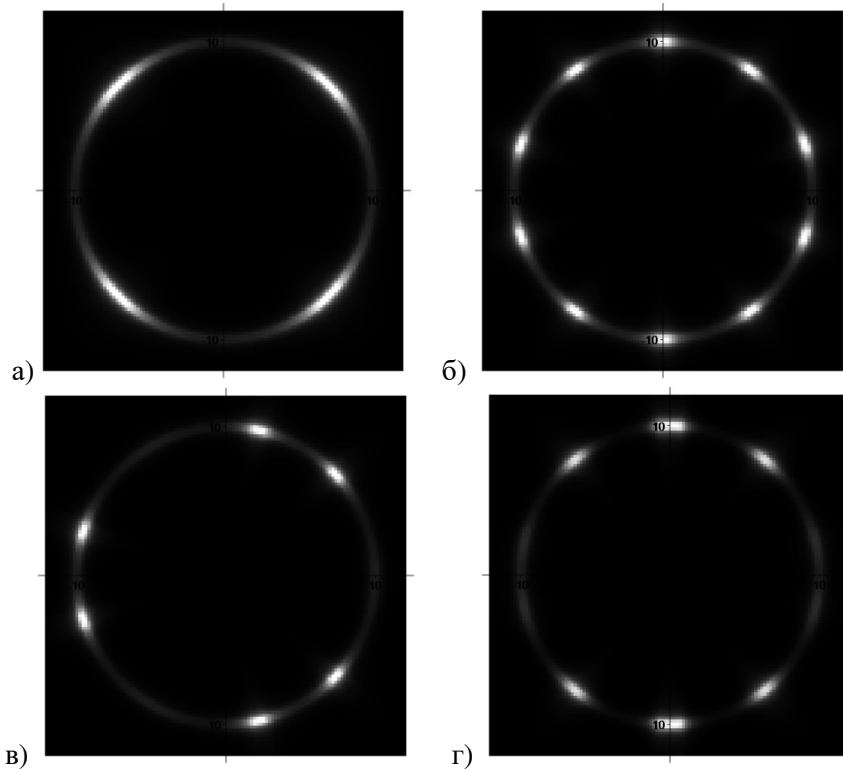


Рис. 2. Распределение скалярного поля в сечении $z = 0$, которые соответствуют различным функциям $Z(\theta)$

На рис. 3 представлены распределения скалярного поля в плоскости $z = \text{Const}$, определяемые равенствами (48), (60), (61), для функции $Z(\theta) = \cos(3\theta)$, $t = 10$,

которые соответствуют разным значениям констант ξ, ς , а именно: а) $\xi = \varsigma = 1.1$, б) $\xi = \varsigma = 3$, в) $\xi = \varsigma = 6$.

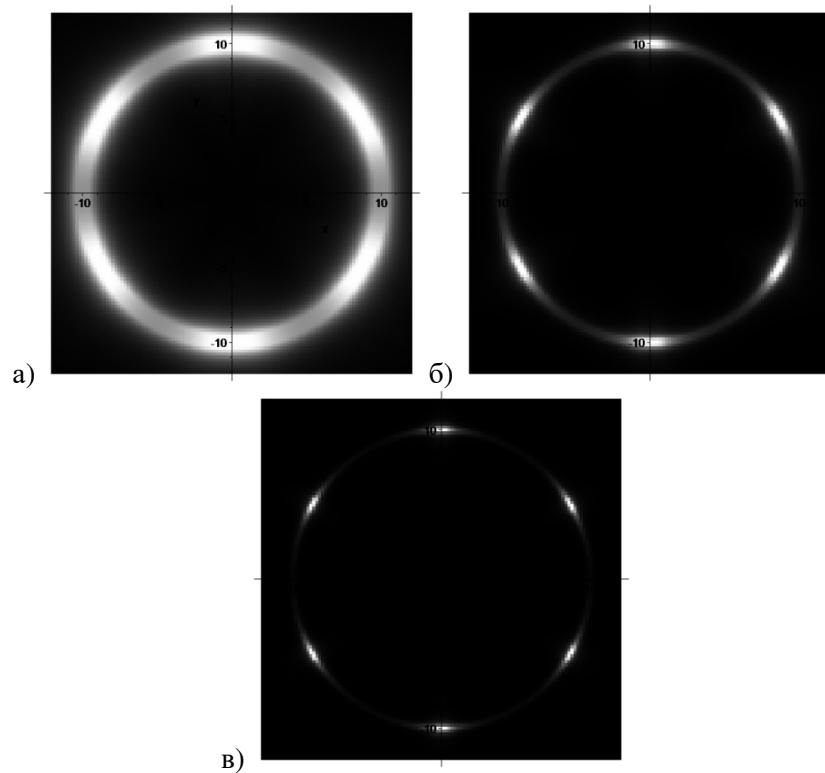


Рис. 3. Распределение скалярного поля в сечении $z = \text{const.}$, которые соответствуют различным значениям констант ξ, ς

Из рис. 3 непосредственно видно, что с увеличением значений констант ξ и ς область, в которой функция распределения скалярного поля существенно отлична от нуля, сужается, что соответствует уменьшению «толщины» кольца, в котором сконцентрировано скалярное поле.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Сравнивая систему уравнений Эйнштейна, построенную для распределения вещественного безмассового скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой области», с системой уравнений Эйнштейна для замкнутой радиально расширяющейся нуль-струны с осевой симметрией, мы нашли условия, при выполнении которых в пределе сжатия скалярного поля в одномерный объект (нуль-струну) компоненты тензора энергии-импульса скалярного поля асимптотически совпадают с компонентами тензора энергии-импульса замкнутой

нуль-струны. Предложен вид функции распределения, описывающего движение скалярного поля, сконцентрированного внутри «тонкой области» и радиально увеличивающий свой размер. Приведен пример распределения скалярного поля, удовлетворяющего найденным условиям. Продолжением данной работы будет интегрирование уравнений Эйнштейна с целью поиска особенностей гравитационного поля замкнутых нуль-струн с осевой симметрией, а также исследованию влияния формы нуль-струн образующих газ на его возможные свойства.

В работе приведены результаты выпускной квалификационной работы Бабаджан Раисы-Довлеты Александровны.

Список литературы

1. Bennet D. P. Formation and Evolution of Cosmic Strings. Cambridge University Press, 1990. 530 p.
 2. Peebles P. J. E. Principles of Physical Cosmology. Princeton University Press, 1994. 736 p.
 3. Linde A. D. Particle Physics and Inflationary Cosmology. Harwood, Chur, 1990. 380 p.
 4. Vachaspati T., Vilenkin A. Formation and Evolution of Cosmic Strings // Phys. Rev. D. 1984. Vol. 30, No. 10. P. 2036–2045.
 5. Vilenkin A., Shellard E. P. S. Cosmic string and other topological defects. Cambridge University Press, 1994. 580 p.
 6. Copeland E. J., Kibble T. W. B. Cosmic strings and superstrings // Proc. Roy. Soc. 2010. 466. P. 623–657.
 7. Cui Y., Morrissey D. E. Non-Thermal Dark Matter from Cosmic Strings // Phys.Rev. D. 2008. Vol. 79, № 8. P. 1060–1082.
 8. Chernoff D. F., Tye S.-H. H. Inflation, string theory and cosmic strings // Int. J. Mod. Phys. 2015. Vol. 24, 3. P. 1153–1203.
 9. Planck Collaboration XXV 2014, A&A, 571, A25.
 10. Bandos I. A., Zheltukhin A. A. Null super p-brane quantum theory in 4-dimensional space-time // Fortschr. Phys. 1993. Vol. 4. P. 619.
 11. Bandos I. A., Zheltukhin A. A. Hamiltonian mechanics and absence of critical dimensions for null membranes // Sov. J. Nucl. Phys. 1989. Vol. 50, No. 3. P. 556.
 12. Zheltukhin A. A. Hamiltonian structure of the antisymmetric action of a string // JETP Lett. 1987. Vol. 46. P. 262.
 13. Roshchupkin S. N., Zheltukhin A. A. Friedmann universes and exact solutions in string cosmology // Class. Quantum. Grav. 1995. Vol. 12. P. 2519.
 14. Lelyakov A. P. Solution to the Einstein equations for a «spread» closed null string of constant radius // Gravitation and Cosmology. 2015. Vol. 21, No. 3. P. 200–207.
 15. Lelyakov A. P. Dynamics of a null string in the gravitational field of a closed null string of constant radius // Gravitation and Cosmology. 2015. Vol. 21, No. 4. P. 309–318.
 16. Lelyakov O. P., Karpenko A. S., Babadzhan R.-D. O. Scalar-field potential distribution for a closed «thick» null string moving in the plane $z=0$ // Ukr. J. Phys. 2014. Vol. 59, No. 5. P. 547–554.
 17. Lelyakov O. P., Karpenko A. S., Babadzhan R.-D. O. Dynamics of a non-rotating test null string in the gravitational field of a closed «thick» null string radially expanding or collapsing in the plane $z=0$ // Ukr. J. Phys. 2014. Vol. 59, No. 11. P. 1114–1125.
 18. Lelyakov A. P., Karpenko A. S. Dynamics of a probe null string in the gravitational field of a closed null string radially collapsing in the plane // Theoretical and Mathematical Physics. 2017. Vol. 190, P. 140–153.
 19. Lelyakov A. P. Peculiarities of null string motion in the gravitational field of a radially expanding or radially collapsing multistring system // Gravitation and Cosmology. 2017. Vol. 23, P. 50–62.
-

FUNCTION OF DISTRIBUTION FOR CLOSED NULL STRINGS WITH AXIAL SYMMETRY RADIALLY INCREASING ITS SIZE

Babadzhan R.-D. A., Lelyakov A. P.*

Institute of Physics and Technology, V.I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol 295007, Russia

**E-mail: lelyakov_a_p@cfuv.ru*

A form of the distribution function describing the motion of a scalar field concentrated inside a «thin region» and radially increasing its size is proposed. Conditions are found under which, in the limit of compression of a scalar field in a one-dimensional object (null string), the components of the energy-momentum tensor of a scalar field asymptotically coincide with the components of the energy-momentum tensor of a closed null string moving along the same trajectory.

Keywords: null string, gravitational field, distribution function.

References

1. D. P. Bennet, *Formation and Evolution of Cosmic Strings* (Cambridge University Press, 1990).
2. P. J. E. Peebles, *Principles of Physical Cosmology* (Princeton University Press, 1994).
3. A. D. Linde, *Particle Physics and Inflationary Cosmology* (Harwood, Chur, 1990).
4. T. Vachaspati, A. Vilenkin, *Phys. Rev. D* **30**, 2036 (1984).
5. A. Vilenkin, E. P. S. Shellard, *Cosmic string and other topological defects* (Cambridge University Press, 1994).
6. E. J. Copeland, T., W. B. Kibble, *Proc. Roy. Soc.* **466**, 623 (2010).
7. Y. Cui, D. E. Morrissey, *Phys. Rev. D* **79**, 1060 (2008).
8. D. F. Chernoff, S.-H. H. Tye, *Int. J. Mod. Phys.* **24**, 1153 (2015).
9. Planck Collaboration XXV, *A&A*, 571, A25 (2014).
10. I. A. Bandos, A. A. Zheltukhin, *Fortschr. Phys.* **4**, 619 (1993).
11. I. A. Bandos, A. A. Zheltukhin, *Sov. J. Nucl. Phys.* **50**, 556 (1989).
12. A. A. Zheltukhin, *JETP Lett.* **46**, 262 (1987).
13. S. N. Roshchupkin, A. A. Zheltukhin, *Class. Quantum. Grav.* **12**, 2519 (1995).
14. A. P. Lelyakov, *Gravitation and Cosmology* **21**, 200 (2015).
15. A. P. Lelyakov, *Gravitation and Cosmology* **21**, 309 (2015).
16. O. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, R.-D. O. Babadzhan, *Ukr. J. Phys.* **59**, 547 (2014).
17. O. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, R.-D. O. Babadzhan, *Ukr. J. Phys.* **59**, 1114 (2014).
18. A. P. Lelyakov, A. S. Karpenko, *Theoretical and Mathematical Physics* **190**, 140 (2017).
19. A. P. Lelyakov, *Gravitation and Cosmology* **23**, 50 (2017).

*Поступила в редакцию 07.06.2017 г. Принята к публикации 26.11.2017 г.
Received June 07, 2017. Accepted for publication November 26, 2017*