Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 3–20.

УДК 517.972: 517.518.24: 517.2: 517.977.5: 517.98

И. В. Баран

ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ И ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ И СИММЕТРИЧЕСКИХ K-СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ

В статье рассмотрено понятие симметрического компактного субдифференциала n-го порядка. Получены теорема о среднем и формула Тейлора для симметрических производных и симметрических K-субдифференциалов. Рассмотрены некоторые приложения.

Ключевые слова: симметрическая производная, симметрический компактный субдифференциал, теорема о среднем, формула Тейлора, абсолютная непрерывность.

E-mail: matemain@mail.ru

Введение

Субдифференциальное исчисление уже достаточно давно является фундаментом выпуклого и негладкого анализа (см., например, [1], [2], [3], [11], [12], [13]). И. В. Орловым несколько лет назад было введено понятие *компактного субдифференциала* или *K-субдифференциала*, которое затем нашло серьезные приложения. В совместных работах с Ф. С. Стонякиным это понятие было подробно изучено для отображений вещественного аргумента в ЛВП, и с его помощью было получено общее топологическое решение проблемы Радона-Никодима для интеграла Бохнера ([5], [6],[18]).

В дальнейшем возник вопрос о переносе понятия K-субдифференциала на случай векторного аргумента, что и было сделано в совместных работах И. В. Орлова и З. И. Халиловой (см. [7], [8], [16], [17]). Результаты нашли значимые применения в решении вариационных задач с негладким интегрантом.

Недавно понятие K-субдифференциала было обобщено на симметрический случай. Было введено понятие симметрического K-субдифференциала (или K_s-субдифференциала), обобщающего симметрическую производную, а не обычную. В наших работах [19], [20] изложен основной аппарат теории K_s-субдифференциалов первого и второго порядка для отображений скалярного аргумента. Применение K_s-субдифференциалов вместо симметрических производных в теории рядов Фурье позволило обобщить классический метод Римана-Шварца обобщенного суммирования рядов Фурье.

Данная статья посвящена введению и исследованию K_s-субдифференциалов n-го порядка, а также выводу теоремы о среднем и формулы Тейлора для симметрических производных и K_s-субдифференциалов. Работа состоит из четырех основных разделов. В первом разделе получена формула конечных приращений и доказана теорема о среднем для K_s-субдифференцируемых отображений (теорема 2). В частности, получена теорема о среднем для симметрических производных. Во втором разделе получена формула Тейлора в форме Пеано (теорема 3) для симметрических производных. Также получены варианты формулы Тейлора для четного и нечетного порядка при несколько иных требованиях. В третьем разделе рассмотрены приложения формулы Тейлора для симметрических производных. Наконец, в последнем разделе предыдущие результаты переносятся на случай K_s-субдифференцируемых отображений.

Приведем некоторые вспомогательные сведения, которые будут использованы в работе. Всюду далее мы рассматриваем отображение $f : \mathbb{R} \supset [a; b] \to F$, определенное в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$, где F — произвольное вещественное нормированное пространство.

Напомним определения симметрической производной n-го порядка (см. [4], [23]) и K_s-субдифференциала первого порядка ([19], определение K-предела см. раздел 4).

Определение 1. *Симметрической производной n-го порядка* отображения $f(x)$ в точке x называется величина

$$f^{[n]}(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \lim_{h\to +0} \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big).$$

Определение 2. Назовем *K_s-субдифференциалом первого порядка* отображения f в точке x следующий K-предел, если он существует:

$$\partial_K^{[']} f(x) = K\underline{-}\lim_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{ \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta \Big\}.$$

1. Формула конечных приращений и теорема о среднем для абсолютно непрерывных K_s-субдифференцируемых отображений и симметрических производных

Вначале получим формулу конечных приращений для K_s-субдифференцируемых отображений.

Определение 3. Отображение $f : [a; b] \to F$ называется (сильно) абсолютно непрерывным на $[a; b]$, если $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0$ такое, что для любого конечного или счетного набора непересекающихся интервалов $\{(a_k; b_k)\}$ из области определения, который удовлетворяет условию $\sum\limits_k (b_k - a_k) < \delta$, выполнено $\sum\limits_k \|f(b_k) - f(a_k)\| < \varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть отображения $f : \mathbb{R} \supset [a; b] \to F$ и $g : \mathbb{R} \supset [a; b] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывны на $[a; b]$ и K_s-субдифференцируемы на $(a; b)$, причем g возрастает. Если для некоторого замкнутого выпуклого множества $B \subset F$ выполнена локальная оценка $\partial_K^{[']} f(x) \in \partial_K^{[']} g(x) \cdot B$ $(a < x < b)$, то справедлива глобальная оценка:*

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B. \tag{1}$$

Доказательство. 1) Фиксируем $\varepsilon > 0$. Используя определение K_s-субдифференциала выберем для каждого $x \in [a + \varepsilon; b - \varepsilon]$ такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что

$$(0 < h \leqslant \delta) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in O_\varepsilon(\partial_K^{[']} g(x) \cdot B); \\ \dfrac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} \in O_\varepsilon(\partial_K^{[']} g(x)) \end{cases}$$

(здесь O_ε — ε-окрестность множества в F). Отсюда получаем:

$$(0 < h \leqslant \delta) \Rightarrow \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in O_{2\varepsilon} \left(\frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} \cdot B \right) \right). \tag{2}$$

2)Система сегментов $\{\overline{O}_\delta(x)\}_{x \in [a+\varepsilon; b-\varepsilon]}$, $\delta < \delta(\varepsilon, x)$, очевидно, образует покрытие Витали (см. [4], [14], [15]) множества $[a + \varepsilon; b - \varepsilon]$. По второй теореме Витали о покрытиях ([14]), для любого заданного $\eta > 0$ из данного покрытия можно выделить такую конечную систему сегментов $\left\{\overline{O}_{\delta_i}(x_i)\right\}_{i=1}^n$, что $mes\Big(S = [a+\varepsilon; b-\varepsilon] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^n \overline{O}_{\delta_i}(x_i)\Big) < \eta$. Последнее множество S состоит из конечного числа отрезков $[\alpha_j; \beta_j]$, $j = \overline{1, n+1}$. В силу абсолютной непрерывности отображений f и g на $[a; b]$, можно подобрать такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что

$$\Big(mes\, S = \sum_{j=1}^{n+1} (\beta_j - \alpha_j) < \eta\Big) \Rightarrow \Big(\sum_{j=1}^{n+1} \|f(\beta_j) - f(\alpha_j)\| < \varepsilon, \ \sum_{j=1}^{n+1} [g(\beta_j) - g(\alpha_j)] < \varepsilon\Big). \tag{3}$$

Итак:

$$f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon)=\sum_{i=1}^{n}[f(x_i+\delta_i)-f(x_i-\delta_i)]+\sum_{j=1}^{n+1}[f(\beta_j)-f(\alpha_j)], \qquad (4)$$

где, в силу (2),

$$f(x_i+\delta_i)-f(x_i-\delta_i)\in 2\delta_i\cdot O_\varepsilon\left(\frac{g(x_i+\delta_i)-g(x_i-\delta_i)}{2\delta_i}\cdot B\right)\ (i=\overline{1,n}), \qquad (5)$$

и из (3):

$$\sum_{j=1}^{n+1}[f(\beta_j)-f(\alpha_j)]\in O_\varepsilon(0),\quad \sum_{j=1}^{n+1}[g(\beta_j)-g(\alpha_j)]\in(-\varepsilon;\varepsilon). \qquad (6)$$

Подставляя оценки (5) и (6) в (4), с учетом выпуклости B, имеем:

$$\begin{aligned} f(b-\varepsilon)-f(a+\varepsilon)\in\sum_{i=1}^{n}\left[2\delta_i\cdot O_\varepsilon\left(\frac{g(x_i+\delta_i)-g(x_i-\delta_i)}{2\delta_i}\cdot B\right)\right]+O_\varepsilon(0)\subset\\ \subset O_\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{n}g(x_i+\delta_i)-g(x_i-\delta_i)\cdot B\right)+O_\varepsilon(0)\subset\\ \subset O_\varepsilon\left([(g(b-\varepsilon)+\varepsilon)-(g(a+\varepsilon)-\varepsilon)]\cdot B\right)+O_\varepsilon(0). \end{aligned} \qquad (7)$$

3) Переходя в (7) к пределу при $\varepsilon\to 0$, с учетом замкнутости B, получаем (1). □

Докажем теорему о среднем для для K_s-субдифференцируемых отображений.

Теорема 2. *Пусть отображение $f:\mathbb{R}\supset[x;x+h]\to F$ абсолютно непрерывно на $[x;x+h]$ и K_s-субдифференцируемо на $(x;x+h)$. Тогда выполняется оценка:*

$$f(x+h)-f(x)\in\overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1}\partial_K^{[\prime]}f(x+\theta h)\Big)\cdot h. \qquad (8)$$

Доказательство. Достаточно, в условиях теоремы 1, положить $g(\theta)=\theta$ и $B=\overline{co}\Big(\bigcup\limits_{0<\theta<1}\partial_K^{[\prime]}f(x+\theta h)\Big)$, а затем применить формулу (1). □

Следствием данной теоремы является теорема о среднем для симметрических производных.

Следствие 1. *Пусть отображение $f:\mathbb{R}\supset[x;x+h]\to F$ абсолютно непрерывно на $[x;x+h]$ и симметрически дифференцируемо на $(x;x+h)$. Тогда выполняется оценка:*

$$f(x+h)-f(x)\in\overline{co}\,f^{[\prime]}\big((x;x+h)\big)\cdot h. \qquad (9)$$

Доказательство. Если $f(x)$ симметрически дифференцируемо, то $\partial_K^{[']} f(x+\theta h) = \left\{ f^{[']}(x+\theta h) \right\}$. Поэтому

$$\bigcup_{0<\theta<1} \partial_K^{[']} f(x+\theta h) = \left\{ f^{[']}(x+\theta h) \,\middle|\, 0<\theta<1 \right\} = f^{[']}\big((x;x+h)\big).$$

□

2. Формула Тейлора для симметрических производных

Мы получим здесь формулу Тейлора в форме Пеано в предположении, что отображение $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$ $(n-1)$ раз дифференцируемо обычным образом в окрестности точки x и n раз симметрически дифференцируемо в точке x. Прежде чем перейти к основной теореме, сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Имеет место числовое равенство*

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^k C_n^k (n-2k)^n = 2^{n-1} n!.$$

Предложение 1. *Если существует $(f^{(n-1)})^{[']}(x)$, то существует симметрическая производная n-го порядка $f^{[n]}(x)$ в точке x и имеет место равенство:*

$$f^{[n]}(x) = (f^{(n-1)})^{[']}(x). \tag{10}$$

Доказательство. Применим теорему Коши $(n-1)$ раз по переменной h:

$$\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \left.\frac{(\Delta^n f(x,h))^{(n-1)}}{((2h)^n)^{(n-1)}}\right|_{\theta h} =$$

$$= \frac{n^{n-1}\cdot \Delta^1 f^{(n-1)}(x,n\theta h) - \cdots + C_n^{\frac{n}{2}-1}\cdot 2^{n-1}\cdot \Delta^1 f^{(n-1)}(x,2\theta h)}{2^n\cdot n!(\theta h)} =$$

$$= \frac{n^{n-1}}{2^{n-1}\cdot (n-1)!}\cdot \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x,n\theta h)}{2n\theta h} - \frac{(n-2)^n}{2^{n-1}\cdot(n-1)!}\cdot\frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x,(n-2)\theta h)}{2(n-2)\theta h} + \dots$$

Полученное равенство можно записать в виде:

$$\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x,\alpha_{nk}h)}{(2\alpha_{nk}h)^n}\beta_{nk}, \tag{11}$$

где $\alpha_{nk} = n-2k$, $\quad \beta_{nk} = (-1)^k C_n^k \dfrac{(n-2k)^n}{2^{n-1}\cdot n!}$. При этом $\displaystyle\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\beta_{nk} = 1$ в силу леммы 1.

Переходя к пределу в (11) при $h\to 0$:

$$f^{[n]}(x) = \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \beta_{nk}\cdot (f^{(n-1)})^{[']}(x) = (f^{(n-1)})^{[']}(x).$$

□

Справедлива следующая формула Тейлора для симметрических производных.

Теорема 3. *Предположим, что существует* $(f^{(n-1)})^{[']}(x)$ *и отображение* $f(x)$ *абсолютно непрерывно в окрестности* $U(x)$*. Тогда имеет место равенство:*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{1}{n!} \overline{co} f^{[n]}\big((x; x+h)\big) \cdot h^n + o(h^n). \tag{12}$$

Доказательство. Из существования $(f^{(n-1)})^{[']}(x)$ следует, что отображение $f(x)$ определено и имеет обычные производные до $(n-1)$ порядка включительно в окрестности точки x. Применим математическую индукцию.

a) При $n = 1$ равенство (12) принимает вид:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co} f^{[']}\big((x; x+h)\big) \cdot h + o(h).$$

Таким образом, получили теорему о среднем для симметрических производных (см. следствие 1).

b) Воспользуемся индукцией по n. Допустим, утверждение теоремы верно для любого $\widetilde{f}$, удовлетворяющего условию теоремы для порядка $(n-1)$:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) \in \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \overline{co} f^{[n-1]}\big((x; x+h)\big) + o(h^{n-1}).$$

Отсюда $\forall y_{n-1} \in \overline{co} f^{[n-1]}\big((x; x+h)\big)$ вытекает:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_{n-1} \in o(h^{n-1}),$$

где $o(h^{n-1})$ не зависит от выбора $\widetilde{y}_{n-1}$. Введем $\forall y_n \in \overline{co} f^{[n]}\big((x; x+h)\big)$ вспомогательную функцию:

$$r_n(f, y_n; h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n.$$

Вычисляя обычную производную вспомогательной функции r_n, имеем:

$$r_n^{'}(f, y_n; h) = f^{'}(x+h) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} h^{k-1} - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_n,$$

откуда, по допущению индукции следует: $r_n^{'}(f, y_n; h) = r_{n-1}(f', y_{n-1} = y_n; h) = = o(h^{n-1})$. Применяя обычную теорему о среднем $(0 < \theta < 1)$, получим:

$$r_n(f, y_n; h) \in \overline{co}\Big\{ r_n^{'}(f, y_n; \theta h) \;\Big|\; 0 < \theta < 1 \Big\} \cdot h = o(h^{n-1}) \cdot h = o(h^n).$$

Итак, доказано по индукции, что $f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n = o(h^n)$, где многозначная оценка «o» не зависит от выбора $y_n \in \overline{co} f^{[n]}\big((x; x+h)\big)$.

В связи с этим $f(x+h) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} y_n + o(h^n)$, где $o(h^n)$ можно считать независящим от выбора $y_n \in \overline{co} f^{[n]}\big((x; x+h)\big)$. Таким образом, мы доказали формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. □

Для нечетного порядка справедлива следующая формула Тейлора.

Теорема 4. *Если отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n+1]}(x) = (f^{(2n)})^{[']}(x)$, то имеет место равенство:*

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} + 2\frac{f^{[2n+1]}(x)}{(2n+1)!} h^{2n+1} + o(h^{2n+1}). \qquad (13)$$

Доказательство. Применим математическую индукцию.

a) При $n = 1$ равенство (13) равносильно определению первой симметрической производной: $f(x+h) - f(x-h) = 2f^{[']}(x) \cdot h + o(h)$.

b) Допустим, утверждение теоремы верно для порядка $(2n-1)$:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} + \frac{(f^{(2n-2)})^{[']}(x)}{(2n-1)!} h^{2n-1} + o(h^{2n-1}).$$

Введем вспомогательную функцию:

$$r_{2n+1}(f,h) = f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} - \frac{(f^{(2n)})^{[']}(x)}{(2n+1)!} h^{2n+1}.$$

Вычисляя вторую симметрическую производную вспомогательной функции r_{2n+1} по h, получаем:

$$r_{2n+1}^{['']}(f,h) = f^{['']}(x+h) - f^{['']}(x-h) - 2\sum_{k=2}^{n} \frac{(f'')^{(2k-3)}(x)}{(2k-3)!} h^{2k-3} - \frac{((f'')^{(2n-2)})^{[']}(x)}{(2n-1)!} h^{2n-1},$$

откуда, по допущению индукции, следует: $r_{2n+1}^{['']}(f,h) = r_{2n-1}(f'',h) = o(h^{2n-1})$.

Сначала применим обычную теорему о среднем:

$$r_{2n+1}(f,h) = r_{2n+1}(f,h) - r_{2n+1}(f,0) \in \overline{co}\; r_{2n+1}^{'}(f,[0;h]) \cdot h = \overline{co}\; r_{2n+1}(f^{'},[0;h]) \cdot h.$$

Далее по теореме о среднем для симметрических производных:

$$\begin{aligned}\overline{co}\; r_{2n+1}(f^{'},[0;h]) \cdot h = \overline{co}\Big\{ r_{2n+1}(f^{'},\theta h) \;\Big|\; 0<\theta<1 \Big\} \cdot h \subset \\ \subset \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \overline{co}\; (r_{2n}^{'})^{[']}(f',[0;\theta h]) \Big\} \cdot h = \\ = \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \overline{co}\; r_{2n-1}(f'',[0;\theta h]) \cdot h \Big\} \cdot h = o(h^{2n-1}) \cdot h^2 = o(h^{2n+1}),\end{aligned}$$

т. е. $r_{2n+1}(f'',h) = o(h^{2n+1})$. Таким образом, мы получили формулу Тейлора (13). □

Аналогично рассмотрим формулу Тейлора в четном случае.

Теорема 5. *Если отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = (f^{(2n-1)})^{[']}(x)$, то имеет место равенство:*

$$f(x+h)+f(x-h) = 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k} + 2\frac{f^{[2n]}(x)}{(2n)!}h^{2n} + o(h^{2n}). \tag{14}$$

Доказательство. Применим математическую индукцию.

a) При $n=1$ получим: $f(x+h)-2f(x)+f(x-h) = f^{['']}(x)\cdot h^2 + o(h^2)$, что равносильно определению $f^{['']}(x)$.

b) Допустим, утверждение теоремы верно для порядка $(2n-2)$. Введем вспомогательную функцию:

$$r_{2n}(f,h) = f(x+h)+f(x-h) - 2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k} - 2\frac{(f^{(2n-1)})^{[']}(x)}{(2n)!}h^{2n}.$$

Вычисляя вторую симметрическую производную вспомогательной функции r_{2n} по h, получаем:

$$r_{2n}^{['']}(f,h) = f^{['']}(x+h)+f^{['']}(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(f'')^{(2k-2)}(x)}{(2k-2)!}h^{2k-2} - \frac{((f'')^{(2n-3)})^{[']}(x)}{(2n-2)!}h^{2n-2},$$

откуда, по допущению индукции, следует: $r_{2n}^{['']}(f,h) = r_{2n-2}(f'',h) = o(h^{2n-2})$.
Для оценки $r_{2n}(f,h)$ сначала применим обычную теорему о среднем:

$$r_{2n}(f,h) = r_{2n}(f,h) - r_{2n}(f,0) \in \overline{co}\, r_{2n}'(f,[0;h])\cdot h = \overline{co}\, r_{2n}(f',[0;h])\cdot h.$$

Далее по теореме о среднем для симметрических производных следует, что

$$\begin{aligned}\overline{co}\, r_{2n}(f',[0;h])\cdot h &= \overline{co}\Big\{r_{2n}(f',\theta h)\ \Big|\ 0<\theta<1\Big\}\cdot h \subset \\ &\subset \overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\overline{co}\,(r_{2n-1}')^{[']}(f',[0;\theta h])\Big\}\cdot h = \\ &= \overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\overline{co}\, r_{2n-2}(f'',[0;\theta h])\cdot h\Big\}\cdot h = o(h^{2n-2})\cdot h^2 = o(h^{2n}),\end{aligned}$$

т. е. $r_{2n}(f'',h) = o(h^{2n})$. Таким образом, мы получили формулу Тейлора (14). □

3. Приложение: некоторые глобальные свойства симметрических производных

Здесь мы свяжем результаты предыдущего раздела со свойствами обобщенных симметрических производных, введенных и исследованных в работе Р. Джеймса [23]. Вначале введем необходимые понятия и приведем результаты, полученные в [23].

Определение 4. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$, $x_0 \in (a;b)$. Если существуют постоянные $\beta_0, \beta_2, \cdots, \beta_{2r}$ (зависящие только от x_0) такие, что

$$\frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h) - f(x_0-h)\Big\} - \sum_{k=0}^{r} \frac{h^{2k}}{(2k)!}\beta_{2k} = o(h^{2r}),$$

при $h \to 0$, то β_{2r} называется *обобщенной симметрической производной* порядка $2r$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, и обозначается $D^{2r}f(x_0)$.

Если $D^{2k}f(x_0)$ существуют при $0 \leqslant k \leqslant m-1$, определим величину $\theta_{2m}(x_0;h)$ равенством:

$$\frac{h^{2m}}{(2m)!}\theta_{2m}(x_0,h) = \frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h)_f(x_0-h)\Big\} - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{h^{2k}}{(2k)!}D^{2k}f(x_0),$$

и положим

$$\Delta^{2m}f(x_0) = \limsup_{h\to 0} \theta_{2m}(x_0;h),$$
$$\delta^{2m}f(x_0) = \liminf_{h\to 0} \theta_{2m}(x_0;h).$$

Скажем. что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m} на $(a;b)$, если она непрерывна на $[a;b]$, все $D^{2k}f(x)$ существуют и конечны при $1 \leqslant k \leqslant m-1$ на $(a;b)$, и

$$\lim_{h\to 0} h\theta_{2m}(x,h) = 0$$

при всех x из $(a;b)/E$, где E не более, чем счетно.

Скажем. что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям B_{2m-2} на $(a;b)$, если она непрерывна на $[a;b]$, все $D^{2k}f(x)$ существуют и конечны при $1 \leqslant k \leqslant m-1$ на $(a;b)$, и $D^{2k}f(x)$ не имеет разрывов первого рода $(a;b)$.

Далее через $\Delta^k f$ обозначается конечная разность k-го порядка для f.

Теорема 6. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m-2} и B_{2m-4} на $(a;b)$, причем $\Delta^{2m-2}f(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция $D^{2m-4}f(x)$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $D^{2k}f(x)$ непрерывны на $(a;b)$.*

Теорема 7. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m} и B_{2m-2} на $(a;b)$, причем $\Delta^{2m}f(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция $D^{2m-2}f(x)$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $D^{2k}f(x)$ непрерывны на $(a;b)$.*

Аналогичные результаты приведены в [23] для обобщенных симметрических производных нечетного порядка, где автор исходит из разложения:

$$\frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h) - f(x_0-h)\Big\} - \sum_{k=1}^{r} \frac{h^{2k-1}}{(2k-1)!}\beta_{2k-1} = o(h^{2r-1}).$$

Сравнивая результаты теорем 6 и 7 и с результатами, соответственно, теорем из раздела 2, мы приходим к следующим утверждениям, вначале для симметрических производных четного порядка (см. теорему 5).

Теорема 8. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = \big(f^{(2n-1)}\big)^{[']}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m-2} и B_{2m-4} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m-2} f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-4)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $f^{(2k)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.*

Теорема 9. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = \big(f^{(2n-1)}\big)^{[']}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m} и B_{2m-2} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m} f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-2)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $f^{(2k)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.*

Аналогично, отправляясь от соответствующих результатов [23] в нечетном случае, мы приходим к следующим результатам, связанным с симметрическими производными нечетного порядка (см. теорему 4).

Теорема 10. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n+1]}(x) = \big(f^{(2n)}\big)^{[']}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m-1} и B_{2m-3} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m-1} f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-3)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $f^{(2k+1)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.*

Теорема 11. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n+1]}(x) = \big(f^{(2n)}\big)^{[']}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m+1} и B_{2m-1} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m+1} f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-1)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $f^{(2k+1)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.*

4. Формула Тейлора для K_s-субдифференциалов

Здесь мы перенесем результаты раздела 2 на случай K_s-субдифференцируемых отображений. Для перехода к основному понятию нам понадобится определение K-предела системы множеств (см. [5], [7]).

Определение 5. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложению система замкнутых выпуклых подмножеств E, $U = U(0)$ — произвольная окрестность нуля в E. Непустое множество $B \subset E$ называется K-пределом системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$:

$$B = K\underline{-}\lim_{\delta\to 0} B_\delta\,, \text{ если :}$$

1) $\forall\, U(0) \subset E\ \exists\, \delta_U > 0:\ (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B \subset B_\delta \subset B + U)$;
2) B — компактное множество в E.

Введем понятие K_s-субдифференциала n-го порядка.

Определение 6. Назовем *K_s-субдифференциалом n-го порядка* отображения f в точке x следующий K-предел, если он существует:

$$\partial_K^{[n]} f(x) = K\underline{-}\lim_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{ \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big) \ \Big|\ 0 < h < \delta \Big\}.$$

Напомним, что в работах [19], [20] понятие K_s-субдифференциала было введено для случая $n = 1, 2$. Докажем следующее включение.

Предложение 2. *Если существует $\partial_K^{[\prime]}(f^{(n-1)})(x)$, то существует K_s-субдифференциал n-го порядка $\partial_K^{[n]} f(x)$ и имеет место включение:*

$$\partial_K^{[n]} f(x) \subset \partial_K^{[\prime]}(f^{(n-1)})(x).$$

Доказательство. Как показано в доказательстве предложения 1, справедливо равенство:

$$\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} = \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk} h)}{(2\alpha_{nk} h)^n} \beta_{nk}, \tag{15}$$

где $\alpha_{nk} = n - 2k, \quad \beta_{nk} = (-1)^k C_n^k \dfrac{(n-2k)^n}{2^{n-1} \cdot n!}$. По лемме 1

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \beta_{nk} = 1. \tag{16}$$

При этом:

$$\frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk} h)}{(2\alpha_{nk} h)^n} \in \overline{co} \Big\{ \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk} h)}{(2\alpha_{nk} h)^n} \;\Big|\; 0 < h < \delta \Big\}. \tag{17}$$

В силу выпуклости оценки (17) и равенства (16), имеем:

$$\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk} h)}{(2\alpha_{nk} h)^n} \beta_{nk} \in \overline{co} \Big\{ \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk} h)}{(2\alpha_{nk} h)^n} \;\Big|\; 0 < h < \delta \Big\}. \tag{18}$$

Таким образом, из (15) и (18) следует:

$$\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} \in \overline{co} \Big\{ \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk} h)}{(2\alpha_{nk} h)^n} \;\Big|\; 0 < h < \delta \Big\},$$

откуда:

$$\overline{co} \Big\{ \frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n} \;\Big|\; 0 < h < \delta \Big\} \subset \overline{co} \Big\{ \frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x, \alpha_{nk} h)}{(2\alpha_{nk} h)^n} \;\Big|\; 0 < h < \delta \Big\}.$$

Переходя к K-пределу с использованием признака Вейерштрасса ([5], [7]), получаем: $\partial_K^{[n]} f(x) \subset \partial_K^{[\prime]}(f^{(n-1)})(x)$. □

Получим теперь формулу Тейлора с дополнительным членом в форме Пеано для K_s-субдифференциалов.

Теорема 12. *Предположим, что существует $\partial_K^{[\prime]} f^{(n-1)}(x)$ и отображение f абсолютно непрерывно в окрестности точки x. Тогда имеет место оценка:*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} \overline{co} \Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[\prime]} f^{(n-1)}\big)(x + \theta h) \Big\} + o(h^n). \tag{19}$$

Доказательство. Из существования $\partial_K^{[']} f^{(n-1)}(x)$ следует, что f имеет обычные производные до $(n-1)$ порядка включительно в окрестности точки x. Применим математическую индукцию.

a) При $n = 1$ равенство (19) принимает вид:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f\big)(x+\theta h) \Big\} \cdot h + o(h).$$

Таким образом, получаем теорему 2 о среднем для K_s-субдифференциалов.

b) Воспользуемся индукцией по n. Допустим, утверждение теоремы верно для $\forall \widetilde{f}$, удовлетворяющего условию теоремы для порядка $(n-1)$:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) \in \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} \widetilde{f}^{(n-1)}\big)(x+\theta h) \Big\} + o(h^{n-1}).$$

Отсюда $\forall y_{n-1} \in \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h) \Big\}$ имеем:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_{n-1} \in o(h^{n-1}),$$

где $o(h^{n-1})$ не зависит от выбора $\widetilde{y}_{n-1}$. Введем $\forall y_n \in \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h) \Big\}$ вспомогательную функцию:

$$r_n(f, y_n; h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n.$$

Вычислим обычную производную вспомогательной функции r_n:

$$r_n^{'}(f, y_n; h) = f^{'}(x+h) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} h^{k-1} - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_n.$$

Поскольку, $\partial_K^{[']} f^{(n-1)}(x) = \partial_K^{[']}((f')^{(n-1)})(x)$, то по допущению индукции: $r_n^{'}(f, y_n; h) = r_{n-1}(f', y_{n-1} = y_n; h) = o(h^{n-1})$. Применяя обычную теорему о среднем $(0 < \theta < 1)$, получим:

$$r_n(f, y_n; h) \in \overline{co}\Big\{ r_n^{'}(f, y_n; \theta h) \;\Big|\; 0 < \theta < 1 \Big\} \cdot h = o(h^{n-1}) \cdot h = o(h^n).$$

Итак, доказано по индукции, что $f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n = o(h^n)$, где многозначная оценка «o» не зависит от выбора $y_n \in \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h) \Big\}$.

В таком случае $f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} y_n + o(h^n)$ при любом выборе

$y_n \in \overline{co}\Big\{ \bigcup\limits_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[']} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h)\Big\}$. Таким образом, мы получили равенство (19). $\square$

Для нечетного порядка имеет место следующая формула Тейлора.

Теорема 13. *Если отображение f' абсолютно непрерывно в окрестности $U(x)$ и существует $\partial_K^{[']}(f^{(2n)})(x) = \partial_K^{[2n+1]} f(x)$, то имеет место равенство:*

$$f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} \in 2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\partial_K^{[2n+1]} f(x) + o(h^{2n+1}). \quad (20)$$

Доказательство. Применим математическую индукцию.

a) При $n=1$ равенство (20) принимает вид: $f(x+h) - f(x-h) \in 2\partial_K^{[']} f(x)\cdot h + o(h)$. Получаем:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in \partial_K^{[']} f(x) + o(1). \quad (21)$$

Поскольку $\partial_K^{[']} f(x) = K\underline{-}\lim\limits_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{ \dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0<h<\delta\Big\}$, то $\forall \varepsilon > 0\, \exists\, \delta > 0$ $(0<h<\delta)$, следует: $\overline{co}\Big\{\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}\Big\} \subset \partial_K^{[']} f(x) + O_\varepsilon(0)$.

В частности, $\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \in \partial_K^{[']} f(x) + O_\varepsilon(0)$. При этом, вводя многозначное отображение

$$\varphi(\delta) = O_{\varepsilon(\delta)}(0),$$

следует: $\varphi(h) = o(1)$ при $h\to 0$. Таким образом выполнено условие (21).

b) Допустим, утверждение теоремы верно для $\forall \widetilde{f}$, удовлетворяющий условию теоремы для порядка для порядка $(2n-1)$:

$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) \in \dfrac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}\partial_K^{[2n-1]}\widetilde{f}(x) + o(h^{2n-1})$. Отсюда $\forall y_{2n-1} \in \partial_K^{[2n-1]} f(x)$ вытекает: $\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) - \dfrac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}\widetilde{y}_{2n-1} \in o(h^{2n-1})$, где $o(h^{2n-1})$ не зависит от выбора $\widetilde{y}_{2n-1}$. Введем $\forall y_{2n+1} \in \partial_K^{[2n+1]} f(x)$ вспомогательную функцию:

$$r_{2n+1}(f,h) = f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}h^{2k-1} - 2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}y_{2n+1}.$$

Вычисляя обычную вторую производную вспомогательной функции r_{2n+1} по h, имеем:

$$r''_{2n+1}(f,h) = f''(x+h) - f''(x-h) - 2\sum_{k=2}^{n}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-3)!}h^{2k-3} - \frac{h^{2n-1}}{(2n-1)!}y_{2n+1},$$

откуда, по допущению индукции, следует:

$r''_{2n+1}(f, y_{2n+1}; h) = r_{2n-1}(f'', \widetilde{y}_{2n-1} = y_{2n+1}; h) = o(h^{2n-1})$.

Применяя дважды обычную теорему о среднем $(0<\theta<1)$, получим:

$$r_{2n+1}(f'',y_{2n+1};h)\in\overline{co}\Big\{r_{2n+1}(f^{'},y_{2n+1};\theta h)\ \Big|\ 0<\theta<1\Big\}\cdot h\subset$$
$$\subset\overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\overline{co}\ (r^{''}_{2n})(f',[0;\theta h])\Big\}\cdot h=$$
$$=\overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\overline{co}\ r_{2n-1}(f'',[0;\theta h])\cdot h\Big\}\cdot h=o(h^{2n-1})\cdot h^2=o(h^{2n+1}),$$

т. е. $r_{2n+1}(f'',h)=o(h^{2n+1})$. Доказано по индукции, что

$$f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}h^{2k-1}-2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}y_{2n+1}=o(h^{2n+1}),$$

где оценка «о» не зависит от выбора $\forall y_{2n+1}\in\partial_K^{[2n+1]}f(x)$.
Отсюда

$$f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}h^{2k-1}=2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}y_{2n+1}+o(h^{2n+1}),$$

следовательно, равенство (20) выполнено. □

Аналогично получим формулу Тейлора в четном случае.

Теорема 14. *Если отображение f' абсолютно непрерывно в окрестности $U(x)$ и существует $\partial_K^{[2n]}f(x)=\partial_K^{[']}(f^{(2n-1)})(x)$, то имеет место равенство:*

$$f(x+h)+f(x-h)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k}\in2\frac{h^{2n}}{(2n)!}\partial_K^{[2n]}f(x)+o(h^{2n}).\tag{22}$$

Доказательство. Применим математическую индукцию.
а) При $n=1$ равенство (22) принимает вид:
$f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\in2\partial_K^{['']}f(x)\cdot h^2+o(h^2)$. В таком случае

$$\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\in\partial_K^{['']}f(x)+o(1).\tag{23}$$

Поскольку $\partial_K^{['']}f(x)=K\underline{-}\lim\limits_{\delta\to0}\overline{co}\Big\{\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\ \Big|\ 0<h<\delta\Big\}$, то $\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0$ $(0<h<\delta)$, следует:

$$\overline{co}\Big\{\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\Big\}\subset\partial_K^{['']}f(x)+O_\varepsilon(0).$$

В частности, $\dfrac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}\in\partial_K^{['']}f(x)+O_\varepsilon(0)$. Отсюда, вводя многозначное отображение

$$\varphi(\delta)=O_{\varepsilon(\delta)}(0),$$

имеем: $\varphi(h)=o(1)$ при $h\to0$. Таким образом, выполнено условие (23).

b) Допустим, утверждение теоремы верно для $\forall\widetilde{f}$, удовлетворяющего условию теоремы для порядка $(2n-2)$: $\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x)\in\dfrac{h^{2n-2}}{(2n-2)!}\partial_K^{[2n-2]}\widetilde{f}(x)+o(h^{2n-2})$.

Тогда $\forall y_{2n-2}\in\partial_K^{[2n-2]}f(x)$ получаем: $\widetilde{f}(x+h)-\widetilde{f}(x)-\dfrac{h^{2n-2}}{(2n-2)!}y_{2n-2}\in o(h^{2n-2})$, где $o(h^{2n-2})$ не зависит от выбора $\widetilde{y}_{2n-2}\in\partial_K^{[2n-2]}f(x)$. Введем $\forall y_{2n}\in\partial_K^{[2n]}f(x)$ вспомогательную функцию:

$$r_{2n}(f,h)=f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k}-2\frac{h^{2n}}{(2n)!}y_{2n}.$$

Вычисляя обычную вторую производную вспомогательной функции r_{2n} по h, имеем:

$$r_{2n}^{''}(f,h)=f^{''}(x+h)-f^{''}(x-h)-2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k-2)!}h^{2k-2}-\frac{h^{2n-2}}{(2n-2)!}y_{2n},$$

откуда, по допущению индукции, следует:
$r_{2n}^{''}(f,y_{2n};h)=r_{2n-2}(f'',\widetilde{y}_{2n-2}=y_{2n};h)=o(h^{2n-2})$.
Применяя дважды обычную теорему о среднем $(0<\theta<1)$, получим:

$$\begin{aligned}r_{2n}(f'',y_{2n};h)\in\overline{co}\Big\{r_{2n}(f^{'},y_{2n};\theta h)\;\Big|\;0<\theta<1\Big\}\cdot h\subset\\ \subset\overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\overline{co}\;(r_{2n-1}^{''})(f',[0;\theta h])\Big\}\cdot h=\\ =\overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\overline{co}\;r_{2n-2}(f'',[0;\theta h])\cdot h\Big\}\cdot h=o(h^{2n-2})\cdot h^2=o(h^{2n}),\end{aligned}$$

т. е. $r_{2n}(f'',h)=o(h^{2n})$. Доказано по индукции, что

$$f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k}-2\frac{h^{2n}}{(2n)!}y_{2n}=o(h^{2n}),$$

где оценка «о» не зависит от выбора $\forall y_{2n}\in\partial_K^{[2n]}f(x)$.
Отсюда

$$f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k}=2\frac{h^{2n}}{(2n)!}y_{2n}+o(h^{2n}),$$

следовательно, $r_{2n}(f'',h)=o(h^{2n})$. В результате имеет место равенство (22). □

Автор выражает признательность проф. И. В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Басаева Е. К. *О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов* // Владикавказский математический журнал. – 2006. – *8*, № 4. – С. 6-12.

[2] Демьянов В. Ф., Рощина В. А. *Обобщенные субдифференциалы и экзостеры* // Владикавказский математический журнал. –2006. – *8*, № 4. – С. 19-31.

[3] Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. *Локальный выпуклый анализ* // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — 1982. — *19.* — С. 155–206.

[4] Сакс С. *Теория интеграла: Пер. с англ. И. С. Березина, Б. М. Будака и Л. А. Гусарова.* — М.: Изд-во иностранной литературы, 1949. — 496 с.

[5] Орлов И. В., Стонякин Ф. С. *Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — 34. — С. 121–138.

[6] Орлов И. В., Стонякин Ф. С. *Предельная форма свойства Радона - Никодима справедлива в любом пространстве Фреше* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — 37. – С. 55–69.

[7] Орлов И. В., Халилова З. И. *Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам* // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2013. — 49. — С. 99–131.

[8] Орлов И. В., Халилова З. И. *Компактные субдифференциалы в банаховых конусах* // Украинский математический вестник. — 2013. —*10*, № 4. — С. 532–558.

[9] Тихомиров В. М. *Выпуклый анализ* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1987. — 14. — С. 5–101.

[10] Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 — . — Т. 1. — 2001. – 607 с.

[11] Половинкин Е. С., Балашов М. В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.* — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 416 с.

[12] Пшеничный Б. Н. *Выпуклый анализ и экстремальные задачи.* — М.: Наука, 1980. — 320 с.

[13] Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ*: Пер. с англ. А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова. —М.: Мир, 1973. —472 с.

[14] Натансон И. П *Теория функций вещественной переменной.* — М.: Наука, 1974. — 480 с.

[15] Гурса Э. *Курс математического анализа*: Пер. с франц. А. И. Некрасова. — М.: Гос-е технико-теоретическое изд-во, 1933. — 271 с.

[16] Халилова З. И. *Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам* // Динамические системы. — 2012. —- Т. 2(30), № 3-4. -– С. 115—133.

[17] Халилова З. И. *Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам* // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". – 2012. — *25 (64)* , № 2. — С. 140–160.

[18] Стонякин Ф. С. *Компактные характеристики отображений и их приложения к интегралу Бохнера в локально выпуклых пространствах* // Дисс. к.ф.-м.н., Симферополь, 2011.

[19] Баран И. В. *Симметрические компактные субдифференциалы первого порядка* // Ученые записки Тавр. нац. ун-та им. В. И. Вернадского. —2013. — Т. 26(65), №1. — С. 16–30.

[20] Баран И. В. *Симметрические компактные субдифференциалы второго порядка и их применение к рядам Фурье* // Динамические системы. — 2013. —- Т. 3(31), № 3-4. -– С. 201—214.

[21] Davis W. J. *The Radon - Nikodym property* // Seminare d'analyse fonctionelle (Polytechnique) (1973-1974). — exp no. O.-P. 1–12.

[22] Diestel J., Uhl J. J. *Vector Measures.* — Providence, Amer. Math. Soc., 1977.

[23] James R. D. *Generalized nTH primitives* // Trans. Amer. Math. Soc. — 1954. — Vol. 76, №1. — P. 149 – 176.

[24] Orlov I. V., Stonyakin F. S. *Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral* // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15, №1. — P. 74 – 90.

Теорема про середнє та формула Тейлора для симетричних похідних і симетричних K-субдиференціалів

У статті розглянуто поняття симетричного компактного субдиференціала n-го порядку. Отримані теорема про середнє та формула Тейлора для симетричних похідних і симетричних K-субдиференціалів. Розглянуті деякі застосування.

Ключові слова: симетрична похідна, симетричний компактний субдиференціал, теорема про середнє, формула Тейлора, абсолютна неперервність.

Mean value theorem and Taylor formula for symmetric derivatives and symmetric K-subdifferentials

A few years ago in the works [5], [6] *the concept of compact subdifferential (or K-subdifferential) was introduced and then is has found successful application to the vector integration theory and in the calculus of variations.*

Recently, the concept of the K-subdifferential was generalized to the symmetric case. The concept of the symmetric K-subdifferential (or K_s-subdifferential) generalizes symmetric derivative instead of usual one.In the works [19], [20] *the basic tools of the theory of the first and the second order K_s-subdifferentials were researched.*

Our work contains research of n-th order K_s-subdifferentials. Like the case of the usual K-subdifferential, symmetric subdifferential is defined as the following K-limit:

$$\partial_K^{[n]} f(x) = K\text{-}\varliminf_{\delta\to 0} \overline{co}\Big\{ \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big) \;\Big|\; 0 < h < \delta \Big\}.$$

In the first section the finite increments formula is received and the following mean value theorem for K_s-subdifferentiable mappings is proved:

$$f(x+h)-f(x)\in\overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1}\partial_K^{[']}f(x+\theta h)\Big)\cdot h.$$

In particular, the following mean value theorem for symmetric derivatives is received:

$$f(x+h)-f(x)\in\overline{co}\,f^{[']}\big((x;x+h)\big)\cdot h.$$

The second and third sections contain Taylor formula, first for the symmetric derivatives and then for the K_s-subdifferentiabls. Let's formulate, as an example, the Taylor formula for the K_s-subdifferentiabls.

Theorem. *Let a mapping $f : U(x)\to F$ be absolutely continuous in some neighborhood $U(x)$ of the point $x\in\mathbb{R}$, where F is an arbitrary real Banal space. Suppose that there exists $\partial_K^{[']}(f^{(n-1)})(x)$. Then the following estimate:*

$$f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k\in\frac{h^n}{n!}\overline{co}\Big\{\bigcup_{0<\theta<1}\big(\partial_K^{[']}f^{(n-1)}\big)(x+\theta h)\Big\}+o(h^n). \qquad (24)$$

is valid.

Note in addition, that n-th order K_s-subdifferential is connected with the right part of (24) *by the inclusion*

$$\partial_K^{[n]}f(x)\subset\partial_K^{[']}(f^{(n-1)})(x).$$

Keywords: symmetric derivative, symmetric compact subdifferential, mean value theorem, Taylor formula, absolute continuity.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 21–30.

УДК 517.98+517.954 MSC2000: 28C20+35R15

Ю.В. Богданский, Я.Ю. Санжаревский

ЛАПЛАСИАН ПО МЕРЕ И ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ

Для функций на сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве H $(\dim H \leqslant \infty)$ предложена версия оператора Лапласа, порождённого заданной на H (борелевской неотрицательной конечной) мерой μ. Исследованы существование и единственность решений (в т.ч. "слабых") задачи Дирихле для эллиптического уравнения в области G, согласованной с исходной мерой μ. Приведён модельный пример согласования меры μ с областью G.

Ключевые слова: гильбертово пространство, борелевская мера, дифференцирование мер, эллиптические уравнения, задача Дирихле.

E-mail: `bogd__@ukr.net, jamfoteur@gmail.com`

1. Предварительные сведения

Пусть H - сепарабельное вещественное гильбертово пространство $(\dim H \leqslant \infty)$; μ — конечная (неотрицательная) борелевская мера на H.

Обозначим через $C_b = C_b(H)$ пространство всех ограниченных и непрерывных функций $f\colon H \to \mathbb{R}$; символом $C_b(H;H)$ обозначим пространство всех непрерывных ограниченных векторных полей $H \to H$; через $C_b^1 = C_b^1(H)$ (соответственно $C_b^1(H;H)$) обозначим пространство всех функций $f \in C_b$ (соответственно, векторных полей $\mathbf{X} \in C_b(H;H)$), дифференцируемых по Фреше в каждой точке $x \in H$ с непрерывной и ограниченной на всём H производной $f'(\cdot)$ (соответственно $\mathbf{X}'(\cdot)$).

Пусть $\Phi_t = \Phi_t^{\mathbf{Z}}$ — поток векторного поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(H;H)$. Пусть мера μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{Z}$ в сильном смысле (по Фомину). Это означает, что для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(H)$ существует предел $\vartheta(A) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\mu(\Phi_t A) - \mu(A)\right)$, откуда следует, что $\vartheta = d_{\mathbf{Z}}\mu$ является борелевской (знакопеременной) мерой, абсолютно непрерывной относительно меры μ. Соответствующую плотность $\frac{d\vartheta}{d\mu}$ принято называть логарифмической производной меры μ вдоль поля $\mathbf{Z}$ или дивергенцией поля $\mathbf{Z}$ (относительно меры μ): $\operatorname{div}\mathbf{Z} = \operatorname{div}_\mu \mathbf{Z} = \frac{d\vartheta}{d\mu}$.

Сильная дифференцируемость меры μ вдоль поля $\mathbf{Z}$ равносильна существованию функции $\rho = \rho_\mu^{\mathbf{Z}} \in L_1(H,\,\mu)$, которая для всех функций $u \in C_b^1(H)$ удовлетворяет равенству:

$$\int\limits_H u\cdot\rho\,d\mu = -\int\limits_H (\mathbf{grad}\,u, \mathbf{Z})\;d\mu.$$

При этом $\rho = \operatorname{div}_\mu \mathbf{Z}$.

Пусть G — ограниченная область в H с границей $S = \partial G$. Через $C^1(G)$ обозначим семейство всех функций на $\overline{G}$, допускающих продолжение на H до функций класса C_b^1; символом $C_0^1(G)$ обозначим семейство функций из $C^1(G)$, носители которых лежат в G. Аналогично определяем $C(G)$ и $C(G;H)$.

Через $L_2(G) = L_2(G,\mu)$ обозначим пространство интегрируемых с квадратом измеримых функций на G по отношению к мере $\mu|_G$. Аналогично через $L_2(G;H) = L_2(G;H,\mu)$ обозначим пространство квадратично интегрируемых векторных полей на G. Норму в $L_2(G;H)$ задаём формулой: $\|\mathbf{Z}\|^2 = \int\limits_G \|\mathbf{Z}(x)\|^2$ (интегрируемость векторного поля понимаем в смысле конструкции Бохнера).

Граница S области G предполагается гладким вложеным в H подмногообразием коразмерности 1; поле единичной внешней нормали границы S предполагается продолжимым до векторного поля $\mathbf{n} \in C_b^1(H;H)$.

Дополнительно предполагаем также, что мера μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{n}$. Существование поля $\mathbf{n}$ с указанными выше свойствами постулируем и говорим о “согласованности S с мерой μ” (см. [1]).

Пусть $\varepsilon > 0$. Символом S_ε обозначим ε-окрестность множества S. В работе [2] (формула (13)) доказано, что при согласованности S с мерой μ, имеет место равенство: $\mu(S_\varepsilon) = O(\varepsilon)\,(\varepsilon \to 0)$, а потому ([1], предложение 1) $C_0^1(G)$ плотно в $L_2(G)$.

Согласованная с S мера μ индуцирует на S поверхностную меру [1, 2], которую обозначим μ_S. Если u — ограниченная непрерывная функция на S и $\hat{u}$ — её продолжение до функции $\hat{u} \in C_b(H)$, постоянной на траекториях поля $\mathbf{n}$, то поверхностная мера μ_S корректно определяется следующей формулой, которая должна выполняться для всех ограниченных непрерывных функций на S:

$$\int\limits_S u\,d\mu_S = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} \hat{u}\,d\mu = \int\limits_G \hat{u}\cdot\rho_\mu^{\mathbf{n}}\,d\mu,$$

(см. [1]).

Далее предлагается следующая L_2-версия оператора Лапласа. Рассматривается оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \to L_2(G;H)$ с естественной областью определения $C^1(G)$ ($C^1(G) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\,u \in C(G;\,H)$). Для корректного задания этого оператора следует проверить, что условия: $u,\,v \in C^1(G)$; $u = v(\operatorname{mod}\,\mu)$ влекут за собой равенство:

$\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v (\mathrm{mod}\ \mu)$. Данное требование выполнено для тех мер μ, для которых неравенство $\mu(U) > 0$ имеет место для любого непустого открытого множества U. Последнее условие выполнено для квазиинвариантной меры μ, т.е. такой меры μ, для которой множество квазиинвариантных сдвигов h ($\mu_h(A) \coloneqq \mu(A + h)$; $\mu_h \sim \mu$) содержит плотное в H линейное подмногообразие $\mathcal{L}$. Примером такой меры является гауссова мера $\mu = \mu_A$ в H, ядерный корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H.

Дальнейшие построения предполагают выполнение следующих двух дополнительных условий на меру μ:

а) оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(G) \supset C^1(G) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in L_2(G; H)$ с областью определения $C^1(G)$ корректно определён и допускает замыкание;

б) $\rho_\mu^{\mathbf{n}}|_G \in L_\infty(G)$.

Модельный пример меры, согласованной с поверхностью S, для которой выполняются также одновременно условия а) и б) предложен в заключительной части работы.

Совместное выполнение условий а) и б) позволяет корректно ввести оператор следа $\gamma\colon L_2(G) \to L_2(S) = L_2(S, \mu_S)$ с областью определения $D(\overline{\mathbf{grad}})$ (см. [1]). При этом для функций $u \in C^1(G)\colon \gamma(u) = u|_S$; γ представляет собой ограниченный оператор из банахова в норме графика пространства $D(\overline{\mathbf{grad}})$ в $L_2(S)$.

Пусть μ дифференцируема вдоль поля $\mathbf{Z} \in C_b^1(H; H)$; $u \in C_b^1(H)$. В работе [1] получена формула:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}} G} u\, d\mu = \int\limits_G (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{Z})\ d\mu + \int\limits_G u \cdot \rho_\mu^{\mathbf{Z}}\, d\mu.$$

В работе [2] доказаны следующие равенства:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{Z}} G} u\, d\mu = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{(\mathbf{Z},\, \mathbf{n})\mathbf{n}} G} u\, d\mu =$$

$$= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \int\limits_{\Phi_t^{\mathbf{n}} G} (\mathbf{Z},\, \mathbf{n}) \cdot u\, d\mu = \int\limits_S (\mathbf{Z},\, \mathbf{n}) \cdot u\, d\mu_S.$$

(в силу равномерной непрерывности функции $(\mathbf{Z},\, \mathbf{n})\, u$ в окрестности поверхности S — см. [1]).

Тем самым доказана формула:

$$\int\limits_S (\mathbf{Z},\, \mathbf{n})\, u\, d\mu_S = \int\limits_G (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{Z})\ d\mu + \int\limits_G u \cdot \rho_\mu^{\mathbf{Z}}\, d\mu \tag{1}$$

Поскольку левая часть в формуле (1) обращается в ноль для функций $u \in C_b^1(H)$, для которых $u|_S = 0$, а $\operatorname{Ker}\gamma \supset C_0^1(G)$, то $\operatorname{Ker}\gamma$ плотно в $L_2(G)$. Формула (1) оправдывает введение L_2-версии оператора div в одном из следующих двух вариантов.

Вариант 1. Оператор $\operatorname{div}\colon L_2(G;H) \to L_2(G)$ определим формулой: $\operatorname{div} = -\left(\overline{\mathbf{grad}}\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^*$.

Вариант 2. Оператор $\operatorname{div}\colon L_2(G;H) \to L_2(G)$ определим формулой: $\operatorname{div} = -\left(\mathbf{grad}\big|_{C_0^1(G)}\right)^*$.

В обоих случаях оператор Лапласа вводим формулой: $\triangle u = \operatorname{div} \circ \overline{\mathbf{grad}} u$.

В отличие от работы [3] в данной работе рассматриваем второй вариант L_2-версии оператора div.

2. Исследование задачи Дирихле

В данном разделе предполагаем согласованность границы S ограниченной области G с мерой μ и выполнение условий а) и б), наложенных на меру μ.

Лемма 1. *Пусть* $u \in D(\overline{\mathbf{grad}})$; $\varphi \in C^1(G)$. *Тогда* $u \cdot \varphi \in D(\overline{\mathbf{grad}})$ *и при этом* $\overline{\mathbf{grad}}(u\varphi) = u\, \mathbf{grad}\, \varphi + \varphi\, \overline{\mathbf{grad}} u$.

Доказательство. Пусть последовательность $u_n \in C^1(G)$ такова, что $u_n \to u$ (в $L_2(G)$); $\mathbf{grad}\, u_n \to \mathbf{Z} = \overline{\mathbf{grad}} u$ (в $L_2(G;H)$). Поскольку $\varphi \in L_\infty(G)$, то имеют место соотношения: $u_n \cdot \varphi \to u \cdot \varphi$; $\mathbf{grad}(u_n \cdot \varphi) = \mathbf{grad}\, u_n \cdot \varphi + u_n \cdot \mathbf{grad}\, \varphi \to \varphi \cdot \overline{\mathbf{grad}} u + u \cdot \mathbf{grad}\, \varphi$, откуда и следует утверждение леммы.

□

Лемма 2. *Пусть* $\mathbf{X} \in D(\operatorname{div})$; $\varphi \in C^1(G)$. *Тогда* $\varphi \mathbf{X} \in D(\operatorname{div})$ *и при этом:* $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{X}) = (\mathbf{grad}\, \varphi, \mathbf{X}) + \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{X}$.

Доказательство. По определению оператора div для каждой функции $u \in C_0^1(G)$ имеет место равенство:

$$\int_G (\mathbf{grad}\, u, \mathbf{X})\, d\mu = -\int_G u \cdot \operatorname{div} \mathbf{X}\, d\mu.$$

Но $\varphi \cdot u \in C_0^1(G)$ и, следовательно, $\int\limits_G (\mathbf{grad}(u \cdot \varphi), \mathbf{X})\, d\mu = -\int\limits_G u \cdot \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{X}\, d\mu$, откуда, в силу леммы 1, следует равенство:

$$\int_G (\mathbf{grad}\, u, \varphi \mathbf{X})\, d\mu = -\int_G (u\, (\mathbf{grad}\, \varphi, \mathbf{X}) + \varphi \cdot \operatorname{div} \mathbf{X})\, d\mu,$$

что и доказывает лемму.

□

Пусть $f \in L_2(G)$; $k \in C^1(G)$; $a \in C(G)$; $k(x) \geqslant \delta > 0\, (\forall x \in G)$; $a(x) \geqslant \alpha > 0\, (\forall x \in G)$.

Пусть $u \in D(\triangle)$. Тогда $\overline{\mathbf{grad}} u \in D(\operatorname{div})$; в силу леммы 2 имеет место включение: $k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u \in D(\operatorname{div})$. Для $u \in D(\triangle)$ рассмотрим уравнение

$$\mathcal{L}(u) = \operatorname{div}\left(k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u\right) - a \cdot u = f \tag{2}$$

и поставим вопрос о поиске решения задачи Дирихле для уравнения (2) с краевым условием.

$$\gamma(u) = \varphi, \tag{3}$$

(здесь $\varphi \in \mathrm{Im}(\gamma)$).

Конечномерный вариант поставленной задачи в случае инвариантной меры исследован, например, в [4].

Рассмотрим сначала случай $\varphi = 0$. Тогда u является решением задачи (2)–(3) с $\varphi = 0$ в том и лишь в том случае, если $u \in \operatorname{Ker}\gamma$ и при всех $v \in C_0^1(G)$ удовлетворяет уравнению

$$\int\limits_G v \cdot \big(\operatorname{div}\big(k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u\big) - au\big)\, d\mu = \int\limits_G vf\, d\mu. \tag{4}$$

Это следует из плотности $C_0^1(G)$ в $L_2(G)$.

Уравнение (4) преобразуем в следующее:

$$\int\limits_G \big(k\, \big(\overline{\mathbf{grad}} u,\, \mathbf{grad}\, v\big) + a \cdot uv\big)\, d\mu = -\int\limits_G vf\, d\mu. \tag{5}$$

При данных условиях на функции k и a левая часть уравнения (5) представляет собой скалярное произведение $(u,\, v)_1$ в $D(\overline{\mathbf{grad}})$; норма $\|\cdot\|_1$, индуцированная этим произведением эквивалентна норме графика. При этом существует число $C > 0$ такое, что при всех $v \in C_0^1(G)$ выполняются неравенства: $\Big|\int\limits_G vf\, d\mu\Big| \leqslant \|f\|_{L_2(G)} \cdot \|v\|_{L_2(G)} \leqslant \|f\|_{L_2(G)} \cdot C\|v\|_1$.

Пусть теперь $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(G)$ — замыкание $C_0^1(G)$ в $D(\overline{\mathbf{grad}})$ в норме графика оператора $\overline{\mathbf{grad}}$. $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(G)$ — гильбертово пространство, наделённое скалярным произведением $(\cdot,\, \cdot)_1$. Потому в силу теоремы Рисса существует единственная функция $u \in \overset{\circ}{\mathcal{H}}(G) \subset \operatorname{Ker}\gamma$, которая удовлетворяет уравнению (5) при всех $v \in C_0^1(G)$.

Пусть u — решение (5) при всех $v \in C_0^1(G)$. Перепишем (5) в виде:

$$\int\limits_G \big(k\, \overline{\mathbf{grad}} u,\, \mathbf{grad}\, v\big)\, d\mu = -\int\limits_G v\,(f + a\, u)\, d\mu.$$

Справедливость последнего равенства при всех $v \in C_0^1(G)$ означает, что $k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u \in D(\operatorname{div})$ и при этом $\operatorname{div}\big(k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u\big) = f + a\, u$. Поскольку $\frac{1}{k} \in C^1(G)$, то в силу леммы 2, $\overline{\mathbf{grad}} u \in D(\operatorname{div})$ и, следовательно, $u \in D(\triangle)$.

Тем самым для граничного условия $\gamma(u) = 0$ доказаны существование решения задачи (2)–(3) и его единственность в функциональном пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(G)$.

Замечание 1. В отличие от классической конечномерной ситуации вопрос о совпадении пространств $\operatorname{Ker}\gamma$ и $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(G)$ является открытым, а потому открыт и вопрос о единственности решения поставленной задачи.

Если теперь $\varphi \in \gamma\left(D(\triangle)\right)$, то существует функция $w \in D(\triangle)$, для которой $\varphi = \gamma(w)$. В этом случае $k \cdot \overline{\mathbf{grad}} w \in D(\mathrm{div})$, а потому определено $\mathcal{L}(w)$ и функция $u_1 = u - w$ должна удовлетворять задаче:

$$\mathcal{L}u_1 = \mathrm{div}\left(k \cdot \overline{\mathbf{grad}} u_1\right) - a \cdot u_1 = f - \mathrm{div}\left(k \cdot \overline{\mathbf{grad}} w\right) + a\,w; \tag{6}$$

$$\gamma(u_1) = 0. \tag{7}$$

Задача (6)–(7) допускает решение описанным выше приёмом.

При этом задача (6))–(7) описанным выше приёмом сводится к задаче поиска функции $u_1 \in \mathrm{Ker}\,\gamma$, которая при всех $v \in C_0^1(G)$ удовлетворяет уравнению:

$$\begin{aligned}\int\limits_G \Big(k\,\left(\overline{\mathbf{grad}} u_1,\, \mathbf{grad}\, v\right) + a\,u_1\,v\Big)\,d\mu \\ = -\int\limits_G \Big(v\,f + k\,\left(\overline{\mathbf{grad}} w,\, \mathbf{grad}\, v\right) + a\,w\,v\Big)\,d\mu.\end{aligned} \tag{8}$$

Для $\varphi \in \mathrm{Im}\,\gamma$ существует функция $w \in D(\overline{\mathbf{grad}})$, для которой $\gamma(w) = \varphi$. Докажем существование функции $u_1 \in \mathrm{Ker}\,\gamma$, которая при всех $v \in C_0^1(G)$ удовлетворяет уравнению (8). Тогда функция $u = u_1 + w$ может быть истолкована как “слабое решение” задачи (2)–(3).

Действительно, существуют числа $C_1, C_2 > 0$ такие, что при всех $v \in C_0^1(G)$ выполнены неравенства:

$$\begin{aligned}&\Big|\int\limits_G \left(v\,f + k\,\left(\overline{\mathbf{grad}} w,\, \mathbf{grad}\, v\right) + a\,w\,v\right)\,d\mu\Big| \leqslant \\ &\leqslant \|f + a\,w\|_{L_2(G)}\,\|v\|_{L_2(G)} + \sup_G k(\cdot) \cdot |\!|\!|\overline{\mathbf{grad}} w|\!|\!|_{L_2(G;H)} \cdot |\!|\!|\,\mathbf{grad}\, v|\!|\!|_{L_2(G;H)} \leqslant \\ &\leqslant C_1\,\|v\| + C_2\,|\!|\!|\,\mathbf{grad}\, v|\!|\!|\end{aligned}$$

и приведённые выше соображения позволяют, используя теорему Рисса, сделать вывод о существовании слабого решения задачи (2)–(3) для произвольной $\varphi \in \mathrm{Im}\,\gamma$.

Тем самым для $\varphi \in \gamma\left(D(\triangle)\right)$ доказано существование решения задачи (2)–(3) (а для $\varphi \in \mathrm{Im}\,\gamma$ доказано существование слабого решения задачи (2)–(3)).

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Пусть граница S ограниченной области G согласована с мерой μ, а сама мера удовлетворяет условиям а), б). Тогда задача (2)–(3) в случае $\varphi \in \gamma\left(D(\triangle)\right)$ имеет решение $u \in D(\triangle)$. Если $\varphi \in \mathrm{Im}\,\gamma$, то задача (2)–(3) имеет слабое решение, т.е. существует функция $u \in D\left(\overline{\mathbf{grad}}\right)$, удовлетворяющая условию (3) и при всех $v \in C_0^1(G)$ уравнению (5). Если же $\varphi = 0$, то задача (2)–(3) имеет единственное решение в функциональном пространстве $\overset{\circ}{\mathcal{H}}(G)$.*

Замечание 2. В том случае, если оператор div определить равенством: $\operatorname{div} = -\left(\overline{\mathbf{grad}}\big|_{\operatorname{Ker}\gamma}\right)^*$ (вариант 1), результат теоремы 1 более содержателен: задача (2)–(3) для $\varphi \in \gamma\left(D(\triangle)\right)$ имеет и притом единственное решение $u \in D(\triangle)$; в случае $\varphi \in \operatorname{Im}\gamma$ задача (2)–(3) имеет и притом единственное слабое решение (при этом слабое решение определено аналогично с заменой $C_0^1(G)$ на $\operatorname{Ker}\gamma$).

3. Модельный пример

В данном разделе приводится пример меры, согласованной с поверхностью $S = \partial G$, для которой выполнены условия а), б) п°1.

Пусть $\mathbf{n} \in C_b^1(H;H)$; Φt — поток векторного поля $\mathbf{n}$; μ — (неотрицательная) конечная борелевская мера на H; $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемая неотрицательная функция, для которой $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt < \infty$; φ и φ' ограничены на $\mathbb{R}$.

Отображение $\mathbb{R}\times H \ni \langle t,x\rangle \mapsto \Phi_{-t}x \in H$ является непрерывным и потому для каждого борелевского множества $A \in \mathfrak{B}(H)$ множество $\big\{\langle t,x\rangle \,\big|\, \Phi_{-t}x \in A\big\}$ $\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathfrak{B}(H)$ – измеримо. Поэтому для всех $A \in \mathfrak{B}(H)$ функция $t \mapsto \mu\left(\Phi_t A\right) = \int\limits_H j_A \circ \Phi_{-t}\,d\mu$ является $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$-измеримой (и ограниченной) ([5], с. 225–226). Тем самым определён интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mu\left(\Phi_t A\right)\,dt$. Формула

$$\mu_\varphi(A) = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mu\left(\Phi_t A\right)\,dt \tag{9}$$

корректно определяет неотрицательную конечную борелевскую меру на H. Мера μ_φ дифференцируема вдоль векторного поля $\mathbf{n}$ и при этом для каждого $A \in \mathfrak{B}(H)$ имеет место равенство:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_0 \mu_\varphi\left(\Phi_t A\right) = -\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(s)\,\mu\left(\Phi_s A\right)\,ds.$$

Пусть, дополнительно, существует константа C, для которой при всех $s \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $\left|\varphi'(s)\right| \leqslant C\,\varphi(s)$. Тогда для каждого борелевского множества $A \subset H$ имеет место неравенство:

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi'(t)\,\mu\left(\Phi_t A\right)\,dt\right| \leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mu\left(\Phi_t A\right)\,dt,$$

откуда $|d\mu_\varphi(A)| \leqslant C\,\mu_\varphi(A)$, а потому $\rho^{\mathbf{n}}_{\mu_\varphi} = \frac{d(d\mu_\varphi)}{d\mu_\varphi} \in L_\infty(H,\mu_\varphi)$. Примером такой функции φ является сглаженная в окрестности нуля функция

$$\psi(s) = e^{-\alpha\,|s|},\ \alpha > 0. \tag{10}$$

Если теперь Φ_n — продолжение на H поля единичной внешней нормали к S, то S согласована с мерой μ_Φ и при этом мера μ_Φ удовлетворяет условию б).

Пусть в H существует полная система векторов, вдоль которых исходная мера μ L_2-дифференцируема (т.е. такая система векторов $h \in H$, вдоль которых производная меры $d_h\mu$ имеет плотность $\rho_\mu^h = \frac{d(d_h\mu)}{d\mu} \in L_2(H)$). Примером такой меры является гауссова мера, корреляционный оператор которой имеет плотный образ в H.

Теорема 2. *Пусть конечная борелевская (неотрицательная) мера μ удовлетворяет приведённому выше условию. Пусть, дополнительно, $\mu(U) > 0$ для любого непустого открытого множества U в H. Тогда мера μ_φ, определённая формулой* (9) *с функцией φ, представляющей собой сглаженную в окрестности нуля функцию ψ (см.* (10)*), согласована с S и удовлетворяет условиям а) и б) n°1.*

Доказательство. Осталось проверить лишь корректность и замыкаемость оператора $\mathbf{grad}\colon L_2(G,\mu_\varphi) \supset C^1(G) \ni u \mapsto \mathbf{grad}\, u \in L_2(G; H, \mu_\varphi)$.

Если U — открытое непустое множество в H, то, в силу (9), $\mu_\varphi(U) > 0$. Поэтому, если $u, v \in C_b^1(G)$; $u = v \,(\mathrm{mod}\,\mu)$, то $\mathbf{grad}\, u = \mathbf{grad}\, v \,(\mathrm{mod}\,\mu)$, а поэтому оператор $\mathbf{grad}$ определён корректно.

Из (9) для ограниченных борелевских функций f получим равенство:

$$\int\limits_H f\, d\mu_\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt \int\limits_H f \circ \Phi_{-t}\, d\mu. \tag{11}$$

Формула (11) обобщается на случай неотрицательных функций $f \in L_1(H, \mu_\varphi)$. С этой целью строим последовательность ограниченных измеримых функций f_n, для которых $f_n \nearrow f$. Тогда при каждом $t \in \mathbb{R}$ имеет место сходимость: $h_n(t) = \int\limits_H f_n \circ \Phi_{-t}\, d\mu \nearrow h(t)$ $(h(t) \in [0; +\infty])$. Поскольку числовая последовательность $\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, h_n(t)\, dt$ ограничена сверху интегралом $\int\limits_H f\, d\mu_\varphi$, то по теореме Беппо Леви функция $h(t)$ интегрируема на $\mathbb{R}$ по мере $\varphi\, dt$ и $h(t)$ почти всюду конечна. Итак, $f \circ \Phi_{-t} \in L_1(\mu)$ для почти всех t и равенство (11) верно для $f \in L_1(H, \mu_\varphi)$; $f \geqslant 0$.

Пусть $u_m \in C^1(G)$; $u_m \to 0$ в $L_2(G, \mu_\varphi)$; $\mathbf{grad}\, u_m \to \mathbf{Z}$ в $L_2(G; H, \mu_\varphi)$. Предстоит доказать, что $\mathbf{Z} = \mathbf{0}$ $(\mathrm{mod}\ \mu_\varphi)$.

Допускаем противное: пусть $\|\mathbf{Z}\|^2_{L_2(G;H,\mu_\varphi)} = \delta > 0$. Пользуясь тем, что $\mu_\varphi(S) = 0$ (следствие согласованности S и μ_φ) выберем такое $\varepsilon > 0$, что

$$\int\limits_{G \setminus S_\varepsilon} \|\mathbf{Z}(\cdot)\|^2\, d\mu_\varphi > \frac{\delta}{2}$$

Пусть функция $\eta \in C_0^1(G)$ такова, что $0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1$ и при этом $\eta(x) = 0$ при $x \in S_{\frac{\varepsilon}{2}}$; $\eta(x) = 1$ при $x \in G \setminus S_\varepsilon$. Тогда $\eta\, u_m \to 0$ в $L_2(G,\, \mu_\varphi)$; $\mathbf{grad}(\eta\, u_m) = \eta\, \mathbf{grad}\, u_m + u_m\ \mathbf{grad}\, \eta \to \eta\mathbf{Z}$. При этом $\|\eta\, \mathbf{Z}\|^2_{L_2(G;H,\, \mu_\varphi)} > \frac{\delta}{2} > 0$. Потому, не теряя общности, можно считать, что $u_m \in C_0^1(G)$ и $\mathrm{supp}\, u_m \subset G \setminus S_{\frac{\varepsilon}{2}}$.

Поскольку теперь $u_m \in C_0^1(G)$, то, применив формулу (11), сходимость $\mathbf{grad}\, u_m \to \mathbf{Z}$ в $L_2(G; H,\, \mu_\varphi)$ перепишем в виде:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt \int\limits_{H} \|(\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}\, x) - \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x)\|^2 \; d\mu \to 0. \tag{12}$$

Переходя к подпоследовательностям из (12) получим для почти всех t сходимость:

$$\int\limits_{H} \|(\mathbf{grad}\, u_{m_k})(\Phi_{-t}\, x) - \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x)\|^2 \, d\mu \to 0,\ k \to \infty. \tag{13}$$

Однако, $\left(\mathbf{grad}(u_m \circ \Phi_{-t})\right)(x) = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)\right]^* (\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}\, x)$, откуда

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathbf{grad}(u_m \circ \Phi_{-t})(x) - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)\right]^* \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x)\right\| \leqslant \\
&\leqslant \left\|\left(\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)\right)^*\right\| \cdot \|(\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}\, x) - \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x)\| \leqslant \\
&\leqslant e^{C\,|t|}\; \|(\mathbf{grad}\, u_m)(\Phi_{-t}\, x) - \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x))\|\,,
\end{aligned}$$

где $C = \sup\limits_{H} \|\mathbf{n}'(\cdot)\|$.

Теперь из (13) делаем вывод: для почти всех t имеет место сходимость:

$$\int\limits_{H} \left\|\mathbf{grad}(u_{m_k} \circ \Phi_{-t})(x) - \left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\, x)\right]^* \mathbf{Z}(\Phi_{-t}\, x)\right\|^2 \, d\mu \to 0,\ k \to \infty. \tag{14}$$

Исходное условие $u_{m_k} \to 0$ в $L_2(G, d\mu_\varphi)$ из тех же соображений приводит к сходимости (для почти всех t):

$$\int\limits_{H} u_{m_{k_s}}^2 \circ \Phi_{-t}\, d\mu \to 0,\ s \to \infty. \tag{15}$$

Покажем, что в условиях теоремы оператор $\mathbf{grad}\colon L_2(H,\mu) \supset C_b^1(H) \ni v \mapsto \mathbf{grad}\, v \in L_2(H; H, \mu)$ замыкаем.

Действительно, положим: $v_m \to 0$; $\mathbf{grad}\, v_m \to \mathbf{Z}$ (здесь $v_m \in C_b^1(H)$).

Тогда для $\psi \in C_b^1(H)$ выпишем формулу интегрирования по частям в направлении h $\left(\rho_\mu^h \in L_2(H,\mu)\right)$:

$$\int\limits_{H} (\mathbf{grad}\, v_m,\, \psi\, h)\; d\mu = -\int\limits_{H} v_m\; (\mathbf{grad}\, \psi,\, h)\; d\mu - \int\limits_{H} v_m \cdot \psi \cdot \rho_\mu^h \, d\mu,$$

(см., например, [6], с. 179).

Предельным переходом получим: $\int\limits_{H} (\mathbf{Z},\, \psi\, h) = 0$ и осталось заметить, что из последнего равенства следует ортогональность $\mathbf{Z}$ в $L_2(H; H, \mu)$ всевозможным линейным комбинациям индикаторов открытых подмножеств в H (с векторными коэффициентами), которые плотны в $L_2(H; H, \mu)$.

Теперь из (14)–(15) можно сделать вывод: для почти всех t имеет место равенство:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\,x)\right]^{*}\mathbf{Z}(\Phi_{-t}\,x) = 0 \pmod{\mu}$$

откуда, в силу невырожденности оператора $\frac{\partial}{\partial x}(\Phi_{-t}\,x)$, $\mathbf{Z}(\Phi_{-t}\,x) = 0 \pmod{\mu}$. Отсюда:

$$\int\limits_H \|\mathbf{Z}\|^2\,d\mu_\varphi = \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,dt \int\limits_H \|\mathbf{Z}\circ\Phi_{-t}\|^2\,d\mu = 0$$

Полученное противоречие доказывает теорему 2. □

Список литературы

[1] Богданский Ю. В. *Лапласиан по мере на гильбертовом пространстве и задача Дирихле для уравнения Пуассона в L_2-версии* // УМЖ. – 2011. – **63**, №9. – С. 1168-1178.

[2] Богданский Ю. В. *Банаховы многообразия с ограниченной структурой и формула Гаусса-Остроградского* // Укр. мат. журн. – 2012. – **64**, №10. – С. 1299-1313.

[3] Богданский Ю. В., Санжаревский Я. Ю. *Задача Дирихле с лапласианом по мере на гильбертовом пространстве* // Укр. мат. журн. – подано в печать 18.03.2013.

[4] Михайлов В. П. *Дифференциальные уравнения в частных производных* // М.: Наука, 1976. – 392 с.

[5] Богачев В. И. *Основы теории меры* // М.; Ижевск: РХД, 2006. – т. 1 – 584 с.

[6] Богачев В. И. *Дифференцируемые меры и исчисление Маллявэна* // М.; Ижевск: РХД, 2008. – 544 с.

Лапласіан по мірі та задача Діріхле *Для функцій на сепарабельному дійсному гільбертовому просторі H ($\dim H \leqslant \infty$) запропоновано версію оператора Лапласа, породженого заданою на H (борелівською невід'ємною скінченною) мірою μ. Досліджено існування та единість розв'язків (в т.ч. "слабких") задачі Діріхле для еліптичного рівняння в області G, що погоджена з вихідною мірою μ. Наведено модельний приклад погодження міри μ з областю G.*

Ключові слова: гільбертів простір, борелівська міра, диференціювання мір, еліптичні рівняння, задача Діріхле.

Laplacian on measure and the Dirichlet problem *It was proposed Laplace operator version on functions on a separable real Hilbert space H ($\dim H \leqslant \infty$) that is generated by the (non-negative finite Borel) measure μ defined on H. It was studied both of existence and uniqueness of solutions (including "weak" ones) of the Dirichlet peoblem for the elliptic equation in a region G that is agreed with an initial measure μ. It was given an example of agreeing of a measure μ with a region G.*

Keywords: Hilbert space, Borel measure, differentiation of measures, elliptic equations, Dirichlet problem.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 31–44.

УДК 517.972

Е. В. Божонок, Е. М. Кузьменко

КЛАССЫ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ, ИМЕЮЩИХ НЕЛОКАЛЬНЫЙ КОМПАКТНЫЙ ЭКСТРЕМУМ В $W^{1,p}$ НАД МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТЬЮ

В данной статье разработана схема исследования вариационного функционала на нелокальный компактный экстремум в нуле в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. Приведен ряд классов вариационных функционалов, имеющих нелокальных K–экстремум.

Ключевые слова: вариационный функционал, пространства Соболева, K–экстремум.

Введение. Предварительные сведения

Начиная с работы Л. Тонелли [1], вариационные задачи в пространствах Соболева привлекают внимание многих математиков. В большинстве случаев (см., например, [2]–[5]) исследование экстремальных вариационных задач в пространствах Соболева было связано с так называемыми прямыми методами вариационного исчисления.

Недавно был разработан новый метод исследования вариационного функционала в пространстве Соболева в одномерном случае (см. наши работы [6]–[8]). Он основан на исследовании так называемых *компактно-аналитических* (или, K–*аналитических*) свойств и *компактных экстремумов* (K–*экстремумов*) вариационных функционалов. Впоследствии этот метод был перенесен на многомерный случай ([9]–[12]).

В настоящей работе на основе полученных ранее как необходимых так и достаточных условий компактного экстремума разработана схема исследования вариационного функционала на нелокальный K–экстремум в нуле в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod_{i=1}^{N}[0;T]$. Приведен ряд классов вариационных функционалов, имеющих нелокальных K–экстремум.

1. K–аналитические свойства и условия K–экстремума вариационного функционала в $W^{1,p}$

В данном пункте в обзорном порядке приведем некоторые вспомогательные определения и результаты (см. [8], [11], [12]), необходимые для дальнейшего исследования вариационного функционала на нелокальный компактный экстремум в нуле в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, над многомерной компактной областью $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$.

Пусть E — произвольное вещественное локально выпуклое пространство, $\mathfrak{C}(E)$ — система всех абсолютно выпуклых компактов в E. Для каждого $C \in \mathfrak{C}(E)$ обозначим через E_C линейную оболочку C, снабженную банаховой нормой $\|\cdot\|_C$, порожденной множеством C.

Определение 1. Функционал $\Phi : E \to \mathbb{R}$ называется *K–непрерывным* (*K–дифференцируемым, дважды K–дифференцируемым* и т.д.) в точке $y \in E$, если все сужения Φ на $(y + E_C)$ непрерывны (дифференцируемы по Фреше, дважды дифференцируемы по Фреше и т.д.) в y относительно нормы $\|\cdot\|_C$. Аналогично скажем, что Φ имеет *компактный экстремум* (*K–экстремум*) в y, если все сужения $\Phi\big|_{y+E_C}$ имеют локальный экстремум в y относительно соответствующих норм.

В наших работах [9]–[10], на базе понятия доминантной смешанной гладкости, были введены широкие классы допустимых интегрантов, названных вейерштрассовскими *K–псевдополиномами*, для которых вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int_D f(x, y, \nabla y)dx \tag{1}$$

в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, где D — компакт в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей, обладает соответствующими K–аналитическими свойствами.

Определение 2. Пусть $f \in C^m \cap K_p(z)$. Отображение f называется *вейерштрассовским K–псевдополиномом класса $W^m K_p(z)$*, если оно может быть представлено в виде

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x, y, z)(z)^k\,, \tag{2}$$

где коэффициенты R_k $(k = \overline{0, p})$, принимающие значения в пространстве k–линейных форм на $\mathbb{R}^n$, являются борелевскими отображениями и все джеты порядка m

$(R_k, \nabla_{yz} R_k, \ldots, \nabla^m_{yz} R_k)$ коэффициентов R_k удовлетворяют условию доминантной по x, y смешанной непрерывности (см. [13]).

Условие $f \in W^m K_p(z)$ обеспечивает m–кратную K–дифференцируемость функционала (1).

Теорема 1. *Если интегрант f вариационного функционала* (1) *принадлежит классу $W^m K_p(z)$, $m \in \mathbb{N}$, то функционал* (1) *m раз K–дифференцируем в пространстве $W^{1,p}(D)$. При этом классическая формула вариации m–го порядка сохраняется и для K–вариации m–го порядка, т.е.*

$$\Phi^{(m)}_K(y)(h)^m = \int\limits_D \left[\sum_{l=0}^{m} C^l_m \frac{\partial^m f}{\partial y^{m-l} \partial z^l}(x, y, \nabla y) h^{m-l} \cdot (\nabla h)^l \right] dx \,. \tag{3}$$

Для нахождения K–экстремума вариационного функционала был выведен аналог классического необходимого условия локального экстремума — обобщенное уравнение Эйлера–Остроградского (см. [11]).

Здесь мы рассматриваем вариационный функционал (1) с дополнительным граничным условием

$$y\big|_{\partial D} = y_0, \tag{4}$$

где $y_0 \in W^{1,p}(\partial D)$, D — компакт в $\mathbb{R}^n$ с липшицевой границей ∂D.

Теорема 2. *Пусть $f \in W^1 K_p(z)$. Предположим, что функционал* (1) *при граничном условии* (4) *достигает K-экстремума в точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и отображение $(\partial f / \partial z)(x, y, \nabla y)$ принадлежит пространству Соболева $W^{1,1}(D)$. Тогда п.в. на D имеет место обобщенное уравнение Эйлера-Остроградского*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \nabla y) - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial z_i}(x, y, \nabla y) \right) = 0 \,. \tag{5}$$

В частности, условие теоремы выполнено, если

$$\frac{\partial f}{\partial z} \in C^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z) \quad \text{и} \quad y(\cdot) \in W^{2,p}(D) \,.$$

Решения обобщенного уравнения Эйлера-Остроградского (5) названы *K–экстремалями* вариационного функционала (1).

Далее, в работе [12] получено достаточное условие K–экстремума вариационного функционала (1) в $W^{1,p}(D)$ в терминах гессиана подынтегральной функции.

Теорема 3. *Пусть $y(\cdot)$ — K–экстремаль функционала* (1) *в $W^{1,p}(D)$ $(p \geq 2)$ при граничном условии* (4)*. Предположим, что*
(i) интегрант f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2 K_p(z)$;
(ii) $(\partial f / \partial z)(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D)$.
Если на K–экстремали $y(\cdot)$ при всех $x \in D$ выполнены условия
1)$\left(\partial^2 f / \partial y^2\right)(x, y, \nabla y) > 0$;

2) $\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x,y,\nabla y) \gg 0$*;*

3) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x,y,\nabla y) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)(x,y,\nabla y)\cdot\left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x,y,\nabla y)\right)^{-1}\cdot$
$\cdot\,(\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)(x,y,\nabla y) > 0;$

4) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)(x,y,\nabla y)\cdot\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)(x,y,\nabla y) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)(x,y,\nabla y)\cdot$
$\cdot\,(\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)(x,y,\nabla y) \gg 0,$

то вариационный функционал (1) *имеет строгий* K*–минимум в точке* $y(\cdot)$.

2. Классы вариационных функционалов, имеющих нелокальный компактный экстремум в $W^{1,p}$

Теперь перейдем к рассмотрению классов вариационных функционалов в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p\in\mathbb{N}$, над многомерной компактной областью $D\subset\mathbb{R}^N$, $N\in\mathbb{N}$, которые будут иметь нелокальный компактный экстремум в нуле.

Нами разработана следующая схема исследования вариационного функционала на нелокальный K–экстремум. Сначала мы проверяем тот факт, что $y_0(\cdot)\equiv 0$ является K–экстремалью соответствующего функционала, т.е. удовлетворяет обобщенному уравнению Эйлера–Остроградского (5). Далее на K–экстремали $y_0(\cdot)\equiv 0$ мы проверяем достаточное условие компактного минимума в терминах гессиана подынтегральной функции (теорема 3). На последнем этапе мы проводим исследование найденного K–минимума $y_0(\cdot)\equiv 0$ на нелокальность.

Обобщая пример, рассмотренный Орловым И.В. и Божонок Е.В. (см. [8], пример 5.1.4) на случай пространства Соболева над многомерной областью рассмотрим т.н. "соболевскую квазинорму"

Пример 1.

$$\Phi(y)=\int\limits_D\left[y^2+\varphi(\nabla y)\cdot\|\nabla y\|^2\right]dx,$$

$$y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\ \varphi(\cdot)\in W^2_K(z),\ D=\prod_{i=1}^{N}[0;T], \tag{6}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D}\equiv 0. \tag{7}$$

В нашем случае интегрант имеет вид

$$f(x,y,z)=y^2+\varphi(z)\cdot\|z\|^2.$$

Найдем частные производные интегранта

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z_i}=\frac{\partial^2 f}{\partial z_i\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}=\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_i}\cdot\|z\|^2+2\varphi(z)\cdot z_i;\quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_i^2}=\frac{\partial^2\varphi(z)}{\partial z_i^2}\cdot\|z\|^2+4\frac{\partial\varphi(z)}{\partial z_i}\cdot z_i+2\varphi(z);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_i \partial z_j} = \frac{\partial^2 \varphi(z)}{\partial z_i \partial z_j} \cdot \|z\|^2 + 2\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot z_j + 2\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_j} \cdot z_i \quad (i = \overline{1,N},\ \ i \neq j).$$

Очевидно, что f принадлежит вейерштрассовскому классу $W^2 K_2(z)$.

1. Вариационное уравнение Эйлера-Остроградского (5) для функционала (6)

$$2y - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{\partial \varphi(z)}{\partial z_i} \cdot \|z\|^2 + \varphi(z) \cdot 2z_i \right] \overset{п.в.}{=} 0. \tag{8}$$

Таким образом, при граничном условии (7) функция $y_0(\cdot) \equiv 0$ удовлетворяет уравнению (8), то есть является K–экстремалью функционала (6); при этом $\Phi(y_0) = 0$.

2. Проверим теперь достаточное условие строгого K–минимума в нуле в терминах гессиана подынтегральной функции для данного вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(D)$ (теорема 3). Отметим вначале, что на K–экстремали $y_0(x) \equiv 0$ функция $(\partial f/\partial z)(x, y_0(x), \nabla y_0(x)) \in W^{1,1}(D)$.

Проверим выполнение условий (1)–(4) теоремы 3:

1) $\left(\partial^2 f/\partial y^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = 2 > 0;$

2) $\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\Big|_{(x,0,0)} = \begin{pmatrix} 2\varphi(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 2\varphi(0) \end{pmatrix} \gg 0$ при требовании $\varphi(0) > 0$;

3) $\left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) - (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y) \cdot \left(\left(\partial^2 f/\partial z^2\right)\right)^{-1} \cdot (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z)\right]\Big|_{(x,0,0)} =$

$= 2 > 0;$

4) $\left[\left(\partial^2 f/\partial y^2\right) \cdot \left(\partial^2 f/\partial z^2\right) - (\partial/\partial y)\,(\partial f/\partial z) \cdot (\partial/\partial z)\,(\partial f/\partial y)\right]\Big|_{(x,0,0)} =$

$= \begin{pmatrix} 4\varphi(0) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 4\varphi(0) \end{pmatrix} \gg 0$ при требовании $\varphi(0) > 0$.

Таким образом, все условия достаточного условия в терминах гессиана подынтегральной функции выполняются всюду на $D = \prod_{i=1}^{N} [0;T]$ при дополнительном требовании $\varphi(0) > 0$. Имеем, что функционал (6)–(7) имеет строгий K–минимум при $\varphi(0) > 0$ в точке $y_0(\cdot) \equiv 0$.

3. Покажем, что функционал (6)–(7) не имеет локального экстремума в точке строгого K–минимума $y_0(x) \equiv 0$ в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod_{i=1}^{N} [0;T]$ с учетом введенного требования $\varphi(0) > 0$.

Потребуем дополнительное условие перемены знака для φ:

$$\varphi(z_0) \leq -r_0 < 0 \tag{9}$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$.

Рассмотрим

$$y^\varepsilon(x_1, \dots, x_N) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^N z_i^0 (x_i - \varepsilon), & \widetilde{D} = \{x \in D \mid x_i \le \varepsilon,\ i = \overline{1, N}\}; \\ 0 \qquad , & \text{в остальных точках } D \end{cases}$$

для достаточно малого $\varepsilon > 0$.

Очевидно, что $y^\varepsilon \in W^{1,2}(D)$. Кроме того,

$$\|y^\varepsilon\|^2_{W^{1,2}} = \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left[\left(\sum_{i=1}^N z_i^0 (x_i - \varepsilon) \right)^2 + \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \right] dx_1 \dots dx_N \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$.

Интегрант f вдоль функции y^ε принимает вид

$$f(x, y^\varepsilon, \nabla y^\varepsilon) =$$

$$= \begin{cases} \varphi(z_1^0, ... z_N^0) \cdot \sum\limits_{i=1}^N (z_i^0)^2 + \left(\sum\limits_{i=1}^N z_i^0 (x_i - \varepsilon) \right)^2, & \widetilde{D}; \\ 0 \qquad , & \text{в остальных точках } D. \end{cases}$$

Отсюда следует

$$\Phi(y^\varepsilon) = \varphi(z_1^0, ... z_N^0) \cdot \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \cdot \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon dx_1 \dots dx_N +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^N z_i^0 (x_i - \varepsilon) \right)^2 dx_1 \dots dx_N = \varphi(z_1^0, ... z_N^0) \cdot \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \cdot \varepsilon^N +$$

$$+ \int\limits_0^\varepsilon \cdots \int\limits_0^\varepsilon \left(\sum_{i=1}^N z_i^0 (x_i - \varepsilon) \right)^2 dx_1 \dots dx_N \le$$

$$\le -r_0 \cdot \sum_{i=1}^N (z_i^0)^2 \cdot \varepsilon^N + o(\varepsilon^N) < 0 \text{ для достаточно малого } \varepsilon > 0.$$

Таким образом, вариационный функционал (6)–(7) не достигает локального минимума в нуле в пространстве $W^{1,2}(D)$, где $D = \prod\limits_{i=1}^N [0; T]$. Полученные выше результаты можно описать в следующей

Теорема 4. *Рассмотрим вариационный функционал ("соболевскую квазинорму")*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(\nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2 \right] dx, \;\; y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^N [0; T],$$

где $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$, при дополнительном граничном условии $y\big|_{\partial D} \equiv 0$.

Тогда, в предположении $\varphi(0) > 0$ *и при условии перемены знака для* φ*:* $\varphi(z_0) \le -r_0 < 0$ *для некоторого* $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$*, вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Простейшим примером соболевской квазинормы может быть

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \cos(div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx, \ y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \ D = \prod_{i=1}^N [0;T] .$$

Здесь функция $\varphi(z) = \cos(z_1 + \ldots + z_N)$, $\varphi \in W_K^2(z)$ в силу периодичности и гладкости, $\varphi(0) = \cos(0 + \ldots + 0) = 1 > 0$, $\varphi(z_0) = -1 < 0$ для $z_0 = ((\pi/N), \ldots, (\pi/N))$.

Теперь можно обобщить пример 1, введя зависимость φ от y.

Пример 2. Рассмотрим

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(y, \nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \ \varphi(\cdot) \in W_K^2(z), \ D = \prod_{i=1}^N [0;T], \tag{10}$$

при дополнительном граничном условии

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{11}$$

Отметим, что в данном и в последующих примерах схема исследования на нелокальный компактный экстремум в нуле повторяет схему примера 1. В этой связи, мы будем формулировать окончательные условия на интегрант в каждом из отдельно взятых случаев.

Теорема 5. *Рассмотрим вариационный функционал* (10)*, где* $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$*, при дополнительном граничном условии* (11)*.*

Тогда, в предположении $\varphi(0,0) > 0$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(0, z_0) \le -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$*, вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

В качестве конкретного примера можно рассмотреть

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \cos(y + div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] dx, \ y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \ D = \prod_{i=1}^N [0;T] .$$

В данном случае функция $\varphi(z) = \cos(y + z_1 + \ldots + z_N)$; очевидно, что $\varphi \in W_K^2(z)$. Кроме того, выполнены условия теоремы 5, а именно $\varphi(0,0) = \cos(0 + 0 + \ldots + 0) = 1 > 0$, $\varphi(0, z_0) = -1 < 0$ для $z_0 = ((\pi/N), \ldots, (\pi/N))$.

Таким образом, функционал $\Phi(y)$ в нуле достигает строгого нелокального K–минимума.

Дальнейшие классы примеров, как и оговаривали, будем оформлять в виде теорем. Обобщим последний пример и рассмотрим

Теорема 6. *Имеем вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(y, \nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] \cdot \psi(x) dx, \;\; y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{12}$$

где $\varphi(y, z) \in W_K^2(z)$, $\psi(\cdot)$ *— некоторая положительная непрерывная весовая функция, при дополнительном граничном условии*

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{13}$$

Тогда, в предположении $\varphi(0, 0) > 0$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(0, z_0) \le -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \ldots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

В качестве весовой функции можно взять $\psi(x) = \exp^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_N x_N}$, где $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, N}$, и одновременно не равны нулю. В этом случае, при условии выполнения остальных требований теоремы 6, функционал вида

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[y^2 + \varphi(y, \nabla y) \cdot \|\nabla y\|^2\right] \cdot \exp^{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_N x_N} dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T]\,,$$

достигает строго нелокального K–минимума в нуле.

Теорема 7. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \varphi\left(y^2 + \|\nabla y\|^2\right) dx, \;\; y(\cdot) \in W^{1,2}(D), \;\; D = \prod_{i=1}^{N} [0; T], \tag{14}$$

где $\varphi(y^2 + \|z\|^2) \in W_K^2(z)$, $\varphi(0) = 0$, *при дополнительном граничном условии*

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{15}$$

Тогда, в предположении $(\partial\varphi/\partial t)(0) > 0$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(u_0^2) \le -r_0 < 0$$

для некоторого $u_0 \in \mathbb{R}$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Отметим, что условия на функцию φ

$$\varphi \in C^2([0;+\infty]),\ \varphi(t+h)-\varphi(t)=O(h) \text{ для } |h|\to\infty$$

являются достаточными для принадлежности $\varphi(y^2+\|z\|^2)$ к классу $W_K^2(z)$. В качестве конкретного примера такой функции можно рассмотреть

$$\varphi(t)=\begin{cases} t, & 0\le t\le 1-\delta;\\ 2-t, & 1+\delta\le t\le +\infty;\\ \varphi, & \text{сглажена на } [1-\delta;1+\delta]. \end{cases}$$

Данная функция удовлетворяет всем требованиям теоремы 7, а именно $\varphi(0)=0$, $(\partial\varphi/\partial t)(0)=1>0$ и для любого $u_0>\sqrt{2}\ \varphi(u_0)<0$.

Обобщим данный пример.

Теорема 8. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_D \varphi\left(y^2+\|\nabla y\|^2\right)\cdot\psi(x)dx,\ \ y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\ \ D=\prod_{i=1}^N[0;T], \tag{16}$$

где $\varphi(y^2+\|z\|^2)\in W_K^2(z)$, $\varphi(0)=0$, $\psi(\cdot)$ *— некоторая непрерывная положительная весовая функция, при дополнительном граничном условии*

$$y\big|_{\partial D}\equiv 0. \tag{17}$$

Тогда, в предположении $(\partial\varphi/\partial t)(0)>0$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(u_0^2)\le -r_0<0$$

для некоторого $u_0\in\mathbb{R}$*, вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Отметим, что в качестве весовой функции можно взять любую непрерывную положительную функцию, в частности, $\psi(x)=\exp^{\alpha_1x_1+\ldots+\alpha_Nx_N}$, где $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,N}$, и одновременно не равны нулю.

Теорема 9. *Рассмотрим вариационный функционал (т.н. "квазигармонический осциллятор")*

$$\Phi(y)=\int\limits_D\left[\varphi(\nabla y)\cdot\|\nabla y\|^2+\psi(y)-y^2\right]dx,\ \ y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\ \ D=\prod_{i=1}^N[0;T], \tag{18}$$

где $\varphi(\cdot)\in W_K^2(z)$, $\psi(\cdot)\in C^2$, $\psi(0)=0$, *при дополнительном граничном условии*

$$y\big|_{\partial D}\equiv 0. \tag{19}$$

Тогда, в предположения $\varphi(0)>0$, $\psi'(0)=0$ *и* $\psi''(0)>2$ *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(z_0)\le -r_0<0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле.*

Простейшим примером квазигармонического осцилятора может служить функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\cos(div_x y) \cdot \|\nabla y\|^2 + 2\sin^2 y - y^2\right] dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = \prod_{i=1}^N [0; T].$$

Здесь $\varphi(z) = \cos(z_1 + \ldots + z_N)$, $\varphi \in W_K^2(z)$, $\psi(y) = 2\sin^2 y$, $\psi(\cdot) \in C^2$, $\psi(0) = 0$. Проверим требования теоремы 9 на функции φ, ψ. Действительно, $\varphi(0) = \cos(0 + \ldots + 0) = 1 > 0$, $\psi'(0) = 2\sin 2y|_{y=0} = 0$, $\psi''(0) = 4\cos 2y|_{y=0} = 4 > 2$, $\varphi(z_0) = -1 < 0$ для $z_0 = ((\pi/N), \ldots, (\pi/N))$. Таким образом, вариационный функционал $\Phi(y)$ в нуле достигает строгого нелокального K–минимума.

В рассмотренных выше примерах никаких ограничений на меру области D не налагается. Сейчас рассмотрим пример вариационного функционала, для которого наличие K–экстремума возможно только при некотором ограничении на меру D. Для этого сформулируем следующую теорему для проверки достаточных условий K–минимума (см. [14]).

Теорема 10. *Пусть вариационный функционал* (1) *удовлетворяет в нуле уравнению Эйлера-Остроградского* (5) *при граничном условии* $y|_{\partial D} = 0$, $f \in W^2 K_p(z)$, $(\partial f/\partial z)(x, y, \nabla y) \in W^{1,1}(D)$.
Введем следующие обозначения:

$$r =: \min_{x\in D} \max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \geq \gamma^2 \cdot \|z\|^2\ (\forall z \in \mathbb{R}_z^n)\},\ \ R(x) = \frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial z^2};$$

$$s =: \min_{x\in D} \frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y^2};$$

$$q =: \min_{x\in D} Q(x),\ \ Q(x) = \frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y^2} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f(x,0,0)}{\partial y \partial z_i}\right).$$

Тогда
1) при $r > 0$, $q > 0$, $\Phi(y)$ *достигает строгого* K*–минимума в нуле (без каких–либо ограничений на меру* D*).*
2) при $r > 0$, $q < 0$, $s > 0$ *и при ограничении на меру* D

$$mes_N(D) < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}}\right)^N, \tag{20}$$

$\Phi(y)$ *достигает строгого* K*–минимума в нуле.*

Теорема 11. *Рассмотрим вариационный функционал ("обобщенный квазигармонический осциллятор")*

$$\Phi(y)=\int\limits_D \left[\varphi(\nabla y)\cdot\|\nabla y\|^2+\psi(x,y,\nabla y)-y^2\right]dx,$$

$$y(\cdot)\in W^{1,2}(D),\ \ D=\prod_{i=1}^{N}[0;T], \tag{21}$$

где $\varphi(\cdot)\in W_K^2(z)$, $\psi\in W^2K_1(z)$, $\psi(x,0,0)=0$, *при дополнительном граничном условии*

$$y\big|_{\partial D}\equiv 0. \tag{22}$$

Введем следующие обозначения

$$r=\min_{x\in D}\max\{\gamma^2>0|R(x)(z)^2\geq\gamma^2\cdot\|z\|^2\ (\forall z\in\mathbb{R}_z^N)\},$$

где

$$R(x)=\begin{pmatrix} 2\varphi(0)+\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n\partial z_1} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1\partial z_n} & \cdots & 2\varphi(0)+\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n^2} \end{pmatrix};$$

$$s=\min_{x\in D}\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2}-2\right);$$

$$q=\min_{x\in D}\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2}-2-div_x\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y\partial z}\right)\right).$$

Тогда, в предположении $\varphi(0)>0$, $r>0$, $s>0$ *и* $q<0$, *и при условии перемены знака для* φ:

$$\varphi(z_0)\leq -r_0<0$$

для некоторого $z_0=(z_1^0,\dots z_N^0)\in\mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле при дополнительном ограничении на меру области* D

$$mes_N(D)<N^{\frac{N}{2}}\cdot\left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}}\right)^N.$$

В вариационном функционале (21) в качестве функции ψ можно взять

$$\psi(x,y,z)=2\sin^2(y+z_1+\ldots+z_N)+3(x_1+\ldots+x_N)\cdot y\cdot(z_1+\ldots+z_N).$$

Тогда можно рассмотреть функционал

$$\Phi(y)=\int\limits_D\left[\cos(div_x y)\cdot\|\nabla y\|^2+2\sin^2(y+div_x y)+3\sum_{i=1}^N x_i\cdot y\cdot div_x y-y^2\right]dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ D = \prod_{i=1}^{N}[0;T].$$

Данный функционал будет удовлетворять всем требованиям теоремы 11. Действительно, $\varphi \in W_K^2(z)$, $\psi \in W^2K_1(z)$, $\psi(x,0,0) = 0$. Для функции φ выполняется условие перемены знака $\varphi(0) = 1 > 0$, а для $z_0 = ((\pi/N),\ldots,(\pi/N))$ $\varphi(z_0) = -1 < 0$. Осталось проверить неравенства $r > 0$, $s > 0$ и $q < 0$. В нашем случае

$$R(x) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & \cdots & 4 \\ 4 & 6 & \cdots & 4 \\ .. & .. & .. & .. \\ 4 & 4 & \cdots & 6 \end{pmatrix},$$

тогда имеем

$$r = \min_{x\in D}\max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \geq \gamma^2\|z\|^2(\forall z \in \mathbb{R}_2^N)\} = 2 > 0;$$

$$s = 2 > 0; \quad q = 2 - 3N < 0\ \ (\forall N).$$

Таким образом, $\Phi(y)$ имеет строгий нелокальный K–минимум в нуле при дополнительном ограничении на меру области D:

$$mes_N < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2\cdot 2}{|2-3N|}}\right)^N.$$

Отметим, что в случае размерности $N = 1$ получаем ограничение на длину отрезка $[0;T]$

$$T < \sqrt{2}\pi.$$

Обобщим предыдущий пример — введем весовую функцию.

Теорема 12. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_D \left[\varphi(\nabla y)\cdot\|\nabla y\|^2 + \psi(x,y,\nabla y) - y^2\right]\cdot\tau(x)dx,$$

$$y(\cdot) \in W^{1,2}(D),\ \ D = \prod_{i=1}^{N}[0;T], \tag{23}$$

где $\varphi(\cdot) \in W_K^2(z)$, $\psi \in W^2K_1(z)$, $\psi(x,0,0) = 0$, $\tau(\cdot)$ *— некоторая положительная непрерывная весовая функция, при дополнительном граничном условии*

$$y\big|_{\partial D} \equiv 0. \tag{24}$$

Введем следующие обозначения

$$r = \min_{x\in D}\max\{\gamma^2 > 0 | R(x)(z)^2 \geq \gamma^2\cdot\|z\|^2\ (\forall z \in \mathbb{R}_z^N)\},$$

где

$$R(x) = \begin{pmatrix} \left(2\varphi(0) + \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1^2}\right)\cdot\tau(x) & \cdots & \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n \partial z_1}\cdot\tau(x) \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_1 \partial z_n}\cdot\tau(x) & \cdots & \left(2\varphi(0) + \frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial z_n^2}\right)\cdot\tau(x) \end{pmatrix};$$

$$s = \min_{x\in D}\left[\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2\right)\cdot\tau(x)\right];$$

$$q = \min_{x\in D}\left[\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y^2} - 2 - div_x\left(\frac{\partial^2\psi(x,0,0)}{\partial y \partial z}\right)\right)\cdot\tau(x)\right].$$

Тогда, в предположении $\varphi(0) > 0$, $r > 0$, $s > 0$ *и* $q < 0$, *и при условии перемены знака для* φ*:*

$$\varphi(z_0) \le -r_0 < 0$$

для некоторого $z_0 = (z_1^0, \dots z_N^0) \in \mathbb{R}^N$, *вариационный функционал* $\Phi(y)$ *достигает строгого нелокального* K*–минимума в нуле при дополнительном ограничении на меру области* D

$$mes_N(D) < N^{\frac{N}{2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{\pi^2 r}{|q|}}\right)^N.$$

Авторы выражают благодарность И.В.Орлову за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] Tonelli L. *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni.* — Bologna: Zanichelli, 1921–23. — 466 p.

[2] Dacorogna B. *Introduction to the calculus of variations.* — London: Imperial College Press, 2004. — 228 p.

[3] Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В., Магарил-Ильяев Г. Г. и др. *Оптимальное управление.* / под ред. Н. П. Осмоловского, В. М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.

[4] Giaquinta M., Hildebrandt S. *Calculus of Variations I.* — New York: Springer Verlag, 1996. — 474 p.

[5] Giusti E. *Direct Methods in the Calculus of Variations.* — Singapore: World Scientific Publishing Co., 2003. — 403 p.

[6] Bozhonok E. V. *Some existence conditions of compact extrema for variational functionals of several variables in Sobolev space* H^1 // Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäuser. — 2009. — Vol. 190. — P. 141–155.

[7] Orlov I. V. *Compact extrema: general theory and its applications to the variational functionals* // Operator Theory: Advances and Applications, Basel: Birkhäuser. — 2009. — Vol. 190. — P. 397–417.

[8] Орлов И. В., Божонок Е. В. *Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева* H^1*: учебное пособие.* — Симферополь: ДИАЙПИ, 2010. — 156 с.

[9] Кузьменко Е. М. *Условия корректной определенности и компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева* $W^{1,p}$ // Ученые записки ТНУ, серия "Физико-математические науки". — 2011. — Т. 24(63), № 1. — С. 76–89.

[10] Кузьменко Е. М. *Условия* K*-дифференцируемости и повторной* K*-дифференцируемости вариационных функционалов в пространствах Соболева* $W^{1,p}$ *функций многих переменных* // Ученые записки ТНУ, серия "Физико-математические науки". — 2011. — Т. 24(63), № 3. — С. 39–60.

[11] Орлов И. В., Божонок Е. В., Кузьменко Е. М. *Необходимые условия К-экстремума вариационного функционала в пространствах Соболева над многомерной областью* // Доповіді НАН України. — 2014. — № 4. — С. 19–24.

[12] Божонок Е. В., Кузьменко Е. М. *Условия компактного экстремума основного вариационного функционала в шкале пространств Соболева над многомерной областью* // Нелинейные граничные задачи. — 2012. — Т.21. — С. 9–26.

[13] Schmeisser H.-J., Triebel H. *Topics in Fourier Analysis and Function Spaces.* — Chichester: Wiley, 1987. — 300 p.

[14] Орлов И. В., Цыганкова А. В. *Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах* // Труды ИПММ НАН Украины. — 2013. (в печати)

Класи варіаційних функціоналів, що мають нелокальний компактний екстремум у $W^{1,p}(D)$ над багатовимірною областю

У даній статті розроблена схема дослідження варіаційного функціонала на нелокальний компактний екстремум у нулі в просторі Соболєва $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, *над багатовимірною компактною областю* $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$. *Наведено ряд класів варіаційних функціоналів, що мають нелокальних* K*–екстремум.*

Ключові слова: варіаційний функціонал, простори Соболєва, K–екстремум.

Classes of variational functionals having nonlocal K–extremum in $W^{1,p}(D)$ on multi-dimensional domain

In this paper the investigation scheme of nonlocal compact extremum at zero for variational functional in Sobolev space $W^{1,p}(D)$, $p \in \mathbb{N}$, *on multi-dimensional compact domain* $D \subset \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, *is derived. Some examples of variational functionals having nonlocal* K*–extremum are considered.*

Keywords: variational functional, Sobolev spaces, K–extremum.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 45–57.

УДК 517.9[72.5+27.25+84.52]

Э. Л. Газиев

СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ СОПРЯЖЕНИЯ НА КРИВОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕ

Изучается спектральная задача, возникающая в проблеме малых движений системы "идеальная капиллярная жидкость–газ" в прямоугольном канале с твердой стенкой. Рассматривается случай экспоненциальной стратификации газа вдоль направления гравитационных сил и условий сопряжения для потенциалов смещений, сформулированных на поверхности жидкости, которая в состоянии покоя не является горизонтальной. Предлагается проекционный метод, основанный на вариационном подходе.

Ключевые слова: капиллярная жидкость, газ, стратификация, спектральная задача, условие сопряжения, проекционный метод, обобщенное решение.

1. Введение

Эволюционные и спектральные задачи гидродинамики описываются начально-краевыми и краевыми задачами для дифференциальных уравнений в частных производных и обыкновенных дифференциальных уравнений, для большинства которых не удается получить точное аналитическое решение. Поэтому особый интерес представляют прямые методы нахождения искомых величин. Среди них отметим проекционные, вариационные и численно-аналитические методы, см., например, работы [1]–[12], в которых при разработке и обосновании метода используются вариационная формулировка исследуемой задачи, энергетические или вариационные соотношения. В общем случае выбор координатных (пробных) функций проекционного метода является достаточно сложной проблемой и осуществляется по-разному. В частности, в [2] в задаче о собственных колебаниях идеальной жидкости выбор координатных функций основан на применении ортогонального проектирования собственных элементов задачи на функциональные подпространства, естественно возникающие при использовании метода разделения переменных.

В настоящей работе рассматривается спектральная задача, порожденная проблемой собственных колебаний в прямоугольном канале гидросистемы, состоящей из несжимаемой капиллярной жидкости и газа, стратифицированного по плотности. Эволюционная проблема описывается краевой задачей для потенциалов смещений в средах с кинематическим и динамическим условиями сопряжения третьего рода на границе раздела сред. Операторный подход в общем случае, когда граница раздела сред в состоянии покоя не обязательно является является плоской, предложен в работе [10]. В случае горизонтальной равновесной поверхности жидкости спектральная проблема была изучена в [13], а приближенный метод для вычисления криволинейной равновесной поверхности раздела сред был предложен в [14]–[16].

Наша цель — предложить проекционный метод для приближенного вычисления значений спектрального параметра в плоской (двумерной) проблеме с условиями сопряжения на криволинейной границе раздела сред.

2. Формулировка двумерной спектральной задачи и основные предположения

В декартовой системе координат $Oxyz$ рассмотрим прямоугольный канал, геометрия поперечного сечения канала (плоскостью $y = \mathrm{const}$) представлена на рис. 1. Канал заполнен идеальной капиллярной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_1 > 0$ и баротропным газом, плотность которого изменяется по закону

$$\rho_{2,0} := \rho_{2,0}(z) = \rho_{2,0}(0)\exp(-2\varepsilon z), \quad \varepsilon := \beta g_0/(2a^2) \ll 1,$$

где $a^2 = \mathrm{const}$ — квадрат скорости звука в газе, g_0 — стандартное ускорение свободного падения в земных условиях, β — коэффициент перегрузки.

Пусть гравитационное поле действует вдоль оси Oz сверху вниз с интенсивностью $\vec{g} = -\beta g_0 \vec{e}_3$, $\beta > 0$ ($\vec{e}_3$ — орт оси Oz). В этом случае трехмерная проблема сводится к двумерной (плоской) проблеме в поперечном сечении канала. Область Ω_1, занятая жидкостью, ограничена частью S_1 твердой стенки канала и границей Γ, разделяющей области "жидкость" и "газ", в состоянии покоя. Соответственно газ расположен в области Ω_2, ограниченной Γ и частью S_2 стенки $S = S_1 \cup S_2$. Считаем также, что уравнение дуги Γ задано в параметрической форме

$$\begin{aligned} &x = x(s), \quad z = z(s), \quad -s_0 \le s \le s_0, \\ &x(s_0) = l, \quad x(-s_0) = -l, \\ &-h_1 < z(s) < h_2, \quad -s_0 \le s \le s_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где в качестве параметра s выбрана длина дуги Γ, отсчитываемая от ее середины, l — полуширина канала, H — высота канала, V_0 — заданный объем жидкости, $h_1 = V_0/(2l)$ — условная высота жидкости, $h_2 = (H - h_1)$ — условная высота газа.

Пусть ω — частота колебаний, $\sigma > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на Γ; $\vec{n}$ — вектор нормали к Γ, направленный из Ω_1; $\vec{n}_0$ — вектор касательной к Γ

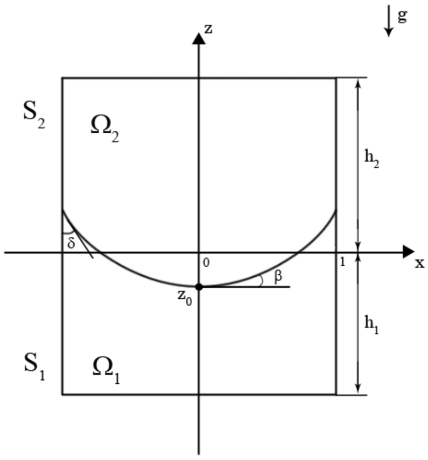


Рис. 1. Поперечное сечение канала.

в точках $s = \pm s_0$ (т.е. $x = \pm 1$); $\zeta = \zeta(s)$ — отклонение в точке s дуги Γ вдоль $\vec{n}$ от равновесного состояния; $k(s)$ — кривизна дуги Γ, $0 < \delta < \pi$ — угол смачивания.

Следуя [10], введем ортопроектор $P_\Gamma : L_2(\Gamma) \to L_{2,\Gamma}$, $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus 1_\Gamma$, по закону

$$P_\Gamma \zeta := \zeta - \frac{1}{2s_0} \int\limits_{-s_0}^{s_0} \zeta ds. \qquad (2)$$

Тогда для потенциалов смещений $\Phi_1 := \Phi_1(x, z)$ в жидкости и $\Phi_2 := \Phi_2(x, z)$ в газе получаем следующую линеаризованную спектральную задачу

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \ \ \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_1), \qquad (3)$$

$$-\Delta_0 \Phi_2 = \lambda a^{-2} \Phi_2 \ (\text{в } \Omega_2), \ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \ (\text{на } S_2), \ \Delta_0 \Phi_2 := \rho_{2,0}^{-1} \operatorname{div}(\rho_{2,0} \nabla \Phi_2), \ \lambda := \omega^2, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta \ \ (\text{на}\, \Gamma), \ \int\limits_{-s_0}^{s_0} \zeta ds = 0, \ \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Phi_1 ds = 0, \ \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Phi_2 d\Omega_2 = 0,$$

$$B_\sigma \zeta := P_\Gamma(-\sigma \Delta_\Gamma \zeta + a(s)\zeta) = \lambda(\rho_1 \Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)) \ \ (\text{на } \ \Gamma),$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n_0} + \chi\zeta = 0 \quad (\text{при } \ s = \pm s_0), \qquad (5)$$

$$a(s) := -\sigma(k(s))^2 + g(\rho_1 - \rho_{2,0}) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}), \ \ \chi := -k(s) \cos\delta / \sin\delta. \qquad (6)$$

Отметим, что в спектральной задаче сопряжения (3)–(6) искомый спектральный параметр λ входит в уравнение (4) и граничное условие (5). Кроме того, оператор Δ_Γ в динамическом условии (5) и соответствующий ему оператор градиента ∇_Γ вычисляются на криволинейной дуге Γ.

Добавим еще, что в [14]–[16] для отыскания Γ получена краевая задача

$$z'' = x'[c + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z)], \ \ 0 \le s \le s_0, \tag{7}$$

$$x'' = -z'[c + B_0 z + b_0 f_\varepsilon(z)], \ \ 0 \le s \le s_0,$$

$$z(0) = -z_0, \quad z'(0) = 0, \ \ x(0) = 0, \ \ x'(0) = 1,$$

$$x(s_0) = l, \quad 2\int\limits_0^{s_0} (z(s) + h_1)x' ds = V_0 = 2h_1 l, \tag{8}$$

где z_0 — максимальный прогиб равновесной дуги Γ в точке $s = 0$, $f_\varepsilon(z) := \rho_{2,0}(0)(\exp(-2\varepsilon z) - 1)/(2\varepsilon)$. О смысле параметров B_0 и b_0 будет сказано ниже.

Далее считаем, что проблема (7)–(8) решена, и равновесная дуга Γ найдена.

Замечание 3. Для вычисления производной по нормали на известной Γ имеем:

$$\frac{\partial}{\partial n} = x' \frac{\partial}{\partial z} - z' \frac{\partial}{\partial x}. \tag{9}$$

□

Выберем l и ρ_1 в качестве характерных величин и осуществим в задаче (3)–(6) переход к безразмерным переменным с помощью замен

$$x \mapsto x\, l, \quad \rho_{2,0}(0) \mapsto \rho_{2,0}(0)\, \rho_1, \quad \varepsilon \mapsto \varepsilon l.$$

Тогда проблема (3)–(6) преобразуется к спектральным задачам Неймана

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_1), \tag{10}$$

$$-\Delta_0\Phi_2 = \lambda\alpha^2\Phi_2 \ \ (\text{в } \Omega_2), \ \ \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = 0 \ \ (\text{на } S_2),$$

с условиями сопряжения искомых функций Φ_1 и Φ_2 на криволинейной (в общем случае) дуге Γ

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} =: \zeta, \quad -s_0 < s < s_0,$$

$$B_\sigma\zeta := P_\Gamma[-\Delta_\Gamma\zeta + a(s)\zeta] = \lambda[\Phi_1 - \rho_{2,0}(0)P_\Gamma(\exp(-2\varepsilon z)\Phi_2)], \ \ -s_0 < s < s_0,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial n_0} + \chi\zeta = 0 \quad (\text{при } \ s = \pm s_0),$$

и условиями нормировки

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} \zeta ds = 0, \ \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Phi_1 ds = 0, \ \int\limits_{\Omega_2} \exp(-2\varepsilon z)\Phi_2 d\Omega_2 = 0. \tag{11}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\lambda := \frac{\rho_1 \omega^2 l^3}{\sigma}, \ \ \alpha^2 := \frac{\sigma}{\rho_1 l a^2},$$

$$a(s) := -(k(s))^2 + (B_0 - b_0 \exp(-2\varepsilon z)) \cos(\widehat{\vec{n}, \vec{e}_3}), \quad \varepsilon = \beta \varepsilon_0, \quad \varepsilon_0 := g_0 l/(2a^2),$$

$$B_0 := \frac{\rho_1 g l^2}{\sigma} = \beta \widehat{B}_0, \ \ \widehat{B}_0 := \frac{\rho_1 g_0 l^2}{\sigma}, \quad b_0 := \frac{\rho_{2,0}(0) g l^2}{\sigma} = \beta \widehat{b}_0, \ \ \widehat{b}_0 := \frac{\rho_{2,0}(0) g_0 l^2}{\sigma}.$$

С учетом [1], см. с. 527 для оператора Лапласа–Бельтрами Δ_Γ на криволинейной границе Γ, заданной в виде (1), получаем

$$\Delta_\Gamma \zeta = d^2 \zeta / ds^2.$$

3. Определение обобщенного решения

Определение 1. Будем говорить, что задача (10)–(11) имеет единственное обобщенное решение $\Phi := (\Phi_1; \Phi_2; \zeta)$, $\Phi_1 \in H^1(\Omega_1)$, $\Phi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, $\zeta \in L_{2,\Gamma}$, если при любых функциях $\Psi := (\Psi_1; \Psi_2; \psi)$, $\Psi_1 \in H^1(\Omega_1)$, $\Psi_2 \in H^1(\Omega_2; \rho_{2,0})$, $\psi \in L_{2,\Gamma}$, выполнены следующие интегральные тождества:

$$\int\limits_{\Omega_1} \nabla \Psi_1 \cdot \nabla \Phi_1 \, d\Omega_1 = \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big(\Psi_1\Big)\Big|_\Gamma \zeta ds, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Psi_2 \cdot \nabla \Phi_2 \, d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big(\rho_{2,0} \Psi_2\Big)\Big|_\Gamma \zeta ds = \lambda \alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \Psi_2 \Phi_2 \, d\Omega_2, \tag{13}$$

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} [\psi' \zeta' + a(s) \psi \zeta] ds + \chi(s) \psi(s) \zeta(s) \Big|_{s=-s_0}^{s=s_0} = \int\limits_{-s_0}^{s_0} \psi \Big(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2)\Big)\Big|_\Gamma ds. \tag{14}$$

□

Рассмотрим случай, когда оператор B_σ потенциальной энергии гидросистемы является положительно определенным. Если выполнено условие

$$\zeta = \lambda B_\sigma^{-1} \Big(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2)\Big)\Big|_\Gamma,$$

т.е. соотношение (14) удовлетворяется точно, то из (12), (13) для обобщенного решения получаем интегральные тождества, в которых не присутствует функция ζ:

$$\int\limits_{\Omega_1} \nabla \Psi_1 \cdot \nabla \Phi_1 \, d\Omega_1 = \lambda \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[\Psi_1 \Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2))\Big)\Big]\Big|_\Gamma ds, \tag{15}$$

$$\int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla \Psi_2 \cdot \nabla \Phi_2 \, d\Omega_2 + \lambda \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[\rho_{2,0} \Psi_2 \Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0} \Phi_2))\Big)\Big]\Big|_\Gamma ds =$$

$$= \lambda\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Psi_2\Phi_2\, d\Omega_2, \quad \forall\Psi_1 \in H^1(\Omega_1),\ \forall\Psi_2 \in H^1(\Omega_2;\rho_{2,0}). \quad (16)$$

Отметим также, что тождества (15), (16) равносильны соотношению

$$\int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Phi_1\, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\nabla\Psi_2 \cdot \nabla\Phi_2\, d\Omega_2 = \lambda\Big\{\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}\Psi_2\Phi_2\, d\Omega_2 +$$
$$+ \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[(\Psi_1 - \rho_{2,0}\Psi_2)\Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\Big)\Big]\Big|_\Gamma ds\Big\}. \quad (17)$$

Определение 1 обобщает определение обобщенного решения, предложенное М.Я. Барняком для изучения проблемы колебаний идеальной жидкости в сосуде (см. [2], а также [5]–[7], [9]) на случай, когда контейнер заполнен гидросистемой "жидкость–баротропный газ".

4. Вариационный подход

Рассмотрим задачу на экстремум квадратичного функционала

$$\int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2, \quad \Phi_1 \in H^1(\Omega_1),\ \ \Phi_2 \in H^1(\Omega_2;\rho_{2,0}) \quad (18)$$

при условии

$$\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\Phi_2|^2 d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[(\Phi_1 - \rho_{2,0}\Phi_2)\Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\Big)\Big]\Big|_\Gamma ds = \mathrm{const} \quad (19)$$

и соответствующую ей задачу на безусловный экстремум

$$F(\Phi_1,\Phi_2) := \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\nabla\Phi_2|^2 d\Omega_2 - \lambda\Big\{\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\Phi_2|^2 d\Omega_2 +$$
$$+ \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[(\Phi_1 - \rho_{2,0}\Phi_2)\Big(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\Big)\Big]\Big|_\Gamma ds\Big\}. \quad (20)$$

Нетрудно заметить, что соотношение (17) суть равенство нулю первой вариации функционала (20). Проблема (18), (19), в свою очередь, является задачей о минимуме квадратичного функционала

$$\frac{\displaystyle\int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega_2}{\displaystyle\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0}|\Phi_2|^2\, d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} \Big[(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2))\,(B_\sigma^{-1}(\Phi_1 - P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_2)))ds\Big]}$$

на функциях $(\Phi_1;\Phi_2)\in H^1(\Omega_1)\oplus H^1(\Omega_2;\rho_{2,0})$, отвечающих условиям нормировки

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0}\Phi_1\,ds=0,\quad \int\limits_{\Omega_2}\exp(-2\varepsilon z)\Phi_2\,d\Omega_2=0,$$

который достигается на собственных значениях задачи (10)–(11). Таким образом, можно отыскивать обобщенное решение исходной задачи, решая задачу о минимуме функционала (20). Заметим, что при $B_\sigma\gg 0$ спектр задачи является дискретным, расположен на положительной полуоси и имеет предельную точку на $+\infty$ (см. [10]).

5. Проекционный метод нахождения обобщенного решения

Будем искать обобщенное решение, на котором достигается минимальное значение функционала (20). Представим приближенное решение задачи (10)–(11) в виде

$$\Phi=\sum_{k=1}^N c_k\Phi_k,\quad \Phi_k=\begin{pmatrix}\Phi_{1k}\\ \Phi_{2k}\end{pmatrix},\quad \zeta:=\sum_{k=1}^N c_k\zeta_k, \tag{21}$$

где c_k — неизвестные коэффициенты, Φ_k — пробные функции, а функции ζ_k на Γ определены с учетом (9) (см. замечание 3):

$$\zeta_k:=\frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial n}=x'\frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial z}-z'\frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial x}. \tag{22}$$

Поскольку первая вариация функционала (20) на λ и $c:=(c_1,\,\dots,\,c_N)$, на которых достигается минимум функционала, должна быть равна нулю, то для нахождения коэффициентов c_k и спектрального параметра λ получаем систему уравнений

$$l=\overline{1,N},\quad 0=\sum_{k=1}^N c_k\Big(\int\limits_{\Omega_1}\nabla\Phi_{1k}\cdot\nabla\Phi_{1l}\,d\Omega_1+\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\nabla\Phi_{2k}\cdot\nabla\Phi_{2l}\,d\Omega_2\Big)-$$

$$-\lambda\sum_{k=1}^N c_k\Big(\alpha^2\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi_{2k}\Phi_{2l}\,d\Omega_2+\int\limits_{-s_0}^{s_0}(\Phi_{1l}-P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2l}))B_\sigma^{-1}(\Phi_{1k}-P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2k}))ds\Big). \tag{23}$$

Для существования нетривиального решения однородной системы уравнений (23) необходимо, чтобы ее определитель был отличен от нуля. Отсюда и следует характеристическое уравнение для вычисления λ:

$$\det\widehat{A}=0, \tag{24}$$

$$\widehat{A}=\{\widehat{A}_{lk}\}_{l,k=1}^N,\quad \widehat{A}_{lk}:=\int\limits_{\Omega_1}\nabla\Phi_{1k}\cdot\nabla\Phi_{1l}\,d\Omega_1+\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\nabla\Phi_{2k}\cdot\nabla\Phi_{2l}\,d\Omega_2-$$

$$-\lambda\Big(\alpha^2\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi_{2k}\Phi_{2l}\,d\Omega_2+\int\limits_{-s_0}^{s_0}(\Phi_{1l}-P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2l}))B_\sigma^{-1}(\Phi_{1k}-P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2k}))ds\Big). \tag{25}$$

В соотношениях (25) с учетом (2) $P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2j})$ вычисляются по формуле

$$P_\Gamma(\rho_{2,0}\Phi_{2j}) = \rho_{2,0}\Phi_{2j} - \frac{1}{2s_0}\int\limits_{-s_0}^{s_0} \rho_{2,0}\Phi_{2j}\, ds, \quad j = \overline{1, N}.$$

6. Выбор координатных функций

Рассмотрим теперь проблему нахождения системы координатных функций. Учтем, что искомое решение в общем случае (при необязательно горизонтальной Γ) должно удовлетворять аналогичной задаче и в частном случае, при горизонтальной границе Γ. Потому естественно выбрать в качестве координатных функций $\Phi_{1k} = \Phi_{1k}(x,z)$, $\Phi_{2k} = \Phi_{2k}(x,z)$, $k = 1, 2, \ldots$, решения задачи, полученные при условии горизонтальности Γ (т.е. при угле смачивания $\delta = \pi/2$), а именно:

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2\Phi_{1k}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi_{1k}}{\partial z^2} = 0 \quad \text{в } \Omega_1 = (-1,1)\times(-h_1,0), \\ \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial z}\Big|_{z=-h_1,\, x\in(-1,1)} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial x}\Big|_{x=\pm1,\, z\in(-h_1,0)} = 0, \end{gathered} \tag{26}$$

$$\begin{gathered} -\Big(\frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial x^2} - 2\varepsilon\frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial z} + \frac{\partial^2\Phi_{2k}}{\partial z^2}\Big) = \alpha^2\lambda\Phi_{2k} \quad \text{в } \Omega_2 = (-1,1)\times(0,h_2), \\ \frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial z}\Big|_{z=h_2,\, x\in(-1,1)} = 0, \quad \frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial x}\Big|_{x=\pm1,\, z\in(0,h_2)} = 0, \end{gathered} \tag{27}$$

$$\frac{\partial\Phi_{2k}}{\partial z} = \frac{\partial\Phi_{1k}}{\partial z} =: \zeta_k \quad \text{при } (z=0)\times(-1<x<1), \quad \zeta_k = \zeta_k(x),$$

$$B_\sigma\zeta_k = \lambda(\Phi_{1k} - \rho_{2,0}(0)\Phi_{2k}), \quad (z=0)\times(-1<x<1), \quad (\zeta_k)'\Big|_{x=\pm1} = 0, \tag{28}$$

где

$$B_\sigma\zeta_k := -(\zeta_k)'' + (B_0 - b_0)\zeta_k.$$

Для решения задачи (26)–(28) обобщим на рассматриваемый случай методику исследования, предложенную в [13]. Будем искать решение задачи (26) в виде $\Phi_{1k} = v_{1k}(z)u_k(x)$. Нетрудно видеть, что $u_k = u_k(x)$ являются решениями вспомогательных спектральных задач

$$u_k'' + \mu_k^2 u_k = 0 \ \text{ при } \ -1 < x < 1, \quad u_k'(1) = u_k'(-1) = 0,$$

откуда следует, что

$$\mu_k = \left\{ \begin{array}{c} \pi(k-1/2) \\ \pi k \end{array} \right., \quad u_k = \left\{ \begin{array}{c} \sin(\pi(k-1/2)x) \\ \cos(\pi k x) \end{array} \right., \quad k = 1, 2, \ldots .$$

С учетом уравнения и первого граничного условия задачи (26) получаем, что

$$v_{1k} = b_{1k}\mathrm{ch}(\mu_k(z+h_1)) \implies \Phi_{1k} = b_{1k}\mathrm{ch}(\mu_k(z+h_1))u_k(x),$$

$$\zeta_k = b_{1k}\mu_k\mathrm{sh}(\mu_k(z+h_1))u_k(x),$$

и собственные значения оператора B_σ вычисляются по формуле

$$\lambda_k(B_\sigma) = \mu_k^2 + (B_0 - b_0) > 0.$$

Решение задачи (27)–(28) будем искать в виде $\Phi_{2k} = v_{2k}(z)u_k(x)$. С использованием метода разделения переменных для функций $v_{2k}(z)$ имеем уравнение

$$v''_{2k} - 2\varepsilon v'_{2k} + (\alpha^2\lambda_k - \mu_k^2)v_{2k} = 0. \tag{29}$$

Для краткости введем обозначение

$$D_k := (\alpha^2\lambda_k - \mu_k^2) - \varepsilon^2. \tag{30}$$

Тогда общее решение уравнения (29) при $D_k > 0$ имеет вид

$$v_{2k} = \exp(\varepsilon z)[b_{2k}\cos(\gamma_k z) + b_{3k}\sin(\gamma_k z)], \quad \gamma_k^2 := D_k, \tag{31}$$

а при $D_k < 0$

$$v_{2k} = \exp(\varepsilon z)[b_{2k}\exp(\xi_k z) + b_{3k}\exp(-\xi_k z)], \quad \xi_k^2 := -D_k.$$

С учетом граничных условий при $D_k > 0$ для коэффициентов b_{1k}, b_{2k} и b_{3k} получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}
b_{2k}\{\varepsilon\cos(\gamma_k h_2) - \gamma_k\sin(\gamma_k h_2)\} + b_{3k}\{\varepsilon\sin(\gamma_k h_2) + \gamma_k\cos(\gamma_k h_2)\} = 0,\\
b_{1k}\mu_k\mathrm{sh}(\mu_k h_1) - b_{2k}(\varepsilon^2 + \gamma_k^2)\sin(\gamma_k h_2) = 0,\\
b_{1k}\{\lambda_k(B_\sigma)\mu_k\mathrm{sh}(\mu_k h_1) - \lambda\rho_1\mathrm{ch}(\mu_k h_1)\} + b_{2k}\lambda\rho_{2,0}(0)\{\varepsilon\sin(\gamma_k h_2) + \gamma_k\cos(\gamma_k h_2)\} = 0,
\end{gathered} \tag{32}$$

откуда с учетом нетривиальности искомого решения приходим к характеристическому уравнению для определения γ_k:

$$\varepsilon + \gamma_k\,\mathrm{ctg}(\gamma_k h_2) = \left(-\frac{\alpha^2\lambda_k(B_\sigma)}{\rho_{2,0}(0)(\mu_k^2 + \varepsilon^2 + \gamma_k^2)} + \frac{\rho_1\,\mathrm{cth}(\mu_k h_1)}{\mu_k\rho_{2,0}(0)}\right)(\varepsilon^2 + \gamma_k^2). \tag{33}$$

Графическое решение уравнения (33) показывает, что при фиксированном $k = 1, 2, \ldots$ оно имеет счетное множество решений γ_{kp}, $p = 1, 2, \ldots$. Значение $p = 1$ соответствует первому корню уравнения (33). Отметим, что отыскание γ_{kp} с учетом (30), (31) позволяет легко найти значение искомого спектрального параметра:

$$\lambda_{kp} = \alpha^{-2}(\varepsilon^2 + \mu_k^2 + \gamma_{kp}^2).$$

Далее, из соотношений (32) при $D_k > 0$ вычисляем коэффициенты b_{2kp} и b_{3kp}:

$$b_{2kp} = b_{1k}\frac{(\varepsilon\sin(\gamma_{kp}h_2) + \gamma_{kp}\cos(\gamma_{kp}h_2))\mu_k\,\mathrm{sh}(\mu_k h_1)}{(\varepsilon^2 + \gamma_{kp}^2)\sin(\gamma_{kp}h_2)},$$

$$b_{3kp} = -b_{1k}\frac{(\varepsilon\cos(\gamma_{kp}h_2) - \gamma_{kp}\sin(\gamma_{kp}h_2))\mu_k\,\mathrm{sh}(\mu_k h_1)}{(\varepsilon^2 + \gamma_{kp}^2)\sin(\gamma_{kp}h_2)}.$$

Следовательно, координатные функции Φ_{2kp} можно выбрать в виде

$$\Phi_{2kp}=b_{1k}\frac{\mu_k\,\mathrm{sh}(\mu_k h_1)}{\sin(\gamma_{kp}h_2)(\varepsilon^2+\gamma_{kp}^2)}\Big\{(\varepsilon\sin(\gamma_{kp}h_2)+\gamma_{kp}\cos(\gamma_{kp}h_2))\cos(\gamma_{kp}z)-$$
$$-(\varepsilon\cos(\gamma_{kp}h_2)-\gamma_{kp}\sin(\gamma_{kp}h_2))\sin(\gamma_{kp}z)\Big\}\exp(\varepsilon z)u_k(x).$$

Аналогичные выкладки при $D_k<0$ приводят к соотношениям

$$b_{2k}(\varepsilon+\xi_k)\exp(\xi_k h_2)+b_{3k}(\varepsilon-\xi_k)\exp(-\xi_k h_2)=0,$$
$$b_{1k}\mu_k\mathrm{sh}(\mu_k h_1)-b_{2k}(\varepsilon+\xi_k)-b_{3k}(\varepsilon-\xi_k)=0,$$
$$b_{1k}\{\lambda_k(B_\sigma)\mu_k\mathrm{sh}(\mu_k h_1)-\lambda_k\rho_1\mathrm{ch}(\mu_k h_1)\}+b_{2k}\lambda\rho_{2,0}(0)+b_{3k}\lambda\rho_{2,0}(0)=0,$$

из которых следует характеристическое уравнение для определения ξ_k:

$$\varepsilon+\xi_k\,\mathrm{cth}(\xi_k h_2)=\left(-\frac{\alpha^2\lambda_k(B_\sigma)}{\rho_{2,0}(0)(\mu_k^2+\varepsilon^2-\xi_k^2)}+\frac{\rho_1\,\mathrm{cth}(\mu_k h_1)}{\mu_k\rho_{2,0}(0)}\right)(\varepsilon^2-\xi_k^2). \quad (34)$$

Анализ уравнения (34) показывает, что при фиксированном $k=1,2,\dots$ оно имеет единственный корень $\xi_{k0}\in(0,\sqrt{\varepsilon^2+\mu_k^2})$ (см. знаменатель первого слагаемого в правой части). Соответствующие коэффициенты и пробные функции имеют вид

$$b_{2k0}=-b_{1k}\frac{\exp(-\xi_{k0}h_2)\mu_k\,\mathrm{sh}(\mu_k h_1)}{2(\varepsilon+\xi_{k0})\,\mathrm{sh}(\xi_{k0}h_2)},\qquad b_{3k0}=-b_{1k}\frac{\exp(\xi_{k0}h_2)\mu_k\,\mathrm{sh}(\mu_k h_1)}{2(\xi_{k0}-\varepsilon)\,\mathrm{sh}(\xi_{k0}h_2)},$$

$$\Phi_{2k0}=-b_{1k}\frac{\mu_k\,\mathrm{sh}(\mu_k h_1)}{2\,\mathrm{sh}(\xi_{k0}h_2)}\Big\{\frac{\exp(\xi_{k0}(z-h_2))}{(\varepsilon+\xi_{k0})}+\frac{\exp(-\xi_{k0}(z-h_2))}{(\xi_{k0}-\varepsilon)h_2)}\Big\}\exp(\varepsilon z)u_k(x).$$

Отметим, наконец, что при $D_k=0$ нетривиальное решение Φ_2 отсутствует.

Теперь с учетом полученных результатов, а именно, наличия при каждом фиксированном $k=1,2,\dots$ единственного решения Φ_{2k0} (поверхностная волна) и счетного множества решений Φ_{2kp}, $p=1,2,\dots$, (акустические волны), уточним представление приближенного решения и вид характеристического уравнения (24), (25) для нахождения значений спектрального параметра $\lambda=\lambda_{kp}$.

Зафиксируем значения $N\geq 1$, $M\geq 0$ и перенумеруем наборы координатных функций $\{\Phi_{kp}:=(\Phi_{1k};\Phi_{2kp})\}$, $k=1,2\dots,N$, $p=0,1,\dots,M$, следующим способом:

$$\Phi_1:=(\Phi_{11};\Phi_{210}),\ \Phi_1:=(\Phi_{11};\Phi_{211}),\ \ \Phi_{M+1}:=(\Phi_{11};\Phi_{21M}),$$
$$\Phi_{M+2}:=(\Phi_{12};\Phi_{220}),\ \Phi_{M+3}:=(\Phi_{12};\Phi_{221}),\dots,\ \Phi_{2M+2}:=(\Phi_{12};\Phi_{22M}),\ \ \dots,$$
$$\Phi_{(N-1)(M+1)+1}:=(\Phi_{1N};\Phi_{2N0}),\ \dots,\ \Phi_{N(M+1)}:=(\Phi_{1N};\Phi_{2NM}), \quad (35)$$

т.е. двумерному индексу kp поставим во взаимнооднозначное соответствие одномерный индекс $t=(M+1)(k-1)+p+1$. Тогда, с учетом условии нормировки (4), конечномерная аппроксимация (21) обобщенного решения переписывается в виде

$$\Phi=\sum_{t=1}^{N(M+1)}c_t f_t,\ \Phi_t=\begin{pmatrix} f_{1t}\\ f_{2t}\end{pmatrix}:=a_t\begin{pmatrix}\Phi_{1k}-d_k^{(1)}\\ \Phi_{2kp}-d_{kp}^{(2)}\rho_{2,0}^{-1}\end{pmatrix},\ d_{kp}^{(2)}=\frac{1}{|\Omega_2|}\int\limits_{\Omega_2}\rho_{2,0}\Phi_{2kp}\,d\Omega_2,$$

$$d_k^{(1)} = \frac{1}{2s_0}\int\limits_{-s_0}^{s_0} \Phi_{1k} ds, \quad k = k(t) = t \div (M+1) + 1, \quad p = p(t) = t - (k-1)(M+1) - 1.$$

где a_t — дополнительные нормировочные коэффициенты пропорциональности, необходимость введения которых вызывается тем обстоятельством, что числа $\widehat{A}_{lk}$ выражаются через множители $\mu_k = \pi(k-1/2)$, $\exp(\pm\mu_k(z+h_1)$, $k = \overline{1, N(M+1)}$, что может вызвать неустойчивость вычислительного процесса.

Теперь соотношения (25) переписываются в виде

$$\widehat{\mathcal{A}}_{t\nu} := \Big(\int\limits_{\Omega_1} \nabla f_{1t} \cdot \nabla f_{1\nu}\, d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} \nabla f_{2t} \cdot \nabla f_{2\nu}\, d\Omega_2 -$$

$$- \lambda \Big(\alpha^2 \int\limits_{\Omega_2} \rho_{2,0} f_{2t} f_{2\nu}\, d\Omega_2 + \int\limits_{-s_0}^{s_0} (f_{1t} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2t})) B_\sigma^{-1} (f_{1\nu} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2\nu})) ds \Big) \Big). \quad (36)$$

Таким образом, исходная спектральная задача сведена к задаче (24)–(25) на собственные значения λ в конечномерном пространстве размерности $N^2(M+1)^2$.

Дополнительные нормировочные коэффициенты a_t определяются так, чтобы на решениях задачи с горизонтальной границей Γ выполнялось соотношение $\alpha_{tt} \equiv 1$. Наконец, отметим, что слагаемые вида

$$\int\limits_{-s_0}^{s_0} (f_{1t} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2t})) B_\sigma^{-1} (f_{1\nu} - P_\Gamma(\rho_{2,0} f_{2\nu})) ds$$

можно вычислить способом, предложенным в [1, с. 317-319].

7. Выводы

В данной работе разработан проекционный метод решения двумерной спектральной задачи с граничными условиями Неймана и условиями сопряжения на негоризонтальной границе, возникающей в проблеме малых колебаний гидросистемы "идеальная капиллярная жидкость–баротропный газ" в прямоугольном канале. Этот метод основан на вариационном подходе и может быть использован для решения спектральной задачи сопряжения, порожденной аналогичной эволюционной проблемой в осесимметричном сосуде.

Автор выражает благодарность Н.Д. Копачевскому за постановку проблемы и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / [В. Г. Бабский, М. Ю. Жуков, А. Д. Мышкис, Н. Д. Копачевский, Л. А. Слобожанин, А. Д. Тюпцов]; под ред. А. Д. Мышкиса. — К.: Наукова думка, 1992. — 592 с.

[2] Барняк М. Я. Применение метода ортогональных проекций к исследованию малых колебаний жидкости в сосуде / М. Я. Барняк // Математическая физика в нелинейной механике. — 1988. — Т. 10(44). — С. 37–43.

[3] Копачевский Н. Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н. Д. Копачевский, С. Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[4] Копачевский Н. Д. О задаче Коши для малых колебаний вязкой жидкости в слабом поле массовых сил / Н. Д. Копачевский // ЖВМиМФ. – 1967. – Т. 7, № 1. – С. 128-146.

[5] Луковский И. А. Вариационная формулировка одной нелинейной краевой задачи с неизвестной поверхностью раздела двух областей / И. А. Луковский, А. Н. Тимоха // Устойчивость движения твердых тел и деформируемых систем. — К.: Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 7–10.

[6] Луковский И. А. Модифікація варіаційного методу розв'язку задач про власні коливання рідини в похилому циліндрі / И. А. Луковский, М. Я. Барняк // Доповіді НАН України. — 1997. — № 5. — С. 62—66.

[7] Луковский И. А. Приближенные методы решения задач динамики ограниченного объема жидкости / И. А. Луковский, М. Я. Барняк, А. Н. Комаренко. — К.: Наукова думка, 1984. — 229 с.

[8] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

[9] Barnyak M. Ya. Construction of solutions for the problem of free oscillations of an ideal liquid in cavities of complex geometric form / M. Ya. Barnyak // Ukrainian Mathematical Journal. — 2005. — Vol. 57, No 12. — pp. 1853-1869.

[10] Gaziev E. L. Small motions and eigenoscillations of a "fluid-barothropic gas" hydrosystem / E. L. Gaziev, N. D. Kopachevsky // Journal of Mathematical Sciences. — Vol. 192, № 4, July, 2013. — pp. 389-416.

[11] Gavrilyuk I. P. Evolutional problems of the contained fluid / I. P. Gavrilyuk, I. A. Lukovsky, V. L. Makarov, A. N. Timokha. — К.: Ін-т математики НАН України, 2006. — Т. 58. — 233 с.

[12] Low-Gravity Fluid Mechanics / [A. D. Myshkis, V. G. Babckii, N. D. Kopachevsky, L. A. Slobozhanin, A. D. Tyuptsov.] — Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokio, 1987. — 583 p.

[13] Газиев Э. Л. Собственные колебания гидросистемы "жидкость–газ" в цилиндрической области / Э. Л. Газиев // Динамические системы. — 2012. — Т. 2(30), № 1–2. — С. 3–22.

[14] Газиев Э. Л. Задача статики гидросистемы "жидкость–баротропный газ" в условиях, близких к невесомости / Э. Л. Газиев // Труды ИПММ. — 2010. — Т. 20. — С. 39–47.

[15] Газиев Э. Л. О вычислительных схемах определения равновесной поверхности жидкости в гидросистеме "жидкость-газ" для сосудов различных форм / Э. Л. Газиев //

Матер. XLII научн. конф. "Дни науки ТНУ им. В.И. Вернадского". — Симферополь: ДИАЙПИ, 2013. — С. 289-291.

[16] Gaziev E. On the Modelling of Static Equilibrium of the System "Ideal Fluid–Barothropic Gas"/ E. Gaziev // International Conference "Analysis and Mathematical Physics". Book of Abstracts. — Kharkiv: Institute for Low Temperature Physics of NASU, 2013. — C. 34-35.

Спектральна задача з умовами спряження на криволінійній межі

Вивчається спектральна проблема, яка виникає в проблемі власних коливань системи "ідеальна капілярна рідина–газ", що заповнює прямокутний канал з твердою стінкою. Розглядається випадок, коли газ стратифікований за густиною уздовж напрямку гравітаційних сил, а умови сполучення для потенціалів зміщень сформульовано на поверхні рідини, яка в стані спокою не є горизонтальною. Представлено проекційний метод для знаходження узагальненого розв'язку.

Ключові слова: капілярна рідина, газ, стратіфикація, спектральна задача, умова спряження, проекційний метод, узагальнений розв'язок.

Spectral problem with transmission conditions on curvilinear interface

This paper deals with a spectral problem arising in a problem of small motions of a system "ideal capillary fluid–gas" in a rectangular vessel with the solid walls. We suppose that a gas density is exponentially stratified opposite to the direction of gravitational forces and conjugation conditions for potential displacement are formulated on the fluid surface which is not horizontal at rest. A projection method for finding a generalized solution is offered.

Keywords: capillary fluid, gas, stratification, spectral problem, conjugation condition, projection method, generalized solution.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 58–64.

УДК 517.98: 517.984.4: 517.2: 517.927.2: 517.927.2

Н. Д. Копачевский, К. А. Радомирская

АБСТРАКТНЫЕ СМЕШАННЫЕ КРАЕВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОПРЯЖЕНИЯ

В статье на базе абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа рассмотрен новый класс смешанных краевых и спектральных задач и задач сопряжения.

Ключевые слова: формула Грина, липшицева граница, гильбертово пространство, слабое решение, вспомогательные задачи.

E-mail: kopachevsky@crimea.edu, radomirskaya@mail.ru

1. Введение

1.1. **Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств.** Пусть $\{E, (\cdot,\cdot)_E\}$, $\{F, (\cdot,\cdot)_F\}$, $\{G, (\cdot,\cdot)_G\}$ - сепарабельные гильбертовы пространства с введенными скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия.

(1) Пространство F плотно вложено в E, $F \hookrightarrow E$ и
$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \ \forall u \in F. \tag{1}$$

(2) На пространстве F задан оператор γ, который называется абстрактным оператором следа и ограниченно действует из F в G. Причем $\gamma: \ F \to G_+ \hookrightarrow G$ и
$$\|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F, \ b > 0, \ u \in F. \tag{2}$$

(3) Ядро $\ker\gamma$ оператора γ плотно в E.

Теорема 1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств* $\{E, (\cdot,\cdot)_E\}$, $\{F, (\cdot,\cdot)_F\}$, $\{G, (\cdot,\cdot)_G\}$ *и для абстрактного оператора следа* γ *выполнены условия (1)-(3). Тогда существует абстрактное дифференциальное выражение* $Lu \in F^*$ *и абстрактная* *производная по внешней нормали* $\partial u \in (G_+)^*$ *такие, что имеет место абстрактная формула Грина (аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа)*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3}$$

При этом ∂u *по элементам* $u \in F$ *и* $Lu \in F^*$ *определяется однозначно.*

Замечание 4. Косыми скобками $\langle \eta, u \rangle_E$ обозначают значение функционала $v \in F^*$ на элементе $\eta \in F$; аналогичный смысл имеет выражение $\langle \varphi, \psi \rangle_G$.

1.2. **Обобщенная формула Грина для оператора Лапласа.** Пусть $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, $\gamma u := u \mid_\Gamma$ $(\forall u \in H^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $\Gamma = \partial\Omega$ - липшицева граница области Ω.

Теорема 2. *Если выполнены сформулированные выше условия, то имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа:*

$$\begin{aligned}(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u) \partial\Omega = \langle \eta, u - \triangle u \rangle_{L_2(\Omega)} + \\ + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \ \forall \eta, \ u \in H^1(\Omega),\end{aligned} \tag{4}$$

$$u - \triangle u \in (H^1(\Omega))^*, \ \ \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \ \ \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{5}$$

1.3. **Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач.** Пусть $\{p_k\}_{k=1}^q$ – непрерывные проекторы, действующие в G_+, причем $\sum_{k=1}^q p_k = I_+$ (единичный оператор в G_+). Пусть также выполнены условия

$$p_k = \omega_k \rho_k, \ k = \overline{1, q}, \ \ \rho_k \omega_k = (I_+)_k, \ k = \overline{1, q}, \tag{6}$$

где $(I_+)_k$ – единичный оператор в $(G_+)_k := \rho_k G_+$, ρ_k – непрерывный оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k – непрерывный оператор продолжения с $(G_+)_k$ на G_+. Тогда

$$p_k^* = \rho_k^* \omega_k^*, \ \ \rho_k^* : (G_+)_k^* \to (G_+)^*, \ k = \overline{1, q}, \tag{7}$$

причем ω_k^* – оператор сужения, а ρ_k^* – оператор продолжения.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (1)-(3), а также условие* (6) *либо* (7) *Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме:*

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu \rangle_E + \sum_{k=1}^q \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \ \ \forall \eta, u \in F, \tag{8}$$

$$\begin{aligned}(G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*, \ \gamma_k \eta := \rho_k \gamma\eta \in (G_+)_k, \\ \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*, \ k = \overline{1, q}.\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь γ_k - абстрактный оператор следа на часть границы области, а ∂_k - абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.

1.4. **Обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач.** Рассмотрим в условиях п. (1.2) ситуацию, когда липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на непересекающиеся куски Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,q}$.

Теорема 4. *Если выполнены сформулированные условия, то имеет место следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач:*

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \triangle u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall\, \eta,\ u \in H^1(\Omega), \tag{10}$$

$$\gamma_k\eta := \eta\,|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1,q}. \tag{11}$$

2. Смешанные краевые задачи сопряжения

2.1. **Постановка задачи.** Теорема (4) позволяет исследовать разрешимость смешанных краевых задач сопряжения для нескольких примыкающих друг к другу областей, на общих границах которых заданы условия сопряжения.

Аналогичные построения могут быть проведены и в абстрактной форме на основе теоремы (3).

Будем для определенности считать, что в $\mathbb{R}^m$ имеются три области $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3$, примыкающие друг к другу по липшицевым кускам границ $\Gamma_{jk},\ \Gamma_{jk} = \Gamma_{kj},\ j,k = 1,2,3$, и имеющие внешние (свободные) границы $\Gamma_{kk},\ k = \overline{1,3}$. Через $\gamma_{jk}u_k$ будем обозначать след функции u_k на Γ_{jk}, через $\partial_{jk}u_k$ - соответствующую производную по внешней нормали к области Ω_k.

Рассмотрим следующую смешанную краевую задачу (конфигурирация – разрезанный на три части арбуз с тремя примыкающими друг к другу внутренними границами):

$$\begin{array}{ll} u_1 - \triangle u_1 = f_1 \quad (\Omega_1), & \gamma_{11}u_1 = \varphi_1 \quad (\Gamma_{11}), \\ u_2 - \triangle u_2 = f_2 \quad (\Omega_2), & \gamma_{22}u_2 = \varphi_2 \quad (\Gamma_{22}), \\ u_3 - \triangle u_3 = f_3 \quad (\Omega_3), & \gamma_{33}u_3 = \varphi_3 \quad (\Gamma_{33}). \end{array} \tag{12}$$

В качестве условий сопряжения выберем следующие условия:

$$\begin{array}{lll} \gamma_{21}u_1 - \gamma_{12}u_2 = \varphi_{12}, & \partial_{21}u_1 + \partial_{12}u_2 = \psi_{12} & (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32}u_2 - \gamma_{23}u_3 = \varphi_{23}, & \partial_{32}u_2 + \partial_{23}u_3 = \psi_{23} & (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ -\gamma_{31}u_1 + \gamma_{13}u_3 = \varphi_{31}, & \partial_{31}u_1 + \partial_{13}u_3 = -\psi_{13} & (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{array} \tag{13}$$

Наша цель - выяснить необходимые и достаточные условия на заданные функции $f_k,\ \varphi_k,\ k = \overline{1,3}$, а также φ_{jk} и ψ_{jk}, при которых задача (12), (13) имеет слабое решение в пространстве

$$H^1(\Omega) := H^1(\Omega_1) \oplus H^1(\Omega_2) \oplus H^1(\Omega_3). \tag{14}$$

В силу линейности задачи ее решение может быть представлено в виде суммы решений вспомогательных задач, содержащих неоднородности в уравнениях либо в краевых условиях лишь в одном месте (т. е. либо в уравнении, либо в краевом условии).

2.2. **Вспомогательные задачи Зарембы.** Пусть $u_{(1)} := (u_{11}; u_{12}; u_{13})$ - решение задачи

$$\begin{array}{lll} u_{11} - \triangle u_{11} = 0 \quad (\Omega_1), & \gamma_{11} u_{11} = \varphi_1 \quad (\Gamma_{11}), \\ u_{12} - \triangle u_{12} = 0 \quad (\Omega_2), & \gamma_{22} u_{12} = \varphi_2 \quad (\Gamma_{22}), \\ u_{13} - \triangle u_{13} = 0 \quad (\Omega_3), & \gamma_{33} u_{13} = \varphi_3 \quad (\Gamma_{33}), \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \partial_{21} u_{11} = 0 \quad (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), & \partial_{31} u_{11} = 0 \quad (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}), \\ \partial_{12} u_{12} = 0 \quad (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), & \partial_{32} u_{12} = 0 \quad (\Gamma_{32} = \Gamma_{23}), \\ \partial_{13} u_{13} = 0 \quad (\Gamma_{13} = \Gamma_{31}), & \partial_{23} u_{13} = 0 \quad (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}). \end{array}$$

Теорема 5. *Каждая из задач Зарембы имеет слабое решение из подпространства квазигармонических функций $H^1_h(\Omega_k) \subset H^1(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$, тогда и только тогда, когда $\varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_{kk})$, $k = \overline{1,3}$. При этом*

$$u_{1k} = \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} \varphi_k, \ \widetilde{\gamma}_{kk}^{-1} \in \mathfrak{L}(H^{1/2}(\Gamma_{kk}), H^1_h(\Omega_k)), \ k = \overline{1,3}. \tag{15}$$

2.3. **Вспомогательная задача Стеклова.** Она формулируется для набора функций $u_{(2)} := (u_{21}; u_{22}; u_{23})$ в следующем виде

$$\begin{array}{ll} u_{21} - \triangle u_{21} = 0 \quad (\Omega_1), & \gamma_{11} u_{21} = 0 \quad (\Gamma_{11}), \\ u_{22} - \triangle u_{22} = 0 \quad (\Omega_2), & \gamma_{22} u_{22} = 0 \quad (\Gamma_{22}), \\ u_{23} - \triangle u_{23} = 0 \quad (\Omega_3), & \gamma_{33} u_{23} = 0 \quad (\Gamma_{33}). \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \gamma_{21} u_{21} - \gamma_{12} u_{22} = \widetilde{\varphi}_{12} := \varphi_{12} - \gamma_{21} u_{11} + \gamma_{12} u_{12}, & \partial_{21} u_{21} + \partial_{12} u_{22} = 0 \quad (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}) \\ \gamma_{32} u_{22} - \gamma_{23} u_{23} = \widetilde{\varphi}_{23} := \varphi_{23} - \gamma_{32} u_{12} + \gamma_{23} u_{13}, & \partial_{32} u_{22} + \partial_{23} u_{23} = 0 \quad (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}) \\ -\gamma_{31} u_{21} + \gamma_{13} u_{23} = \widetilde{\varphi}_{31} := \varphi_{31} - \gamma_{13} u_{13} + \gamma_{31} u_{11}, & \partial_{31} u_{21} + \partial_{13} u_{23} = 0 \quad (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{array}$$

Теорема 6. *Сформулированная вспомогательная задача Стеклова в условиях теоремы* (12) *имеет слабое решение $u_{(2)} \in H^1_h(\Omega) := H^1_h(\Omega_1) \oplus H^1_h(\Omega_2) \oplus H^1_h(\Omega_3)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\varphi_{12} \in H^{1/2}(\Gamma_{12}), \ \varphi_{23} \in H^{1/2}(\Gamma_{23}), \ \varphi_{31} \in H^{1/2}(\Gamma_{31}). \tag{16}$$

2.4. **Первая вспомогательная задача С. Крейна.** Для набора функций $u_{(3)} := (u_{31}; u_{32}; u_{33})$ задача формулируется следующим образом:

$$\begin{array}{llll} u_{31} - \triangle u_{31} = f_1 & (\Omega_1) & \gamma_{11} u_{31} = 0 & (\Gamma_{11}) \\ u_{32} - \triangle u_{32} = f_2 & (\Omega_2) & \gamma_{22} u_{32} = 0 & (\Gamma_{22}) \\ u_{33} - \triangle u_{33} = f_3 & (\Omega_3) & \gamma_{33} u_{33} = 0 & (\Gamma_{33}) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \gamma_{21} u_{31} - \gamma_{12} u_{32} = 0, & \partial_{21} u_{31} + \partial_{12} u_{32} = 0 \ (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32} u_{32} - \gamma_{23} u_{33} = 0, & \partial_{32} u_{32} + \partial_{23} u_{33} = 0 \ (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ \gamma_{31} u_{31} - \gamma_{13} u_{33} = 0, & \partial_{31} u_{31} + \partial_{13} u_{33} = 0 \ (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{array}$$

Введем в рассмотрение подпространство

$$V^1_\Gamma(\Omega) := \{u = (u_1; u_2; u_3) \in H^1(\Omega) : \ \gamma_{jj} u_j = 0 \ (\Gamma_{jj}), \ j = \overline{1,3}; \\ \gamma_{jk} u_k - \gamma_{kj} u_j = 0 \ (\Gamma_{jk}), \ \ j,k = \overline{1,3}\} \subset H^1(\Omega)$$

Теорема 7. *Первая вспомогательная задача С. Крейна имеет единственное слабое решение $u_{(3)} \in V^1_\Gamma(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$f := (f_1; f_2; f_3) \in (V^1_\Gamma(\Omega))^*, \ \ V^1_\Gamma(\Omega) \hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow (V^1_\Gamma(\Omega))^*. \tag{17}$$

В частности, если

$$f = (f_1; f_2; f_3) \in \bigoplus_{k=1}^{3} L_2(\Omega_k) \hookrightarrow (V^1_\Gamma(\Omega))^*, \tag{18}$$

то эта задача имеет единственное обобщенное решение.

2.5. **Вторая вспомогательная задача С. Крейна.** Для набора функций $u_{(4)} := (u_{41}; u_{42}; u_{43})$ задача формулируется так:

$$\begin{array}{llll} u_{41} - \triangle u_{41} = 0 & (\Omega_1), & \gamma_{11} u_{41} = 0 & (\Gamma_{11}), \\ u_{42} - \triangle u_{42} = 0 & (\Omega_2), & \gamma_{22} u_{42} = 0 & (\Gamma_{22}), \\ u_{43} - \triangle u_{43} = 0 & (\Omega_3), & \gamma_{33} u_{43} = 0 & (\Gamma_{33}), \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \gamma_{21} u_{41} - \gamma_{12} u_{42} = 0, & \partial_{21} u_{41} + \partial_{12} u_{42} = \psi_{12} & (\Gamma_{12} = \Gamma_{21}), \\ \gamma_{32} u_{42} - \gamma_{23} u_{43} = 0, & \partial_{32} u_{42} + \partial_{23} u_{43} = \psi_{23} & (\Gamma_{23} = \Gamma_{32}), \\ \gamma_{31} u_{41} - \gamma_{13} u_{43} = 0, & \partial_{31} u_{41} + \partial_{13} u_{43} = -\psi_{31} & (\Gamma_{31} = \Gamma_{13}). \end{array}$$

Теорема 8. *Вторая вспомогательная задача С. Крейна имеет слабое решение $u_{(4)} \in V^1_\Gamma(\Omega)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия*

$$\psi_{12} \in H^{-1/2}(\Gamma_{12}), \ \psi_{23} \in H^{-1/2}(\Gamma_{23}), \ \psi_{31} \in H^{-1/2}(\Gamma_{31}). \tag{19}$$

Итогом рассмотрения смешанной краевой задачи сопряжения (12), (13) является следующее утверждение.

Теорема 9. *Эта задача имеет единственное слабое решение из пространства* $H^1(\Omega) = \bigoplus_{k=1}^{3} H^1(\Omega_k)$ *тогда и только тогда, когда выполнены условия* (15)-(17), (19). *Решение задачи* (12), (13) *является суммой решений вспомогательных задач, рассмотренных в пп.* (13)- (2.5).

3. О спектральных задачах сопряжения

Методы, рассмотренные в параграфе (2), позволяют исследовать не только краевые, но и спектральные задачи сопряжения для одной, двух, трех и более примыкающих друг к другу областей.

3.1. **Постановка задачи.** Рассмотрим для простоты случай лишь одной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$, разбитой на четыре липшицевых куска Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k,\ k = \overline{1,4}$.

Требуется найти решения следующей однородной смешанной задачи:

$$\begin{array}{ll} u - \triangle u = \lambda u & (\Omega), \\ \gamma_1 u = 0 & (\Gamma_1), \\ \partial_2 u = \lambda\gamma_2 u & (\Gamma_2), \\ \partial_3 u = \mu\gamma_3 u & (\Gamma_3), \\ \partial_4 u = \lambda^{-1}\gamma_4 u & (\Gamma_4). \end{array} \tag{20}$$

Здесь λ и μ – комплексные параметры, один из которых можно считать спектральным, а другой – фиксированным. Решения задачи (20) будем считать принадлежащими пространству $H^1(\Omega)$.

3.2. **Переход к спектральной задаче для операторного пучка.** Представим решение задачи (20) в виде суммы решений четырех вспомогательных задач: одной – типа первой вспомогательной задачи С. Крейна, а трех других – типа второй вспомогательной задачи С. Крейна.

Теорема 10. *Задача* (20) *равносильна спектральной проблеме*

$$u = \lambda A^{-1}u + \lambda T_2\gamma_2 u + \mu T_3\gamma_3 u + \lambda^{-1}T_4\gamma_4 u,\ u \in H^1(\Omega), \tag{21}$$

где A *– оператор гильбертовой пары* $(H^1(\Omega),\ L_2(\Omega))$, *а* $T_j,\ j = \overline{2,4}$ *– операторы вторых вспомогательных задач С. Крейна.*

Теорема 11. *Задача* (21) *равносильна спектральной задаче для операторного пучка*

$$L(\lambda, \mu) := I - \lambda(A^{-1} + B_2) - \mu B_3 - \lambda^{-1}B_4, \tag{22}$$

действующего в пространстве $L_2(\Omega)$, *при этом*

$$B_j := (A^{1/2}T_j)(\gamma_j A^{-1/2}) = B_j^* \geqslant 0,\ \ B_j \in \mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega)),\ j = \overline{2,4} \tag{23}$$

В частности, если $\mu \leqslant 0$, то приходим к известному пучку С. Крейна; если $\mu > 0$, то возникает индефинитная метрика в спектральной проблеме об устойчивости конвективных движений жидкости; при $Im\mu \neq 0$ получаем слабые возмущения пучка С. Крейна; при $B_4 = 0$ – задачу сопряжения в теории дифракции.

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д. *Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых ее приложениях // Спектральные и эволюционные задачи.* – Симферополь: КНЦ ТНУ, – 2011.

[2] Копачевский Н.Д. *Абстрактная формула Грина: специальный курс лекций.* – Симферополь: ФЛП "Бондаренко О.Ф. – 2011 – С. 136.

[3] Агранович М.С. *Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей // Успехи матем. наук.* – 2002. – Т. 57. – Вып. 5(347). – С.3-78.

[4] Агранович М.С. *Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей.* – М.:МЦНМО, – 2013 – С. 379.

Абстрактні змішані крайові та спектральні задачі спряження

У статті на базі абстрактної формули Гріна для трійки гільбертових просторів і узагальненої формули Гріна для оператора Лапласа розглянуто новий клас змішаних крайових, спектральних задач і задач спряження.

Ключові слова: формула Гріна, ліпшіцева межа, гильбертовий простір, слабкий розв'язок, допоміжні задачі.

Abstract mixed boundary and spectral transmission problems

On the basis of the abstract Green's formula for the triple of Hilbert spaces and the generalized Green's formula for the Laplace operator we consider a new class of mixed boundary value and spectral transmission problems.

Keywords: Green's formula, Lipschitz boundary, Hilbert space, weak solution, supporting tasks.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 65–74.

УДК 519.216.73, 517.986.7, 517.982.46

И. В. Мельникова, О. С. Старкова

СЛАБЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ АБСТРАКТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

В работе рассматриваются три вида решений (слабое, обобщенное по временной переменной и обобщенное по случайной переменной) бесконечномерной стохастической задачи Коши $X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t), t \geq 0$, $X(0) = \zeta$, где A, в общем случае, генератор регуляризованной полугруппы в некотором гильбертовом пространстве H и $\mathbb{W}$ — белый шум в другом гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$. Исследованы свойства указанных решений и связи между ними.

Ключевые слова: белый шум, винеровский процесс, обобщенное, слабое, регуляризованное решение, распределение, полугруппа операторов.

Введение

Работа посвящена конструкции и сравнению различных решений задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения

$$X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t),\ t \geq 0, \quad X(0) = \zeta, \tag{1}$$

с генератором полугруппы класса C_0 или некоторой регуляризованной (интегрированной, K-конволюционной) полугруппы операторов в гильбертовом пространстве.

Среди подходов к решению стохастических задач, в том числе абстрактных (то есть рассматриваемых в бесконечномерных пространствах) известным является переход к интегральной задаче с интегралом Ито по некоторому винеровскому процессу $\{W(t), t \geq 0\}$, "первообразной" от белого шума $\{\mathbb{W}(t), t \geq 0\}$ (см., напр., [1]–[5]).

Для задачи (1) — это интегральная задача Коши с абстрактным интегралом Ито по винеровскому процессу :

$$X(t) = \zeta + \int_0^t AX(s)ds + \int_0^t BdW(t), \quad t \geq 0,$$

записываемая обычно, как и в случае конечномерных винеровских процессов, в форме дифференциалов:

$$dX(t) = AX(t)dt + BdW(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \zeta. \qquad (2)$$

Другой подход к решению задачи (1) — это решение именно дифференциальной задачи в пространствах абстрактных распределений. В пространствах распределений по временной переменной t дано определение процесса Q-белого шума $\{\mathbb{W}(t), t \geq 0\}$ и построено решение задачи с генератором регуляризованной полугруппы, в общем случае не являющейся полугруппой класса C_0. В пространствах распределений по случайной переменной ω, называемых стохастическими распределениями, определен более общий процесс $\{\mathbb{W}(t), t \geq 0\}$ — сингулярный белый шум, но решение получено для задачи с генератором полугруппы класса C_0 (см., напр., [6], [7], [5], [9]).

Настоящая работа посвящена исследованию свойств и сравнению слабых решений стохастической задачи Коши в форме (2) и обобщенных решений задачи (1), рассматриваемой в пространствах распределений. В первом разделе даны необходимые определения и сведения о существовании каждого из трех типов решений: слабых решений, решений, обобщенных по t, и решений, обобщенных по ω. Во втором разделе приведены результаты сравнения слабых и обобщенных по t решений при условии существования каждого из них, в третьем — слабого и обобщенного по ω решений.

Слабые и обобщенные решения стохастической задачи Коши

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство с нормальной фильтрацией $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и $H, \mathbb{H}$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $\{W(t),\ t \geq 0\}$ — $\mathbb{H}$-значный Q-винеровский процесс: $W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \beta_k(t) e_k$, где Q — симметричный неотрицательный оператор следа в $\mathbb{H}$, $\{e_k\}$ — полная ортонормированная система, состоящая из собственных векторов оператора Q: $Qe_k = \sigma_k^2 e_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$ и $\beta_k(t)$ — независимые броуновские движения.

Для абстрактной стохастической задачи Коши в форме (2), где ζ — $\mathcal{F}_0$-измеримая H-значная случайная величина, оператор A порождает некоторую полугруппу в H, в общем случае неограниченных операторов решения однородной задачи; $B : \mathbb{H} \to H$ линейный ограниченный оператор, $\{W(t),\ t \geq 0\}$ — $\mathbb{H}$-значный Q-винеровский процесс, будем рассматривать следующие типы слабых решений.

H-значный случайный предсказуемый процесс $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ называется *слабым решением* задачи Коши (2), если $\int_0^t \|X(s)\|_H \, ds < \infty$ п.н. ($\mathbf{P}_{a.s.}$) и

$$\langle X(t), y\rangle = \langle \zeta, y\rangle + \int\limits_0^t \langle X(s), A^* y\rangle\, ds + \langle BW(t), y\rangle,\ \mathbf{P}_{a.s.} \quad y \in \operatorname{dom} A^*\,, \tag{3}$$

слабым K-конволюционным решением, если

$$\langle X(t), y\rangle = \langle \int\limits_0^t K(s)\zeta\, ds, y\rangle + \langle \int\limits_0^t X(s)\, ds, A^* y\rangle + \langle \int\limits_0^t \int\limits_0^s K(s-r)\, BdW(r)\, ds, y\rangle, \tag{4}$$

в частности, *слабым n-интегральным решением* при $K(s) = \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}$.

По аналогии с классическим случаем каждое из решений, определяемых (3)–(4), ищется в форме $X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\, dW(s) =: S(t)\zeta + W_A(t), t \geq 0$, где $S = \{S(t),\ t \geq 0\}$ для уравнения (3) является полугруппой операторов решения соответствующей однородной задачи, для (4) — K-конволюционной полугруппой.

В случае полугруппы класса C_0 имеет место следующая теорема [1], [3]–[5]:

Теорема 1. *Пусть A — генератор полугруппы $S = \{S(t), t \geq 0\}$ класса C_0, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$, $\{W(t), t \geq 0\}$ — $\mathbb{H}$-значный Q-винеровский процесс и $\Psi(s) = S(t-s)B,\ t \geq s \geq 0$, удовлетворяет условию существования интеграла Ито: $\int_0^t \|\Psi(s)\|^2_{HS}\, ds < \infty, \quad \|\Psi(s)\|^2_{HS} := \sum_{j=1}^{\infty} \|\Psi(s) Q^{\frac{1}{2}} e_j\|^2 = \operatorname{tr} \Psi(s) Q \Psi^*(s)$. Тогда для любого $\mathcal{F}_0$-измеримого $\zeta \in H$ случайный процесс $X(t) = S(t)\zeta + W_A(t),\ t \geq 0$, существует и является единственным слабым решением задачи (2).*

Слабое K-конволюционное и слабое n раз интегрированное решение также представимо в форме $X(t) = S(t)\zeta + W_A(t)$; здесь $\{S(t), t \geq 0\}$ — соответствующая полугруппа операторов — K-конволюционная или n раз интегрированная [3]–[5].

Теперь об обобщенных решениях; сначала о решениях в пространствах абстрактных распределений по временной переменной, затем о решениях в пространствах стохастических распределений. Пусть $\mathcal{D}'(H)$ — пространство H-значных распределений над пространством основных функций Л. Шварца $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'_0(H)$ — пространство H-значных распределений с носителем на $[0, \infty)$. В пространстве распределений корректно определен Q-белый шум $\mathbb{W} \in \mathcal{D}'_0(L_2(\Omega, \mathbb{H}))$ как обобщенная производная по t от Q-винеровского процесса, продолженного нулем при $t < 0$: $\langle \varphi, \mathbb{W}\rangle := -\int_0^{\infty} W(t)\varphi'(t)\, dt,\ \varphi \in \mathcal{D}$.

Задачу Коши (1), следуя [8], запишем в следующем виде:

$$P * X = \delta \otimes \zeta + B\mathbb{W}, \quad P := \delta' \otimes I - \delta \otimes A\,, \tag{5}$$

здесь $P \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}([\operatorname{dom} A], H))$, $[\operatorname{dom} A]$ — область определения оператора A с граф-нормой $\|x\|_{[\operatorname{dom} A]} = \|x\| + \|Ax\|$.

Распределение $G \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(H, [\operatorname{dom} A]))$ называется *обратным относительно свертки с оператором P*, если $G * P = \delta \otimes I_{[\operatorname{dom} A]}, P * G = \delta \otimes I_H$, где $I_{[\operatorname{dom} A]}$ и I_H — единичные операторы в $[\operatorname{dom} A]$ и H, соответственно. В силу свойств распределения обратного к P относительно свертки, доказано (см., напр., [5]), что единственное решение задачи Коши (5) имеет вид

$$X = G * \delta\zeta + G * B\mathbb{W}, \quad X \in \mathcal{D}_0'([\mathrm{dom}\, A]) \cap \mathcal{D}_0'(L_2(\Omega, [\mathrm{dom}\, A])). \tag{6}$$

В частности, если A порождает полугруппу S класса C_0, то $G = \mathbf{S}$, где распределение $\mathbf{S}$ — это продолженные нулем при $t < 0$ операторы полугруппы S, и для X имеет место равенство $\langle \varphi, X\rangle = \int_0^\infty \varphi(t)S(t)\zeta\, dt - \int_0^\infty \varphi'(t)\, dt \int_0^t S(t-s)BW(s)\, ds\,, \varphi \in \mathcal{D}$. Если A порождает n раз интегрированную полугруппу, то

$$\langle \varphi, X\rangle = (-1)^n \left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)S(t)\zeta\, dt - \int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)\, dt \int_0^t S(t-s)BW(s)ds \right]. \tag{7}$$

Для решения задачи Коши с генератором K-конволюционной полугруппы S, в связи с необходимостью нахождения оператора, обратного к свертке с функцией $K(t), t \geq 0$, определяющей полугруппу, требуется более широкий класс распределений, так называемых ультрараспределений. Оператором, обратным относительно свертки с функцией $K(t)$, будет оператор бесконечного дифференцирования $P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right)$. В таком случае для решения обобщенной задачи Коши (5) в пространстве ультрараспределений $\mathcal{D}'_{0,M_n}(H)$ имеет место следующее равенство:

$$\langle \varphi, X\rangle = \int_0^\infty P^*_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)S(t)\zeta\, dt - \int_0^\infty P^*_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi'(t)\, dt \int_0^t S(t-s)B\, W(s)ds, \ \varphi \in \mathcal{D}_{M_n}. \tag{8}$$

В заключение этого раздела рассмотрим задачу (1) в пространствах абстрактных стохастических распределений $(\mathcal{S})^*(H)$ и решение, обобщенное по случайной переменной ω. Пусть $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$ — вероятностное пространство над пространством $\mathcal{S}'$ распределений Шварца медленного роста. По аналогии с тройкой Гельфанда $\mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^*$, для гильбертова пространства $(L_2)(H) := L_2(\mathcal{S}', \mu; H)$ (см., напр., [7], [5]) строится цепочка пространств $(\mathcal{S})(H) \subset ... \subset (\mathcal{S}_p)(H) \subset ... \subset (L_2)(H) \subset ... \subset (\mathcal{S}_{-p})(H) \subset ... \subset (\mathcal{S})^*(H)$, где элементы пространств $(\mathcal{S}_p)(H)$ и $(\mathcal{S}_{-p})(H)$ определяются в соответствии с поведением (убыванием или возрастанием, соответственно) коэффициентов Фурье в разложении по стохастическим полиномам Эрмита $\mathbf{h}_\alpha(\omega) := \prod_{i=1}^{\infty} h_{\alpha_i}(\langle \xi_i, \omega\rangle), \omega \in \mathcal{S}', \alpha \in \mathcal{T}$, где $\xi_i(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}((i-1)!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} h_{i-1}(\sqrt{2}x)$ — функции Эрмита, $h_i(x) = (-1)^i e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^i}{dx^i} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — полиномы Эрмиты, и $\mathcal{T}$ — множество всевозможных конечных мультииндексов.

$\mathbb{H}$-значный Q-винеровский процесс $\{W(t),\ t \geq 0\}$, определяемый в $\mathbb{H}$ рядом $W(t) = \sum_{k=1}^\infty \sigma_k \beta_k(t) e_k$, в пространствах стохастических распределений имеет вид:

$$W(t) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t \xi_i(s)\, ds (\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}} e_j) = \sum_{n=1}^\infty \sigma_{j(n)} \left(\int_0^t \xi_{i(n)}(s)\, ds e_{j(n)} \right) \mathbf{h}_{\epsilon_n}$$

и принадлежит $(L_2)(\mathbb{H})$. Кроме того, в этих пространствах определен Q-белый шум:

$$\mathbb{W}(t) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \xi_i(t)(\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}} e_j) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{j(n)} \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t)\mathbf{h}_{\epsilon_n} \in (\mathcal{S})^*(\mathbb{H}), \tag{9}$$

где $\mathbb{W}_{\epsilon_n}(t) := \xi_{i(n)}(t)e_{j(n)}$ и $n(i(n), j(n)) = n$, и, более того, сингулярный белый шум:

$$\mathbb{W}(t) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t)(\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}} e_j) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t)\mathbf{h}_{\epsilon_n} \in (\mathcal{S})^*(\mathbb{H}). \tag{10}$$

Обобщенное (по ω) решение задачи Коши (1) с $\mathbb{W}(t) \in (\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ строится следующим образом [5].

Теорема 2. *Пусть A — генератор полугруппы класса C_0 $\{S(t),\, t \geq 0\}$ в гильбертовом пространстве H; пусть $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$ и $\mathbb{W}$ — белый шум (Q-белый шум (9) или сингулярный белый шум (10)). Тогда для любого $\zeta = \sum_\alpha \zeta_\alpha h_\alpha \in (domA)$*

$$X(t) = \sum_\alpha X_\alpha(t) h_\alpha \in (\mathcal{S})^*(H), \quad t \geq 0, \tag{11}$$

где

$$X_\alpha(t) = \begin{cases} S(t)\zeta_{\epsilon_n} + \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}_{\epsilon_n}(s)\,ds, & \alpha = \epsilon_n \\ S(t)\zeta_\alpha, & \alpha \neq \epsilon_n \end{cases},$$

является единственным решением задачи Коши (1) *в* $(\mathcal{S})^*(H)$.

Связь между слабыми и обобщенными по t решениями

В условиях существования каждого из решений докажем совпадение решений обобщенной задачи Коши (5) со слабыми решениями задачи Коши (2).

Теорема 3. *Пусть оператор A — генератор полугруппы $\{S(t),\ t \geq 0\}$ класса C_0. Тогда слабое решение является решением обобщенной задачи Коши (5), где Q-белый шум $\mathbb{W}$ является обобщенной производной Q-винеровского процесса W. Обратно, обобщенное решение, определяемое равенством (6), является слабым решением задачи Коши (2).*

Доказательство. Проверим, что слабое решение задачи Коши в смысле Ито, определяемое процессом $\{X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\,dW(s), t \geq 0\}$ и продолженное нулем при $t < 0$, удовлетворяет уравнению (5) для любой H-значной $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ζ. Для этого домножим X на функцию $\varphi \in \mathcal{D}$ и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности. Из равенства интегралов

$$\int_0^\infty W(t)\varphi'(t)\,dt = \int_0^\infty \varphi(t)\,dW(t) \tag{12}$$

(которое следует из обобщения формулы Ито на бесконечномерный случай) получаем, что для слабого решения (для п.в. ω) имеет место равенство:

$$\langle\varphi, X\rangle = \langle\varphi, S\zeta\rangle - \langle\varphi', \int_0^t S(t-s)B\,W(s)ds\rangle. \tag{13}$$

Равенство (13) может быть записано следующим образом

$$\langle\varphi, X\rangle = \langle\varphi, \mathbf{S}\zeta\rangle - \langle\varphi', \mathbf{S} * B\,W\rangle = \langle\varphi, \mathbf{S}\zeta\rangle + \langle\varphi, \mathbf{S} * B\,\mathbb{W}\rangle, \tag{14}$$

где (регулярное) распределение $\mathbf{S} \in \mathcal{D}_0'(\mathcal{L}(H, [\mathrm{dom}\,A]))$ получено продолжением нулем при $t < 0$ операторов полугруппы $S(t), t \geq 0$. Равенство (14) означает, что продолженный нулем при $t < 0$ процесс $\{X(t) = S(t)\zeta + W_A(t)$, дающий слабое решение задачи Коши в смысле Ито (2), совпадает с обобщенным решением задачи (5), определяемым равенством (6) при $G = \mathbf{S}$:

$$\langle\varphi, X\rangle = \int_0^\infty \varphi(t)S(t)\zeta\,dt - \int_0^\infty \varphi'(t)\,dt\int_0^t S(t-s)BW(s)\,ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Обратно, если идти снизу вверх из равенств (14)–(13) следует, что обобщенное решение $\mathbf{S}\zeta{+}\mathbf{S}{*}B\,\mathbb{W}$ задачи (5) в случае генератора полугруппы класса C_0 совпадает со слабым решением $X(t) = S(t)\zeta + W_A(t), t \geq 0$, задачи (2). □

Анализируя конструкцию построенных решений и проведенное исследование связи между обобщенным и слабым решениями, мы видим, что в случае генератора полугруппы операторов $\{S(t), t \geq 0\}$ класса C_0, образующих операторы решения соответствующей однородной задачи, сумма двух слагаемых $S(t)\zeta + W_A(t), t \geq 0$, является слабым решением для любой H-значной $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ζ за счет того, что не требуется применять оператор A ни к $S(t)\zeta$, ни к $W_A(t)$, — вместо этого оператор A^* применяется к элементам $y \in \mathrm{dom}\,A^*$. Обобщенным решением эта же сумма является за счет равенства (12), из которого следует, что действие оператора A "смягчается" действием основных функций φ. Более конкретно, в силу свойств операторов полугруппы $\{S(t), t \geq 0\}$ действие оператора A переходит в операцию дифференцирования по t, которая по свойствам обобщенного дифференцирования перебрасывается на основную (бесконечно дифференцируемую) функцию φ. Более того, за счет основных функций мы получаем обобщенное решение со значениями в $[\mathrm{dom}\,A]$.

Для случая n раз интегрированных и K-конволюционных полугрупп покажем, что обобщенное решение совпадает, соответственно, с n-й производной от n раз интегрального решения и некоторой ультрадифференциальной производной от K-конволюционного решения (при тех же условиях на ζ и W).

Теорема 4. *Пусть оператор A — генератор n раз интегрированной полугруппы S. Тогда n-ая обобщенная производная слабого n интегрального решения $X(t) =$*

$S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\,dW(s)$ является решением обобщенной задачи Коши (5). Обратно, решение обобщенной задачи (5) является n-ой производной слабого n интегрального решения.

Доказательство. Пусть $X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\,dW(s), t \geq 0$ — слабое n интегральное решение, продолженное нулем при $t < 0$, тогда

$$\langle \varphi, X^{(n)} \rangle = (-1)^n \Big[\int\limits_0^\infty \varphi^{(n)}(s) S(s)\zeta\, ds \; + \int\limits_0^\infty \varphi^{(n)}(t)\, dt \int\limits_0^t S(t-s)B\,dW(s) \Big] =$$

$$= (-1)^n \Big[\int\limits_0^\infty \varphi^{(n)}(t) S(t)\zeta\, dt - \int\limits_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)\, dt \int\limits_0^t S(t-s) B W(s) ds \Big], \ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Следовательно, в силу равенства (7), распределение $X^{(n)}$ является обобщенным решением задачи (5) (для п.в. ω). Из полученных равенств, свойств свертки и определения белого шума следует и обратное утверждение. □

Теорема 5. *Пусть оператор A — генератор K-конволюционной полугруппы $\{S(t),\ t \geq 0\}$. Тогда процесс $P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) X(t), t \geq 0$, где X — слабое K-конволюционное решение (8), является решением обобщенной задачи Коши (5). Обратно, обобщенное решение задачи (5) является результатом действия оператора ультрадифференцирования $P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right)$ на слабое K-конволюционное решение.*

Доказательство. Пусть $X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\,dW(s), t \geq 0$ — слабое K-конволюционное решение. Применим к процессу X, продолженному нулем при $t < 0$, оператор ультрадифференцирования $P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right)$. Получим

$$\langle \varphi, P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) X \rangle = \langle P^*_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi(t), X(t) \rangle = \int\limits_0^t P^*_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi(t) S(t)\zeta\, dt$$

$$- \int\limits_0^t P^*_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi'(t)\, dt \int\limits_0^t S(t-s) B\, W(s) ds. \tag{15}$$

Таким образом,в силу равенства (8), получаем, что $P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) X$ является обобщенным решением задачи (5). Из равенств (15) следует и обратное утверждение. □

Связь между слабыми и обобщенными по ω решениями

Рассмотрим решение (11), полученное для стохастической задачи Коши в пространствах стохастических распределений $(\mathcal{S})^*(H)$ с оператором A — генератором полугруппы класса C_0, с Q-белым шумом $\mathbb{W}$ и начальным условием $\zeta \in (\operatorname{dom} A)$. Как было отмечено ранее, решение в этих пространствах может быть получено для задачи с сингулярным белым шумом, а не только Q-белым шумом, но, тем не менее, с начальным условием только из области определения оператора A. Покажем, что обобщенное по ω решение совпадает со слабым решением при условии существования каждого из них.

Теорема 6. *Пусть A — генератор полугруппы класса C_0, $\zeta \in (\mathrm{dom}\, A)$, и W — Q-винеровский процесс. Тогда обобщенное по ω решение и слабое решение совпадают.*

Доказательство. Решение, определяемое равенством (11), может быть записано в следующем виде: $X(t) = S\zeta + \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)\,ds$, $t \geq 0$, где

$$\int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)\,ds := \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t \Psi(s)e_j\xi_i(s)\,ds\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}}. \tag{16}$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом нами случае для доказательства теоремы достаточно показать, что интеграл, определяемый равенством (16), совпадает с интегралом Ито:

$$\int_0^t S(t-s)B\,dW(s) = \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)\,ds. \tag{17}$$

В первую очередь покажем, что сумма (16) принадлежит пространству $(L_2)(H) = L_2(\mathcal{S}', \mu;\, H)$. Этот результат следует из равенств:

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j^2 \left\| \int_0^t S(t-s)Be_j\zeta_i(s)\,ds \right\|_H^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\int_0^t \zeta_i(s)\,(\sigma_j S(t-s)Be_j,\, g_k)_H\,ds \right)^2$$
$$= \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \left\| \mathbf{1}_{[0,t]}(\sigma_j S(t-\cdot)Be_j,\, g_k)^2_{L_2(\mathbb{R})} \right\|$$
$$= \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \int_0^t |(S(t-\cdot)BQ^{\frac{1}{2}}, g_k)_H|^2\,ds = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_0^t \sum_{k\in\mathbb{N}} (S(t-\cdot)BQ^{\frac{1}{2}}e_j,\, g_k)_H^2\,ds$$
$$= \int_0^t \sum_{j\in\mathbb{N}} \|S(t-s)BQ^{\frac{1}{2}}e_j\|_H^2\,ds = \int_0^t \|S(t-s)B\|_{\mathtt{HS}}^2\,ds.$$

Здесь $\{g_k\}$ — ортонормированный базис в H. Доказательство равенства интегралов (17) в пространстве $(L_2)(H)$ проведем для элементарных функций с последующим переходом к пределу. Покажем (17) на элементарных функциях $\Psi_n(s)$, приближающих $S(t-s)B$:

$$\int_0^t \Psi_n(s)\mathbb{W}(s)\,ds = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t \Psi_n(s)e_j\xi_i(s)\,ds\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}}$$

$$= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \sum_{k=0}^{N-1} \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \Psi_{nk}\xi_i(s)\,ds\,e_j\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}} = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_{nk} \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} \xi_i(s)\,ds\,e_j\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_{nk}\,[W(t_k) - W(t_{k-1})] = \int\limits_0^t \Psi_n(t)\,dW(t).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим (17). Отсюда следует, что обобщенное по ω и слабое решения совпадают при условии их существования. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00090.

Список литературы

[1] Da Prato G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk // Cambridge Univ. Press, 1992.

[2] Gawarecki L. Stochastic differential equations in infinite dimensions / L. Gawarecki, V. Mandrekar // Springer-Verlag Berlin Heidellberg, 2011.

[3] Melnikova I.V. Abstract Stochastic Equations I. Classical and Distributional Solutions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, U.A. Anufrieva // J. of Math. Sciences 111(2), 3430–3465 (2002).

[4] Melnikova I.V. Abstract Stochastic Problems with Generators of Regularized Semigroups / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // J. of Communications in Applied Analysis 13(2), 195–212 (2009).

[5] Альшанский М.А. Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач / М.А. Альшанский, И.В. Мельникова // Матем. сб., 202(11), 3–30 (2011).

[6] Holden H. Stochastic Partial differential equations / H. Holden, B. Oksendal, J. Uboe, T. Zhang // Birkhauser, Boston - Basel - Berlin, 1996.

[7] Melnikova I.V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in spaces of abstract stochastic distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, M.A. Alshansky // J. of Math. Sciences 116(5), 3620–3656 (2003).

[8] Fattorini H.O. The Cauchy problem / H.O. Fattorini // Addison–Wesley, 1983.

[9] Melnikova I.V. Generalized solutions of differential-operator equations with singular white noise / I.V. Melnikova // Diffeerential Equations 49(4), 475–486 (2013).

Слабкі та узагальнені розв'язки абстрактної стохастичної задачі Коші

У роботі розглядаються три види розв'язків (слабкий, узагальнений за змінною часу та узагальнений за випадковою змінною) нескінченовимірної стохастичної задач Коші $X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t), t \geq 0$, $X(0) = \zeta$, де A, у загальному випадку є генератором регулярізованої півгрупи у деякому гільбертовому просторі H, а $\mathbb{W}$ — білий шум у деякому гільбертовому *просторі* $\mathbb{H}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$. *Досліджені властивості зазаначених розв'язків та зв'язки між ними.*

Ключові слова: білий шум, вінеровський процес, узагальнений, слабкий, регулярізований розв'язок, розподіл, півгрупа операторів.

Weak and generalized solutions of the abstract cauchy problem *We consider three types of solutions (weak, generalized with respect to* t *and with respect to a random variable) for the infinite dimensional stochastic Cauchy problem* $X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t), t \geq 0, X(0) = \zeta$, *with* A *being the generator of a regularized semigroup in a Hilbert space* H *and a white noise* $\mathbb{W}$ *in another Hilbert space* $\mathbb{H}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$. *It is proved coincidence of the solutions under the conditions they exist.*

Keywords: white noise, Wiener process, generalized, weak, regularized solution, distribution, semigroup of operators.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 75–89.

УДК 517.922

Е. В. Сёмкина

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА, АССОЦИИРОВАННАЯ С ЗАДАЧЕЙ О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Изучены случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты для спектральной задачи, ассоциированной с задачей Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. В каждом из случаев получены свойства спектра, найдены асимптотики, а также исследованы свойства собственных векторов.

Ключевые слова: базис Рисса, индефинитная метрика, самосопряжённый оператор.

1. Введение

Рассматривается спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1, \tag{1}$$

для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Это уравнение описывает малые движения диссипативной динамической системы в окрестности состояния равновесия. Здесь функция $u = u(t)$ — это перемещения динамической системы, $0 < A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — оператор кинетической энергии системы, $B = B^* \gg 0$ — оператор потенциальной энергии, $F = F^* \gg 0$ — оператор диссипации. Движения системы являются свободными, если поле внешних сил $f(t) \equiv 0$.

Замечание 5. Будем считать, что оператор A действует не в $\mathcal{H}$, а в шкале пространств $\mathcal{E}^\alpha$, построенной по оператору A^{-1} с первоначальной областью определения $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{H}$. Тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}^0, \quad \mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{E}^1, \quad \mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2},$$

причём $A^{-1/2} : \mathcal{E}^{\alpha/2} \to \mathcal{E}^{(\alpha-1)/2}$ — ограниченный оператор.

С учётом этого замечания дадим определение сильного решения задачи (1) со значениями в пространстве $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Определение 1. Назовем сильным решением задачи (1) на отрезке $[0,T]$ такую функцию $u(t)$ со значениями в $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, для которой выполнены следующие свойства:

1°. $u(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}B))$;

2°. $u'(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(B^{1/2})) \cap C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}F))$;

3°. $Au''(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. все слагаемые в уравнении (1) непрерывны по t и принадлежат пространству $C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

5°. при любом $t \in [0,T]$ выполнено уравнение (1);

6°. выполнены начальные условия $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$. □

Необходимыми условиями существования сильного решения задачи (1) являются, очевидно, условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \cap \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Осуществим переход от этой задачи к задаче Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Именно, вводя в (1) замену $A^{1/2}u =: v$ и применяя слева оператор $A^{-1/2}$ (это можно сделать для сильного решения), приходим к задаче:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + A^{-1/2}FA^{-1/2}\frac{dv}{dt} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v = A^{-1/2}f(t),$$
$$v(0) = A^{1/2}u^0, \quad v'(0) = A^{1/2}u^1.$$

Здесь все слагаемые в уравнении являются элементами из $C([0,T];\mathcal{H})$.

Введём далее новую искомую функцию:

$$-iB^{1/2}A^{-1/2}v(t) =: \frac{dw}{dt}, \quad w(0) = 0.$$

В силу свойства 2° из определения 1 получаем, что $d^2w/dt^2 \in C([0,T];\mathcal{H})$ и потому

$$\frac{d^2w}{dt^2} + iB^{1/2}A^{-1/2}\frac{dv}{dt} = 0, \quad w'(0) = -iB^{1/2}A^{-1/2}v(0) = -iB^{1/2}u^0.$$

Отсюда приходим к выводу, что задача (1) равносильна задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{F}z = \widetilde{f}_0(t), \tag{2}$$
$$z(0) = z^0 := (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau,$$
$$z(t) := (v'(t); w'(t))^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H},$$
$$\widetilde{f}_0(t) := (A^{-1/2}f(t); 0)^\tau,$$

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & iA^{-1/2}B^{1/2} \\ iB^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \Big(\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \cap \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2})\Big) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}),$$

2. Постановка спектральной проблемы

Рассмотрим тот частный случай, когда операторы кинетической энергии A и диссипации F являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии B

$$A := B^{-\alpha}, \quad F := 2\rho B^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \rho, \beta \geqslant 0. \tag{3}$$

При этом считаем, что $0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$; тогда собственные элементы оператора B образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а все собственные значения положительны и имеют предельную точку $+\infty$.

Это позволяет подробно изучить случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты, а также проследить, как видоизменяется (перестраивается) спектр этой задачи при возрастании ρ и различных α и β.

Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях, отвечающую в задаче (2) свободным движениям динамической системы:

$$f(t) \equiv 0, \quad z(t) = e^{-\lambda t} z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда для амплитудных элементов z возникает спектральная задача

$$\mathcal{F}z = \lambda z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

где оператор $\mathcal{F}$ в условиях (3) имеет вид

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \Big(\mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \cap \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}})\Big) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}).$$

Необходимо отметить, что аналогичная спектральная задача для случая, когда оператор кинетической энергии системы $A = I$, была рассмотрена в монографии [1], и данное исследование проводилось на её основе.

Отметим предварительно, что при $\rho = 0$ (т.е. для консервативной системы) оператор задачи (4)-(5) является кососамосопряженным на $\mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}})$, и эта задача имеет решения

$$\lambda_k^{\pm} = \pm i\lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B), \quad \widetilde{z}_k^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm u_k(B); u_k(B))^{\tau}, \quad k = 1, 2 \ldots, \tag{6}$$

где $\{\lambda_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ — положительные собственные значения оператора B, а $\{u_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующая им система собственных элементов, образующих ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. При этом собственные элементы $\{\widetilde{z}_k^{+}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\widetilde{z}_k^{-}\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^2$.

2.1. **Первый случай: слабо демпфированная динамическая система.** Будем сначала считать, что

$$\rho > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 \leqslant \beta < \frac{1-\alpha}{2}. \tag{7}$$

Тогда

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -2\rho i B^{\beta+\frac{\alpha-1}{2}} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

и так как при условиях (7) оператор $B^{\beta+\frac{\alpha-1}{2}} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, то проблема сводится к спектральной задаче для слабовозмущенного самосопряженного оператора. Собственные значения этой задачи таковы:

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B). \end{cases} \quad k = 1, 2 \ldots \tag{8}$$

Если, в частности, $\rho^2 < \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$, то все собственные значения $\lambda_k^{\pm}$ невещественны и расположены на пересечении окружностей

$$|\mathrm{Re}\lambda_k|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_k|^2 = r_k^2, \quad r_k := \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

и кривых

$$|\mathrm{Im}\lambda_k|^2 = (\mathrm{Re}\lambda_k/\rho)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta}} - (\mathrm{Re}\lambda_k)^2, \quad \mathrm{Re}\lambda > \rho^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha-2\beta}}. \tag{10}$$

В этом случае собственные элементы имеют вид

$$z_k^{+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_k(B) \\ i\varepsilon_k u_k(B) \end{pmatrix}, \quad z_k^{-} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\varepsilon_k u_k(B) \\ u_k(B) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\varepsilon_k := \rho\lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - i\sqrt{1 - \rho^2\lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)}, \quad |\varepsilon_k| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Они обладают следующими свойствами

$$(z_k^{\pm}, z_l^{\pm})_{\mathcal{H}^2} = \delta_{kl}, \quad (z_k^{+}, z_l^{-})_{\mathcal{H}^2} = i\,\mathrm{Re}\,\varepsilon_l\,\delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \ldots,$$

и потому уже не образуют ортогональную систему элементов в $\mathcal{H}^2$. Заметим еще, что по отношению к индефинитному скалярному произведению с оператором $\mathcal{J} = \mathrm{diag}(I; -I) = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$ оператор $\mathcal{F}$ является $\mathcal{J}$-симметричным, а все собственные элементы (4)-(5) являются $\mathcal{J}$-нейтральными:

$$(\mathcal{J}z_k^{\pm}, z_k^{\pm})_{\mathcal{H}^2} = \left[z_k^{\pm}, z_k^{\pm}\right] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отметим еще одно важное обстоятельство: собственные элементы $z_k^{\pm}$ выражаются через собственные элементы $\widetilde{z}_k^{\pm}$, т.е. через элементы (6) ортонормированного базиса в $\mathcal{H}^2$, посредством следующих формул:

$$z_k^{\pm} = \mathcal{K}_{\pm}\widetilde{z}_k^{\pm}, \quad \mathcal{K}_+ := \mathrm{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_- := \mathrm{diag}(iK; I), \tag{13}$$

$$K := \rho B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}} - i(I - \rho^2 B^{2\beta+\alpha-1})^{1/2}, \quad ||K|| = 1. \tag{14}$$

В самом деле, для $u = u_k(B)$ имеем

$$iKu_k(B) = i(\rho\lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - i\sqrt{1-\rho^2\lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)})u_k(B) = i\varepsilon_k u_k(B).$$

Лемма 1. *Если выполнено условие*

$$\rho^2 < \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B), \tag{15}$$

то собственные элементы (11) *задачи* (4)-(5), (7) *образуют базис Рисса в пространстве* $\mathcal{H}^2$.

Доказательство. Убедимся сначала, что эти элементы образуют полную систему в $\mathcal{H}^2$. Пусть $z_0 = (z_{01}; z_{02})^{\tau} \in \mathcal{H}^2$ ортогонален всем элементам системы (4)-(5),(7). Тогда выполнены условия

$$(z_k^+, z_0)_{\mathcal{H}^2} = 0, \quad (z_k^-, z_0)_{\mathcal{H}^2} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т.е. имеют место соотношения

$$(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} + i\varepsilon_k(u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0,$$

$$-i\varepsilon_k(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} + (u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Так как $|\varepsilon_k| = 1$, то $\varepsilon_k^{-1} = 1/\overline{\varepsilon}_k$, и вторая совокупность уравнений дает

$$(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} + i\overline{\varepsilon}_k(u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда и из первых соотношений получаем

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon_k(u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и поскольку $\mathrm{Im}\varepsilon_k \neq 0$ при любом k (см. (12)), то в силу ортогональной базисности системы $\{u_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}$, получаем, что $z_{02} = 0$. Но тогда $(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} = 0$ (при любом k), что и дает свойство $z_{01} = 0$. Таким образом система элементов

$$\{z_k^+\}_{k=1}^{\infty} \cup \{z_k^-\}_{k=1}^{\infty}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

полна в пространстве $\mathcal{H}^2$.

Воспользуемся теперь тем фактом, что в представлении (14) оператор K ограниченно обратим и

$$K^* = K^{-1} = \rho B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}} + i(I - \rho^2 B^{2\beta+\alpha-1})^{1/2},$$

т.е. K — унитарный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}$. Отсюда следует, что операторы $\mathcal{K}_\pm$ из (13) имеют ограниченные обратные операторы:

$$(\mathcal{K}_+)^{-1} = \mathrm{diag}(I; -iK^*), \quad (\mathcal{K}_-)^{-1} = \mathrm{diag}(-iK^*; I).$$

Таким образом, элементы z_k^+ получаются применением ограниченного и ограниченно обратимого оператора $\mathcal{K}_+$ к элементам ортонормированного базиса $\widetilde{z}_k^+$ из (6), а элементы z_k^- — применением ограниченного и ограниченно обратимого оператора $\mathcal{K}_-$ к элементам $\widetilde{z}_k^-$. Отсюда следует, что совокупность собственных элементов (16) задачи (4)-(5) при выполнении условия (15) образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2$. □

Замечание 6. Если для заданного $m \in \mathbb{N}$ выполнены условия

$$\lambda_m^{1-\alpha-2\beta}(B) < \rho^2 < \lambda_{m+1}^{1-\alpha-2\beta}(B), \tag{17}$$

то задача имеет ровно m пар вещественных положительных собственных значений $\lambda_j^\pm$ с номерами $j = \overline{1,m}$, а отвечающие этим значениям собственные элементы образуют равномерно дефинитные инвариантные подпространства

$$\mathcal{L}_1^+ := \mathrm{sp}\{y_j^+\}_{j=1}^m, \quad \mathcal{L}_1^- := \mathrm{sp}\{y_j^-\}_{j=1}^m, \quad j = \overline{1,m}.$$

Доказательство. Собственные значения задачи при условиях (17) находятся по формулам

$$\lambda_j^\pm = \lambda_j^{\alpha+\beta}(B)(\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}), \quad j = \overline{1,m}. \tag{18}$$

Этим номерам $j = \overline{1,m}$ отвечают $\mathcal{J}$-положительные (для λ_j^+) и соответственно $\mathcal{J}$-отрицательные (для λ_j^-) собственные элементы

$$y_j^+ = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^\tau, \quad y_j^- = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^\tau, \quad j = \overline{1,m},$$

$$\tilde{\varepsilon} := \rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - \sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1} > 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
[y_j^+, y_j^+] &= (\mathcal{J}y_j^+, y_j^+)_{\mathcal{H}^2} = ||u_j(B)||^2 - |\tilde{\varepsilon}_j|^2||u_j(B)||^2 = 1 - |\varepsilon_j|^2 = \\
&= 2\sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}\left(\rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - \sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}\right) = \\
&= 2\tilde{\varepsilon}_j\sqrt{\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B)\rho^2 - 1} =: c^2 > 0, \quad j = \overline{1,m}, \\
[y_j^-, y_j^-] &= (Jy_j^-, y_j^-)_{\mathcal{H}^2} = |\varepsilon_j|^2 - 1 < 0, \quad j = \overline{1,m}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Так как подпространства, натянутые на собственные элементы y_j^+, являются $\mathcal{J}$-ортогональными для несовпадающих между собой собственных значений λ_j^+, то, разлагая любой элемент из $\mathcal{L}_1^+$ по $\mathcal{J}$-ортогональному базису $\{y_j^+\}_{j=1}^m$ и используя неравенства (19), приходим к выводу, что

$$[z, z] \geqslant c^2||z||^2_{\mathcal{H}^2}, \quad c^2 > 0, \quad \forall z \in \mathcal{L}_1^+,$$

то есть $\mathcal{L}_1^+$ — равномерно положительное подпространство. Аналогично можно доказать, что $\mathcal{L}_1^-$ — равномерно отрицательное подпространство, поэтому $\mathcal{L}_1^\pm$ — равномерно дефинитны. $\square$

Лемма 2. *При условии* (17) *пространство* $\mathcal{H}^2$ *допускает разложение*

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{L}^+ \dot{+} \mathcal{L}^-,$$

где

$$\mathcal{L}^+ := \mathcal{L}_1^+ \dot{+} \mathcal{L}_0^+, \quad \mathcal{L}_0^+ := \underline{sp}\{y_k^+ : \underline{Im}\lambda_k^+ > 0,\ k = m+1, \ldots\},$$

— неотрицательное подпространство, а

$$\mathcal{L}^- := \mathcal{L}_1^- \dot{+} \mathcal{L}_0^-, \quad \mathcal{L}_0^- := \underline{sp}\{y_k^- : \underline{Im}\lambda_k^- > 0,\ k = m+1, \ldots\},$$

— соответствующее неположительное подпространство.

Доказательство. Будем сначала считать, что выполнено условие (15). Тогда, так как в $\mathcal{H}$ имеется ортонормированный базис $\{u_k(B)\}_{k=1}^\infty$, то любой элемент $z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H}^2$ можно представить в виде

$$z = \left(\sum_{k=1}^\infty a_{1k} u_k(B); \sum_{k=1}^\infty a_{2k} u_k(B)\right)^\tau,$$

$$a_{1k} = (z_1, u_k(B))_\mathcal{H}, \quad a_{2k}(z_2, u_k(B))_\mathcal{H}.$$

Тогда соотношение $z = z^+ + z^-$, $z^\pm \in \mathcal{L}^\pm$ приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^\infty c_k^+ \begin{pmatrix} u_k(B) \\ i\varepsilon_k u_k(B) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^\infty c_k^- \begin{pmatrix} -i\varepsilon_k u_k(B) \\ u_k(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^\infty a_{1k} u_k(B) \\ \sum\limits_{k=1}^\infty a_{2k} u_k(B) \end{pmatrix} \quad (20)$$

откуда получаем, что должны выполняться условия

$$c_k^+ - i\varepsilon_k c_k^- = a_{1k}, \quad i\varepsilon_k c_k^+ + c_k^- = a_{2k}.$$

Отсюда имеем

$$c_k^+ = \frac{a_{1k} + i\varepsilon_k a_{2k}}{1 - \varepsilon_k^2}, \quad c_k^- = \frac{a_{2k} - i\varepsilon_k a_{1k}}{1 - \varepsilon_k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Так как здесь

$$1 - \varepsilon_k^2 = 1 - \left(\rho\lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - i\sqrt{1 - \rho^2\lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)}\right)^2 \sim$$

$$\sim 2 + 2i\rho\lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)\sqrt{1 - \rho^2\lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)} - 2\rho^2\lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B) \to 2 \quad (k \to \infty),$$

то ряды в средней части (20) сходятся, и утверждение при (15) доказано. Если вместо этого условия выполнено условие (17), то все те же рассуждения можно провести в подпространстве $\mathcal{L}_0^+ \dot{+} \mathcal{L}_0^-$ пространства $\mathcal{H}^2$ с коразмерностью $2m$, а в конечномерном ($2m$-мерном) дополнении $\mathcal{L}_1^+ \dot{+} \mathcal{L}_1^-$ утверждение очевидно. $\square$

Подведем итоги рассмотрения спектральной задачи (4)-(5) в условиях (7). Эта задача имеет дискретный спектр (8) с предельной точкой $\lambda = \infty$, все собственные значения (за исключением, быть может, конечного числа положительных собственных значений) невещественны и расположены на пересечении окружностей (9) и кривых (10). Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис в $\mathcal{H}^2$. Отметим, наконец, что при возрастании ρ количество вещественных (положительных) собственных значений увеличивается.

2.2. **Второй случай: пограничный вариант.** Будем теперь считать, что

$$\beta = \frac{1-\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \rho > 0.$$

Здесь операторная матрица из (5) имеет факторизацию

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\frac{\alpha+1}{2}} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -2\rho i I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

и уже не является слабым возмущением оператора

$$i\mathcal{B} := i \begin{pmatrix} 0 & B^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ B^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому свойство локализации спектра в окрестности мнимой оси, которое имело место в п.2.1, здесь не выполнено. Собственные значения оператора задачи таковы

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}], & \rho \geqslant 1; \\ \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B)[\rho \pm i\sqrt{1-\rho^2}], & 0 < \rho < 1. \end{cases} \qquad k = 1, 2 \ldots \tag{21}$$

Соответственно, собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^+ = (u_k(B); i\varepsilon u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\varepsilon u_k(B); u_k(B))^\tau, \quad \varepsilon := \rho - i\sqrt{1-\rho^2},$$

а собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:

$$z_k^+ = (u_k(B); i\tilde{\varepsilon} u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\tilde{\varepsilon} u_k(B); u_k(B))^\tau, \quad \tilde{\varepsilon} := \rho - \sqrt{\rho^2 - 1} > 0.$$

Отметим, что спектр задачи дискретный с предельной точкой ∞, если выполнено условие $0 < \rho < 1$. В этом случае все собственные значения невещественны, и расположены на пересечении окружностей (9) и прямых

$$\mathrm{Im}\lambda = \pm \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \mathrm{Re}\lambda, \quad \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0.$$

При выполнении условия $0<\rho<1$ собственные элементы образуют базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2$, при этом

$$z_k^+ = \operatorname{diag}(I; i\varepsilon I)\widetilde{z}_k^+, \quad z_k^- = \operatorname{diag}(i\varepsilon I; I)\widetilde{z}_k^-,$$

где $\widetilde{z}_k^\pm$, $k=1,2,\ldots$ — ортонормированный базис из (6).

Если выполнено условие $\rho \geqslant 1$, то собственные значения вещественны, положительны и образуют две ветви (см. первую формулу (21)), причем каждая из ветвей имеет предельную точку $+\infty$. При этом собственные элементы $\{z_j^+\}_{j=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$, являются $\mathcal{J}$-положительными:

$$[z_j^+, z_j^+] = 1 - \tilde{\varepsilon}^2 = 2\tilde{\varepsilon}\sqrt{\rho^2-1} > 0.$$

Соответственно, собственные элементы $\{z_j^-\}_{j=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$, являются $\mathcal{J}$-отрицательными:

$$[z_j^-, z_j^-] = \tilde{\varepsilon}^2 - 1 < 0.$$

Учитывая тот факт, что собственные значения $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора, отвечающие несовпадающим собственным значениям, являются $\mathcal{J}$-ортогональными, то есть

$$[z_j^\pm, z_i^\mp] = 0, \quad i,j = 1,2,\ldots,$$

а также то, что $\{z_j^+\}_{j=1}^\infty \cup \{z_j^-\}_{j=1}^\infty$ образуют (как и в п.2.1, см. лемму 1) полную систему в $\mathcal{H}^2$, приходим к выводу, что собственные элементы задачи образуют $\mathcal{J}$-ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^2$. При этом

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{L}^+[+]\mathcal{L}^-, \quad \mathcal{L}^\pm := \operatorname{sp}\{z_j^\pm\}_{j=1}^\infty.$$

2.3. **Третий случай: средне демпфированная динамическая система.** Рассмотрим теперь вариант, когда $\rho>0$, а параметры α и β удовлетворяют одному из условий

$$0<\alpha<1, \quad 0<\frac{1-\alpha}{2}<\beta<1, \tag{22}$$

или

$$\alpha \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta < 1. \tag{23}$$

Тогда имеет место факторизация

$$\mathcal{F}=\begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I & 0 \\ i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}B^{1-\beta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

где $B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta}$ — компактный положительный оператор, а $B^{\alpha+\beta}$ и $B^{1-\beta}$ — неограниченные положительно определенные операторы с компактными положительными обратными. Собственные значения этой задачи имеют вид

$$\lambda_k^{\pm}=\begin{cases}\lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho\pm\sqrt{\rho^2-\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}], & \rho^2\geqslant\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B);\\ \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho\pm i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)-\rho^2}], & \rho^2<\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B).\end{cases}\quad k=1,2\ldots \tag{24}$$

Так как $\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)\to 0$ при $k\to+\infty$, то невещественных собственных значений может быть не более конечного числа. Остальные собственные значения разбиваются на две ветви:

$$\lambda_k^{+}=\lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho+\sqrt{\rho^2-\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}]=2\rho\lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[1+o(1)]\quad(k\to+\infty), \tag{25}$$

$$\lambda_k^{-}=\lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho-\sqrt{\rho^2-\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}]=\frac{1}{2\rho}\lambda_k^{1-\beta}(B)[1+o(1)]\quad(k\to+\infty). \tag{26}$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_k^{\pm}\to+\infty\quad(k\to+\infty)$$

Соответствующие собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:

$$z_j^{+}=(u_j(B);i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^{\tau},\quad z_j^{-}=(-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B);u_j(B))^{\tau},$$

$$\tilde{\varepsilon}_j:=\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho-\sqrt{\rho^2-\lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)})=\frac{1}{2\rho}\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)[1+o(1)]\to 0\quad(j\to+\infty). \tag{27}$$

Нетрудно видеть также, что

$$z_j^{\pm}=\mathcal{K}_{\pm}\tilde{z}_j^{\pm},\quad \mathcal{K}_{+}:=\mathrm{diag}(I;iK),\quad \mathcal{K}_{-}:=\mathrm{diag}(iK;I),$$

$$K:=B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(\rho I-(\rho^2I-B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})=B^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(\rho I+(\rho^2I-B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})^{-1},$$

$$K^{-1}:=B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(\rho I+(\rho^2I-B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})=B^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(\rho I-(\rho^2I-B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})^{-1}.$$

Собственные элементы $\{z_j^{+}\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^{+}\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathcal{J}$-положительны:

$$[z_j^{+},z_j^{+}]=(\mathcal{J}z_j^{+},z_j^{+})_{\mathcal{H}^2}=1-\tilde{\varepsilon}_j^2=\frac{2\sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B)-1}}{\rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)+\sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B)-1}}>0,$$

причем в силу (27) $[z_j^{+},z_j^{+}]\to 1$ $(j\to+\infty)$. Соответственно собственные элементы $\{z_j^{-}\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^{-}\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathcal{J}$-отрицательны:

$$[z_j^{-},z_j^{-}]=\tilde{\varepsilon}_j^2-1<0,\quad [z_j^{-},z_j^{-}]\to-1,\quad(j\to+\infty)$$

Отметим ещё, что при условии $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$ все собственные значения задачи вещественны. В противном случае собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^+ = (u_k(B); i\varepsilon_k u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\varepsilon_k u_k(B); u_k(B))^\tau,$$
$$\varepsilon_k := \lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - i\sqrt{\lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}), \quad k = \overline{1,m}.$$

Опираясь на вышеизложенное и проводя рассуждения, аналогичные приведенным в п.2.1, сформулируем результаты рассмотрения спектральной задачи (4)-(5) при условиях (22) или (23). Эта задача имеет дискретный спектр (24), все собственные значения (за исключением быть может конечного числа невещественных собственных значений) положительны, они разбиваются на две серии (см.(25)-(26)), каждая из которых имеет своей предельной точкой $\lambda = +\infty$. Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис (при условии, что $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$) в $\mathcal{H}^2$.

2.4. **Четвёртый случай: второй пограничный вариант.** Рассмотрим теперь второй промежуточный случай, когда

$$\beta = 1, \quad \alpha > 0, \quad \rho > 0. \tag{28}$$

Здесь имеет место факторизация

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+1} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{-1-\alpha}{2}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{-1-\alpha}{2}} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

показывающая, что предельными точками спектра могут быть точки $\lambda = +\infty$ и $\lambda = (2\rho)^{-1}$. Действительно, собственные значения этой задачи таковы

$$\lambda_k^\pm = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+1}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{-1-\alpha}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{-1-\alpha}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+1}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{-1-\alpha}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{-1-\alpha}(B). \end{cases} \quad k = 1, 2 \dots$$

Так как $\lambda_k^{-1-\alpha}(B) \to 0$, то задача может иметь не более конечного числа невещественных собственных значений, а вещественные собственные значения задачи положительны и образуют две ветви:

$$\lambda_j^+ = 2\rho\lambda_j^{\alpha+1}(B)[1 + o(1)], \quad \lambda_j^- = \frac{1}{2\rho}[1 + o(1)] \quad (j \to +\infty). \tag{29}$$

Собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:

$$z_j^+ = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^\tau, \quad z_j^- = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^\tau,$$
$$\tilde{\varepsilon}_j := \lambda_j^{\frac{1+\alpha}{2}}(B)(\rho - \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{-1-\alpha}(B)}) = \frac{1}{2\rho}\lambda_j^{\frac{-\alpha-1}{2}}(B)[1 + o(1)] \to 0 \quad (k \to +\infty). \tag{30}$$

Нетрудно видеть, что

$$z_j^\pm = \mathcal{K}_\pm \tilde{z}_j^\pm, \quad \mathcal{K}_+ := \mathrm{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_- := \mathrm{diag}(iK; I),$$

$$K := B^{\frac{1+\alpha}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2}) = B^{\frac{-1-\alpha}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2})^{-1},$$
$$K^{-1} := B^{\frac{1+\alpha}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2}) = B^{\frac{-1-\alpha}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2})^{-1}.$$

Собственные элементы $\{z_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие вещественным собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathcal{J}$-положительны:

$$[z_j^+, z_j^+] = (\mathcal{J} z_j^+, z_j^+)_{\mathcal{H}^2} = 1 - \tilde{\varepsilon}_j^2 = \frac{2\sqrt{\rho^2 \lambda_j^{1+\alpha}(B) - 1}}{\rho \lambda_j^{\frac{1+\alpha}{2}}(B) + \sqrt{\rho^2 \lambda_j^{1+\alpha}(B) - 1}} > 0,$$

причем в силу (36) $[z_j^+, z_j^+] \to 1$ $(j \to +\infty)$. Соответственно собственные элементы $\{z_j^-\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие отрицательным собственным значениям $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathcal{J}$-отрицательны:

$$[z_j^-, z_j^-] = \tilde{\varepsilon}_j^2 - 1 < 0, \quad [z_j^-, z_j^-] \to -1 \quad (j \to +\infty).$$

Отметим ещё, что при условии $\rho^2 > \lambda_1^{-1-\alpha}(B)$ все собственные значения задачи вещественны. В противном случае собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^+ = (u_k(B); i\varepsilon_k u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\varepsilon_k u_k(B); u_k(B))^\tau,$$
$$\varepsilon_k := \lambda_k^{\frac{1+\alpha}{2}}(B)(\rho - i\sqrt{\lambda_k^{-1-\alpha}(B) - \rho^2}), \quad k = \overline{1, m}.$$

Из сформулированных свойств получаем следующие выводы. Спектральная задача (4)-(5) при условиях (28) имеет дискретный спектр (24), все собственные значения (за исключением, быть может, конечного числа невещественных собственных значений) положительны, они разбиваются на две серии (см.(29)), одна из которых имеет своей предельной точкой $\lambda = +\infty$, а вторая положительное число $\lambda = (2\rho)^{-1}$. Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис (при условии, что $\rho^2 > \lambda_1^{-1-\alpha}(B)$) в $\mathcal{H}^2$.

2.5. **Пятый случай: сильно демпфированная динамическая система.** Рассмотрим, наконец, вариант

$$\beta > 1, \quad \alpha > 0, \quad \rho > 0. \tag{31}$$

Здесь оператор $\mathcal{F}$ допускает факторизацию

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}B^{1-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{32}$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

где $B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta}$, $B^{1-\beta}$ — компактные положительные операторы, а $B^{\alpha+\beta}$ — неограниченный положительно определенный оператор с дискретным спектром. Из (32) видно, что $\mathcal{F}$ — слабое возмущение оператора $\mathrm{diag}(2\rho B^{\alpha+\beta}, (2\rho)^{-1}B^{1-\beta})$, и потому следует ожидать, что в этом варианте задача на собственные значения для оператора $\mathcal{F}$ должна иметь дискретный спектр с двумя предельными точками $\lambda = +\infty$ и $\lambda = 0+$. Действительно, собственные значения этой задачи таковы:

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B). \end{cases} \quad k = 1, 2\ldots \tag{33}$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_j^+ = 2\rho\lambda_j^{\alpha+\beta}(B)[1 + o(1)] \to +\infty \quad (j \to +\infty), \tag{34}$$

$$\lambda_j^- = \frac{1}{2\rho}\lambda_j^{1-\beta}(B)[1 + o(1)] \to 0+ \quad (j \to +\infty). \tag{35}$$

Отвечающие этим собственным значениям собственные элементы имеют вид

$$z_j^+ = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^\tau, \quad z_j^- = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^\tau,$$

$$\tilde{\varepsilon}_j := \lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}) = \frac{\lambda_j^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(B)}{\rho + \sqrt{\rho^2 + \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}} \to 0 \quad (k \to +\infty). \tag{36}$$

Отсюда следует, что

$$z_j^{\pm} = \mathcal{K}_{\pm}\tilde{z}_j^{\pm}, \quad \mathcal{K}_+ := \mathrm{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_- := \mathrm{diag}(iK; I),$$

$$K := B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2}) = B^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})^{-1}.$$

Собственные элементы z_j^+ являются $\mathcal{J}$-положительными, а собственные элементы z_j^- являются $\mathcal{J}$-отрицательными:

$$[z_j^+, z_j^+] = (\mathcal{J}z_j^+, z_j^+)_{\mathcal{H}^2} = 1 - \tilde{\varepsilon}_j^2 = \frac{2\sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}}{\rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) + \sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}} > 0,$$

$$[z_j^-, z_j^-] = \tilde{\varepsilon}_j^2 - 1 < 0.$$

При этом

$$[z_j^+, z_j^+] \to 1, \quad [z_j^-, z_j^-] \to -1 \quad (k \to +\infty).$$

Отметим ещё, что при условии $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$ все собственные значения задачи вещественны. В противном случае собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^+ = (u_k(B); i\varepsilon_k u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\varepsilon_k u_k(B); u_k(B))^\tau,$$

$$\varepsilon_k := \lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}), \quad k = \overline{1, m}.$$

Сформулированные выше свойства позволяют сделать следующие выводы. Спектральная задача (4)-(5) при условиях (31) имеет дискретный спектр (33), все собственные значения (за исключением, быть может, конечного числа невещественных собственных значений) положительны, они разбиваются на две серии (см.(34)-(35)), одна из которых имеет своей предельной точкой $\lambda = +\infty$, а вторая $\lambda = 0+$. Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис (при условии, что $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$) в $\mathcal{H}^2$.

Подводя итоги рассмотрения спектральной задачи (4)-(5), отметим следующие важные обстоятельства.

При учете диссипации энергии в виде (3), спектр задачи существенно зависит от соотношения параметров α и β: при $0 < \alpha < 1$, $\quad 0 \leqslant \beta < \frac{1-\alpha}{2}$ имеет место малая диссипация и локализация спектра в окрестности мнимой оси; при $0 < \alpha < 1$, $\quad 0 \leqslant \beta < \frac{1-\alpha}{2}$ — средняя диссипация и локализация спектра в окрестности положительной полуоси, а также наличие лишь одной предельной точки на бесконечности; при $\alpha > 0$, $\quad \rho > 0$ — большая диссипация и наличие двух предельных точек на положительной полуоси.

Детальная структура спектра зависит от коэффициента диссипации ρ. В частности, при $\beta = \frac{1-\alpha}{2}$, $\quad 0 < \alpha < 1$ спектр существенно зависит от параметра ρ: при $0 < \rho < 1$ спектр невещественный, а при $\rho \geqslant 1$ — вещественный и положительный.

Во всем диапазоне изменения параметров α, β, δ собственные элементы образуют базис Рисса.

Список литературы

[1] Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. *Приложения индефинитной метрики.* // Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.

Спектральна проблема, асоційована з задачею Коши про малі рухи дисипативної динамічної системи

Вивчено випадки малої, великої та середньої інтенсивності дисипації енергії системи і проміжні між ними варіанти для спектральної задачі, асоційованої з задачею Коши для диференціального рівняння другого порядку в гільбертовому просторі. У кожному з випадків отримано властивості спектра, знайдено асимптотики, а також досліджено властивості власних векторів.

Ключові слова: базис Рісса, індефінітна метрика, самоспряжений оператор.

Spectral problem associated with a Cauchy problem on small motions of a dissipative dynamical system

In Hilbert space $\mathcal{H}$, a spectral problem associated with Cauchy problem for differential second-order equation of the form

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1, \tag{1}$$

is studied. The unknown function $u = u(t)$ with values in $\mathcal{H}$ describes the field of system displacements relative to the equilibrium state. The physical meanings of the operator coefficients in (1) are the following. A is a kinetic energy operator and therefore $A = A^* > 0$. Next, B is a potential energy operator; if the equilibrium state of the system is statically stable, then $B = B^* \geqslant 0$. The operator $F = F^* \geqslant 0$ takes into account energy dissipation. The system movements are free if field of external forces $f(t) \equiv 0$.

In this article we investigate a special case of problem (1) when a kinetic energy operator A and energy dissipation operator F are powers of potential energy operator B:

$$A := B^{-\alpha}, \quad F := 2\rho B^{\beta}, \quad \alpha > 0, \rho, \beta \geqslant 0. \tag{2}$$

Here we assume that $0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, then its eigenelements formed orthonormal basis in $\mathcal{H}$, and all of eigenvalues are positive and tend to infinity.

Investigation of problem in this case is based on methods stated in [1].

The form of problem and properties of the operator coefficients (2) allow to pass from the differential equation in the Hilbert space $\mathcal{H}$ to a spectral problem in the orthogonal sum of 2 copies of the space $\mathcal{H}$, namely,

$$\mathcal{F}z = \lambda z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

where

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \Big(\mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \cap \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}})\Big) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}).$$

Finally associated spectral problem are studied. Properties of eigenvalues and eigenvectors of spectral problems are obtained by using theory of linear operators that are self adjoint in a Hilbert space with an indefinite metric.

Keywords: Riesz basis, indefinite metric, self-adjoint operator.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 90–99.

УДК 519.816 MSC2000: 91A80517.922

Н. Г. Солдатова

О РЕШЕНИИ ТРЕХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В работе формализовано гарантированное решение трехкритериальной задачи при неопределенности на основе процедуры принятия решения в иерархической двухуровневой игре. Получены условия существования данного решения. Приведен пример.

E-mail: solnata@pochta.ru

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехкритериальную задачу при неопределенности

$$\langle X, Y, F(x,y)\rangle, \tag{1}$$

где множество $X \subset \mathbb{R}^n$ *стратегий* x у ЛПР (лица, принимающего решение), множество $Y \subset \mathbb{R}^m$ *чистых неопределенностей* y, скалярные функции $F_i(x,y)$ $(i = 1,2,3)$ являются компонентами векторного критерия

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y), F_3(x,y)).$$

На «содержательном уровне», цель ЛПР состоит в выборе такой стратегии $x \in X$, при которой все компоненты векторного критерия $F(x,y)$ принимают одновременно возможно *большие* значения, при этом ЛПР ориентируется на возможность реализации любой чистой неопределенности $y \in Y$.

Одновременно с чистыми неопределенностями $y \in Y$ здесь будем применять «информированные неопределенности» – m-вектор-функции $y(x): X \to Y$, $y(\cdot) \in Y^X$. Последние использованы академиком Н.Н. Красовским при изучении детерминированного варианта антагонистической игры [5, с. 353 - 354], где выделяется случай различной информированности игроков. В (1) будем считать, что один игрок (ЛПР) ограничен только чистыми стратегиями $x \in X$, а второй (формирующий в (1) неопределенность) может использовать «любую мыслимую информацию»

[5, с. 354]. В частности, он может знать стратегию, реализуемую ЛПР, то есть имеет место так называемая *информационная дискриминация* ЛПР. Тогда неопределенность в задаче (1) формируется в виде m-вектор-функции $y(x) : X \to Y$, $y(\cdot) \in Y^X$, где Y^X — множество m-вектор-функций $y(x)$, определенных на X со значениями в Y. Такие функции $y(\cdot) \in Y^X$ называют в теории игр *контрстратегиями.* Далее ограничимся подмножеством Y^X, именно непрерывными m-вектор-функциями $y(x)$ (этот факт обозначаем $y(\cdot) \in C(X, Y)$). Задача вида (1), в которой в качестве неопределенностей используются контрстратегии (информированные неопределенности $y(x)$) названа в [5, с. 353] *минимаксной.*

2. Иерархическая интерпретация максимина

Сначала рассмотрим однокритериальную задачу при неопределенности

$$\langle X, Y, f(x, y)\rangle. \tag{2}$$

В (2) множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ стратегий x, множество $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ чистых неопределенностей y, скалярный критерий $f(x, y)$ определен на произведении $X \times Y$.

Определение 1. Пара $(x^g, f^g) \in X \times \mathbb{R}$ является максиминным решением задачи (2), если

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y} f(x^g, y) = f^g. \tag{3}$$

Фактически в цепочке равенств (3) используются две операции: *внутреннего минимума* и *внешнего максимума.* В первой из них для каждого $x \in X$ находится m-вектор-функция $y(x) : X \to Y$ такая, что

$$\min_{y\in Y} f(x, y) = f(x, y(x)) = f[x] \qquad \forall x \in X, \tag{4}$$

во второй операции – *внешнего максимума* – как раз и определяются как стратегия x^g, так и число f^g такие, что

$$\max_{x\in X} f(x, y(x)) = f(x^g, y(x^g)) = f^g. \tag{5}$$

С точки зрения теории иерархических игр процесс построения (x^g, f^g) можно представить в виде иерархической двухуровневой трехходовой игры, в которой право **первого хода** принадлежит игроку верхнего уровня иерархии (ЛПР). Он сообщает игроку нижнего уровня «свои» возможные стратегии $x \in X$.

Второй ход за игроком нижнего уровня: он формирует «информированную» неопределенность $y(x) : X \to Y$, $y(\cdot) \in Y^X$, которая определена в (4) и отсылает найденную $y(x)$ на верхний уровень иерархии. В этом случае подразумевается *информационная дискриминация* ЛПР — игрока верхнего уровня иерархии. Наконец, **третий ход** снова за ЛПРом. Он, исходя из (5), формирует пару (x^g, f^g), которая как раз и является максиминным решением задачи $\langle X, Y, f(x, y)\rangle$ (рис. 1).

ЛПР предлагает пользователю применять стратегию $x^g \in X$ по двум причинам:

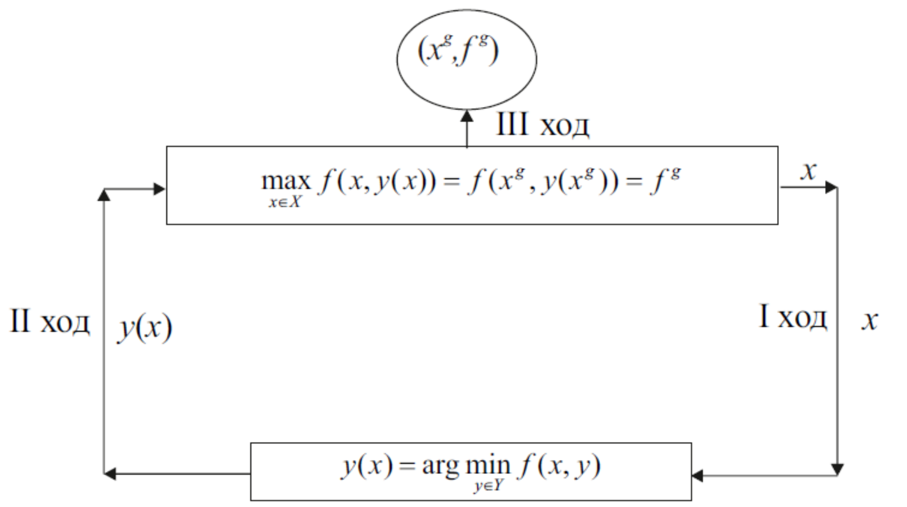


Рис. 1. Процедура построения максиминного решения (x^g, f^g)

a) каждой стратегии $x \in X$ (в результате операции *внутреннего минимума*) ставится в соответствие гарантия $f[x]$, ибо

$$f[x] \leqslant f(x, y) \qquad \forall y \in Y$$

(т.к. исход $f[x]$ «обеспечивает себе» ЛПР при любых $y \in Y$ за счет использования стратегии x);

b) из таких гарантий $f[x]$ игрок верхнего уровня (ЛПР) выбирает наибольшую (максимальную), ибо

$$f^g = f[x^g] \geqslant f[x] \qquad \forall x \in X.$$

3. Формализация сильно гарантированного решения трехкритериальной задачи

Приведем одно из возможных понятий гарантированного решения задачи (1).

Определение 2. Пару $(x^S, F^S = F[x^S]) \in X \times \mathbb{R}^3$ назовем сильно гарантированным решением задачи (1), если

1^o. существуют три непрерывные единственные m-вектор-функции $y^{(i)}(x) : X \to Y$, определяемые тождествами

$$\min_{y\in Y} F_i(x, y) = F_i(x, y^{(i)}(x)) = F_i[x] \qquad \forall x \in X \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{6}$$

2^o. для трехкритериальной «задачи гарантий»

$$\langle X, F[x] = (F_1[x], F_2[x], F_3[x])\rangle \tag{7}$$

стратегия x^S максимальна по Слейтеру, то есть при всех $x \in X$ несовместна система строгих неравенств

$$F_i[x] > F_i[x^S] \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Замечание 1. Пара (x^S, F^S) выбрана в качестве гарантированного решения задачи (1) по следующим двум причинам:

a) требование (6) ставит в соответствие каждой стратегии $x \in X$ векторную гарантию $F[x] = (F_1[x], F_2[x], F_3[x])$, ибо при $\forall y \in Y$ будет

$$F_i(x, y) \geqslant F_i[x] \qquad (i = 1, 2, 3);$$

b) из всех таких гарантий наибольшая (в «векторном смысле») будет $F[x^S]$.

Сам процесс построения сильно гарантированного решения (x^S, F^S) представим (аналогично рис. 1) следующей трехшаговой иерархической двухуровневой игрой двух лиц (рис. 2).

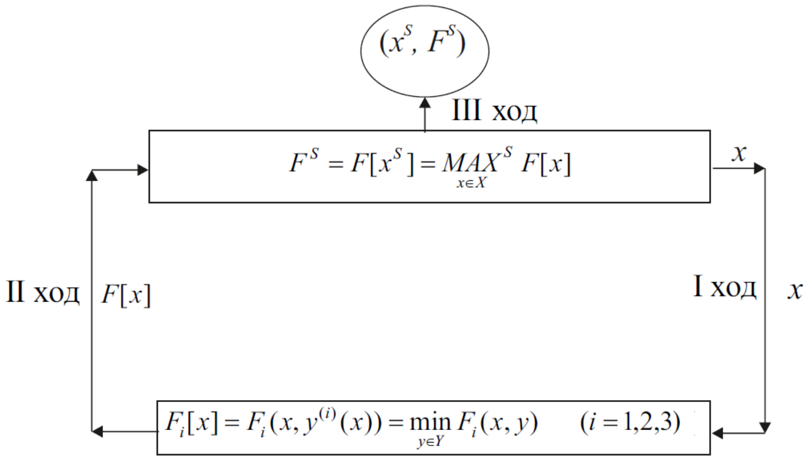


Рис. 2. Способ построения сильно гарантированного решения (x^S, F^S)

По схеме из рис. 2 **первый ход** за игроком верхнего уровня иерархии (ЛПР): он отсылает на нижний уровень свои возможные стратегии $x \in X$.

Второй ход за игроком, «ведающим» формированием неопределенности; здесь, аналогом операции внутреннего минимума (в определении максимина) является формирование для каждого критерия $F_i(x, y)$ «его» неопределенности

$$y^{(i)}(x) = arg \min_{y \in Y} F_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, 3)$$

с последующим нахождением $F_i[x] = F_i(x, y^{(i)}(x))$ $(i = 1, 2, 3)$ и передачей векторного критерия $F[x]$ на верхний уровень иерархии.

Третий ход (аналог внешнего максимума в определении максимина) за ЛПР. Он определяет максимальную по Слейтеру стратегию x^S и максимум по Слейтеру F^S

в трехкритериальной задаче (7) (обозначение $F^S = F[x^S] = \underset{x\in X}{MAX}^S F[x]$ на рис. 2, взятое из [4], как раз и означает, что x^S является максимальной по Слейтеру стратегией в трехкритериальной задаче (7)). Затем ЛПР сообщает о результатах (x^S, F^S) пользователю. Последний же, основываясь на замечании 1, может использовать эту пару (x^S, F^S) как «руководство к действию».

4. Существование

Теорема 1. *Пусть в* (1)

1^o. *множества* X, Y — *компакты и* Y *выпукло;*

2^o. *каждый из критериев* $F_i(x,y)$ *непрерывен на* $X\times Y$ *и строго выпуклый по* y *для* $\forall x\in X$.

Тогда в трехкритериальной задаче существует сильно гарантированное решение.

Заметим, что функции $F_i(x,y)$ строго выпуклы по y при каждом $x\in X$, если при любых постоянных $\lambda\in(0,1)$ и всяких $y^{(j)}\in Y$ $(j=1,2)$ имеет место

$$F_i(x,\lambda y^{(1)}+(1-\lambda)y^{(2)}) < \lambda F_i(x,y^{(1)})+(1-\lambda)F_i(x,y^{(2)}) \qquad \forall x\in X.$$

Доказательство теоремы 1. В силу компактности и выпуклости множества $Y\subset\mathbb{R}^m$, строгой выпуклости $F_i(x,y)$ по y и [3, с. 80–83] существуют единственные непрерывные m-вектор-функции $y^{(i)}(x) : X\to Y$ такие, что имеют место тождества (6). Но тогда непрерывными на $X\times Y$ будут и скалярные функции $F_i[x]=F_i(x,y^{(i)}(x))$ как суперпозиции непрерывных $F_i(x,y)$ и $y^{(i)}(x)$. Наконец, из компактности X, непрерывности $F_i[x]$ и [6, с. 66–71, 137] следует существование максимальной по Слейтеру (в задаче (7)) стратегии x^S. Затем с помощью стратегии $x^S\in X$ определяем $F_i[x^S]=F_i^S$ — i-тые $(i=1,2,3)$ компоненты векторной гарантии $F^S=F[x^S]$.

Замечание 2. Отметим, что приведенное доказательство справедливо для задачи (1) с каким угодно конечным числом критериев.

5. Линейно-квадратичная задача без ограничений

Будем считать, что в (2) будет $X=\mathbb{R}^n$, $Y=\mathbb{R}^m$, и критерий

$$f(x,y)=x'Ax+2x'By+y'Cy+2a'x+2c'y+d, \tag{8}$$

где матрицы A, B и C постоянны и соответствующих размерностей, кроме того A и C — симметричны, также вектора a и c соответствующих размерностей и постоянны, наконец d — постоянное число; штрих сверху означает операцию транспонирования. Если квадратичная форма $x'Ax$ $(y'Cy)$ определенно отрицательна (соответственно, положительна), то этот факт обозначается $A<0$ $(C>0)$, используем также нуль k-вектор $0_k\in\mathbb{R}^k$.

Далее в (1) ограничимся лишь специальным трехкомпонентным критерием $F[x] = (F_1[x], F_2[x], F_3[x])$, где $F_1[x] = \min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y)$, $F_2[x] = \min_{y\in\mathbb{R}^m}[-\Phi(x,y)]$, $F_3[x] = -R_V[x]$, здесь критерий $f(x,y)$ определен в (8), *функция сожаления* (*по Сэвиджу*)

$$\Phi(x,y) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x,y) - f(x,y) \tag{9}$$

и так называемый [1] *стратегический риск по Вальду*

$$R_V(x) = \max_{x\in\mathbb{R}^n}\min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y) - \min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y). \tag{10}$$

*Замечание 3.*Для приведенной трехкритериальной задачи нельзя применить теорему 1, ибо здесь множества $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^m$ (не компакты). Однако специальный вид критерия $f(x,y)$ позволяет найти явный вид сильно гарантированного решения.

Построение сильно гарантированного решения для трехкритериальной задачи при неопределенности

$$\langle X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m, \{f(x,y), -\Phi(x,y), -R_V[x]\}\rangle \tag{11}$$

сводится, согласно определению 2, к трем последовательным операциям:

I этап: нахождению явного вида функций $\Phi(x,y)$ и $R_V[x]$ согласно (9) и (10) соответственно;

II этап: построению двух функций $F_1[x] = \min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y)$, $F_2[x] = \min_{y\in\mathbb{R}^m}[-\Phi(x,y)]$ и, вследствие *зависимости* $R_V[x]$ только от x, $F_3[x] = -R_V[x]$;

III этап: определению ситуации $x^S \in \mathbb{R}^n$ максимальной по Слейтеру в трехкритериальной «задаче гарантий»

$$\langle X, F[x] = (F_1[x], F_2[x], F_3[x])\rangle; \tag{12}$$

для этого достаточно (согласно теории многокритериальных задач [6, с. 69]), например, найти $x^S \in X$, исходя из равенства

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n}\psi(x) = \psi(x^S),$$

где $\psi(x) = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i F_i[x]$, при каких-либо постоянных $\alpha_i \geqslant 0$ и $\sum_{i=1}^{3}\alpha_i > 0$; наконец с помощью x^S построить вектор $F[x^S] = F^S$.

Тогда пара $(x^S, F^S) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^3$ как раз и образует сильно гарантированное решение задачи (11), (8).

Итак, далее следуем этапам I – III.

Этап I.

Утверждение 1. Если $A < 0$, то функция сожаления $\Phi(x,y)$ из (9) имеет вид

$$\Phi(x,y) = -(x'A' + y'B' + a')A^{-1}(Ax + By + a). \tag{13}$$

Эти формулы получены Жуковским В.И. в [2, с. 105 - 106].

Утверждение 2. Если $A < 0$ и $C > 0$, то стратегический риск по Вальду из (10) примет вид

$$R_V(x) = -(x'K - c'C^{-1}B' + a')K^{-1}(Kx - BC^{-1}c + a), \tag{14}$$

где $K = A - B'C^{-1}B < 0$.

Доказательство утверждения 2. Следуя (10), найдем

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y) = f(x, y^{(1)}(x) = F_1[x] \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

С учетом (8) достаточными условиями существования такого $y^{(1)}(x)$ будут

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\Big|_{y^{(1)}(x)} = grad_x F_1(x,y)|_{y^{(1)}(x)} = 2Cy^{(1)}(x) + 2B'x + 2c = 0_m,$$

$$\frac{\partial^2 F_1(x,y)}{\partial y^2} = 2C > 0,$$

где $F_1(x,y) = y'Cy + 2x'By + 2cy$.

Из первого равенства получаем

$$y^{(1)}(x) = -C^{-1}(B'x + c) \tag{15}$$

и, кроме того,

$$[y^{(1)}(x)]'Cy^{(1)}(x) + 2x'By^{(1)}(x) + 2c'y^{(1)}(x) = -[y^{(1)}(x)]'Cy^{(1)}(x).$$

С учетом последнего тождества и (15)

$$\begin{gathered}\min_{y\in R^m} f(x,y) = f(x, y^{(1)}(x)) = F_1[x] = \\ = x'Ax + 2x'a + d - (c' + x'B)C^{-1}(B'x + c) = \\ = x'(A - B'C^{-1}B)x + 2x'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c = \\ = x'Kx + 2x'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c,\end{gathered} \tag{16}$$

где $K = A - B'C^{-1}B$.

Затем построим максиминную стратегию $x^g \in \mathbb{R}^n$ согласно

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} F_1[x] = F_1[x^g].$$

Последнее равенство имеет место, если

$$\frac{\partial F_1[x]}{\partial x}\Big|_{x^g} = 2Kx^g + 2(a - BC^{-1}c) = 0_n, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 F_1(x)}{\partial x^2} = 2K < 0.$$

Далее, *во-первых*, установим, что $K < 0$. Этот факт будет следовать из двух цепочек импликаций

$$(C > 0) \Rightarrow (C^{-1} > 0) \Rightarrow (BC^{-1}B' \geqslant 0) \Rightarrow (-BC^{-1}B' \leqslant 0),$$

$$(A < 0 \wedge -BC^{-1}B' \leqslant 0) \Rightarrow (K = A - B'C^{-1}B < 0);$$

здесь для симметричной $m \times m$-матрицы $M \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) означает, что $y'My \leqslant 0$ (соответственно $\geqslant 0$) при $\forall y \in \mathbb{R}^m$. Согласно (17) и $K < 0 \Rightarrow \det K \neq 0 \Rightarrow \exists K^{-1}$ и тогда

$$x^g = -K^{-1}(a - BC^{-1}c). \tag{18}$$

Во-вторых, используя (16) – (18), получаем

$$\begin{gathered}\max_{x\in\mathbb{R}^n}\min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} F_1[x] = \\ = F_1[x^g] = (x^g)'Kx^g + 2(x^g)'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c = \\ = -(a' - c'C^{-1}B')K^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c = \\ = d - c'C^{-1}c - a'K^{-1}a + 2c'C^{-1}B'K^{-1}a - c'C^{-1}B'K^{-1}BC^{-1}c.\end{gathered}$$

Наконец, с учетом последнего равенства, (16) и (10), имеем

$$\begin{gathered}R_V(x) = -x'Kx - 2x'(a - BC^{-1}c) - a'K^{-1}a + 2c'C^{-1}B'K^{-1}a - \\ -c'C^{-1}B'K^{-1}BC^{-1}c = -(x'K - c'C^{-1}B' + a')K^{-1}(Kx - BC^{-1}c + a).\end{gathered}$$

Этап II.

Утверждение 3. Если $C > 0$ и $A < 0$, то

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y) = x'Kx + 2x'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c,$$

где $K = A - B'C^{-1}B < 0$.

Доказано в (16).

Утверждение 4. Если $A < 0$ и $\det B \neq 0$, то

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m}[-\Phi(x,y)] = \min_{y\in\mathbb{R}^m}(x'A' + y'B' + a')A^{-1}(Ax + By + a) = 0.$$

Доказательство утверждения 4. Достаточным условием существования $y^{(2)}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такого, что

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m}[-\Phi(x,y)] = -\Phi(x, y^{(2)}(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

будет

$$\frac{\partial(-\Phi(x,y))}{\partial y}\Big|_{y^{(2)}(x)} = 2B'A^{-1}(Ax + By^{(2)}(x) + a) = 0_m, \tag{19}$$

$$\frac{\partial^2(-\Phi(x,y))}{\partial y^2} = 2B'A^{-1}B < 0.$$

Соотношение $B'A^{-1}B < 0$ имеет место, ибо

$$(A < 0 \wedge \det B \neq 0) \Rightarrow (B'C^{-1}B < 0).$$

Из (19) и $\det B \neq 0$ сразу следует

$$y^{(2)}(x) = -B^{-1}(Ax + a)$$

и тогда

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m}[-\Phi(x,y)] = -\Phi(x, y^{(2)}(x)) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание 4. Выполнение требования $\det B \neq 0$ автоматически приводит к условию $m = n$. Поэтому далее считаем, не оговаривая особо, что в (8) все матрицы A, B и C квадратные и размерности $n \times n$.

Замечание 5. Итак, будем считать в трехкритериальной задаче (12)

$$F_1[x] = x'Kx + 2x'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c,$$

$$F_2[x] = 0,$$

$$F_3[x] = -R_V(x) = (x'K - c'C^{-1}B' + a')K^{-1}(Kx - BC^{-1}c + a),$$

если только в (8) справедливы $A < 0$, $C > 0$, $m = n$ и $\det B \neq 0$.

Этап III.

Явный вид сильно гарантированного по исходу и рискам решения задачи (11) при $X = Y = \mathbb{R}^n$, критерии $f(x, y)$, заданном в (8), приводится в следующем утверждении.

Утверждение 5. Если в (8) матрицы $A < 0$, $C > 0$, $m = n$ и $\det B \neq 0$, то сильно гарантированное решение (x^S, F^S) задачи (11) будет

$$x^S = (A - BC^{-1}B')^{-1}(BC^{-1}c - a),\ F^S = (F_1^S, 0, 0),$$

где $F_1^S = -(a' - c'C^{-1}B')(A - BC^{-1}B')^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c.$

Доказательство утверждения 5. Составим функцию

$$\begin{aligned}\psi(x) = F_1[x] + F_3[x] = x'Kx + 2x'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c +\\ +x'Kx + 2x'(a - BC^{-1}c) + a'K^{-1}a - 2c'C^{-1}B'K^{-1}a +\\ +c'C^{-1}B'K^{-1}BC^{-1}c = 2x'Kx + 4x'(a - BC^{-1}c) + d -\\ -c'C^{-1}(C - B'K^{-1}B)C^{-1}c - 2c'C^{-1}B'K^{-1}a + a'K^{-1}a,\end{aligned}$$

где $K = A - B'C^{-1}B$.

Найдем теперь стратегию $x^S \in \mathbb{R}^n$ согласно

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \psi(x) = \psi(x^S).$$

Достаточные условия в этом случае

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\Big|_{x^S} = 4Kx^S + 4(a - BC^{-1}c) = 0_n,$$

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = 4K < 0.$$

Из первого соотношения и $K < 0$ получаем

$$x^S = -K^{-1}(a - BC^{-1}c)$$

и тогда компоненты $F_i[x^S]$ $(i = 1, 2, 3)$ векторной гарантии F^S будут

$$F_1^S = F_1[x^S] = \min_{y \in Y} f(x, y) = -(a' - c'C^{-1}B')K^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c,$$

$$F_2^S = F_3^S = 0.$$

6. Выводы

В данной работе на основе синтеза понятий максимина и решения по Штакельбергу (из теории иерархических игр) определяется сильно гарантированное решение многокритериальной задачи при неопределенности. Найден явный вид такого решения при линейно-квадратичном виде критерия.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Жуковского В.И. за обсуждение работы и замечания.

Список литературы

[1] Бардин А.Е., Солдатова Н.Г. *Однокритериальная задача при неопределенности с учетом рисков и сожалений* // Сборник научных трудов VII Международной школы-симпозиума «Анализ, Моделирование, Управление, Развитие экономических систем». Симферополь: ТНУ, 2013. - с. 37-39.

[2] Жуковский В.И. *Конфликты и риски.* М.: РосЗИТЛП, 2007. 456 с.

[3] Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. *Гарантированные решения конфликтов и их приложения.* М.: КРАСАНД, 2013. 368 с.

[4] Жуковский В.И., Молоствов В.С. *Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности.* М.: Международный НИИ проблем управления, 1988. 131 с.

[5] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974. 456 с.

[6] Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* М.: Наука, 1982. 254 с.

On the solution of three-criteria problem under uncertainty

In this paper the definition of guaranteed solution for three-criteria problem under uncertainty is introduced. New solution is based on the method of decision-making in hierarchical two-level game. The conditions of existence are formulated. The example is given.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 100–111.

УДК 517.98

Ф. С. Стонякин

СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ УЛА О ВЫПУКЛОСТИ И КОМПАКТНОСТИ ОБРАЗА ВЕКТОРНЫХ МЕР

В работе развиваются исследования теории антикомпактных множеств (антикомпактов), введённых нами ранее. Описан класс банаховых пространств, в которых существуют антикомпакты. В таких пространствах введён новый секвенциальный тип замыкания множества — T_0-замыкание. Получен аналог теоремы Ула о выпуклости и компактности образа векторных мер, который утверждает выпуклость и относительную слабую компактность T_0-замыкания образа безатомной ограниченной векторной меры в пространстве, имеющем антикомпакт. Показано, что для счётно-порождённых σ-алгебр дополнительные требования на класс пространств можно отбросить, если векторная мер имеет ограниченную вариацию. [1]

Ключевые слова: антикомпакт, тотальное множество линейных непрерывных функционалов, безатомная векторная мера, теорема Ула, секвенциальное замыкание, T_0-замыкание, относительная слабая компактность.

Вступление

В конечномерных пространствах хорошо известна теорема А. А. Ляпунова о выпуклости образа безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$, заданной на σ-алгебре подмножеств Σ некоторого пространства Ω [1]. Этот результат имеет многочисленные приложения в оптимальном управлении, математической экономике, математической статистике, теории игр [2] — [7]. Ввиду этого известно множество модификаций и обобщений этого результата в конечномерных пространствах, в том числе и относительно современных [7] — [10].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта АР Крым для молодых учёных Крыма 2014 года

Однако, как показывает множество примеров, теорема А.А. Ляпунова неверна для векторных мер со значениями в бесконечномерных пространствах [1, 5, 6]. При этом существует множество аналогов указанной теоремы Ляпунова для бесконечномерных банаховых пространств, которые используются, в частности, в работах [6, 7]. Наиболее известный подход заключается в выделении класса банаховых пространств E с так называемым *свойством Ляпунова.* В каждом таком пространстве E для любой счётно-аддитивной безатомной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow E$ замыкание $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло [5, 6]. Свойством Ляпунова обладают, например, пространства c_0, ℓ_p ($p \in [1;2) \bigcup (2;+\infty)$) [6]. Но указанным свойством не обладает множество важнейших пространств, в т.ч. и сепарабельное гильбертово пространство ℓ_2. Также известна теорема Ула о выпуклости множества $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ в случае мер ограниченной вариации со значениями в пространствах со свойством Радона-Никодима [5]. Но, как свойство Ляпунова, так и свойство Радона-Никодима существенно ограничивают класс рассматриваемых пространств (ни тому, ни другому свойству не удовлетворяют, например, пространства $L_1[a;b]$ и $C[a;b]$). Отметим также известный результат о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ для любой векторной меры в любом банаховом пространстве [5].

В наших работах [11, 12] мы поставили задачу получить аналоги теоремы А.А. Ляпунова в бесконечномерном случае без столь существенных сужений на класс пространств, а также без использования слабого замыкания (которое, вообще говоря, не позволяет говорить о представлении точек замыкания множества как предельных точек последовательностей элементов множества [6]). В упомянутых работах для сепарабельных пространств Фреше получены теоремы о выпуклости и компактности замыкания множества значений безатомной векторной меры в пространствах, порождённых антикомпактами.

В настоящей работе мы предлагаем обратиться к результату о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества значений векторной меры. Но при этом мы заменяем слабое замыкание на новый секвенциальный тип замыкания, что приводит к сужению класса подходящих векторных мер. Мы также используем систему антикомпактных множеств, введённую нами в предыдущих работах [11, 12]. Только теперь мы уже не замыкаемся на классе сепарабельных пространств, а доказываем, что антикомпакты существуют тогда и только тогда, когда банахово пространство линейно инъективно и непрерывно вложено в сепарабельное гильбертово пространство (теорема 1) или, что то же самое, когда банахово пространство имеет счётное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов T_0 (следствие 1). Такие пространства могут и не быть сепарабельными (например, ℓ_∞). Для таких пространств введён новый тип сходимости — T_0-сходимость и соответствующий ему секвенциальный тип замыкания множества — T_0-замыкание. Для безатомных ограниченных векторных мер получен секвенциальный аналог теоремы Ула о выпуклости и компактности образа векторной меры, заменяющий в хорошо известном результате [5] слабое замыкание на T_0-замыкание (теорема 2). Отмечено, что в пространствах c_0 и ℓ_p $(1 < p < +\infty)$ этот новый тип замыкания можно заменить на обычное слабое секвенциальное замыкание (теорема 4). Для счётно-порождённых σ-алгебр показано, что дополнительное условие на класс пространств можно отбросить, если мера $\overrightarrow{\mu}$ имеет (сильно) ограниченную вариацию (теорема 5).

1. Понятие антикомпактного множества. Класс банаховых пространств, в которых существуют антикомпакты

Напомним понятие антикомпакта, предложенное нами в [11]. Обозначим через $\Omega_{ac}(E)$ набор всех замкнутых абсолютно выпуклых подмножеств банахова пространства E.

Определение 1. Назовем множество $\overline{C} \in \Omega_{ac}$ *антикомпактным* в E, если:

(i) $p_{\overline{C}}(a) = 0 \iff a = 0$ в E (или $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda \cdot \overline{C} = \{0\}$);

(ii) любое ограниченное подмножество E содержится и предкомпактно в пространстве $E_{\overline{C}} = (span\ \overline{C},\ p_{\overline{C}}(\cdot))$. Здесь под $p_{\overline{C}}(\cdot)$ мы понимаем функционал Минковского абсолютно выпуклого множества $\overline{C} \subset E$ и считаем что $E_{\overline{C}}$ пополнено относительно нормы $\|\cdot\|_{\overline{C}} = p_{\overline{C}}(\cdot)$.

Примем обозначение: $\overline{\mathcal{C}}(E)$ *— набор антикомпактных подмножеств банахова пространства* E.

В предыдущих работах [11, 12] построен пример системы антикомпактных множеств в сепарабельных гильбертовых и банаховых пространствах. Оказывается, что этот случай в каком-то смысле универсален, поскольку антикомпакты существуют только в банаховых пространствах, линейно инъективно и непрерывно вложенных в сепарабельное гильбертово пространство. Доказательством этого утверждения мы займёмся в первой части нашей работы.

Из определения вытекает, что если $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$, то существует линейный инъективный компактный оператор $A : E \to E_{\overline{C}}$ $(Ax = x\ \forall x \in E)$. Покажем, что существование такого оператора не только необходимое, но и достаточное условие.

Предложение 1. *Пусть существует линейный инъективный компактный оператор* $A : E \to F$ *где* E *и* F *— банаховы пространства. Тогда в пространстве* E *существует антикомпакт.*

Доказательство. Положим $\overline{C} = \{x \in E \mid \|Ax\|_F < \infty\}$, $\|x\|_{\overline{C}} = \|Ax\|_F$. Ввиду линейности и инъективности оператора A, мы имеем, что $\|x\|_{\overline{C}} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Предкомпактность всякого ограниченного множества $B \subset E$, очевидно, вытекает из компактности оператора A. Итак, справедлива

Лемма 1. *Банахово пространство E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда существует линейный инъективный компактный оператор $A : E \to F$, где F — некоторое банахово пространство.*

Предыдущий результат позволяет получить уже более проверяемый критерий.

Теорема 1. *Банахово пространство E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда существует линейный непрерывный инъективный оператор $A : E \to \ell_2$.*

Доказательство. 1). *Необходимость.* Пусть в E существует антикомпактное множество. Тогда для некоторого банахова пространства F существует линейный инъективный и компактный оператор $A : E \to F$. Поэтому для всякое ограниченное множество $B \subset E$ предкомпактно в любом пространстве $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ (или множество $A(B) \subset F$ предкомпактно в F). Поэтому образ $A(E)$ можно вложить в некоторое замкнутое сепарабельное подпространство $F_0 \subset F$. Итак, E инъективно линейно и непрерывно вложено в сепарабельное пространство F_0. А поскольку всякое сепарабельное банахово пространство линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2 (см. [6], стр. 556), то существует линейный инъективный и непрерывный оператор $A' : E \to \ell_2$.

2). *Достаточность.* Если же E инъективно линейно и непрерывно вложено в ℓ_2, то можно воспользоваться леммой 1 из [11], которая утверждает наличие в ℓ_2 антикомпакта, т.е. ℓ_2 инъективно линейно и компактно вложено в ℓ_2. Следовательно,существует линейный инъективный и компактный оператор $A' : E \to \ell_2$, откуда и вытекает существование антикомпакта в E по лемме 1.

Покажем примеры практического использования полученного критерия. Так, хорошо известно, что всякое сепарабельное банахово пространство линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2. Покажем, что это возможно и в некоторых несепарабельных пространствах.

Пример 1. Пространство ограниченных числовых последовательностей ℓ_∞ линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2. Действительно, достаточно рассмотреть оператор $A : \ell_\infty \to \ell_2$, задаваемый следующим образом $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...\right)$.

Дадим ещё одно достаточно простое описание класса банаховых пространств, имеющих антикомпакты. Как известно (см. [6], стр. 556), банахово пространство E линейно инъективно и непрерывно вложено в сепарабельное гильбертово пространство тогда и только тогда, когда над E существует счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов (счётное множество линейных непрерывных функционалов, разделяющих точки). Это приводит к таком уже достаточно хорошо проверяемому критерию наличия антикомпакта в банаховых пространствах.

Следствие 1. *Банахово пространство E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда над E существует счётное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов.*

На базе последнего следствия легко привести пример банахова пространства, которое ни один антикомпакт не имеет. При этом такое пространство гильбертово (несепарабельно) и поэтому рефлексивно.

Пример 2. Рассмотрим пространство $\ell_2([0;1])$ таких вещественных функций $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, что $\sum\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|^2 < \infty$. Ясно, что всякая функция $f \in \ell_2([0;1])$ имеет не более, чем счётное множество значений. Норма в этом пространстве имеет вид

$$\|f\|_{\ell_2} = \left(\sum_{t\in[0;1]} |f(t)|^2\right)^{1/2} < \infty,$$

а всякий линейный непрерывный функционал ℓ на $\ell_2([0;1])$ представим в виде

$$\ell(f) = \ell_g(f) = \sum_{t\in[0;1]} |f(t)g(t)|,$$

где g — некоторый фиксированный элемент из $\ell_2([0;1])$.

Ясно, что какое бы счётное множество линейных непрерывных функционалов $\{\ell_{g_n}\}_{n=1}^{\infty}$ на $\ell_2([0;1])$ мы не выбрали, они все будут принимать нулевые значения на множестве функций из $f \in \ell_2([0;1])$, которые обращаются в нуль в точках $t \in [0;1]$, для которых $g_n(t) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. То есть всякое счётное множество линейных непрерывных функционалов на $\ell_2([0;1])$ принимает нулевые значения на ненулевых функциях и поэтому в пространстве $\ell_2([0;1])$ нет счётного тотального подмножества линейных непрерывных функционалов.

2. Секвенциальный аналог теоремы Ула в банаховых пространствах и некоторые следствия

Теперь переходим к основным результатам работы — секвенциальному аналогу теоремы Ула и некоторым следствиям из этого результата. Напомним, что классическая теорема Ула утверждает выпуклость и компактность замыкания образа векторной меры (сильно) ограниченной вариации в пространствах со свойством Радона-Никодима. Также известно, что слабое замыкание образа векторной меры со значением в любом пространстве выпукло и слабо компактно. Нам в классе банаховых пространств, имеющих антикомпакты (такие пространства могут не иметь свойства Радона-Никодима), удалось выделить класс векторных мер, для которых слабое замыкание можно заменить на некоторый секвенциальный тип замыкания. Введём понятие T_0-сходимости последовательности, где $T_0 \subset E^*$ — счётное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов в E.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ T_0-*сходится* к $x \in E$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \ell(x)\ \forall \ell \in E^*$.

Предыдущее определение корректно (предел единственен) в силу того, что множество T_0 тотально в E (разделяет элементы из E). В качестве наглядного примера такой сходимости можно привести пример покоординатной сходимости в пространствах числовых последовательностей c_0 и ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Введём также понятие T_0-замыкания множества $A \subset E$.

Определение 3. Назовём T_0-*замыканием* множества $A \subset E$ такое множество $\widehat{A} \subset E$, что $\forall x \in \widehat{A}$ существует T_0-сходящаяся к x последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$.

Оказывается, что можно получить аналог теоремы Ула для ограниченных векторных мер с использованием T_0-замыканий.

Теорема 2. *Пусть E имеет счетное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов $T_0 \subset E^*$, $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ — безатомная ограниченная мера. Тогда слабое T_0-замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло и относительно слабо компактно в E.*

Перед доказательством этого результата приведём некоторые вспомогательные понятия и результат из [13, 14, 15]. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра подмножеств S (эти обозначения будем использовать далее). Напомним ([16], стр. 104), что *полной вариацией векторной меры* $\nu : \Sigma \to E$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ в E называется отображение $|\,\nu\,| : \Sigma \to [0;+\infty]$, которое определяется равенством

$$|\nu|(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|\nu(A_k)\| \quad \forall A \in \Sigma, \tag{1}$$

где супремум берётся по всем конечным наборам $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \Sigma$ таким, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$. Легко проверить, что отображение $|\,\nu\,|$ — конечная счётно-аддитивная положительная мера на Σ (см. [16], стр. 104). Обозначим через $V(S,E)$ множество всех векторных мер $\nu : \Sigma \to E$ (Σ — σ-алгебра подмножеств S), которые имеют конечную полную вариацию $|\,\nu\,|\,(S) < \infty$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ на E (см. (1)). Будем обозначать через $E_C = (span\ C, \|\cdot\|_C)$ банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_C$, равными функционалам Минковского абсолютно выпуклых компактов $C \in \mathcal{C}(E)$. Эти пространства были введены и детально изучались И.В. Орловым (см., например [13, 14]).

Определение 4. Будем говорить, что ν имеет *(сильную) компактную вариацию* на S, если существует компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in V(S, E_C)$. Примем обозначения: $\nu \in V_K(S,E)$, $|\,\nu\,|_C$ — полная вариация векторной меры ν относительно нормы $\|\cdot\|_C$.

Для того, чтобы сформулировать необходимый результат из [15], нам потребуется новая характеристика для мер $\nu \in V_K(S,E)$, а именно — *(сильная) компактная абсолютная непрерывность* относительно конечной числовой меры μ на Σ. Обозначим через $AC(S,E)$ множество всех векторных мер $\nu \in V(S,E)$, обладающих свойством обычной *абсолютной непрерывности векторной меры относительно* μ, то есть таких, что мера $|\nu| \ll \mu$ ($\mu(A) = 0 \Rightarrow |\nu|(A) = 0$ или $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ (\mu(A) < \delta) \Rightarrow |\nu|(A) < \varepsilon$).

Определение 5. Будем говорить, что векторная мера $\nu \in V_K(S,E)$ *(сильно) компактно абсолютно непрерывна на* S *относительно* μ, если существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in AC(S,E_C)$. Примем обозначение: $\nu \in AC_K(S,E)$. Приведём важный вспомогательный результат из [15].

Теорема 3. *Если* $\nu \in AC_K(S,E)$*, то найдётся такое интегрируемое по Бохнеру отображение* $f : S \to E$*, что* $\forall A \in \Sigma$ *верно*

$$\nu(A) = (B)\int\limits_A f(t)d\mu(t). \tag{2}$$

Переходим к доказательству теоремы 2.

Доказательство. 1) Векторная мера μ имеет слабо ограниченную вариацию ввиду её ограниченности и того, что всякий ограниченный числовой заряд $\ell(\overrightarrow{\mu})(\cdot)$ ($\ell \in E^*$) имеет ограниченную вариацию. Обозначим через $c_k = V(\ell_k(\overrightarrow{\mu}))(S)$ полные вариации зарядов $\ell_k(\overrightarrow{\mu})$, $\ell_k \in T_0$. Выберем числовую последовательность $n_k \to +\infty$ так, чтобы последовательность $\left\{\frac{c_k}{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ была ограниченной и рассмотрим множество

$$\widetilde{C} = \left\{ x \in E \ \middle| \ \sup_{k \in \mathbb{N}} \left| \frac{\ell_k(x)}{n_k} \right| \leqslant 1 \right\},$$

а также порождённое $\widetilde{C}$ банахово пространство $E_{\widetilde{C}} = \left(span\ \widetilde{C}, p_{\widetilde{C}}(\cdot)\right)$ ($p_{\widetilde{C}}(\cdot)$ — функционал Минковского, порождённый $\widetilde{C}$), $E_{\widetilde{C}} \cong \ell_\infty$.

Не уменьшая общности рассуждений, будем полагать, что $\|T_0\|_{E^*} \leqslant 1$. Пусть $B \subset E$ — произвольное ограниченное множество. Покажем, что оно содержится и предкомпактно в $E_{\widetilde{C}}$. В силу $n_k \to \infty$ существует $L > 0$ такое, что $\frac{1}{n_k} \leqslant L$ и поэтому $\forall x \in B$

$$\sup_k \left| \frac{\ell_k(x)}{n_k} \right| \leqslant K \cdot \|\ell_k\|_{E^*} \cdot \|x\|,$$

т.е. $B \subset E_{\widetilde{C}}$. Предкомпактность же B в $E_{\widetilde{C}}$ вытекает из того, последовательности $\left(\frac{|\ell_1(x)|}{n_1}, \frac{|\ell_2(x)|}{n_2}, ..., \frac{|\ell_k(x)|}{n_k}\right)$ равномерно по $x \in B$ ограничены элементом $\left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, ..., \frac{1}{n_k}\right) \in c_0$ (это обеспечивает предкомпактность множества в ℓ_∞). Итак, $\widetilde{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$.

2) Далее, $\overrightarrow{\mu}$ имеет ограниченную вариацию в пространстве $E_{\widetilde{C}}$. Действительно, $\forall A \in \Sigma$

$$\|\overrightarrow{\mu}(A)\|_{\widetilde{C}} = \sup_k \left| \frac{\ell_k(\overrightarrow{\mu}(A))}{n_k} \right| \leqslant \sup_k \left| \frac{c_k}{n_k} \right| \leqslant K$$

в силу выбора $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Введём на Σ такую числовую меру

$$\mu_{\widetilde{C}}(A) := \sup \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|(A)}{n_k},$$

где $|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|(\cdot)$ — полная вариация числового заряда $\ell_k(\overrightarrow{\mu})$. Ясно, что векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\widetilde{C}}$. Также мера $|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|$ безатомна ввиду безатомности $\overrightarrow{\mu}$.

Тогда $\overrightarrow{\mu}$ имеет компактную вариацию в $E_{\widetilde{C}}$. Более того, если обозначить через $|\overrightarrow{\mu}|_{\widetilde{C}}(\cdot)$ полную вариацию векторной меры $\overrightarrow{\mu}$ в пространстве $E_{\widetilde{C}}$, то несложно понять, что векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно числовой меры $|\overrightarrow{\mu}|_{\widetilde{C}}(\cdot)$. Следовательно, $\overrightarrow{\mu} \in AC_K(\Sigma, E_{\widetilde{C}})$ и поэтому $\overrightarrow{\mu}$ представима в виде в виде неопределённого интеграла Бохнера по теореме 3. Доказываемое утверждение теперь вытекает из выпуклости образа векторной меры, представимой в виде интеграла Бохнера (см. [5], стр. 266, доказательство теоремы 10).

3) Остаётся рассмотреть множество $M(\overrightarrow{\mu}) = co\overrightarrow{\mu}(\Sigma) \bigcap \overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{E_{\widetilde{C}}}$ (coA — выпуклая оболочка множества A, $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{E_{\widetilde{C}}}$ — замыкание множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ в пространстве $E_{\widetilde{C}}$). Это множество выпукло как пересечение выпуклых множеств и при этом содержит все T_0-пределы последовательностей из $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$.

Относительная слабая компактность T_0-замыкания $M(\overrightarrow{\mu})$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ вытекает из известного результата относительной слабой компактности самого множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ [5]. Теорема доказана.

Интересное следствие можно отметить, если рассмотреть пространства числовых последовательностей c_0 и ℓ_p $(1 < p < \infty)$. Как известно [6], в таких пространствах слабая сходимость последовательности равносильна её ограниченности и покоординатной сходимости. Поэтому в этом классе пространств T_0-замыкание в теореме 2 можно заменить на стандартное секвенциальное слабое замыкание.

Теорема 4. *Пусть $E = c_0$ или $E = \ell_p$, $(1 < p < \infty)$ и безатомная мера $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ ограничена. Тогда слабое секвенциальное замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло и относительно слабо компактно в E.*

Возникает вопрос о том, можно ли в предыдущих результатах заменить ограничения на класс пространств E какими-то условиями на сами меры? Если Σ — счётно-порождённая σ-алгебра (например, такой будет σ-алгебра борелевских подмножеств вещественного отрезка), то на такой вопрос можно предложить ответ в виде следующего результата.

Теорема 5. *Если Σ — счётно-порождённая σ-алгебра и безатомная векторная мера $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ имеет (сильно) ограниченную вариацию в некотором банаховом пространстве E. Тогда множество $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ погружается в подпространство $E_0 \subset E$, имеющее счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов $T_0 \in E_0^*$ и T_0-замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло и относительно слабо компактно в E_0.*

Доказательство. Обозначим через $|\overrightarrow{\mu}|(\cdot)$ полную вариацию векторной меры $\overrightarrow{\mu}$. Ясно, что $|\overrightarrow{\mu}|$ — числовая мера на Σ. Ввиду счётно-порождённости Σ существует счётная система множеств $\Phi \subset \Sigma$ такая, что для любого $A \in \Sigma$ существует последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Phi$ такая, что $A \subset A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $|\overrightarrow{\mu}|(A) = \lim\limits_{n\to\infty} |\overrightarrow{\mu}|(A_n)$. Следовательно,

$$\|\overrightarrow{\mu}(A_n) - \overrightarrow{\mu}(A)\| = \|\overrightarrow{\mu}(A_n \backslash A)\| \leqslant |\overrightarrow{\mu}|(A_n \backslash A) = |\overrightarrow{\mu}|(A_n) - |\overrightarrow{\mu}|(A) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е. $\overrightarrow{\mu}(\Phi)$ — счётное плотное в $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ множество и поэтому $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ содержится в некотором сепарабельном подпространстве $E_0 \subset E$. А в пространстве E_0 уже существует счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов. Остаётся лишь применить теорему 2.

Отметим, что если σ-алгебра Σ не является счётно-порождённой, то вопрос существенности ограничения на класс пространств E пока остаётся открытым.

Заключение

В настоящей работе мы с использованием системы антикомпактов, введённой ранее в [11] доказали аналог известного результата [5] о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества значений векторной меры, заменив слабое замыкание множества значений меры на новый секвенциальный тип замыкания — T_0-замыкание этого множества. Как оказалось, это возможно при условии сужения рассматриваемого класса банаховых пространств (пространство должно иметь счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов). В некоторых случаях T_0-замыкание можно заменить на обычное секвенциальное слабое замыкание. Для счётно-порождённых σ-алгебр показано, что дополнительное условие на класс банаховых пространств можно отбросить для мер (сильно) ограниченной вариации.

Список литературы

[1] Ляпунов А.А. О вполне аддитивных вектор-функциях // Известия АН СССР. — 1940. — Т. 4. — С. 465 — 478.

[2] Ляпунов А.Н. Теорема А.А. Ляпунова о выпуклости значений мер // Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео». — 2011. — С. 257 — 261.

[3] Аркин В.И., Левин В.Л. Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи // Успехи мат. наук. — 1972. — т. 27, вып. 3. — С. 21 — 77.

[4] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // Успехи мат. наук. — 1968. — т. 23, вып. 6. — С. 51 — 116.

[5] Diestel J., Uhl J.J. Vector Measures, Providence, Amer. Math. Soc., 1977, 320 p.

[6] Кадец В. М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. — 615с.

[7] Neyman J. Un thŕeor'em d'existence / J. Neyman // C.R. Acad. Sci. Paris. — Vol. 222. — 1946. — P.843 — 845.

[8] Chen Y. Truth, justice, and cake cutting / Yiling Chen, John Lai, David C. Parkes, and Ariel D. — Procaccia.Association for the Advancement of Artificial Intelligence. 2010.

[9] Fabio Maccheroni. How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations. Maccheroni Fabio, Marinacci Massimo // Social Choice and Welfare. – Springer-Verlag GmbH — 2003. — P. 457 – 465.

[10] Dai Peng, Feinberg Eugene A. Extension of Lyapunov's convexity Theorem to subranges / Peng Dai Mossel, Eugene A. Feinberg // arXiv:1102.2534v1 [math.PR] 12 Feb 2011.

[11] Стонякин Ф. С. Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры /Ф. С. Стонякин // Динамические системы. — 2013. — т. 3(31), № 3-4. — С. 281 – 288.

[12] Стонякин Ф. С. Антикомпакты и их приложения к аналогам теорем Ляпунова и Лебега в пространствах Фреше / Ф. С. Стонякин // Современная математика. Фундаментальные направления. — В печати.

[13] Орлов И. В. Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы. / И. В. Орлов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — т. 29. — С. 165 – 175.

[14] Orlov I. V., Stonyakin F. S. Limit form of Radon-Nikodym property is true in arbitrary Frechet space // Contemporary Math. Fundamental Directions. — 2010. — vol. 37. — P. 55 – 69.

[15] Стонякин Ф. С. Сильные компактные характеристики и предельная форма свойства Радона-Никодима для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше/ Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки.» — 2010. — т. 23(62), № 1. — С. 131 – 149.

[16] Вахания Н. Н. Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян. — М.: Наука, 1985. — 368 с.

Секвенціальна версія теореми Ула про опуклість та компактність образу векторних мір. *У роботі розвиваються дослідження теорії антикомпактних множин (антикомпактів), які введено нами раніше. Описано клас банахових просторів, у яких існують антикомпакти. Для таких просторів введено новий секвенціальний тип замкнення —* T_0*-замкнення множини. Одержано аналог теореми Ула про опуклість образу* *векторних мір, котрий стверджує опуклість та відносну слабку компактність T_0-замкнення образу обмеженої безатомної векторної міри у просторі, який має антикомпакт. Показано, що у випадку зліченно-породженої σ-алгебр Σ додаткові вимоги на клас просторів можна не накладати, якщо векторна міра має сильно обмежену варіацію.*

Ключові слова: антикомпакт, тотальна множина лінійних непервних функціоналів, безатомна векторна міра, теорема Ула, T_0-замкнення, секвенціальне замкнення, відносна слабка компактність.

Sequential version of Uhl Theorem on convexity and compactness for vector measure range. *There is the well-known Lyapunov Theorem about convexity for the range of a non-atomic vector measure $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow R^n$, where Σ is a σ-algebra of subsets of some space Ω* [1]. *But Lyapunov Theorem, in general, are not valid for vector measures taking values in infinite-dimensional Banach spaces* [1, 5, 6]. *There are different analogs of Lyapunov Theorem for infinite-dimensional Banach spaces. We mention that for each non-atomic vector measure $\overline{\mu} : \Sigma \to E$ (E — Banach space) a weak closure of the set $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ is a convex and weakly compact set* [5]. *In our paper we prove that a sequentially weak closure of the set $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ is convex and relatively weakly compact for all non-atomic measures $\overline{\mu} : \Sigma \to E$ of bounded (strong) variation in special class of Banach spaces E. We use the system of anti-compact sets introduced by us in* [11]. *We start with the anti-compact set definition. Denote by $\Omega_{ac}(E)$ the collection of all closed absolutely convex sets in Banach space E.*

Definition 1. $\overline{C} \in \Omega_{ac}$ is *anticompact set* in E if:

(i) $p_{\overline{C}}(a) = 0 \iff a = 0$ in E (or, $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda \cdot \overline{C} = \{0\}$);

(ii) each bounded set $A \subset E$ includes in some space $E_{\overline{C}} = (span\ \overline{C},\ p_{\overline{C}}(\cdot))$ and A is a precompact set in this space. Here $p_{\overline{C}}(\cdot)$ is a Minkovskiy functional of absolutely convex set $\overline{C} \subset E$. Also we suppose that $E_{\overline{C}}$ is complemented by the norm $\|\cdot\|_{\overline{C}} = p_{\overline{C}}(\cdot)$.

Denote by $\overline{\mathcal{C}}(E)$ the collection of anti-compact subsets of Banach space E.

We describe the class of Banach space E with anti-compact sets.

Theorem 1. *A Banach space E has an anti-compact set iff there is a linear injective and continuous operator $A : E \to \ell_2$.*

Corollary 1. *A Banach space E has an anti-compact set iff E has a countable set of total linear continuous functionals.*

Anti-compact sets exist in each separable Banach space, spaces ℓ_∞, $L_\infty[a;b]$. But there is no anti-compact set in the space $\ell_2([0;1])$ of real functions with the norm $\|f\|_{\ell_2} = \left(\sum\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|^2\right)^{1/2}$.

And we pass to sequential analogs of Uhl's Theorem on convexity and compactness for vector measure range. We start with auxiliary definitions. Let $T_0 = \{\ell_k\}_{k=1}^{\infty} \subset E^*$ *be a total set of linear continuous functionals on E.*

Definition 2. Say, that a sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ T_0-*converges* to $x \in E$ if $\forall \ell \in T_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \ell(x)$.

Definition 3. If $\forall x \in \widehat{A}$ there is a sequence $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A \subset E$: $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \ell(x)$ $\forall \ell \in T_0$ then we say that $\widehat{A}$ is s T_0-*closure* of a set $A \subset E$.

Theorem 2. *Let E be a Banach space with countable total set of linear continuous functionals* $T_0 \subset E^*$ *and non-atomic bounded measure* $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$. *Then a* T_0*-closure of* $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ *is a convex and relatively weakly compact set in E.*

Theorem 3. *For* $E = c_0$ *or* $E = \ell_p$, $(1 < p < \infty)$ *and non-atomic bounded measure* $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ *a sequentially weak closure of* $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ *is a convex and relatively weak compact set in E.*

Theorem 4. *If* Σ *is a countably-generated* σ*-algebra and non-atomic measure* $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ *possesses (strong) bounded variation in Banach space E. Then a set* $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ *includes in a subspace* $E_0 \subset E$ *with a countable total set* $T_0 \in E_0^*$ *and a weak* T_0*-closure of* $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ *is a convex and relatively weakly compact set in* E_0.

Keywords: anti-compact set, total set of linear continuous functionals, vector non-atomic measure, Uhl Theorem, T_0-closure, sequentially closure, relative weak compactness.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 112–124.

УДК 517.98

Ф. С. Стонякин, Р. О. Шпилёв

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛЯПУНОВА О ВЫПУКЛОСТИ ДЛЯ ε-КВАЗИМЕР И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ЗАДАЧЕ О РАЗДЕЛЕ РЕСУРСОВ

В данной работе продолжаются начатые нами ранее исследования задачи о разделе ресурсов при условии пренебрежения достаточно малыми величинами. Введён новый аналог понятия меры множества — понятие ε-квазимеры. Для ε-квазимер доказан аналог теоремы А.А. Ляпунова о выпуклости образа векторной ε-квазимеры в форме квазивыпуклости. На базе полученного результата показана разрешимость задачи о справедливом разделе ресурсов, причём не обязательно в равных отношениях.[1]

Ключевые слова: ε-квазимера, задача о разделе сокровищ, монотонность, промежуточная непрерывность, непрерывность сверху, квазивыпуклость, теорема А.А. Ляпунова.

Вступление

Мы часто сталкиваемся с вопросами распределения каких-либо предметов, ресурсов; эти вопросы нередко вызывают споры. Задача о справедливом разделе ресурсов (сокровищ) изучается математиками, начиная с 1940-х годов. Идейной базой для этих исследований, как правило, служит работа А. А. Ляпунова [1], в которой доказана теорема о выпуклости образа векторной меры в конечномерных пространствах. Позже появились работы Неймана [2] и Штейнгауза [3], в которых рассмотрены приложения основного результата Ляпунова к задаче о разделе сокровищ (ресурсов). Задачу о разделе ресурсов можно сформулировать следующим образом [2].

Задача. Банда из n жадных, но честных разбойников желает разделить добычу поровну. При этом каждый из разбойников подходит к оценке сокровищ со своей

[1]Первый автор поддержан грантом АР Крым для молодых учёных Крыма 2014 года

меркой, то есть, подмножества сокровищ каждый из разбойников оценивает по-своему. Оценку частей считаем неотрицательной. При каких условиях на добычу и функции множеств, используемые разбойниками, такой раздел будет возможным?

В известном результате [2, 3] о разрешимости такой задачи предполагалось, что для оценки сокровищ используются меры, а добыча бесконечно делима (каждый разбойник может разделить множество на произвольное число частей, равных с его точки зрения). Проблеме справедливого раздела ресурсов посвящено множество работ работ (см., например [4] — [13]). Как правило, в задачах такого рода считают, что участники спора используют монотонные, аддитивные, вероятностные меры для оценивания частей делимых объектов. Однако можно встретить работы, в которых для моделирования соответствующих задач рассматриваются также и неаддитивные функции множества (например [13, 13]).

Использование мер также невозможно в случаях пренебрежения достаточно малыми или большими множествам, поскольку возникающие при этом функции множеств теряют аддитивность. Такая постановка задачи о разделе ресурсов рассматривалась в недавней работе [15] с использованием понятия квазимеры множества. Однако предложенный в [15] подход к проблеме не позволил получить аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости для квазимер и ввиду этого не удалось доказать возможность раздела объектов в любом отношении, а только лишь на равные части. Устранение данного недостатка направлена настоящая работа — одна из целей данной работы.

В разделе 1 работы напоминается подход к построению аналога понятия меры (квазимеры) из работы [15]. В разделе 2 вводится более сильное понятие — ε-квазимера множества и доказывается аналог теоремы А.А. Ляпунова о выпуклости образа для векторных ε-квазимер в форме квазивыпуклости (теорема 4). На базе полученного результата в разделе 3 установлена разрешимость задачи о разделе ресурсов при условии использования каждым лицом ε-квазимер для оценки частей делимых объектов (теорема 6).

1. Понятие квазимеры множества. Примеры квазимер

Напомним понятие квазимеры из [15]. Для этого сначала приведём вспомогательные понятия.

Определение 1. Функция множества ($\Phi \ni A \to \rho(A) \in R$) ρ называется **монотонной**, если $\forall A, B \in \Phi : A \supset B \quad \rho(A) \geqslant \rho(B)$.

Также мы используем аналог свойства Дарбу, которое названо нами промежуточной непрерывностью.

Определение 2. Пусть ρ — функция множества $(\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. Будем называть её **промежуточно непрерывной**, если для $\forall A, B \in \Phi : A \subset B$, $\rho(A) = a \ (a > 0), \ \ \rho(B) = b \ \ (b > a) \ \ \forall c \in (a; b) \ \exists C \in \Phi : \rho(C) = c, \ \ A \subset C \subset B.$

В работе также будет использовано и классическое свойство полунепрерывности сверху.

Определение 3. Функция множества $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$ называется **полунепрерывной сверху**, если для $\forall A_1, \ldots, A_n, \dots \in \Phi : A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \ldots :$

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \rho(A_n).$$

Приведём теперь понятие квазимеры из работы [15].

Определение 4. Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве) $\mathfrak{R}$ задана система множеств Φ и на Φ задана функция $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$.

Будем говорить, что ρ — **квазимера**, если:

1. $\forall A \in \Phi \colon \rho(A) \geqslant 0; \ \ \rho(\varnothing) = 0;$
2. ρ монотонна по определению 1;
3. ρ промежуточно непрерывна по определению 2;
4. ρ полунепрерывна сверху по определению 3.

Рассмотрим некоторые примеры квазимер над системой множеств, каждое из которых является объединением отрезков на прямой.

$$\Phi = \left\{ \bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m, \beta_m) \mid \alpha_m, \beta_m \in R, [\alpha_k; \beta_k) \bigcap [\alpha_m; \beta_m) = \varnothing \ \ (k \neq m) \right\}, \text{ где } R = [0; 1).$$

Эта система является монотонным классом множеств.

Пример 1.

$$\rho_{\varepsilon}^{**}\left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m)\right) = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m|, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon \end{cases},$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Пример 2.

$$\rho_{\varepsilon}^{2}\left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m)\right) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m|\right)^2, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon \end{cases},$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

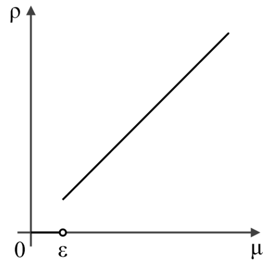


Рис. 1: иллюстрация к примеру 1

Пример 3.

$$\rho_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}}\left(\bigcup_{m=1}^{n}[\alpha_m;\beta_m)\right)=\begin{cases}\sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|}, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|\geqslant\varepsilon\\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n}|\beta_m-\alpha_m|<\varepsilon\end{cases},$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Эти примеры моделируют вышеупомянутые ситуации пренебрежения «малыми» множествами. При этом все вышеуказанные квазимеры не будут мерами, так как не удовлетворяют свойству аддитивности. Это можно легко обнаружить, если взять два множества, каждое из которых имеет нулевую оценку, но объединение которых имеет ненулевую оценку.

2. Определение ε-квазимеры и аналог теоремы А.А. Ляпунова

На базе понятия квазимеры в работе [15] удалось доказать разрешимость задачи о разделе ресурсов в равном отношении. В настоящей работе ставится задача так ввести аналог понятия меры для оценки частей делимых ресурсов, чтобы удалось получить возможность справедливого раздела не только в равных отношениях, но и в различных. Для этого необходимо получить фундаментальный результат — аналог теоремы А.А. Ляпунова о выпуклости образа меры в какой-то форме. А для такой задачи уже понятие квазимеры из [15] не подходит. В настоящем разделе работы мы предложим аналог понятия квазимеры, который позволяет учесть пренебрежение «малыми» множествами и при этом сохранить в некотором смысле свойство аддитивности. Начнём с определения понятия ε-квазимеры множества.

Определение 5. Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве) $\mathfrak{R}$ задана система множеств Φ и на Φ задана функция ρ $\quad(\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$.

Будем говорить, что ρ — ε-**квазимера**, если:

1. $\forall A \in \Phi : \rho(A) \geqslant 0;\ \ \rho(\varnothing) = 0;$
2. ρ монотонна по определению 1;
3. ρ промежуточно непрерывна по определению 2;
4. ρ полунепрерывна сверху по определению 3;
5. $\forall A, B\colon \rho(A) \geqslant \varepsilon, \rho(B) \geqslant \varepsilon, A \cap B = \varnothing\colon \rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B).$

Свойство 5 мы назовём *ε-квазиаддитивностью.* Как можно заметить, среди рассмотренных выше примеров 1 — 3 только отображение из примера 1 будет удовлетворять определению ε-квазимеры.

Основная задача данного раздела работы — получить аналог теорема А.А. Ляпунова о выпуклости образа векторной ε-квазимеры. Начнём со вспомогательного результата. Всюду мы полагаем, что Φ — монотонный класс множеств.

Теорема 1 (*Теорема о двух множествах*)**.** *Пусть ρ — ε-квазимера, $A \in \Phi$ и $\rho(A) = C$, $C > 2\varepsilon$. Тогда для произвольной пары множеств $A_1, A_2 \in \Phi\colon\ \rho(A_i) \neq \frac{1}{2}C, A_1 \cup A_2 = A; A_1 \cap A_2 = \varnothing$*

$$\exists k, l:\ \ \rho(A_k) > \frac{1}{2}C,\ \ \rho(A_l) < \frac{1}{2}C.$$

Доказательство. 1. Если $\exists k, l\colon\ \ \rho(A_k) > \frac{1}{2}C,\ \ \rho(A_l) < \frac{1}{2}C$, то теорема доказана. В этом случае выбираем A_k и A_l в качестве искомых множеств.

2. Иначе возможны два случая:

а) $\rho(A_1) > \frac{1}{2}C, \rho(A_2) > \frac{1}{2}C$;

б) $\rho(A_1) < \frac{1}{2}C, \rho(A_2) < \frac{1}{2}C$.

3. Докажем, что при сформулированных условиях теоремы случаи а) и б) невозможны.

а) Пусть $\rho(A_1) > \frac{1}{2}C, \rho(A_2) > \frac{1}{2}C$. Допустим, что $\rho(A_1) = \frac{1}{2}C + \delta_1$, $\rho(A_2) = \frac{1}{2}C + \delta_2$. Они заведомо больше ε ввиду малости последнего. $A = A_1 \dot\cup A_2\colon A_2 = A \backslash A_1$. Отсюда получаем, что: $\rho(A_2) = \rho(A) - \rho(A_1) = C - (\frac{1}{2}C + \delta_1) = \frac{1}{2}C - \delta_1 < \frac{1}{2}C$. Противоречие.

б) Пусть $\rho(A_1) < \frac{1}{2}C, \rho(A_2) < \frac{1}{2}C$. Рассуждаем аналогично: допустим, что $\rho(A_1) = = \frac{1}{2}C - \delta_1$, $\rho(A_2) = \frac{1}{2}C - \delta_2$. Так как $A_2 = A \backslash A_1$, то $\rho(A_2) = \rho(A) - \rho(A_1) = C - (\frac{1}{2}C - \delta_1) = \frac{1}{2}C + \delta_1 > \frac{1}{2}C$ — противоречие. В случае, когда, например, $\rho(A_1) = 0 < \varepsilon$ имеем, что $\rho(A_2) \geqslant C - \varepsilon > \frac{1}{2}C$ ввиду условия на ε. Снова получаем противоречие.

Итак, случаи а) и б) невозможны и теорема 2 доказана.

Для дальнейших рассуждений мы будем использовать понятие плотной системы множеств.

Определение 6. Будем называть систему подмножеств $\Phi_0 = \{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ **плотной в Φ для квазимеры** ρ, если для $\forall A \in \Phi_0\ \ \forall \varepsilon > 0\ \ \exists B \in \Phi_0\ \ (B \neq A):$

$$\rho\left(A \bigcup B\right) - \rho(B) < \varepsilon.$$

Пример 4. Пусть $R = [0;1)$

$$\Phi = \left\{ \bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m;\beta_m) | \alpha_m, \beta_m \in R, [\alpha_k;\beta_k) \bigcap [\alpha_m;\beta_m) = \varnothing \ \ (k \neq m) \right\}.$$

Тогда система

$$\Phi_0 = \left\{ [\alpha_k, \beta_k) \mid \ \alpha_k, \beta_k \in Q, \ \beta_k - \alpha_k = \frac{1}{2} \right\}$$

будет плотной в Φ для функций множества из примеров 1 — 3, поскольку произвольное множество $A = [\alpha, \beta) \colon \beta - \alpha = \frac{1}{2}$ «покрывается» системой множеств Φ_0.

Заметим, что плотную систему множеств з некоторыми дополнительным условиями позволяет получить следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $T \in \Phi$ — монотонный класс множеств. ρ_1 — ε-квазимера, $\rho_1(T) = C > 2\varepsilon$. Тогда можно построить плотную систему множеств Φ_1 такую, что*

$$\Phi_1 = \left\{ A_i \in \Phi \colon \rho_1(A_i) = \frac{1}{2} C \right\} \colon \ \ \forall B \in \Phi_1 \quad \exists A \in \Phi_1 \colon T = A \dot{\cup} B.$$

Доказательство. Покажем, как можно построить Φ_1:

1. Возьмём некоторое подмножество $A \subset T \in \Phi \colon \ \rho(A) = \frac{1}{2} C$. Обозначим $B = T \backslash A$. $\rho(B) = \frac{1}{2} C$ в силу квазиаддитивности. Добавим оба множества в Φ_1.

2. Выполним следующие действия над парой A, B:

- В силу промежуточной непрерывности ρ_1, выберем $A' \subset A \colon \rho(A' \bigcup B) = = \frac{1}{2} C + \delta$ $(\delta < \varepsilon)$, затем перейдём к $B' \colon B' \subset A' \bigcup B \colon \rho(B') = \frac{1}{2} C$ (в силу непрерывности ρ_1). Добавим A' и B' в Φ_1.
- Далее из множеств A' и B' будем получать A'' и B'' $: \rho_1(A'') = \rho_1(B'') = \frac{1}{2} C$.

Аналогично можно получить $A''', B''', A^{(4)}, B^{(4)}, \ldots, A^{\left[\frac{C}{\delta}\right]}, B^{\left[\frac{C}{\delta}\right]}$ (где $\left[\frac{m}{n}\right]$ — целая часть дроби $\frac{m}{n}$). Все эти множества добавляем в Φ_1. Далее уменьшим δ (возьмём $\frac{1}{2}\delta$ вместо δ) и будем проводить аналогичные построения, начиная с пары A и B.

Таким образом, для $\forall i \colon \rho_1(A^{(i)} = \rho_1(B^{(i)} = \frac{1}{2} C$, то есть, мы получим плотную систему множеств, каждое из которых имеет оценку $\frac{1}{2} C$ с точки зрения ρ_1. Отсюда, Φ_1 — искомая система множеств.

Теперь переходим к построению необходимой плотной системы множеств для произвольного конечного числа ε-квазимер.

Теорема 3. *Пусть Φ — монотонный класс множеств, $T \in \Phi$. Пусть ρ_1, ρ_2, $\ldots$, ρ_n — ε-квазимеры и $\rho_l(T) > 2\varepsilon$ $\forall 1 \leqslant l \leqslant n$.*

Тогда $\exists A, B \in \Phi$: 1) $A \dot{\cup} B = T$;

2) $\rho_l(A) = \rho_l(B) = \frac{1}{2} \rho_l(T)$ $\forall 1 \leqslant l \leqslant n$.

Доказательство. Итак, нам необходимо показать то, что мы можем построить плотную систему множеств

$$\Phi_{1,2,\dots,n} = \{S_i \in \Phi\colon \rho_j(S_i) = \frac{1}{2}\rho_j(T), \forall i, j\}\colon \quad \forall B \in \Phi_{1,2,\dots,n} \quad \exists A \in \Phi_{1,2,\dots,n}\colon T = A\dot{\cup}B.$$

В теореме 2 мы уже доказали возможность построения плотной системы множеств Φ_1:

$$\forall A \in \Phi_1\colon \quad \rho_1(A) = \frac{1}{2}\rho_1(T); \quad \forall B \in \Phi_1 \quad \exists A \in \Phi_1\colon T = A\dot{\cup}B.$$

Теперь покажем возможность построения плотной системы множеств $\Phi_{1,2}$ ($\Phi_{1,2} \subset \Phi_1$) для двух квазимер ρ_1 и ρ_2.

Базис индукции. Приведём алгоритм выделения плотной системы множеств $\Phi_{1,2}$ для ρ_1, ρ_2. Пусть первый разбойник некоторым образом разделил T на A_0 и B_0: $A_0\dot{\cup}B_0 = T$, $\rho_1(A_0) = \rho_1(B_0) = \frac{1}{2}\rho_1(T)$. Если $\rho_2(A_0) = \rho_2(B_0)$, то утверждение доказано. Пусть $\rho_2(A_0) \neq \rho_2(B_0)$. Будем считать, что $\rho_2(A_0) < \rho_2(B_0)$ (тогда, в силу аддитивности, $\rho_2(A_0) < \frac{1}{2}\rho_2(T)$ и $\rho_2(B_0) > \frac{1}{2}\rho_2(T)$).

Начнём обменивать между собой части A_0 и B_0 до тех пор, пока не получим множества равные как по мере ρ_1, так и по мере ρ_2.

1. Рассмотрим множества A_0 и $A_0 \cup B_0$. В силу промежуточной непрерывности выберем систему множеств $A'_1, \dots, A'_k$ ($k \in \mathbb{N}, k > 1$), такую что $A_0 = A'_1 \subset \dots \subset A'_k = A_0 \cup B_0$ и $\forall 2 \leqslant l \leqslant n$

$$\rho_1(A'_l) - \rho_1(A'_{l-1}) = \frac{\rho_1(A_0 \cup B_0) - \rho_1(A_0)}{k-1}.$$

2. Выберем систему подмножеств $S_1, \dots, S_k$. таким образом, чтобы $\rho_1(S_1) = \dots = \rho_1(S_k) = \frac{1}{2}\rho_1(T)$ и при этом $\forall 2 \leqslant l \leqslant n$

$$A'_l \backslash A'_{l-1} \subset S_l \subset A'_l.$$

3. Будем поочерёдно измерять S_l по мере ρ_2, пока не наступит момент, когда $\rho_2(S_l) > \frac{1}{2}\rho_2(T)$. Это должно случиться, так как $S_k = B, (A \cup B)\backslash S_k = A$. Пусть знак меняется на шаге $i_0 + 1$.

4. Рассмотрим теперь множества S_{i_0} и $S_{i_0} \cup S_{i_0+1}$ (заметим ещё раз, что $\rho_1(S_{i_0+1} \backslash S_{i_0}) = \frac{\rho_1(A_0 \cup B_0) - \rho_1(A_0)}{k-1}$). Снова выберем систему множеств $A'_{i_0,1}, \dots, A'_{i_0,k}$: $A'_{i_0,1} \subset \dots \subset A'_{i_0,k}$ так, чтобы $S_{i_0} = A'_{i_0,1}$, $A'_{i_0,k} = S_{i_0} \cup S_{i_0+1}$, и $\forall 2 \leqslant l \leqslant n$

$$\rho_1(A'_{i_0,l}) - \rho_1(A'_{i_0,l-1}) = \frac{\rho_1(S_{i_0} \cup S_{i_0+1}) - \rho_1(S_{i_0})}{(k-1)^2}.$$

5. Теперь, аналогично пункту 2 алгоритма, выберем систему множеств $S_{i_0,1}, \dots, S_{i_0,k}$ такую, что $\forall 2 \leqslant l \leqslant n$

$$A'_{i_0,l} \backslash A'_{i_0,l-1} \subset S_{i_0,l} \subset A'_{i_0,l}$$

и

$$\rho_1(S_{i_0,1}) = \dots = \rho_1(S_{i_0,k}) = \frac{1}{2}\rho_1(T).$$

6. Продолжим процесс измерения и выбора новых систем множеств:

$$A'_{i_0,i_1,\dots,1}, S_{i_0,i_1,\dots,1}, A'_{i_0,i_1,\dots,2}, S_{i_0,i_1,\dots,2}, \dots, A'_{i_0,i_1,\dots,k}, S_{i_0,i_1,\dots,k}.$$

При этом в условии на меру в знаменателе вместо $(k-1)$, $(k-1)^2$ будем получать $(k-1)^3$, $(k-1)^4$ и так далее.

7. В силу монотонности ρ_2 верным будет следующий ряд неравенств:

$$\rho_2(S_{i_0}) < \frac{1}{2}\rho_2(T);\ \rho_2(S_{i_0+1}) > \frac{1}{2}\rho_2(T);\ \rho_2(S_{i_0,i_1}) < \frac{1}{2}\rho_2(T);\ \rho_2(S_{i_0,i_1+1}) > \frac{1}{2}\rho_2(T);$$

$$\dots$$

$$\rho_2(S_{i_0,i_1,\dots,i_n}) < \frac{1}{2}\rho_2(T);\ \rho_2(S_{i_0,i_1,\dots,i_n+1}) > \frac{1}{2}\rho_2(T).$$

В силу монотонности ρ_2:

$$\rho_2(S_{i_0} \cap S_{i_0+1}) < \rho_2(S_{i_0,i_1} \cap S_{i_0,i_1+1}) < \dots < \rho_2(S_{i_0,i_1,\dots,i_n} \cap S_{i_0,i_1,\dots,i_n+1}) < \frac{1}{2}\rho_2(T);$$

$$\frac{1}{2}\rho_2(T) < \rho_2(S_{i_0,i_1,\dots,i_n} \cup S_{i_0,i_1,\dots,i_n+1}) < \dots < \rho_2(S_{i_0,i_1} \cup S_{i_0,i_1+1}) < \rho_2(S_{i_0} \cup S_{i_0+1}).$$

В силу промежуточной непрерывности ρ_2

$$\exists A \in \Phi\colon \rho_2(A) = \frac{1}{2}\rho_2(T),$$

$S_{i_0} \cup S_{i_0+1} \supset \dots \supset S_{i_0,i_1,\dots,i_n} \cup S_{i_0,i_1,\dots,i_n+1} \supset \dots \supset A \supset \dots \supset S_{i_0,i_1,\dots,i_n} \cap S_{i_0,i_1,\dots,i_n+1} \supset \dots \supset S_{i_0} \cap S_{i_0+1}$.

8. Покажем теперь, что $\rho_1(A) = \frac{1}{2}\rho_1(T)$. Во время распределения верно было следующее:

$$\rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n,l+1}) - \rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n,l}) = \frac{\rho_1(T)}{2(k-1)^{n-1}}, \forall 1 \leqslant l \leqslant k-1,$$

а поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\rho_1(T)}{2(k-1)^{n-1}} = 0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n+1}) = \lim_{n\to\infty} \rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n}).$$

В силу монотонности построенной системы множеств и непрерывности меры ρ_1, получаем:

$$\rho_1\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n+1} \cup A'_{i_0,i_1,\dots,i_n})\right) = \frac{1}{2}\rho_1(T),$$

так как $\rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_{n-1},1} = \frac{1}{2}\rho_1(T)$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_1(A'_{i_0,i_1,\dots,i_n,k}) = \frac{1}{2}\rho_1(T)$, а значит, $\rho_1(A) = \frac{1}{2}\rho_1(T)$.

Индуктивный переход. Пусть построена система множеств $\Phi_{1,\dots,t}$, плотная для каждой из t $(t < n)$ ε-квазимер $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t$: $\forall X \in \Phi_{1,\dots,t}, 1 \leqslant i \leqslant t\colon \rho_i(X) = \frac{1}{2}\rho_i(T)$, и для $\forall B \in \Phi_{1,\dots,t}$ $\exists A \in \in \Phi_{1,\dots,t}$: $T = A\dot{\cup}B$. Будем считать далее ε-квазимеры $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_t$ «склеенными» и рассмотрим все возможные множества из $\Phi_{1,\dots,t}(A \in$

$\Phi_{1,\ldots,t}\colon\ T = A\dot{\cup}B$) и строим плотную систему множеств $\Phi_{1,\ldots,t,t+1}(\Phi_{1,\ldots,t,t+1} \subset \Phi_{1,\ldots,t})$ по $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{t+1}$ ($\forall X \in \Phi_{1,\ldots,t,t+1}, 1 \leqslant i \leqslant t+1\colon \rho_i(X) = \frac{1}{2}\rho_i(T)$ и $\forall B \in \Phi_{1,\ldots,t+1}\ \exists A \in \Phi_{1,\ldots,t+1}\colon\ T = A\dot{\cup}B$). Делаем это аналогично построению $\Phi_{1,2}$ (при $t = 2$).

Примечание к теореме. Заметим, что благодаря построению плотной системы множеств мы получаем не только пару множеств, равных по всем ε-квазимерам, но и бесконечное количество таких пар.

Из предыдущего результата вытекает один из основных результатов работы — аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости множества значений векторной ε-квазимеры. Для удобства введём обозначение $\overrightarrow{\rho} = (\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n)$. Если ρ_i — ε-квазимеры при всех $i = 1, ..., n$, то будем говорить, что $\overrightarrow{\rho}$ — есть *векторная ε-квазимера.*

Теорема 4. *Если $\vec{\rho}$ — векторная ε-квазимера, то множество $\vec{\rho}(\Phi)$* ***квазивыпукло****, то есть*

$$\forall A, B \in \Phi\colon \rho_i(A) > \varepsilon, \rho_i(B) > \varepsilon\ \forall 1 \leqslant i \leqslant n\ \exists C \in \Phi\colon \vec{\rho}(C) = \frac{\vec{\rho}(A) + \vec{\rho}(B)}{2}.$$

3. Решение задачи о разделе сокровищ с использованием ε-квазимер

Теперь на основании построенной теории ε-квазимер предложим вариант решения задачи о разделе сокровищ разбойниками, если каждый из этих разбойников использует ε-квазимеру для оценки частей сокровищ. При этом ввиду полученного аналога теорема А.А. Ляпунова мы рассмотрим несколько усиленную формулировку задачи.

Задача. *Банда из n жадных, но честных разбойников желает разделить добычу в некотором заданном отношении $\lambda_1 : \lambda_2 : ... : \lambda_n$ ($\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n > 0$ и для определённости можно положить, что $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$). При этом каждый из разбойников подходит к оценке сокровищ со своей меркой, то есть, подмножества сокровищ каждый из разбойников оценивает по-своему. Будем полагать, что каждый работник использует для оценки сокровищ ε-квазимеры, заданные на монотонном классе множеств Φ. При каких условиях на ε-квазимеры, используемые разбойниками для оценки частей делимых сокровищ, такой раздел будет возможным?*

Докажем разрешимость поставленной задачи. Для начала из теоремы 4 можно вывести существование подмножества с одинаковой оценкой с точки зрения всех квазимер.

Теорема 5. *Пусть $\vec{\rho}$ — векторная ε-квазимера, а множество $A \in \Phi$ такое, что $\vec{\rho}(A) = (1, 1, \ldots, 1)$. Тогда $\forall \delta$ ($\varepsilon < \delta < 1$) $\exists D \subset A\colon\ \rho(\vec{D}) = (\delta, \delta, \ldots, \delta)$.*

Доказательство. Согласно теореме 2, будет существовать плотная система множеств, по ε-квазимере равных δ. Далее будем действовать по алгоритму, аналогичному доказательству теоремы 3, а именно: согласовывать множество поочерёдно по каждой из ε-квазимер.

Следствие 1. $\exists E \subset A\colon \overrightarrow{\rho}(E) = (\varepsilon, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$.

Это очевидным образом следует из теоремы 5 и полунепрерывности ε-квазимер сверху.

Приведённые теоремы позволяют вывести последний финальный результат работы — разрешимость задачи о разделе ресурсов.

Теорема 6. *Пусть $\vec{\rho}$ — векторная ε-квазимера, а множество $A \in \Phi$ такое, что $\vec{\rho}(A) = (1, 1, \ldots, 1)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — набор чисел, причём $\lambda_i \geqslant \varepsilon$ $\forall i$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. Тогда $\exists L_1, L_2, \ldots, L_n \subset A\colon$, $L_i \in \Phi$*

$$\rho_i(L_j) = \lambda_i \quad \forall i, j = \overline{1, n},$$

где $L_i \cap L_j = \varnothing (i \neq j)$ и $A \backslash (L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n) = \varnothing$.

Доказательство. Отметим, что процесс построения искомого разбиения множества A будет аналогичен таковому из доказательства теоремы 3. На первом шаге (для λ_1) мы получаем множество L_1: $\overrightarrow{\rho}(L_1) = (\lambda_1, \lambda_1, \ldots, \lambda_1)$, причём в силу ε-квазиаддитивности $\overrightarrow{\rho}(A \backslash L_1) = (1 - \lambda_1, 1 - \lambda_1, \ldots, 1 - \lambda_1)$. Продолжая отделение от A множеств L_i $(i = \overline{1, n})$, получаем в итоге искомое разбиение множества A.

Список литературы

[1] Ляпунов А. А. О вполне аддитивных вектор-функциях. / А. А. Ляпунов. // Известия АН СССР. — 1940. — Т. 4. — С. 465 – 478.

[2] Neyman J. Un theor‘em d’existence / J. Neyman // C.R. Acad. Sci. Paris. — Vol. 222. — 1946. — P.843 — 845.

[3] Steinhaus H. Sur la division pragmatique / H. Steinhaus // Econometrica. — Vol. 17(Supplement: Report of the Washington Meeting). — 1949.— P. 315 – 319.

[4] Ляпунов А.Н. Теорема А.А. Ляпунова о выпуклости значений мер // Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео». — 2011. — С. 257 — 261.

[5] Кутателадзе С.С. Теорема Ляпунова, зоноиды и бэнг-бэнг // Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео». — 2011. — С. 262 — 264.

[6] Аркин В.И., Левин В.Л. Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи // Успехи мат. наук. — 1972. — т. 27, вып. 3. — С. 21 — 77.

[7] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // Успехи мат. наук. — 1968. — т. 23, вып. 6. — С. 51 — 116.

[8] Robertson J. Cake-cutting algorithms: Be fair if you can / J. Robertson and W. Webb. AK Peters, Ltd., Natick, MA, USA, 1998.
[9] Steven J. Brams Michael A. Jones Christian Klamler. Better Ways to Cut a Cake. – NY .– UNITED STATES – 2006.
[10] Arzi Orit. Throw One's Cake and Eat It Too / Orit Arzi, Yonatan Aumann Yair Dombb. // arXiv:1101.4401v2 [cs.GT] 11 Nov 2011.
[11] Mossel Elchanan. Truthful Fair Division / Elchanan Mossel, Omer Tamuz // arXiv:1003.5480v2 [cs.GT] 31 Jul 2010.
[12] Chen Y. Truth, justice, and cake cutting / Yiling Chen, John Lai, David C. Parkes, and Ariel D. — Procaccia.Association for the Advancement of Artificial Intelligence. 2010.
[13] Fabio Maccheroni. How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations / Maccheroni Fabio, Marinacci Massimo // Social Choice and Welfare. – Springer-Verlag GmbH — 2003. — P. 457 – 465.
[14] Husseinov F., Sagarab N. Concave measures and the fuzzy core of exchange economies with heterogeneous divisible commodities/ F. Husseinov, N. Sagarab // Fuzzy Sets and Systems. — 2012. — Vol. 198. — P. 70 -– 82
[15] Стонякин Ф. С., Магера М. В. Розв'язання задачі про розділ скарбів для довільної кількості розбійників // Учёные записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". — Т.: 26 (65). — 2013, № 1. — С. 109-128.

Аналог теореми Ляпунова про опуклість для e-квазимір та його застосівання до задачі про розподіл ресурсів

У даній роботі продовжено розпочаті нами раніше дослідження задачі про розділ ресурсів в умовах нехтування достатньо малими величинами. Введено новий аналог поняття міри множини — поняття ε-квазиміри. Для ε-квазимір доведено аналог теореми О.А. Ляпунова про опуклість образу міри у формі квазиопуклості. На базі одержанного результату показано розв'язність задачі про справедливий розділ ресурсів, причому не обов'язково у рівних відношеннях.

Ключові слова: ε-квазиміра, задача про розділ скарбів, монотонність, проміжна неперервність, неперервність зверху, квазиопуклість, теорема О.А. Ляпунова.

Analog Lyapunov convexity theorm for e-quasimeasures and its application to fair division problem.

This paper is devoted to new approach for the well-known fair division problem. The usual method to such problems is to consider that subjects use additive, nonatomic and probability measures for estimating of divided objects parts. But this convention isn't effective for many cases. For example, let's suppose that there are small enough sets with zero estimation. However, union

of some such negligible sets may be nonzero estimation. In this case estimation function is not additive and nonatomic. To investigate this problem we introduce a new generalization of measure, concept of ε-quasi-measure. Let's start with auxiliary definitions.

Definition 1. Set function $(\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$ ρ is called **monotone**, if $\forall A, B \in \Phi :$ $A \supset B \quad \rho(A) \geq \rho(B)$.

In this paper we introduce the property of intermediate continuity for set functions.

Definition 2. Let ρ be a set function $(\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. Let's call it **intermediately continuous**, if $\forall A, B \in \Phi : A \subset B,\ \rho(A) = a\ (a > 0),\ \rho(B) = b\ (b > a) \forall c \in (a; b)\ \exists C \in \Phi : \rho(C) = c,\ \ A \subset C \subset B$.

Also we need in classical property upper semicontinuity.

Definition 3. Set function $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$ is called **upper semicontinuous**, if $\forall A_1, ..., A_n, ... \in \Phi : A_1 \supset A_2 \supset ... \supset A_n \supset ... :$

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \rho(A_n).$$

Now we define a concept of quasi-measure.

Definition 4. Suppose that in some space (set) $\mathfrak{R}$ there is a set system and a function $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. Say that ρ is a **ε-quasi-measure**, if:

1. $\forall A \in \Phi : \rho(A) \geq 0;\ \ \rho(\varnothing) = 0$;
2. ρ is monotone by definition 1;
3. ρ is intermediately continuous by definition 2;
4. ρ is upper continuous by definition 3;
5. $\forall A, B\colon \rho(A) \geqslant \varepsilon, \rho(B) \geqslant \varepsilon, A \cap B = \varnothing\colon \rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B)$.

The following Lyapunov Convexity Theorem's analogue is obtained for ε-quasi-measures. We say that $\vec{\rho} = (\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n)$ is a vector ε-quasi-measure if ρ_i is an ε-quasi-measure on a monotone class of sets Φ.

Theorem 1. *If $\vec{\rho}$ is a vector ε-quasi-measure then the set $\vec{\rho}(\Phi)$ is **quasi-convex**, i.e.*

$$\forall A, B \in \Phi\colon \rho_i(A) > \varepsilon, \rho_i(B) > \varepsilon\ \forall 1 \leqslant i \leqslant n\ \exists C \in \Phi\colon \vec{\rho}(C) = \frac{\vec{\rho}(A) + \vec{\rho}(B)}{2}.$$

On the base of this result the fair division problem is solved for case of any finite number subjects. The final result is given by the following theorem.

Theorem 2. *Let Φ be a monotone class of sets, $A \in \Phi$ is a set of objects and $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n$ are such ε-quasi-measures that $\rho(A) = \rho_2(A) = ... = \rho_n(A) = 1.$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ are such* *numbers that* $\lambda_i \geqslant \varepsilon\ \forall i$ *and* $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. *Then* $\exists L_1, L_2, \ldots, L_n \subset A$:

$$\rho_i(L_j) = \lambda_i \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

where $L_i \cap L_j = \varnothing (i \neq j)$ *and* $A \backslash (L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n) = \varnothing$.

The previous result gives sufficient conditions for solvability the fair division problem in the case of n *subjects using* ε*-quasi-measures for estimating parts of divided objects.*

Keywords: ε-quasi-measure, fair division problem, monotonicity, intermediate continuity, upper continuity, Lyapunov Convexity Theorem.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 125–153.

УДК 517. 972 : 517. 982. 22

З. И. Халилова

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С СУБГЛАДКИМ ИНТЕГРАНТОМ

В работе рассмотрены приложения теории компактных субдифференциалов к вариационным задачам с субгладким интегрантом. Получены аналоги классических условий Лежандра и Лежандра – Якоби. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: субгладкий интегрант, компактный субдифференциал, включение Эйлера – Лагранжа, обобщенные условия Лежандра – Якоби

Введение

Субдифференциалы, как инструмент негладкого анализа, достаточно давно получили признание в математике (см., например, [1], [8], [14], [15]). Начиная с классического субдифференциала выпуклого функционала, появились и продолжают появляться новые определения субдифференциалов, рассчитанные на применение к различным классам экстремальных и других негладких задач (см., например, [6], [13], [16]).

Исходя из определения компактного субдифференциала (или K–субдифференциала) для отображений скалярного аргумента в вещественное ЛВП, введенного в работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина с целью исследования проблем векторного интегрирования, K–субдифференциал есть некоторое компактное выпуклое множество, и в случае, когда это множество сводится к точке, сводится к обычному к обычному дифференциалу. K–субдифференциалы позволили получить значимые результаты в теории интеграла Бохнера (см. [3], [7], [12]). Теория K–субдифференциалов первого порядка для отображений векторного аргумента была построена в работах (см. [4], [5], [9], [10], [11]) и включает в себя приложения к экстремальным вариационным задачам с негладким интегрантом.

Настоящая работа посвящена детальному рассмотрению приложения K–субдифференциального исчисления к исследованию экстремальных вариационных задач с негладким (а именно, с субгладким) интегрантом. В статье содержатся субгладкие аналоги основной вариационной леммы, уравнения Эйлера – Лагранжа, простого и усиленного условий Лежандра, а также условий Лежандра – Якоби для основного вариационного функционала.

Работа состоит из четырех разделов. Первый раздел посвящен краткому обзору теории K–субдифференциалов первого порядка, а также приведены основные понятия теории нормированных конусов.

Во втором разделе приведен краткий обзор применения компактных субдифференциалов первого порядка к вариационным функционалам с C^1–субгладким интегрантом. Рассмотрены примеры.

Третий раздел содержит теорию компактных субдифференциалов второго порядка, приведены основные определения и теоремы.

Наконец, четвертый раздел посвящен приложению теории K–субдифференциалов второго порядка к вариационным функционалам с C^1–субгладким интегрантом. Получена оценка второго K–субдифференциала основного вариационного функционала. Получены аналоги классических условий Лежандра, а также условий Лежандра – Якоби. Рассмотрены примеры.

1. Компактные субдифференциалы первого порядка (обзор)

Для начала напомним основные определения.

Определение 1. Выпуклый конус X назовем *нормированным*, если для любого его элемента $x \in X$ определена неотрицательная величина (*конус–норма*) $\|x\|$, обладающая следующими свойствами:

(i) $(\|x\| = 0) \Longleftrightarrow (x = 0)$;
(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
(iii) $\|\lambda \cdot x\| = \lambda \cdot \|x\| \quad (\forall \lambda \geq 0)$.

Конус–норма индуцирует *локально выпуклую конус–топологию* в X.

Определение 2. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированный конус. Обозначим через X_K множество всех компактных выпуклых подмножеств X. Нетрудно проверить, что X_K образует выпуклый конус относительно поэлементного сложения множеств и умножения на неотрицательные скаляры. Нулем в X_K является множество $\{0\}$.

Введем норму в X_K : $\quad \|C\| = \sup\limits_{x \in C} \|x\|.$

Теорема 1. *Если X — банахов конус, то нормированный конус X_K — также банахов.*

Определение 3. Пусть E — выпуклый конус, F — нормированный конус, F_K — нормированный упорядоченный конус выпуклых компактных подмножеств F (см.

определение 2). Сублинейный оператор $A : E \to F_K$ назовем *сублинейным K–оператором*, или, коротко, *K–оператором.*

Сублинейный оператор $f : E \to \mathbb{R}_K$ назовем *сублинейным K–функционалом*, или, коротко, *K–функционалом.* В случае нормированного конуса E, банахов конус сублинейных ограниченных K–операторов $L_{sub}(E; F_K)$ будем более коротко обозначать $L_K(E; F)$; банахов конус сублинейных ограниченных K-функционалов $L_{sub}(E; \mathbb{R}_K) = L_K(E; \mathbb{R})$ более коротко обозначим E^*_K.

Введем понятие *K–композиции.*

Определение 4. Пусть E, F, C — нормированные конусы, $A \in L_K(E; F)$, $B \in L_K(F; G)$. *K–композицией* $[B \cdot A]$ K–операторов A и B назовем многозначное отображение:

$$[B \cdot A]h = \overline{co}\Big(\bigcup_{k \in Ah} Bk\Big).$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Если* $A \in L_K(E; F)$, $B \in L_K(F; G)$, *то* $[B \cdot A] \in L_K(E; G)$. *При этом выполнено неравенство:*

$$\|[B \cdot A]\| \le \|A\| \cdot \|B\|.$$

Определение 5. Пусть E — нормированный конус, $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложению при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств E с непустым *компактным* пересечением B. Множество B назовем *K–пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \to +0$:

$$B = K\underline{-}\lim_{\delta \to +0} B_\delta,$$

если $\forall\, U(0) \subset E \; \exists\, \delta_U > 0 \; (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B_\delta \subset B + U)$.

Всюду далее E, F — банаховы пространства, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $h \in E$ — произвольное направление в E, $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества в F.

Определение 6. Назовем *K–субдифференциалом* отображения f в точке x следующий
K–предел (если он существует):

$$\partial_K f(x, h) = K\underline{-}\lim_{\delta \to +0} \overbrace{\overline{co}\,\{Y \in F \,|\, f(x + t \cdot h) = f(x) + t \cdot Y,\, 0 < t < \delta\}}^{\partial_\delta f(x,h)}. \qquad (1)$$

В случае, когда F — нормированное пространство, выражение под знаком K–предела в (1) можно выразить в более привычной форме, через разностные отношения:

$$\partial_K f(x, h) = K\underline{-}\lim_{\delta \to +0} \overline{co}\left\{ \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \,\middle|\, 0 < t < \delta \right\}$$

Отправляясь от K–субдифференциала по фиксированному направлению h и действуя по аналогии с классической схемой, мы теперь вводим слабый K–субдифференциал как сублинейный K–оператор по h, K–субдифференциал Гато — как ограниченный сублинейный K–оператор, и наконец, K–субдифференциал Фреше по схеме "Гато" плюс "равномерная по направлениям сходимость в K–пределе $\partial_K f(x,h)$".

Определение 7. Будем говорить, что отображение f *слабо K–субдифференцируемо* в точке x, если f K–субдифференцируемо в этой точке по любому направлению $h \in E$, и K–субдифференциал по направлению $\partial_K f(x,h)$ *сублинеен по* h. Примем в этом случае обозначение $\partial_K f(x)h = \partial_K f(x,h)$. Здесь $\partial_K f(x) : E \to F_K$ — сублинейный K–оператор.

Определение 8. Будем говорить, что отображение f *K–субдифференцируемо по Гато* в точке x, если f слабо K–субдифференцируемо в этой точке и слабый K–субдифференциал $\partial_K f(x)$ ограничен (или, что равносильно, равномерно полунепрерывен сверху на E). В этом случае сублинейный ограниченный оператор $\partial_K f(x)$ назовем *K–субдифференциалом Гато* отображения f в точке x.

Определение 9. Будем говорить, что отображение f *K–субдифференцируемо по Фреше* (или *сильно K–субдифференцируемо*) в точке x, если f K–субдифференцируемо по Гато в этой точке, и сходимость в K–пределе

$$\partial_K f(x)h = K\text{–}\underline{\lim}_{\delta\to+0}\,\overline{co}\{Y \in F | f(x+h) = f(x) + t\cdot Y,\ 0 < t < \delta\} \tag{2}$$

равномерна по всем направлениям h, $0 < \|h\| \le 1$. В этом случае K–оператор $\partial_K f(x)$ назовем *K–субдифференциалом Фреше* (или *сильным K–субдифференциалом*) отображения f в точке x.

В случае нормированного пространства F равенство (2) принимает вид:

$$\partial_K f(x)h = K\text{–}\underline{\lim}_{\delta\to+0}\,\overline{co}\left\{\frac{f(x+th) - f(x)}{t}\ ;\ 0 < t < \delta\right\}.$$

Напомним определение полунепрерывности сверху.

Определение 10. Пусть E, F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен, $\Lambda : E \supset U(x) \to F$. Будем говорить, что отображение Λ *полунепрерывно сверху* (или *субнепрерывно*) в точке $x \in E$ (обозначение $\Lambda \in C_{sub}(x)$), если

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Lambda(x+h) \preceq \Lambda(x) + y,\ \text{где } \|y\| < \varepsilon). \tag{3}$$

2. K–субдифференциал основного вариационного функционала (обзор)

Теорема 3. *Пусть для вариационного функционала*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3), u=f(x,y,z)). \tag{4}$$

интегрант f является C^1–субгладким: $f\in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3)$ (см. определение 10). Тогда Φ сильно K–субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причём справедлива оценка:

$$\partial_K\Phi(y)h\subset\left[\int\limits_a^b\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h+\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx;\int\limits_a^b\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h+\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx\right]$$

$$(\forall h\in C^1[a;b]). \tag{5}$$

Отметим частный случай оценки (5), когда интегрант образован внешней композицией субгладкой функции с гладкой.

Теорема 4. *Пусть*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi\in C^1_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка:

$$\partial_K\Phi(y)h\subset\left[\int\limits_a^b \underline{\varphi'}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\ ;\right.$$

$$\left.\int\limits_a^b \overline{\varphi'}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\right] \quad (\forall h\in C^1[a;b]). \tag{6}$$

Ещё один существенный частный случай представляет внутренняя композиция субгладкой функции с гладкой. Здесь, для простоты, мы рассмотрим композицию только по третьей переменной.

Теорема 5. *Пусть*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,\varphi(y'))dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi\in C^1_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка:

$$\partial_K\Phi(y)h\subset\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))hdx+$$

$$+\left[\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot \underline{\varphi'}(y')h'dx; \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot \overline{\varphi'}(y')h'dx\right] \quad (h\in C^1[a;b]). \quad (7)$$

Отметим, в качестве конкретных примеров, случаи интегрантов, образованных композицией гладкой функции и модуля.

Пример 1. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3)). \quad (8)$$

После преобразований оценка (9) приводится к оценке

$$\partial_K\Phi(y)h\subset\left(\int\limits_{(y'>0)}\big(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\big)dx-\int\limits_{(y'<0)}\big(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\big)dx\right)+\int\limits_{(y'=0)}[-1;1]\big(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\big)dx\,. \quad (9)$$

В частности, если $mes\,(y'=0)=0$, то оценка (9) принимает вид точного равенства:

$$\partial_K\Phi(y)h=\Phi'(y)h=\int\limits_a^b sign(y')\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\right)dx.$$

Пример 2. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,|y'|)dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

После преобразований оценка (7) приводится к оценке:

$$\partial_K\Phi(y)h\subset\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)hdx+\int\limits_{(y'\neq 0)} sign(y')\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'dx+$$

$$+\left[-\int\limits_{(y'=0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)h'dx;+\int\limits_{(y'=0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)h'dx\right]. \quad (10)$$

В частности, если $mes\,(y'=0)=0$, то оценка (10) принимает вид точного равенства:

$$\partial_K\Phi(y)h=\Phi'(y)h=\int\limits_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)h+sign(y')\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'\right]dx. \quad (11)$$

Пример 3. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, |y|, y')dx.$$

Здесь, после аналогичных преобразований, приходим к оценке:

$$\partial_K \Phi(y)h \subset \int_a^b \Bigg(\left[\frac{\partial f}{\partial z}(x, |y|, y')h'dx + \int_{(y \neq 0)} sign\, y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, |y|, y')hdx + \right.$$

$$\left. + \left[- \int_{(y=0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0, y')hdx; + \int_{(y=0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x, 0, y')hdx \right]. \right. \qquad (12)$$

В частности, если $mes(y = 0) = 0$, то оценка (12) превращается в точное равенство:

$$\partial_K \Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int_a^b \left[sign\, y \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, |y|, y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, |y|, y')h' \right] dx.$$

Заметим, что в рассмотренных примерах, как частный случай, мы находим и обычную вариацию, которая не поддается вычислению классическими методами.

Основная вариационная лемма принимает следующий вид.

Теорема 6. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2[a; b]$. *Если*

$$0 \in \left[\int_a^b \varphi_1(x)h(x)dx; \int_a^b \varphi_2(x)h(x)dx \right] \quad (\forall h \in C[a; b]),$$

то $0 \in [\varphi_1; \varphi_2] \subset L_2[a; b]$.

Используя основную лемму и оценку K–субдифференциала вариационного функционала получаем аналог уравнения Эйлера–Лагранжа.

Теорема 7. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \qquad (13)$$

Тогда условие $0 \in \partial_K \Phi(y)$ *равносильно выполнению "включения Эйлера–Лагранжа":*

$$0 \in \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') \right);\ \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') \right) \right] \qquad (14)$$

почти всюду на $[a; b]$. *В частности, если* Φ *достигает локального экстремума в точке* y, *то включение* (14) *для* y *выполнено почти всюду на* $[a; b]$.

Решение включения (14) назовём субэкстремалью функционала (13). Исследуем, в качестве существенного частного случая, случай модулированного интегранта из примера 1.

Теорема 8. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{15}$$

Для функционала (15) *включение Эйлера–Лагранжа принимает вид альтернативы:*

$$\left[\begin{array}{l} \textit{либо } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\right) = 0 \ (\textit{при } f(x,y,y') \neq 0); \\ \textit{либо } f(x,y,y') = 0 \ (\textit{без дополнительных условий}). \end{array}\right. \tag{16}$$

В частности, если $mes(f(x,y,y') = 0)$, *мы приходим к обычному уравнению Эйлера–Лагранжа для* f *(почти всюду).*

Рассмотрим конкретный пример "модулированного" гармонического осциллятора.

Пример 4. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} |y'^2 - y^2|dx. \tag{17}$$

Здесь $f(y,z) = z^2 - y^2, \quad L(f)(y) = -2y - 2y''$. При этом $f(y,y') = y'^2 - y^2 = 0 \Longleftrightarrow y' = \pm y$,

поэтому условие (16) примет вид:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & y'' + y = 0, \ \text{при } y' \neq \pm y \\ \text{либо} & y' = \pm y, \ \text{при } y' = \pm y \end{array}\right. . \tag{18}$$

Решая уравнения в (18), приходим к условиям

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & y = C_1 \cos x + C_2 \sin x, \\ \text{либо} & y = M \cdot e^{\pm x} \end{array}\right. . \tag{19}$$

Рассмотрим функцию

$$y_0(x) = \begin{cases} y = \sin x, \ \text{при } 0 \le x \le \pi/4; \\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4} \cdot e^x, \text{при } \pi/4 \le x \le \pi/2 \end{cases} .$$

Непосредственно проверяется, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет паре условий (19). Таким образом $y_0(x)$ — субэкстремаль, при этом:

$$\begin{cases} y_0(\pi/4-0)=\sin\pi/4=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=y_0(\pi/4+0), \\ y_0'(\pi/4-0)=\cos\pi/4=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=y_0'(\pi/4+0), \end{cases}$$

откуда следует, что $y_0\in C^1[0;\pi/2]$.

При этом прямая проверка достаточных условий Лежандра – Якоби показывает, что на экстремали $y_1(x)=\sin x$ вариационный функционал

$$\Phi_1(y)=\int\limits_0^{\pi/4}(y'^2-y^2)dx$$

достигает строгого локального минимума. Тогда из неравенства

$$\widehat{\Phi}_1(y)=\int\limits_0^{\pi/4}|y'^2-y^2|dx\geq\Phi_1(y)\geq\Phi_1(y_1)$$

следует, что вариационный функционал $\widehat{\Phi}_1(y)$ тем более достигает на экстремали $y_1(x)$ строгого локального минимума. Далее, поскольку вариационный функционал

$$\Phi_2(y)=\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}|y'^2-y^2|dx$$

неотрицателен и на экстремали $y_2(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}\cdot e^x$ обращается в нуль, то Φ_2 достигает строгого локального минимума на экстремали $y_2(x)$. Наконец, поскольку

$$\Phi(y)=\widehat{\Phi}_1\left(y\Big|_{[0;\pi/4]}\right)+\Phi_2\left(y\Big|_{[\pi/4;\pi/2]}\right),$$

то вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого локального минимума на субэкстремали

$$y_0(x)=\begin{cases} y_1(x), & 0\leq x\leq\pi/4\,; \\ y_2(x), & \pi/4\leq x\leq\pi/2\,. \end{cases}$$

Таким образом, на данной субэкстремали $y_0(x)$ достигается строгий локальный минимум вариационного функционала (17).

В заключении рассмотрим вариационную задачу с модулем под знаком интегранта (см. пример 2).

Теорема 9. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, |y'|)dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{20}$$

Для функционала (20) *включение Эйлера–Лагранжа принимает вид следующей альтернативы:*

$$\left[\begin{array}{l} \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')\right) = 0 \ (\text{при } y' > 0); \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, -y') + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, -y')\right) = 0 \ (\text{при } y' < 0); \\ 0 \in \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y, 0) + \left[-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, 0)\right); +\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x, y, 0)\right)\right] \ (\text{при } y' = 0). \end{array}\right.$$

В частности, если $mes(y' = 0) = 0$, *мы приходим к уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, |y'|) - (sign\, y') \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, |y'|)\right) = 0 \quad (\text{п. в}) \tag{21}$$

3. Компактные субдифференциалы второго порядка.

Приведем вначале определение K–субдифференциала 2-го порядка, следуя стандартной индуктивной схеме. Всюду далее E, F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность $x \in E$, $\quad f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 11. Пусть отображение f (сильно) K–субдифференцируемо на множестве $U(x)$. Если отображение

$$\partial_K f : E \supset U(x) \to L_K(E; F)$$

K–субдифференцируемо в точке x, то будем говорить, что f *дважды* K*–субдифференцируемо* в точке x, и введем K*–субдифференциал второго порядка* от f стандартным индуктивным образом:

$$\partial_K^2 f(x) := \partial_K(\partial_K f)(x).$$

В случае нормированных пространств E и F, повторная K–субдифференцируемость f влечет обычную однократную дифференцируемость f в точке x.

Теорема 10. *Пусть* E, F *— нормированные пространства. Если отображение* $f : E \supset U(x) \to F$ *дважды* K*-субдифференцируемо в точке* x, *то* f *дифференцируемо в обычным смысле в этой точке. В частности, если* f *дважды* K*–субдифференцируемо в окрестности* $U(x)$, *то*

$$\partial_K^2 f(x) = \partial_K(f')(x).$$

На K–субдифференциалы 2–го порядка обобщается *классическая теорема Юнга о симметричности* второго сильного дифференциала. Вначале введем вспомогательное понятие.

Определение 12. Для фиксированных $h, k \in E$ предположим, что существует следующий K–предел :

$$\widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k) =$$
$$K\underline{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\Big\{ z \in F \Big| f(x+th+sk)+f(x) = f(x+th)+f(x+sk)+(st)z \Big| 0 < t, s < \delta \Big\}, \quad (22)$$

который назовем *бисимметрическим вторым K–субдифференциалом* f в точке x по паре направлений (h,k).

Важный результат этого раздела: в случае *банаховых пространств* E и F, второй K–субдифференциал $\partial^2_K f(x)$, если он существует, совпадает со вторым бисимметрическим K–субдифференциалом $\widehat{\partial}^2_K f(x)$ и, как следствие, является *симметрическим бисублинейным оператором.*

Теорема 11. *Пусть E и F — банаховы пространства, $f : E \supset U(x) \to F$. Если отображение f дважды K–субдифференцируемо в точке x, то f также бисимметрически K–субдифференцируемо в точке x, причем*

$$\partial^2_K f(x)(h,k) = \widehat{\partial}^2_K f(x)(h,k).$$

В частности,

$$\partial^2_K f(x)(h,k) = \partial^2_K f(x)(k,h) \quad (\forall h,k \in E).$$

Примененный нами подход позволяет использовать индукцию для определения K–субдифференциала n–го порядка. Далее, как и в предыдущем пункте, E и F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 13. Пусть отображение f K–субдифференцируемо $(n-1)$ раз в $U(x)$. Если отображение:

$$\partial^{n-1}_K f : E \supset U(x) \longrightarrow L_K(\underbrace{E, ..., E}_{n-1}; F) =: L^{n-1}_K(E;F)$$

K–субдифференцируемо в точке x, то мы будем говорить, что f *n раз K–субдифференцируемо* в точке x и введем *K–субдифференциал n–го порядка* от f стандартным индуктивным образом:

$$\partial^n_K f(x) := \partial_K(\partial^{n-1}_K f)(x).$$

В случае *нормированных пространств E и F*, n–кратная K–субдифференцируемость f в точке x влечет обычную $(n-1)$–кратную дифференцируемость f в этой точке.

Теорема 12. *Пусть E, F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ n раз K–субдифференцируемо в точке x, то f дифференцируемо $(n-1)$ раз в обычном смысле в этой точке. В частности, если f n раз K–субдифференцируемо в $U(x)$, то*

$$\partial^n_K f(x) = \partial_K\Big(f^{(n-1)}\Big)(x). \tag{23}$$

Теорема 13. *Пусть E, F — нормированные конусы, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ $(n-1)$ раз K–субдифференцируемо в точке x и n раз K–субдифференцируемо в проколотой окрестности $\dot{U}(x)$. Если отображение $\partial^n_K f : E \supset \supset \dot{U}(x) \to L^n_K(E;F)$ субнепрерывно в точке x ($\partial^n_K f \in C_{sub}(x)$), т. е. при некотором $\mathcal{D}^n_{f,x} \in L^n_K(E;F)$ верно:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow (\partial^n_K f(x+h) \preceq \mathcal{D}^n_{f,x} + Y,\ \textit{где}\ \|Y\| < \varepsilon),$$

то f K–субдифференцируемо n раз в точке x, причем $\partial^n_K f(x) \preceq \mathcal{D}^n_{f,x}$.

Определение 14. Будем говорить, что $f : E \supset U(x) \to F$ — *субгладкое отображение n–го порядка* (или *C^n–субгладкое отображение*) в точке x, и писать $f \in C^n_{sub}(x)$, если $\partial^n_K f \in C_{sub}(x)$. В случае $n = 0$ мы отождествляем классы $C^0_{sub}(x)$ и $C_{sub}(x)$.

Перенесем на случай высших порядков *достаточное условие n–кратной K–субдифференцируемости* в терминах частных K–субдифференциалов.

Теорема 14. *Пусть $E_1, ..., E_n, F$ — нормированные конусы, $f : E_1 \times ... \times E_m \supset U(x) \to F$. Тогда*

$$(f \in C^n_{sub}(x)) \Longleftarrow \left(\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}}\right)_K \in C_{sub}(x),\ (\forall\ 1 \le i_1 \le ... \le i_n \le m)\right) \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \Big(\exists\ \partial^n_K f(x)\Big).$$

Рассмотрим формулу Тейлора в форме Пеано лишь в случае отображений в *нормированных пространствах.* В этом случае только последнее слагаемое в многочлене Тейлора будет многозначным, что существенно упрощает применения.

Теорема 15. *Пусть E, F — нормированные пространства, $f : E \supset U(x) \to F$. Если f K–субдифференцируемо n раз в точке x, то:*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\partial^n_K f(x) \cdot (h)^n = o(\|h\|^n). \tag{24}$$

Если при этом f K–субдифференцируемо n раз в окрестности x, то равенство (24) принимает вид:

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\partial_K\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)h = o(\|h\|^n).$$

Следствие 1. *В условиях теоремы 15 справедлива оценка:*

$$\left[f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\right]\in\left[\frac{1}{n!}\partial_K^n f(x)(h)^n+o(\|h\|^n)\right]. \tag{25}$$

Если при этом f K–субдифференцируемо n раз в окрестности x, то оценка (25) принимает вид:

$$\left[f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\right]\in\frac{1}{n!}\partial_K\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)h+o(\|h\|^n).$$

Перейдем к *условиям экстремума в терминах K–субдифференциалов.* Начнем с K–аналога леммы Ферма в традиционной для выпуклого анализа форме.

Теорема 16. *Пусть E — нормированное пространство,*
$f: E\supset U(x)\to\mathbb{R}$. Если функционал f достигает локального экстремума в точке x и K–субдифференцируем в этой точке, то $\forall h\in E$:

$$(0\in\partial_K^s f(x)h)\Longleftrightarrow\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)\le 0\le\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)\right).^1 \tag{26}$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ условие (26) принимает вид конечной системы двойных неравенств:

$$\left\{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\le 0\le\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\right\}_{i=\overline{1,m}}. \tag{27}$$

Наконец, в случае $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ система (27) сводится к неравенству:

$$\underline{\frac{df}{dx}}(x)\le 0\le\overline{\frac{df}{dx}}(x).$$

Рассмотрим теперь условия 2–го порядка, предварительно введя необходимый аппарат теории квадратичных K–форм.

Определение 15. Пусть E — выпуклый конус. Отображение $B: E\longrightarrow\mathbb{R}_K$ назовем *квадратичной K–формой*, если:

$$B(\lambda h)=\lambda^2\cdot B(h)\quad(\forall h\in E,\ \forall\lambda\ge 0).$$

K–форма B *неотрицательна* ($B\ge 0$), если

$$\max B(h)\ge 0\quad(\forall\ h\in E).$$

K–форма B *положительна* ($B>0$), если

$$\min B(h)>0\quad(\forall\ h\in E\setminus\{0\}).$$

---

[1] Здесь $\partial_K^s f(x)h=[\min(\underline{\partial}f(x,h),-\overline{\partial}f(x,-h));\max(\overline{\partial}f(x,h),-\underline{\partial}f(x,-h))]$ – так называемый *симметризованный* K–субдифференциал функционала f (см. [2])

В случае, когда E — нормированный конус, скажем, что K–форма B *положительно определена* ($B \gg 0$), если для некоторой положительной константы γ^2 :

$$\min B(h) \geq \gamma^2 \|h\|^2 \quad (\forall\, h \in E).$$

Условия $B \leq 0$, $B < 0$ и $B \ll 0$ вводятся, как обычно, с помощью перехода к K–форме $(-B)$.

Теорема 17. *Пусть E — нормированное пространство. Если функционал $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$ дважды K–субдифференцируем в окрестности точки x, то $\forall h \in E$, $\|h\| = 1$, выполнено равенство:*

$$(\partial_K^2) f(x)(h)^2 = \left[\frac{\partial}{\underline{\partial h}}(f'(\cdot)h); \frac{\overline{\partial}}{\partial h}(f'(\cdot)h)\right] =: \left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial h^2}}(x); \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial h^2}(x)\right].$$

Приведем необходимое условие второго порядка для минимума.

Теорема 18. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \longrightarrow \mathbb{R}$. Если функционал f достигает локального минимума в точке x и дважды K–субдифференцируем в окрестности этой точки, то $\forall h \in E$, $\|h\| = 1$, выполнено неравенство:*

$$\Big((\partial_K^2)^s f(x)(h)^2 \geq 0\Big) \Longleftrightarrow \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial h^2}(x)(h)^2 \geq 0\right). \tag{28}$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ неравенство (28) принимает вид условия неотрицательности максимума m–мерного отрезка, соединяющего "нижнюю" и "верхнюю" матрицы Гессе для f:

$$\max\left[\underline{J}^2 f(x)(h)^2 = \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial x_i \partial x_j}}(x)\right)(h)^2; \overline{J}^2 f(x)(h)^2 = \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial x_i \partial x_j}\right)(x)(h)^2\right] \geq 0. \tag{29}$$

Обозначая $J_1^2 f(x), ..., J_{2^m}^2 f(x)$ — вершины матричного отрезка, условие (29) можно переписать в более простой форме:

$$\max_{1 \leq k \leq 2^m} \left(J_k^2 f(x)(h)^2\right) \geq 0 \quad (\forall\, h \in \mathbb{R}^m). \tag{30}$$

Наконец, в случае $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ матричное неравенство (30) превращается в скалярное неравенство:

$$\frac{\overline{d^2 f}}{dx^2}(x) \geq 0.$$

Выпишем теперь достаточного условие локального минимума в терминах второго K–субдифференциала. Заметим, что вывод условия (32) в нем опирается на *конечномерную форму теоремы Крейна–Мильмана.*

Теорема 19. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \longrightarrow \mathbb{R}$, функционал f дважды K–субдифференцируем в точке x, причем $f'(x) = 0$. Если выполнено условие:*

$$\partial_K^2 f(x) \gg 0, \tag{31}$$

то f достигает строгого локального минимума в точке x.

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ неравенство (31) принимает вид условия положительной определенности набора "крайних" точек m-мерного отрезка $[\underline{J}^2 f(x); \overline{J}^2 f(x)]$:

$$J_1^2 f(x) \gg 0;\ J_2^2 f(x) \gg 0; ...; J_{2^m}^2 f(x) \gg 0. \tag{32}$$

Наконец, в случае $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ система матричных неравенств (32) сводится к одному скалярному неравенству:

$$\underline{\frac{d^2 f}{dx^2}}(x) > 0.$$

Доказательство. По K–лемме Ферма $0 \in \partial_K{}^s f(x)$, при этом если существует $\partial_K^2 f(x)$, то существует f' в окрестности точки x, т.е. приходим к условию $f'(x) = 0$.

По обобщенной формуле Тейлора второго порядка для любого достаточно малого h получаем: $f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{1}{2}\partial^2 f(x)(h)^2 = o(\|h\|^2)$, откуда при достаточно малых $\|h\|$ верно:

$$0 \leq f(x+h) - f(x) \in \frac{1}{2}\partial^2 f(x)(h)^2 + o(\|h\|^2). \tag{33}$$

Выберем ε настолько малым, чтобы при $\|h\| < \varepsilon$ величина $o(\|h\|^2)$ в равенстве (33) удовлетворяла условию $\|o(\|h\|^2)\| < \dfrac{\gamma^2}{2}\|h\|^2$. Тогда при $\|h\| < \varepsilon$:

$$\left(\inf \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(th)^2 + o(\|th\|)^2\right) > \frac{\gamma^2}{2}\|h\|^2 > 0. \tag{34}$$

Из формулы Тейлора, как уже отмечалось, вытекает включение

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)h \in \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(h)^2 + o(\|h\|^2).$$

Отсюда, в силу (34), получаем

$$f(x+h) - f(x) \geq \gamma^2\|h\|^2 > 0$$

при достаточно малом $\|h\| > 0$, т.е. f достигает строгого локального минимума в точке x. $\square$

4. Второй K–субдифференциал основного вариационного функционала.

Обобщим классическую форму второй вариации на случай субгладких интегрантов класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$. При этом, как и в случае $\partial_K\Phi$, точное равенство переходит в оценку $\partial^2_K\Phi$.

Теорема 20. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f\in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y\in C^1[a;b]). \tag{35}$$

Функционал (35) *дважды K–субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причём справедлива оценка:*

$$\begin{aligned}\partial^2_K\Phi(y)(h)^2\subset &\Bigg[\int\limits_a^b\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')hh'\right)dx;\\ &\int\limits_a^b\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')hh'\right)dx\Bigg]+\\ &+\Bigg[\int\limits_a^b\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')hh'+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx;\\ &\int\limits_a^b\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')hh'+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx\Bigg].\end{aligned} \tag{36}$$

Здесь, как и при оценке $\partial_K\Phi$, мы также выделим случай интегранта, образованного внешней композицией субгладкой функции (теперь уже класса C^2_{sub}) с гладкой.

Теорема 21. *Пусть*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (\varphi\in C^2_{sub}(\mathbb{R}), f\in C^2(\mathbb{R}^3), y\in C^1[a;b]).$$

Тогда Φ дважды K–субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причём справедлива оценка (в краткой записи):

$$\partial^2_K\Phi(y)(h)^2\subset\int\limits_a^b\varphi'(f)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}h+\frac{\partial}{\partial z}h'\right)^2\cdot f dx+$$

$$+\left[\int\limits_a^b\underline{\varphi''}(f)\cdot\left((f_y)^2h^2+f_yzhh'\right)dx;\int\limits_a^b\overline{\varphi''}(f)\cdot\left((f_y)^2h^2+f_yzhh'\right)dx\right]+$$

$$+\left[\int_a^b \underline{\varphi''}(f)\cdot\left(f_y zhh' + (f_z)^2 h'^2\right)dx; \int_a^b \overline{\varphi''}(f)\cdot\left(f_y zhh' + (f_z)^2 h'^2\right)dx\right]. \quad (37)$$

Доказательство. Непосредственные вычисления дают:

$$\underline{\varphi}(f)_{y^2} = \underline{\varphi}''\cdot(f_y)^2 + \varphi'(f)\cdot f_{y^2};\ \ \overline{\varphi}(f)_{y^2} = \overline{\varphi''}(f)\cdot(f_y)^2 + \varphi'(f)\cdot f_{y^2};$$

$$\underline{\varphi}(f)_{z^2} = \underline{\varphi}''\cdot(f_z)^2 + \varphi'(f)\cdot f_{z^2};\ \ \overline{\varphi}(f)_{z^2} = \overline{\varphi''}(f)\cdot(f_z)^2 + \varphi'(f)\cdot f_{z^2};$$

$$\underline{\varphi}(f)_{yz} = \underline{\varphi}''\cdot f_y\cdot f_z + \varphi'(f)\cdot f_{yz};\ \ \overline{\varphi}(f)_{yz} = \overline{\varphi''}(f)\cdot f_y\cdot f_z + \varphi'(f)\cdot f_{yz}.$$

Подстановка этих величин в (36) приводит, после преобразований, к оценке (37). □

Рассмотрим, в качестве конкретного примера, класс интегрантов вида $f(x,y,y')\cdot|f(x,y,y')|$.

Теорема 22. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x,y,y')\cdot|f(x,y,y')|dx \quad (f\in C^2(\mathbb{R}^3), y\in C^1[a;b]).$$

Тогда справедлива оценка (в краткой записи):

$$\partial_K^2\Phi(y)(h)^2 \subset \int_a^b |f|\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}h + \frac{\partial}{\partial y}h'\right)^2\cdot f dx + 2\int_{(f\neq 0)} sign f\cdot\left(f_y\cdot h + f_z\cdot h'\right)^2\cdot dx+$$

$$+\left[-2\int_{(f=0)}\left(f_{y^2}h^2 + f_{yz}hh'\right)dx;\ +2\int_{(f=0)}\left(f_{y^2}h^2 + f_{yz}hh'\right)dx\right]+$$

$$+\left[-2\int_{(f=0)}\left(f_{yz}hh' + f_{z^2}h'^2\right)dx;\ +2\int_{(f=0)}\left(f_{yz}hh' + f_{z^2}h'^2\right)dx\right]. \quad (38)$$

В частности, если $mes(f(x,y,y')=0)=0$, то оценка (38) переходит в точное равенство:

$$\partial_K^2\Phi(y)(h)^2 = \Phi''(y)(h)^2 = \int_a^b |f|\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y}h + \frac{\partial}{\partial z}h'\right)^2\cdot f dx+$$

$$+2\int_a^b sign\ f\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\right)^2\cdot f dx.$$

В заключение приведём простейший пример.

Пример 5. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b y' \cdot |y'| dx.$$

Здесь применение оценки (38) приводит к точному равенству:

$$\partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 = \Phi''(y)(h)^2 = 2 \int\limits_{(y' \neq 0)} (sign\ y') h'^2 dx = 2 \int\limits_{(y'>0)} h'^2 dx - 2 \int\limits_{(y'<0)} h'^2 dx.$$

В частности, если $mes(y' = 0) = 0$, получаем:

$$\partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 = \Phi_K(y)(h)^2 = 2 \int\limits_a^b (sign\ y') \cdot h'^2 dx.$$

Обобщим классическое необходимое условие Лежандра для минимума основного вариационного функционала на класс интегрантов второго порядка субгладкости. Как и в классическом случае, базовым является соответствующее условие неотрицательности квадратичного функционала.

Теорема 23. *Рассмотрим квадратичный функционал*

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b \left[P(x) h'^2 + Q(x) h^2 \right] dx \quad (h \in C^1[a;b], h(a) = h(b) = 0).$$

Если коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ ограничены, $P(x)$ полунепрерывен сверху всюду на $[a;b]$, и $\widetilde{\Phi}(h) \geq 0$ при всех допустимых h, то

$$P(x) \geq 0 \ \text{ всюду на } [a;b].$$

Доказательство. Допустим противное: $(x_0) < 0$ в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$. Тогда, в силу полунепрерывности сверху в точке x_0, $P(x) < 0$ в некоторой δ–окрестности x_0. Положим, следуя классической схеме:

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{\delta} \left(1 + \dfrac{x - x_0}{\delta} \right) & \text{при } \ x_0 - \delta \leq x \leq x_0; \\ \sqrt{\delta} \left(1 - \dfrac{x - x_0}{\delta} \right) & \text{при } \ x_0 \leq x \leq x_0 + \delta; \\ \quad 0 \quad \text{приостальных } x \in [a;b]. \end{cases}.$$

Стандартная выкладка приводит к равенству

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} Q(x) h^2 dx + \int\limits_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} P(x) h'^2 dx =: \widetilde{\Phi}_Q(h) + \widetilde{\Phi}_P(h). \tag{39}$$

Оценим оба слагаемых в (39).

а) В силу ограниченности Q,

$$|\widetilde{\Phi}_Q(h)| \le M_Q \cdot \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h^2 dx = 2M_Q \cdot \delta. \tag{40}$$

б) В силу теоремы Вейерштрасса для полунепрерывных сверху функций, $P(x) \le -m_P < 0$ при $x \in [x_0-\delta;\, x_0+\delta]$. Отсюда

$$\widetilde{\Phi}_P(h) \le -m_P \cdot \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h^2 dx = -m_P \cdot \frac{1}{\delta} \cdot 2\delta = -\frac{m_P}{2}. \tag{41}$$

Из (40) — (41) получаем:

$$\widetilde{\Phi}(h) \le -\frac{m_P}{2} + 2M_Q \cdot \delta^2 < 0$$

при достаточно малых $\delta > 0$, что противоречит условию. □

Из теоремы 23, общей оценки $\partial_K^2(\Phi)$ (теорема 20) и общего необходимого условия минимума в терминах второго K–субдифференциала (теорема 18) нетрудно получить необходимое условие второго порядка для минимума вариационного функционала с интегрантом из класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 24. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{42}$$

Если функционал (42) *достигает локального минимума в точке* $y \in C^1[a;b]$, *то*

$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') \ge 0 \ \text{ всюду на [a;b].} \tag{43}$$

Доказательство. Применим по формуле (36) оценки $\partial_K^2\Phi(y)(h)^2$ интегрирование по частям к слагаемым под интегралами, содержащим множитель hh', и преобразуем полученную сумму отрезков как выпуклую оболочку крайних точек:

$$\partial_K^2\Phi(y)(h)^2 \subset \Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')\right)\right)h^2dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')\right)\right)h^2dx\Bigg] +$$

$$+\Bigg[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)h^2\right)dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)h^2\right)dx\Bigg] =$$

$$= co\Bigg\{\int\limits_a^b \Bigg[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 + \Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') -$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)\Bigg)h^2\Bigg]dx; \int\limits_a^b \Bigg[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')'h^2 +$$

$$+\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)\right)h^2\Bigg]dx;$$

$$\int\limits_a^b \Bigg[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 + \Bigg(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') -$$

$$-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)\Bigg)h^2\Bigg]dx; \int\limits_a^b \Bigg[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 +$$

$$+\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)\right)h^2\Bigg]dx\Bigg\} =:$$

$$=: co\left\{I_1(h),\, I_2(h),\, I_3(h),\, I_4(h)\right\}. \tag{44}$$

Далее, по необходимому условию второго порядка для минимума (теорема 18),

$$\max\, \partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 \ge 0 \quad (\forall\, h \in C^1[a;b],\ h(a) = h(b) = 0).$$

Из оценки (44) и последнего условия получаем:

$$\max\, \{I_1(h),\, I_2(h),\, I_3(h),\, I_4(h)\} \ge 0. \tag{45}$$

Обозначим теперь:

$$P(x) = \max\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y'),\, \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\right) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y');$$

$$Q(x) = \max\Bigg[\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)\right),$$

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)\right),$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right),$$

$$\left.\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right)\right].$$

Положим $I(h) = \int\limits_a^b (P(x)h'^2 + Q(x)h^2)dx$. Тогда из неравенств $I_k(h) \le I(h)$ $k = \overline{1,4}$ и неравенства (45) следует $I(h) \ge 0$ при любом $h \in C^1[a;b]$ $h(a) = h(b) = 0$. Применяя теперь к $I(h)$ теорему 23, получим:

$$P(x) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') \ge 0 \quad (a \le x \le b).$$

□

Приведём конкретный пример с ещё одним вариантом модуляции гармонического осциллятора.

Пример 6. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} (y' \cdot |y'| - y^2)dx \quad (y \in C^1[0;\frac{\pi}{2}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1).$$

Ограничимся рассмотрением функций $y \in C^1[0;T]$, для которых множество стационарных точек имеет нулевую меру: $mes(y' = 0) = 0$. Для таких функций уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{ll} y'' + y = 0 & \text{при } y' > 0 \\ (\text{почти всюду на } [0;T]) ; & \\ y'' - y = 0 & \text{при } y' < 0. \end{array}\right. \tag{46}$$

Далее,

$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') = \begin{cases} 2, & y' \ge 0 \\ -2, & y' < 0. \end{cases}$$

Таким образом, ни одна немонотонная функция не удовлетворяет ни условию (43), ни сопряженному неравенству для максимума:

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') \le 0 \text{ почти всюду на [a;b].}$$

Среди монотонных функций (при данных граничных условиях) уравнению (46) удовлетворяют функции $y = \sin x$ и $y = sh\, x / sh\, \frac{\pi}{2}$.

Обобщим классические условия Лежандра–Якоби на случай квадратичных функционалов с ограниченными и полунепрерывными снизу коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$. Заметим, что понятие сопряжённой точки переносится на этот случай без изменений.

Теорема 25. *Рассмотрим квадратичный функционал*

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b \left(P(x)h'^2 + Q(x)h^2\right)dx \quad (h \in C^1[a;b]), \tag{47}$$

коэффициенты которого $P(x)$ и $Q(x)$ ограничены и полунепрерывны снизу на $[a;b]$. Если для функционала (47) выполнены условия (i) $P(x) > 0$ *при* $a \le x \le b$*;*

(ii) *отрезок $(a;b]$ не содержит точек, сопряженных с a; то он положительно определён в $C^1[a;b]$.*

Доказательство. Следуя стандартной схеме доказательства для гладкого случая, добавим к выражению, стоящему под знаком интеграла в (47) величину вида $d(wh^2)$; при этом значение интеграла не изменится. Если $w(x)$ удовлетворяет уравнению

$$P(Q + w') = w^2, \tag{48}$$

то функционал (47) приводится к виду:

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b P(h' + \frac{w}{P}h)^2 dx.$$

Стандартным образом проверяется, что $\widetilde{\Phi}(h) > 0$ при $h \neq 0$, с учетом того, что из полунепрерывности P снизу на $[a;b]$ следует $P(x) \geq \gamma^2 > 0$ и ограниченность $(1/P(x))$. Отсюда в силу квадратичности функционала $\widetilde{\Phi}$, следует его положительная определенность.

Остается показать, что уравнение Риккати (48) имеет решение. Стандартными преобразованиями оно приводится к уравнению

$$-\frac{d}{dx}(Pu') + Qu = 0,$$

т. е. к уравнению Якоби для функционала (47). По условию, это уравнение имеет решение $u(x)$, которое не обращается в нуль при $a < x \le b$. Тогда существует и решение уравнения (48), определенное равенством $w = -Pu'u^{-1}$. Итак, функционал (47) положительно определен на $C^1[a;b]$.

□

Теперь перейдём к центральному результату.

Теорема 26. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f\in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y\in C^1[a;b], y(a)=y_a, y(b)=y_b). \tag{49}$$

Предположим, что y — субэкстремаль функционала (49)*, т. е. почти всюду удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа. Пусть вдоль субэкстремали y выполнены следующие условия:*

(i) $\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0$ *при $a\le x\le b$ ("нижнее" усиленное условие Лежандра);*

(ii) *для каждого из четырёх уравнений Якоби, соответствующих вершинам двумерного матричного отрезка $[\underline{J}^2 f(x);\ \overline{J}^2 f(x)]$:*

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right]-\left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h=0; \tag{50}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right]-\left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h=0; \tag{51}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right]-\left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h=0; \tag{52}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right]-\left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h=0; \tag{53}$$

$$(h(a)=0,\ h'(a)=1) \tag{54}$$

выполнены условия Якоби отсутствия сопряжённых точек.
Тогда функционал (49) *достигает строгого локального минимума в точке y.*

Доказательство. Воспользуемся оценкой для $\partial^2_K\Phi(y)(h)^2$, полученной в доказательстве теоремы 24:

$$\partial^2_K\Phi(y)(h)^2\subset co\Bigg\{\int\limits_a^b\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2+\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\right)\right)h^2\right]dx;$$

$$\int\limits_a^b\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2+\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\right)\right)h^2\right]dx;$$

$$\int\limits_a^b \Big[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 + \Big(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\Big(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}} + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')\Big)\Big)h^2\Big]dx;$$

$$\int\limits_a^b \Big[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 + \Big(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\Big(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}} + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')\Big)\Big)h^2\Big]dx\Big\} =:$$

$$=: co\Big\{J_1(h),\ J_2(h),\ J_3(h),\ J_4(h)\Big\}. \tag{55}$$

Проведем оценку каждого из интегралов $J_k(h)$, $k = \overline{1,4}$, пользуясь результатом теоремы 25.

a) Положим

$$P_1(x) = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y');\ Q_1(x) = \Big(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\Big(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}} + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')\Big)\Big).$$

Тогда уравнение Якоби для квадратичного функционала

$$J_1(h) = \int\limits_a^b [P_1(x)h'^2 + Q_1(x)h^2]dx$$

примет вид (50). Таким образом, если выполнено условие Якоби для уравнения (50) и усиленное условие Лежандра

$$P_1(x) = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') > 0 \quad (a \le x \le b),$$

то квадратичный функционал $J_1(h)$ положительно определен:

$$J_1(h) \ge \gamma_1^2 \cdot \|h\|^2 \quad (\forall h \in C^1[a;b],\ h(a) = h(b) = 0).$$

b) Аналогичным образом, обозначая через $P_k(x)$ и $Q_k(x)$, соответственно, коэффициенты при h'^2 и h^2 для функционалов

$$J_k(h) = \int\limits_a^b [P_k(x)h'^2 + Q_k(x)h^2]dx \quad (k = 2,3,4),$$

мы приходим к условию Якоби для уравнений (51)–(53) и усиленным условиям Лежандра вида:

$$P_2(x) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') > 0;$$

$$P_3(x) = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') > 0; \quad P_4(x) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') > 0 \quad (a \le x \le b).$$

Отсюда вытекает положительная определенность квадратичных функционалов $J_k(h)$, $k = 2,3,4:$

$$J_2(h) \ge \gamma_2^2 \cdot \|h\|^2; \quad J_3(h) \ge \gamma_3^2 \cdot \|h\|^2; \quad J_4(h) \ge \gamma_4^2 \cdot \|h\|^2 \quad (\forall h \in C^1[a;b],\ h(a) = h(b) = 0).$$

Таким образом, обозначая $\gamma^2 = \min\{\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, \gamma_4^2\} > 0$, приходим к следующему итогу.

При выполнении Якоби для каждого из уравнений (50)–(53) и усиленного условия Лежандра в форме

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') > 0 \quad (a \leq x \leq b),$$

выполнены неравенства

$$J_k(h) \geq \gamma^2 \cdot \|h\|^2.$$

Но тогда из оценки (55) вытекает неравенство $\partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 \geq \gamma^2 \cdot \|h\|^2$, т.е. $\partial_K^2 \Phi(y)$ также положительно определен. Следовательно, в силу общей теоремы 19, Φ достигает строгого локального минимума в точке y. □

Замечание 7. При переходе к достаточным условиям максимума в теореме 1, условие (i) заменяется на условие:

$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') < 0 \text{ при } a \leq x \leq b.$$

Условие (ii) остаётся без изменения.

В заключении рассмотрим пример применения теоремы 1 к ещё одному варианту "модулирования" гармонического осциллятора.

Пример 7. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (py'^2 - qy|y|)dx, \tag{56}$$

$$\left(y \in C^1\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right],\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\sqrt{\frac{q}{p}} \cdot \frac{\pi}{2}\right),\ y\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -sh\left(\sqrt{\frac{q}{p}} \cdot \frac{\pi}{2}\right),\ p > 0,\ q > 0\right).$$

Здесь уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} py'' + qy = 0 \ \ (y \geq 0); \\ py'' - qy = 0 \ \ (y \leq 0). \end{array}\right.$$

Таким образом, функция $y = \sin\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\, x\right)$ $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$, $y = -sh\left(\sqrt{\frac{q}{p}}\, x\right)$ $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0)$, является субэкстремалью функционала (56); при этом $y \in C^2[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

"Нижнее" условие Лежандра для субэкстремали y выполнено:

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y') = 2p > 0.$$

"Нижнее" уравнение Якоби (50) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} ph'' + qh = 0\,(y' \geq 0); \\ \Big(h(-\frac{\pi}{2}) = 0,\ h'(-\frac{\pi}{2}) = 1\Big) \\ ph'' - qh = 0\,(y' \leq 0). \end{array}\right.$$

Отсюда

$$h(x) = \begin{cases} \sin\left(\sqrt{\dfrac{q}{p}}\,x\right)\cdot ch\,\frac{\pi}{2} + \cos\left(\sqrt{\dfrac{q}{p}}x\right)\cdot sh\,\frac{\pi}{2} & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}); \\ sh\left(\left(\sqrt{\dfrac{q}{p}}\,x\right) + \frac{\pi}{2}\right) & (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0), \end{cases}$$

и условие Якоби для уравнения (50), как легко видеть, выполнено. Условие Якоби для уравнений (50)–(54) проверяется аналогично.

Таким образом, вариационный функционал (56) достигает на субэкстремали

$$y = \begin{cases} \sin\left(\sqrt{\dfrac{q}{p}}\,x\right), & (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}); \\ -sh\left(\sqrt{\dfrac{q}{p}}\,x\right), & (-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0); \end{cases}$$

строгого локального минимума.

Автор выражает признательность профессору И. В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] *Басаева Е. К.* О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов // Владикавказский математический журнал. – 2006. – *8*, № 4. – С. 6-12.

[2] *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2014. (В печати).

[3] *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2009. — *34*. — С. 121–138.

[4] *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых конусах // Украинский математический вестник. — 2013. —*10*, № 4. — С. 532–558.

[5] *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2013. —*49.* —С. 99-131.

[6] *Решетняк Ю. Г.* Условия экстремума для одного класса функционалов вариационного исчисления с негладким интегрантом // Сибирский математический журнал. — 1987. — *28*, № 6. — С. 90–101.

[7] *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Данжуа-Юнг-Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрированияю // Труды ИПММ НАН Украины. – 2010. –Том 20. –С. 168–176.

[8] *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ //Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — 1987. — *14.* — С. 5–101.

[9] *Халилова З. И.* *K*-сублинейные многозначные операторы и их свойства // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". – 2011. — *24 (63)* , № 3. — С. 110–122.

[10] *Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам // Динамические системы. – 2013. — *3(31)* , № 1-2. — С. 115-134.

[11] *Халилова З. И.* Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки". – 2012. — *25 (64)* , № 2. — С. 140–160.

[12] Orlov I. V., Stonyakin F. S. Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15 (1). – P. 74 – 90.

[13] *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационные задачи. – СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2000. – 136 с.

[14] *Дмитрук А. В.* Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2012. – 172 с.

[15] *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — Москва: Мир, 1973. — 472 с.

[16] *Ekeland I., Temam R.* Convex analysis and variational problems. – North – holland publishing company – Amsterdam, Oxford, American elservier publishing company, inc. – New York, INC.-NEW YORK, 1976. –400 p.

Екстремальні варіаційні задачі із субгладким інтегрантом

У роботі розглянуті додатки теорії компактних субдіференціалів до варіаційних задач із субгладкім інтегрантом. Отримано аналоги класичних умов Лежандра і Лежандра – Якобі. Розглянуті приклади.

Ключові слова: субгладкий інтегрант, компактний субдіференціал, включення Ейлера – Лагранжа, узагальнені умови Лежандра – Якобі

Extreme variational problems with subsmooth integrand

Subdifferentials as a tool of nonsmooth analysis, have been recognized for a long time in mathematics. Beginning with the classical subdifferential of a convex functional there appeared and there continue to appear new definitions

of subdifferentials designed for application to different classes of extremal and other nonsmooth problems.

Based on the definition of a compact subdifferential (or K–subdifferential) for maps of the real scalar argument introduced in the works of Orlov I.V. and Stonyakin F.S. to investigate the problems of integration of the vector integration, K–subdifferential is a compact convex set and when the set is reduced to a point, it reduces to the usual differential. K–subdifferential enable to obtain the significant results in the theory of the Bochner integral. Theory of the first order K–subdifferentials was built in the works by Orlov I. V., Stonyakin F. S., Khalilova Z. I. and includes applications to extreme variational problems with nonsmooth integrand.

The present work is devoted to a detailed consideration of the application of K–subdifferential calculus to research of extreme variational problems with nonsmooth integrand. The nonsmooth analogues of the main variational lemma, Euler-Lagrange equation, simple and strengthened Legendre condition and the Legendre-Jacobi conditions for basic variational functional are obtained. The work consists of four sections.

The first section provides a brief overview of the theory of the first order K–subdifferentials and contains the basic concepts of the theory of normed cones. The second section provides a brief overview of the application of compact subdifferentials to variational functionals with nonsmooth integrand. Some examples are considered. The third section contains the theory of second-order compact subdifferentials, the basic definitions and theorems are given.

Finally, the fourth section is devoted to the application of theory of second-order K–subdifferentials. An estimation of the second K–subdifferential of basic variational functional is obtained. Analogues of classical conditions Legendre and Legendre – Jacobi are obtained. A corresponding result is considered.

Theorem 1. *Let's consider the variational functional*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \qquad (*)$$

Let's assume that y is subextremal of the functional (*), i.e. y almost everywhere satisfies the Euler – Lagrange equation. Suppose that the following conditions satisfy along the subextremal y:

(i) $\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') > 0$ *at $a \leq x \leq b$ ("the lower" strengthened Legendre condition);*

(ii) *for each of the four Jacobi equations corresponding to the vertices of the two-dimensional matrix segment* $[\underline{J}^2 f(x); \overline{J}^2 f(x)]$*:*

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0;$$
$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0;$$
$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0;$$
$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0;$$
$$(h(a) = 0,\ h'(a) = 1)$$

take place Jacobi condition of the absence of adjoint points.
Then the functional (*) *attains a strict local minimum at the point* y.

Keywords: subsmooth integrand, compact subdifferential, the Euler – Lagrange inclusion, the generalized Legendre – Jacobi conditions.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 154–176.

УДК 517.98: 517.97

А. В. Цыганкова

ИСКЛЮЧЕНИЕ УСЛОВИЯ ЯКОБИ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С НЕГЛАДКИМ ИНТЕГРАНТОМ

Метод исключения уравнения и условия Якоби, разработанный недавно в одномерном и многомерном случаях для гладкого интегранта, перенесён на случай субгладкого интегранта в одномерных вариационных задачах. В этом случае вариационный функционал не является дважды дифференцируемым по Фреше, что приводит нас к технике негладкого анализа и компактных субдифференциалов.

Ключевые слова: вариационный функционал, субгладкий интегрант, уравнение Якоби, "нижнее" усиленное условие Лежандра, локальный экстремум.

Введение.

Классическая схема исследования на локальный экстремум одномерного вариационного функционала, как хорошо известно [1]-[2], предполагает решение уравнения Эйлера–Лагранжа и проверку для найденной экстремали усиленного условия Лежандра и условия Якоби отсутствия сопряженных точек для уравнения Якоби. Последний шаг является наиболее трудоемким; при этом требуется решить достаточно сложное уравнение для получения сравнительно небольшой информации о необращении в нуль его решения.

В многочисленных работах (см. например, [3]-[9]) исследовались условия, позволяющие исключить уравнение Якоби из схемы исследования на экстремум в одномерных вариационных задачах. Как правило, это дополнительные условия на функцию эксцесса Вейерштрасса, сами по себе также не очень простые. Недавно в работах Орлова И. В. ([10], [11]) были получены достаточные условия другого типа. Показано, что в одном из двух теоретически возможных случаев, определяемых формой интегранта на экстремали, усиленное условие Лежандра является достаточным условием экстремума без каких-либо дополнительных ограничений, во втором же возможном случае возникает дополнительное ограничение на длину промежутка. Эти результаты в наших работах обобщены на многомерный случай ([12], [13]).

Целью настоящей работы является обобщение указанных результатов в одномерной ситуации на случай C^2-субгладкого интегранта. В этом случае вариационный функционал не является дважды дифференцируемым по Фреше, что приводит нас к технике негладкого анализа и определённому типу субдифференциалов.

Субдифференциалы, как инструмент негладкого анализа, достаточно давно получили признание в математике. Начиная с классического субдифференциала выпуклого функционала (описанного в известной монографии Р. Рокафеллара [14]) появились и продолжают появляться новые определения субдифференциалов, рассчитанные на применение к различным классам экстремальных и других негладких задач (такие, как известный субдифференциал Ф. Кларка [15], субдифференциал Б. Н. Пшеничного [16] и многие другие (см. напр. [17], [18])). В большинстве своем эти определения с отображениями в евклидовы пространства, но имеются и более общие.

Мы опираемся на теорию компактных субдифференциалов или K-субдифференциалов. В случае скалярного аргумента понятие K-субдифференциала было введено в работах ([19], [20], [21]) и оказалось полезным инструментом при исследовании проблемы Радона-Никодима для интеграла Бохнера. Недавно в работах ([22]-[24]) понятие K-субдифференциала было перенесено на случай отображений в банаховых пространствах. В частности, рассмотрены приложения к вариационным функционалам с субгладким интегрантом и найдены для них выпуклые аналоги уравнения Эйлера–Лагранжа, условия Лежандра и условия Лежандра–Якоби. Эти результаты в обзорном порядке изложены в первом разделе нашей работы.

Опираясь на результаты первого раздела и технику исключения условия Якоби, развитую нами ранеее, во втором, основном разделе работы мы переносим результаты об исключении условия Якоби в экстремальных вариационных задачах на случай C^2-субгладкого (и, как следствие, дважды K-субдифференцируемого) интегранта. Рассмотрен пример, демонстрирующий содержательность основного результата.

1. Компактные субдифференциалы вариационных функционалов (обзор).

Вначале мы приведём основные понятия теории K-субдифференциалов, построенной в последние годы в работах И. В. Орлова, Ф. С. Стонякина и З. И. Халиловой ([19]-[27]). Для простоты, изложение ведётся в случае банаховых пространств.

Топологической базой теории служит понятие K-предела убывающей системы замкнутых выпуклых множеств в E, далее $U(0)$ — окрестность нуля в пространстве E.

Определение 1. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ – убывающая по вложению при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств вещественного банахова пространства E с непустым пересечением B. Множество B назовём K-пределом системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$:

$$B = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B_\delta,$$

если множество B компактно, и

$$\forall\, U(0) \subset E\ \exists\, \delta_U > 0 :\ (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B_\delta \subset B + U).$$

Таким образом, определение K-предела сводится к равномерному топологическому стягиванию множеств B_δ к их непустому компактному пересечению. Последующее определение K-субдифференциала состоит в вычислении K-предела замкнутых выпуклых оболочек разностных отношений некоторого отображения по выбранному направлению. Далее E, F — вещественные банаховы пространства, отображение $f : E \to F$ определено в некоторой окрестности $x + U(0)$ точки $x \in E$, $h \in \dot{U}(0) = U(0)\backslash\{0\}$ — выбранное направление.

Определение 2. K-субдифференциал отображения f в точке x по направлению h есть K-предел

$$\partial_K f(x,h) = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co} \left\{ \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \,\middle|\, 0 < t < \delta, t \neq 0 \right\}. \tag{1}$$

Очевидно, K-субдифференциал по направлению является обобщением обычного дифференциала по направлению. Его основные свойства рассмотрены в [27]. Переход к определению сильного K-субдифференциала в основном следует классической схеме Адамара–Фреше.

Определение 3. Предположим, что отображение $\partial_K f(x,h)$ определено при любом $h \in \dot{U}(0)$ и сублинейно по h, т. е.:

$$\partial_K f(x,h_1+h_2) \subset \partial_K f(x,h_1) + \partial_K f(x,h_2); \qquad \partial_K f(x,\lambda h) = \lambda \cdot \partial_K f(x,h) \quad (\forall \lambda \geq 0).$$

В этом случае сублинейный оператор с компактными выпуклыми значениями $h \mapsto \partial_K f(x,h)$ назовём слабым K-субдифференциалом отображения f в точке x и примем для него обозначение $\partial_K f(x) : h \mapsto \partial_K f(x)h$.

Далее, если оператор $\partial_K f(x)$ ограничен по норме (т. е. является K-оператором [19]):

$$\|\partial_K f(x)\| = \sup_{\|h\|\leq 1} (\sup \|\partial_K f(x)h\|) < \infty,$$

то назовём его K-субдифференциалом Гато. Наконец, если отображение f K-субдифференцируемо по Гато в точке x, и сходимость в K-пределе (1) равномерна по всем направлениям $\|h\| \leq 1$, то K-оператор $\partial_K f(x)$ назовём K-субдифференциалом Фреше (или сильным K-субдифференциалом) отображения f в точке x.

Замечание 8. 1) Как показано в [22], K-операторы, действующие из E в F, образуют нормированный конус $L_K(E;F)$ (банахов конус, если F–банахово пространство). Приведённые выше определения 1.1 – 1.3 распространяются на случай банаховых конусов, что позволяет далее обычным индуктивным путём ввести
K-субдифференциалы высших порядков.
2) В случае вещественных функций [20] K-субдифференциал вычисляется по формуле

$$\partial_K f(x) = \Big[\underline{\partial} f(x); \overline{\partial} f(x)\Big],$$

где $\underline{\partial} f(x)$, $\overline{\partial} f(x)$ — конечные (верхняя и нижняя) производные f в точке x. Таким образом, для выпуклой функции K-субдифференциал совпадает с классическим субдифференциалом [14].
3) Свойства сильных K-субдифференциалов изучены в работах ([27], [28]).

Выделим важный случай K–субдифференцирования функционала $f : E \to \mathbb{R}$. Здесь можно дать простую формулу для вычисления $\partial_K f(x,h)$.

Теорема 1. *Функционал $f : E \to \mathbb{R}$ K–субдифференцируем в точке x по направлению h тогда и только тогда, когда существуют конечные верхняя и нижняя производные f по направлению h в этой точке: $\overline{\partial} f(x,h)$ и $\underline{\partial} f(x,h)$. При этом имеет место равенство:*

$$\partial_K f(x,h) = \Big[\underline{\partial} f(x,h);\ \overline{\partial} f(x,h)\Big]. \tag{2}$$

Определение 4. Пусть функционал $g : E \to \mathbb{R}$ сублинеен. Введем симметризованный K–функционал g^s равенством:

$$g^s(h) = [-g(-h); g(h)] =: [\underline{g}^s(h); \overline{g}^s(h)]. \tag{3}$$

Замечание 9. В случае сильного K–субдифференцирования функционалов $f : E \to \mathbb{R}$, а также (покоординатно) отображений $f : E \to \mathbb{R}^m$ нам удобнее будет использовать *симметризованный K–субдифференциал* $\partial^s_K f(x)h$. Используя равенства (2) и (3) получаем:

$$\partial^s_K f(x)h = \left[\min\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x{+}0); \frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x{-}0)\right); \max\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x{+}0); \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x{-}0)\right)\right] = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x); \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)\right]$$

Здесь $\dfrac{\partial f}{\underline{\partial h}}$ и $\dfrac{\overline{\partial f}}{\partial h}$, соответственно, — нижняя и верхняя производные вдоль прямой, определяемой в точке x вектором h.

Приведем теперь определение сильного K-субдифференциала второго порядка [22].

Определение 5. Пусть отображение $f : E \to F$ определено и K-субдифференцируемо по Фреше в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in E$. Если отображение $\partial_K f : E \supset U(x) \to L_K(E;F)$ K-субдифференцируемо по Фреше в точке x, то его K-субдифференциал в точке x $\partial^2_K f(x) = \partial_K(\partial_K f)(x) \in L_K(E; L_K(E;F))$ назовём K-субдифференциалом Фреше второго порядка отображения f в точке x.

Замечание 10. 1) В [19] установлена каноническая изометрия банаховых конусов сублинейных и бисублинейных K-операторов:

$$L_K(E_1; L_K(E_2; F)) \cong L_K(E_1, E_2; F).$$

Это позволяет рассматривать второй K-субдифференциал Фреше как бисублинейный ограниченный K-оператор: $\partial^2_K f(x) : E \times E \to F$.
2) Аналогичным образом, по индукции можно ввести K-субдифференциалы высших порядков и рассматривать их как мультисублинейные K-операторы [27].

Определение 6. Пусть E, F –нормированные конусы, F индуктивно упорядочен, $\Lambda : E \supset U(x) \to F$. Будем говорить, что отображение Λ *субнепрерывно сверху* в точке $x \in E$ (обозначение $\Lambda \in C_{sub}(x)$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Lambda(x+h) \leq \Lambda(x) + y, \text{ где } \|y\| < \varepsilon). \tag{4}$$

Основным для нас является то обстоятельство, что в случае субдифференциалов (т.е. при $\Lambda = \partial_K F : E \to L_K(E;F)$) в условии (4) можно заменить $\Lambda(x) = \partial_K f(x)$ на произвольный элемент нормированного конуса $L_K(E;F)$. Это и есть *общая формула достаточного условия -субдифференцируемости.*

Замечание 11. Мы можем принять условие (4) за определение *полунепрерывности сверху*, или *субнепрерывности* отображения $\partial_K f$ в точке x: $\partial_K f \in C_{sub}(x)$. Будем писать также в этом случае: $f \in C^1_{sub}(x)$ и называть отображение f *субгладким* (точнее, C^1*–субгладким*) в точке x.

Определение 7. Будем говорить, что $f : E \supset U(x) \to F$ — *субгладкое отображение n–го порядка* (или C^n*–субгладкое отображение*) в точке x, и писать $f \in C^n_{sub}(x)$, если $\partial^n_K f \in C_{sub}(x)$.

Рассмотрим случай функционалов $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$(f \in C^n_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\text{все} \quad \underline{\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}}\right) \text{ и } \overline{\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}}\right)\right.$$

$$\left.\text{полунепрерывны в точке } x, \text{ соответственно, снизу и сверху}\right) \Longrightarrow \left(\exists \, \partial^n_K f(x)\right).$$

Перейдем теперь к приложениям построенного аппарата в вариационном исчислении. Рассмотрим классический вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \qquad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), u = f(x,y,z)), \tag{5}$$

интегрант f которого, однако, не обязательно всюду дифференцируем. Потребуем, чтобы f был лишь всюду K-субдифференцируем. Простым, но важным примером, может служить функционал вида

$$\widetilde{\Phi}(y) = \int\limits_a^b |\widetilde{f}(x,y,y')|dx \qquad (\widetilde{f} \in C^1),$$

ситуация для которого исследована в [24]. Справедлива следующая оценка K-субдифференциала (5) (см. [24],[27]).

Теорема 3. *Пусть для вариационного функционала* (5) *интегрант f является субгладким: $f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3)$ (см. определение 1.6). Тогда Φ сильно K-субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причём справедлива оценка:*

$$\partial_K \Phi(y)h \subset$$
$$\subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h' \right) dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h' \right) dx \right]$$
$$(\forall h \in C^1[a;b]). \tag{6}$$

Оценка (6) позволила получить, в случае C^1-субгладкого интегранта, многозначный аналог классического уравнения Эйлера–Лагранжа — так называемое "включение Эйлера–Лагранжа" с компактной выпуклой оценкой [28].

Теорема 4. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{7}$$

Тогда условие $0 \in \partial^s_K \Phi(y)$ равносильно выполнению "включения Эйлера–Лагранжа":

$$0 \in \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y') \right); \;\; \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y') \right) \right] \tag{8}$$

почти всюду на $[a;b]$. В частности, если Φ достигает локального экстремума в точке y, то включение (8) *для y выполнено почти всюду на $[a;b]$.*

Решение включения (8) назовём субэкстремалью функционала (7).

Замечание 12. Включение Эйлера–Лагранжа (8) можно равносильным образом переписать в виде "уравнения Эйлера–Лагранжа с параметром":

$$\left[(1-\lambda)\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')+\lambda\cdot\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')\right]-\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')+\lambda\cdot\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')\right]\overset{\text{п.в.}}{=}0$$

y является решением этого уравнения при некотором $\lambda\in[0;1]$.

Переход к условиям второго порядка требует оценки второго K-субдифференциала $\Phi(y)$. Здесь также, в отличие от классического случая $f\in C^2$, мы рассматриваем более общий случай C^2-субгладкого интегранта (класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$). Простым примером, рассмотренным в [28], может служить функционал вида

$$\widetilde{\Phi}(y)=\int\limits_a^b\widetilde{f}(x,y,y')\cdot|\widetilde{f}(x,y,y')|dx\qquad(\widetilde{f}\in C^1).$$

Справедлива следующая оценка второго K-субдифференциала функционала (5).

Теорема 5. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx\quad(f\in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3),y\in C^1[a;b]).\tag{9}$$

Функционал (9) *дважды K-субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причём справедлива оценка:*

$$\begin{aligned}\partial^2_K\Phi(y)(h)^2\subset\Bigg[&\int\limits_a^b\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')hh'\right)dx;\\&\int\limits_a^b\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')hh'\right)dx\Bigg]+\\&+\Bigg[\int\limits_a^b\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')hh'+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx;\\&\int\limits_a^b\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')hh'+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx\Bigg].\end{aligned}\tag{10}$$

Оценка (10) позволила получить аналог классического условия Лежандра.

Теорема 6. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx\quad(f\in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3),y\in C^1[a;b],y(a)=y_a,y(b)=y_b).\tag{11}$$

Если функционал (11) *достигает локального минимума в точке* $y \in C^1[a;b]$, *то*

$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') \geq 0 \text{ всюду на } [a;b].$$

Определение 8. Для отображения $f : E_1 \times \dots \times E_n \to F^1 \times \dots \times F^m$, K–матрицу сублинейных K–операторов

$$J_K f(x) = \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_K (x)\right)_K^{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,m}} \qquad \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_K (x) \in L_K(E_i; F_j)\right)$$

назовем K*–матрицей Якоби* отображения f в точке x. Аналогично вводятся матрицы Якоби высших порядков.

Выделим случай функционала $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Теорема 7. *Если функционал* $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K*–субдифференцируем* n *раз в* $U(x)$, *то справедливо равенство:*

$$\partial^n_K f(x)(h)^n = \left[\sum_{i=1}^m \underline{\frac{\partial}{\partial x_i}} h_i; \sum_{i=1}^m \frac{\overline{\partial}}{\partial x_i} h_i\right] \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} h_m\right)^{n-1} \cdot f\right)(x). \tag{12}$$

Замечание 13. Отметим, что вводя в случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *нижнюю и верхнюю матрицы Якоби* n*–го порядка*:

$$\underline{J}^n f = \left(\underline{\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}}\right)\right) =: \left(\underline{\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}}}\right)$$

и

$$\overline{J^n} f = \left(\frac{\overline{\partial}}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}}\right)\right) =: \left(\frac{\overline{\partial^n f}}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}}\right),$$

равенство (12) можно записать в виде:

$$\partial^n_K f(x) \cdot (h)^n = [\underline{J}^n f(x); \overline{J^n} f(x)] \cdot (h)^n,$$

где $[\underline{J}^n f(x); \overline{J^n} f(x)]$ — (n^m)–мерный матричный отрезок, соединяющий концевые матрицы (по главной диагонали).

Теперь перейдём к центральному результату — C^2–субгладкому аналогу достаточного условия Лежандра–Якоби для минимума вариационного функционала.

Теорема 8. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{13}$$

Предположим, что y *– субэкстремаль функционала* (13), *т. е. почти всюду удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа. Если вдоль субэкстремали* y *выполнены следующие условия:*

i)

$$\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,y,y')>0 \quad \textit{при } a\le x\le b \ \textit{("нижнее" усиленное условие Лежандра);} \tag{14}$$

ii) *для каждого из четырёх уравнений Якоби, соответствующих вершинам двумерного матричного отрезка* $[\underline{J}^2 f(x);\ \overline{J}^2 f(x)]$*:*

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right]-\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial z}}(x,y,y')+\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)+\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h=0; \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,y,y')\cdot h'\right]-\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y\partial z}(x,y,y')+\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z\partial y}(x,y,y')\right)+\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y')\right]\cdot h=0; \tag{16}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,y,y')\cdot h'\right]-\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial z}}(x,y,y')+\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z\partial y}(x,y,y')\right)+\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h=0; \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right]-\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y\partial z}(x,y,y')+\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z\partial y}}(x,y,y')\right)+\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y')\right]\cdot h=0; \tag{18}$$

$$(h(a)=0,\ h'(a)=1)$$

выполнены условия Якоби отсутствия сопряжённых точек.
Тогда функционал (13) *достигает строгого локального минимума в точке* y.

2. Исключение условия Якоби в случае негладкого интегранта.

Здесь мы собираемся показать, что в случае не C^2-гладкого (но C^2-субгладкого) интегранта, аналогично гладкому случаю, можно ограничиться "нижним" усиленным условием Лежандра (14) при возможном ограничении на длину отрезка $[a;b]$. При выводе основного результата мы следуем схеме доказательства работ ([10], [12], [13]). Для простоты, проведём выкладки в случае нулевой субэкстремали.

При каждом $i=\overline{1,4}: f=f_{i1}+f_{i2}$, разобьем интегрант $f(x,y,z)$ вариационного функционала (5) на два слагаемых, и зафиксируем некоторое $\lambda\in(0;1)$:
1)

$$f_{11}(x,y,z)=f(x,y,z)-f(x,0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right]-$$
$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2+\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz+\lambda\cdot\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right];$$

$$f_{12}(x,y,z)=f(x,y,z)-f_{12}(x,y,z)=f(x,0,0)+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2+\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz+\lambda\cdot\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right].$$

2)

$$f_{21}(x,y,z)=f(x,y,z)-f(x,0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2+\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz+\lambda\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right];$$

$$f_{22}(x,y,z)=f(x,y,z)-f_{22}(x,y,z)=f(x,0,0)+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2+\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz+\lambda\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right].$$

3)

$$f_{31}(x,y,z)=f(x,y,z)-f(x,0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2+\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz+\lambda\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right];$$

$$f_{32}(x,y,z)=f(x,y,z)-f_{32}(x,y,z)=f(x,0,0)+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2+\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz+\lambda\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right].$$

4)

$$f_{41}(x,y,z)=f(x,y,z)-f(x,0,0)-\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right]-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2+\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz+\lambda\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right];$$

$$f_{42}(x,y,z)=f(x,y,z)-f_{42}(x,y,z)=f(x,0,0)+\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y+\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2+\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz+\lambda\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right].$$

Соответственно, обозначим

$$\Phi_{i1}(y)=\int\limits_a^b f_{i1}(x,y,y')dx,\ \Phi_{i2}(y)=\int\limits_a^b f_{i2}(x,y,y')dx;$$

$$\Phi(y)=\Phi_{i1}(y)+\Phi_{i2}(y)\quad(i=\overline{1,4}).$$

1) Вначале исследуем Φ_{i1} на минимум с помощью включения Эйлера–Лагранжа (терема 1.4), "нижнего" усиленного условия Лежандра (теорема 1.8, п.i), уравнений Якоби (15)-(18) и обобщенного условия Якоби (теорема 1.8, п.ii).

i) *Включение Эйлера–Лагранжа.* Так как

1)

$$\Bigg(\frac{\partial f_{11}}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)-$$

$$-\Bigg[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\left(\frac{\partial f_{11}}{\partial y}(x,0,0)=0\right);$$

$$\Bigg(\frac{\partial f_{11}}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)-$$

$$-\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot y+\lambda\cdot\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\left(\frac{\partial f_{11}}{\partial z}(x,0,0)=0\right);$$

2)

$$\Bigg(\frac{\partial f_{21}}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)-$$

$$-\Bigg[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0)\cdot y+\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y\partial z}(x,0,0)+\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z\partial y}(x,0,0)\right)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\left(\frac{\partial f_{21}}{\partial y}(x,0,0)=0\right);$$

$$\Bigg(\frac{\partial f_{21}}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)-$$

$$-\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y\partial z}(x,0,0)+\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z\partial y}(x,0,0)\right)\cdot y+\lambda\cdot\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\left(\frac{\partial f_{21}}{\partial z}(x,0,0)=0\right);$$

3)

$$\Bigg(\frac{\partial f_{31}}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)-$$

$$-\Bigg[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z\partial y}(x,0,0)\right)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\left(\frac{\partial f_{31}}{\partial y}(x,0,0)=0\right);$$

$$\Bigg(\frac{\partial f_{31}}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)-$$

$$-\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z\partial y}(x,0,0)\right)\cdot y+\lambda\cdot\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\left(\frac{\partial f_{31}}{\partial z}(x,0,0)=0\right);$$

4)

$$\Bigg(\frac{\partial f_{41}}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)-$$

$$-\Bigg[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0)\cdot y+\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y\partial z}(x,0,0)+\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\left(\frac{\partial f_{41}}{\partial y}(x,0,0)=0\right);$$

$$\Bigg(\frac{\partial f_{41}}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)-$$

$$-\Bigg[\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y\partial z}(x,0,0)+\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot y+\lambda\cdot\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\left(\frac{\partial f_{41}}{\partial z}(x,0,0)=0\right);$$

то уравнение Эйлера–Лагранжа для Φ_{i1} в нуле при всех $i = \overline{1,4}$

$$\frac{\partial f_{i1}}{\partial y}(x,0,0) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f_{i1}}{\partial z}(x,0,0)\right) = 0$$

выполняется автоматически, т.е. $y_0(x) \equiv 0$ является K–экстремалью функционала Φ_{i1}.

ii) *"Нижнее" усиленное условие Лежандра.* Так как при $i = \overline{1,4}$:

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{i1}}{\partial z^2}}(x,y,z) = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,z) - \lambda\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\underline{\frac{\partial^2 f_{i1}}{\partial z^2}}(x,0,0) = (1-\lambda)\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right),$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{i1}}{\partial z^2}}(x,y,z) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,z) - \lambda\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\overline{\frac{\partial^2 f_{i1}}{\partial z^2}}(x,0,0) = (1-\lambda)\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right),$$

то, при дополнительном требовании

$$r(x) := \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}\right)(x,0,0) > 0, \quad (a \le x \le b) \tag{19}$$

имеет место "нижнее" усиленное условие Лежандра для строгого минимума в нуле.

iii) *Уравнения Якоби и обобщенное условие Якоби.* Отметим, что из условия $f \in C^2_{sub}$ следует $f_{i1}, f_{i2} \in C^2_{sub}$ $\quad (i = \overline{1,4})$.

1) Так как

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y\partial z}}(x,y,z) = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,z) - \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y\partial z}}(x,0,0) = 0\right);$$

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y^2}}(x,y,z) = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,z) - \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y^2}}(x,0,0) = 0\right);$$

то правая часть уравнения Якоби (15) для Φ_{11} в нуле примет следующий вид:

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' - \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y\partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right) + \right.$$

$$\left. + \underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y^2}}(x,0,0)\right]\cdot U = -\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' =$$

$$= -\frac{d}{dx}\Big[(1-\lambda)\cdot r(x)\Big]\cdot U' \quad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

Таким образом, мы получили уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot U'\right) = \frac{d}{dx}\big(r(x)\cdot U'\big) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \qquad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

2) Так как

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y\partial z}}(x,y,z) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,z) - \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y\partial z}}(x,0,0) = 0\right);$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y^2}}(x,y,z) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,z) - \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y^2}}(x,0,0) = 0\right);$$

то правая часть уравнения Якоби (16) для Φ_{21} в нуле примет следующий вид:

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' - \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)+\right.$$

$$\left.+\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y^2}}(x,0,0)\right]\cdot U = -\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' \quad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

Таким образом, мы получили уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot U'\right)\overset{\text{п.в.}}{=}0 \qquad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

3) Так как

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y\partial z}}(x,y,z)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,z)-\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)=0\right);$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y\partial z}}(x,y,z)=\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,z)-\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)=0\right);$$

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y^2}}(x,y,z)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,z)-\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y^2}}(x,0,0)=0\right);$$

то правая часть уравнения Якоби (17) для Φ_{31} в нуле примет следующий вид:

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' - \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)+\right.$$

$$\left.+\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y^2}}(x,0,0)\right]\cdot U = -\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' \quad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

Таким образом, мы получили уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot U'\right)\overset{\text{п.в.}}{=}0 \qquad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

4) Так как

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y\partial z}}(x,y,z)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,z)-\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)=0\right);$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y\partial z}}(x,y,z)=\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,z)-\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)=0\right);$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y^2}}(x,y,z)=\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,z)-\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y^2}}(x,0,0)=0\right);$$

то правая часть уравнения Якоби (18) для Φ_{41} в нуле примет следующий вид:

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' -$$

$$-\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\underline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)+\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y^2}}(x,0,0)\right]\cdot U =$$

$$= -\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' = -\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot r(x)\right]\cdot U' \quad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

Таким образом, мы получили уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot U'\right) = \frac{d}{dx}\left(r(x)\cdot U'\right) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \qquad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

Решения всех этих четырех уравнений

$$U(x) = r(a)\cdot\int\limits_a^x \frac{dt}{r(t)}$$

положительны при $a < x \le b$. Таким образом, при условии (19) функционалы Φ_{i1} достигают строгого минимума в нуле.

2) Исследуем теперь непосредственно Φ_{i2} на минимум в нуле. Отметим сначала, что $\Phi_{i2}(0) = \Phi(0)$.

i) Предположим, что уравнение Эйлера–Лагранжа для Φ в нуле справедливо:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\right) = 0 \quad (a \le x \le b). \tag{20}$$

1) Тогда, интегрируя по частям, получим для $\Phi_{12}(y)$:

$$\Phi_{12}(y) = \int\limits_a^b f(x,0,0)dx + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y'\right)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yy'\right)dx +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\cdot\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot y'^2\right)dx =$$

$$= \Phi_{12}(0) + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y\right)\right)dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 - \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot y^2\right)dx +$$

$$+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot y'^2 dx.$$

Введем обозначение:

$$q_1(x) := \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right).$$

2) Для $\Phi_{22}(y)$ получаем:

$$\Phi_{22}(y) = \int\limits_a^b f(x,0,0)dx + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) \cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y' \right) dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0) \cdot y^2 + \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \right) \cdot yy' \right) dx +$$

$$+\frac{\lambda}{2} \cdot \int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0) \cdot y'^2 \right) dx =$$

$$= \Phi_{22}(0) + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) \cdot y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y \right) \right) dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y \Big|_a^b +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0) \cdot y^2 - \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \right) \cdot y^2 \right) dx +$$

$$+\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) \cdot y \Big|_a^b + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \cdot y \Big|_a^b + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0) \cdot y'^2 dx.$$

Введем обозначение:

$$q_2(x) := \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0) - \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \right).$$

3) Для $\Phi_{32}(y)$ получаем:

$$\Phi_{32}(y) = \int\limits_a^b f(x,0,0)dx + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) \cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y' \right) dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,0,0) \cdot y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \right) \cdot yy' \right) dx +$$

$$+\frac{\lambda}{2} \cdot \int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0) \cdot y'^2 \right) dx =$$

$$= \Phi_{32}(0) + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) \cdot y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y \right) \right) dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y \Big|_a^b +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,0,0) \cdot y^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \right) \cdot y^2 \right) dx +$$

$$+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \frac{\lambda}{2}\int_a^b \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot y'^2 dx.$$

Введем обозначение:

$$q_3(x) := \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right).$$

4) Для $\Phi_{42}(y)$ получаем:

$$\Phi_{42}(y) = \int_a^b f(x,0,0)dx + \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y'\right)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yy'\right)dx +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\cdot\int_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot y'^2\right)dx =$$

$$= \Phi_{42}(0) + \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y\right)\right)dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b +$$

$$+\frac{1}{2}\int_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 - \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right)\cdot y^2\right)dx +$$

$$+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \frac{\lambda}{2}\int_a^b \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot y'^2 dx.$$

Вводя обозначение:

$$q_4(x) := \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right),$$

получаем:

$$(\Phi_{i2}(y) = \Phi_{i2}(0) + \frac{1}{2}\int_a^b \left[\lambda\cdot r(x)\cdot y'^2 + q_i(x)\cdot y^2\right]dx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\Phi(y) - \Phi(0) \geq \Phi_{i2}(y) - \Phi_{i2}(0) = \frac{1}{2}\int_a^b \left[\lambda\cdot r(x)\cdot y'^2 + q_i(x)\cdot y^2\right]dx), \quad (i = \overline{1,4}). \tag{21}$$

ii) Обозначим через

$$r := \min_{a\leq x\leq b} r(x) > 0, \qquad q_i := \inf_{a\leq x\leq b}(\inf q_i(x)) \qquad (i = \overline{1,4}), \tag{22}$$

и рассмотрим сначала случай $q_i \geq 0$, $(i = \overline{1,4})$. Тогда

$$\lambda r(x) y'^2 + q_i(x) y^2 \geq \lambda r \cdot y'^2 + q_i \cdot y^2 > 0 \quad \text{при} \quad y' \neq 0 \quad (i = \overline{1,4}),$$

откуда, в силу (21), следует неравенство

$$\Phi_{i2}(y) > \Phi_{i2}(0) \quad \text{при} \quad y(x) \neq 0.$$

Таким образом, в этом случае Φ_{i2} достигает строгого абсолютного минимума в нуле. Следовательно, в силу доказанного в пункте 1, Φ достигает строгого минимума в нуле (без какого-либо ограничения на длину $[a; b]$).

iii) Рассмотрим теперь случай, когда $q_i < 0$ $(i = \overline{1,4})$. Тогда, используя неравенство Фридрихса, получаем:

$$\Phi_{i2}(y) - \Phi_{i2}(0) = \frac{1}{2} \int\limits_a^b \left[\lambda \cdot r(x) \cdot y'^2 + q_i(x) \cdot y^2\right] dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int\limits_a^b \left[\lambda \cdot r \cdot y'^2 - |q_i| \cdot y^2\right] dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \int\limits_a^b \left[\lambda \cdot r \cdot y'^2 - \frac{(b-a)^2}{\pi^2} |q_i| \cdot y'^2\right] dx = \frac{1}{2} \left(\lambda \cdot r - \frac{(b-a)^2}{\pi^2} |q_i|\right) \cdot \int\limits_a^b y'^2 dx \quad (i = \overline{1,4}). \tag{23}$$

Потребуем, чтобы коэффициент перед последним интегралом в (23) был строго положительным:

$$\left(\lambda \cdot r - \frac{(b-a)^2}{\pi^2} |q_i| > 0\right) \Leftrightarrow \left(b - a < \pi \sqrt{\frac{\lambda r}{|q_i|}}\right) \quad (i = \overline{1,4}). \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что $\Phi_{i2}(y) > \Phi_{i2}(0)$ при $y \neq 0$, т.е. Φ_{i2} достигает строгого абсолютного минимума в нуле. Таким образом, в силу доказанного в пункте 1, Φ достигает строгого минимума в нуле при ограничении (24) на длину $[a; b]$.

Наконец, переходя к пределам в (24) при $\lambda \to 1 - 0$, последнее утверждение можно распространить на случай оценки длины $[a; b]$ не зависящей от λ:

$$b - a < \pi \sqrt{\frac{r}{|q_i|}}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 9. *Пусть вариационный функционал* (5) *удовлетворяет в нуле уравнению Эйлера–Лагранжа* (20) *при граничном условии* $y(a) = y(b) = 0$. *Тогда, в обозначениях* (22), *имеем:*

1) *при* $r > 0$, $q_i \geq 0$ $(i = \overline{1,4})$, $\Phi(y)$ *достигает строгого минимума в нуле (без каких либо ограничений на длину* $[a; b]$*);*

2) *при* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_i \geq 0$ $(i \neq i_1)$, *при ограничении на длину* $[a;b]$:

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{|q_{i_1}|}},$$

$\Phi(y)$ *также достигает строгого минимума в нуле;*

3) *при* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_{i_2} < 0$, $q_i \geq 0$ $(i \neq i_1, i_2)$, *при ограничении на длину* $[a;b]$:

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_{i_1}|, |q_{i_2}|)}},$$

$\Phi(y)$ *также достигает строгого минимума в нуле;*

4) *при* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_{i_2} < 0$, $q_{i_3} < 0$, $q_i \geq 0$ $(i \neq i_1, i_2, i_3)$, *при ограничении на длину* $[a;b]$:

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_{i_1}|, |q_{i_2}|, |q_{i_3}|)}},$$

$\Phi(y)$ *также достигает строгого минимума в нуле;*

5) *при* $r > 0$, $q_i < 0$ $(i = \overline{1,4})$,, *при ограничении на длину* $[a;b]$:

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_1|, |q_2|, |q_3|, |q_4|)}},$$

$\Phi(y)$ *также достигает строгого минимума в нуле.*

В заключении рассмотрим пример применения теоремы 9 к варианту "модулирования" гармонического осциллятора.

Пример 1. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (y'^2 - y|y|)dx \quad \Big(y \in C^1[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}],\ y(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y(-\frac{\pi}{2}) = -sh\,\frac{\pi}{2}\Big). \qquad (25)$$

Здесь уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} y'' + y = 0 \ \ (y \geq 0); \\ y'' - y = 0 \ \ (y \leq 0). \end{array}\right.$$

Таким образом, функция

$$y = \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}), \quad y = -sh\, x(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0), \qquad (26)$$

является субэкстремалью функционала (25); при этом $y \in C^2[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

"Нижнее" условие Лежандра для субэкстремали y выполнено:

$$\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x, y, y') = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y') = 2 > 0.$$

"Нижнее" уравнение Якоби (15) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} h'' + h = 0\,(y \geq 0); \\ \Big(h(-\frac{\pi}{2}) = 0,\ h'(-\frac{\pi}{2}) = 1\Big) \\ h'' - h = 0\,(y \leq 0). \end{array}\right.$$

Аналогичный вид принимает уравнение Якоби (16):

$$\left[\begin{array}{l} h'' - h = 0\,(y \geq 0); \\ \Big(h(-\frac{\pi}{2}) = 0,\ h'(-\frac{\pi}{2}) = 1\Big) \\ h'' + h = 0\,(y \leq 0). \end{array}\right.$$

Уравнение Якоби (17) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} h'' + h = 0\,(y \geq 0); \\ \Big(h(-\frac{\pi}{2}) = 0,\ h'(-\frac{\pi}{2}) = 1\Big) \\ h'' - h = 0\,(y \leq 0). \end{array}\right.$$

Уравнение Якоби (18) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} h'' - h = 0\,(y \geq 0); \\ \Big(h(-\frac{\pi}{2}) = 0,\ h'(-\frac{\pi}{2}) = 1\Big) \\ h'' + h = 0\,(y \leq 0). \end{array}\right.$$

Тогда $r = 2 > 0$, $q_1 = -2 < 0$, $q_2 = 2 > 0$, $q_3 = -2 < 0$, $q_4 = 2 > 0$. Полученные значения соответствуют пункту 3) теоремы 2.1. Таким образом, ограничение на длину $[a; b]$ вида:

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_1|, |q_3|)}},$$

принимает следующую форму:

$$b - a < \pi \tag{27}$$

при условии (27) вариационный функционал (25) достигает строгого локального минимума на данной субэкстремали (26).

Автор выражает признательность профессору И. В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Giaquinta M., Hildebrand S. HildebrandCalculus of Variations, Springer-Verlag, New York, 1996.

[2] Dacorogna B. Introduction to the Calculus of Variations – Imperial College Press, London, 2004.

[3] Ewing G. M. Calculus of Variations with Applications – Dover Publications, New York, 1985.

[4] Hestenes M. R. Calculus of Variations and Optimal Control Theory – John Wiley, New York, 1966.

[5] Rosenblueth J. F. Variational conditions and conjugate points for fixed-endpoint control problem // IMA J. Math. Control Inform. 16 (1999). 147-163.

[6] Rosenblueth J. F., Licea G. S. Strengthening Weierstrass' condition // IMA J. Math. Control Inform. 21 (2004), no. 3, 275-294.

[7] Rosenblueth J. F., Licea G. S. A new sufficiency theorem for strong minima in the calculus of variations // Appl. Math. Lett. 18 (2005), no. 11, 1239-1246.

[8] Rosenblueth J. F., Licea G. S. Sufficient variational conditions for isoperimetric control problems // Int. Math. Forum 6 (2011), 303-324.

[9] Licea G. S. Sufficiency in optimal control without the strengthened condition of Legendre // Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics 1 (2011), no. 1, 1-20.

[10] Orlov I. V. Elimination of Jacobi equation in extremal variational problems // Methods of Functional Analysis and Topology, Kyiv: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine , 2011, Vol. 17, no. 4, 341–349.

[11] Orlov I. V. Inverse extremal problem for variational functionals // Eurasian Mathematical Journal, 2011, Vol. 1, no. 4, 95–115.

[12] Орлов И. В., Цыганкова А. В. Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах // Динамические системы, Том 3(31) № 3-4(2013), с. 233–248.

[13] Цыганкова А. В. Исключение уравнения Якоби в экстремальных вариационных задачах // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, Серия "Физико-математические науки" , Том 25 (64) № 2 (2012), с. 161–175.

[14] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — Москва: Мир, 1973. — 472 с.

[15] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – Москва: Наука, 1988. – 280 с.

[16] Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — Москва: Наука, 1980. — 320 с.

[17] Демьянов В. Ф., Рощина В. А. Обобщенные субдифференциалы и экзостеры // Владикавказский математический журнал. –2006. – *8*, № 4. – С. 19-31.

[18] Левин В. Л. О субдифференциалах выпуклых функционалов// Успехи математических наук — 1970. — *25*, № 4(154) . — С. 183–184.

[19] Orlov I. V., Stonyakin F. S. Compact subdifferentials: the formula of finite increments and related topics // English translation in: Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 170:2. — P. 251–269.

[20] Стонякин Ф. С. Сравнительный анализ понятия компактного субдифференциала // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н.Каразiна. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка". — 2009. — №850. — С. 11–21.

[21] Orlov I. V., Stonyakin F. S. Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15 (1). – P. 74–90.

[22] Халилова З. И. Компактные субдифференциалы высших порядков и их применения к вариационным задачам // Динамические системы. —2013. — Том 3(31), №1-2. — С. 115–133

[23] Халилова З. И. K-сублинейные многозначные операторы и их свойства // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки"(2011, 24(63)), С.110–122.

[24] Халилова З. И. Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки"2012, 25(64), С.140–160.

[25] Orlov I. V., Stonyakin F. S. The limiting form of the Radon-Nikodym property is true for all Fréchet spaces // English translation in: Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 180:6. — P. 731–747.

[26] Стонякин Ф. С. K-свойство Радона-Никодима для пространств Фреше // Учёные записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика». — 2009. — Т.22(61), №1. — С. 102–113.

[27] Орлов И. В., Халилова З. И. Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2013. —Т. 48. — С. 100-136.

[28] Orlov I. V., Khalilova Z. I. Compact subdifferentials in Banach cones // English translation in: Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 198:4. — P. 438–456.

[29] Халилова З. И. Теория K-субдифференциалов второго порядка и её применение к вариационным задачам // КММК – 2013. Сборник тезисов, Симферополь, 2013, 121-124 с.

[30] Орлов И. В., Божонок Е. В. Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1 – учебное пособие, Симферополь: ДИАЙПИ, 2010, 156 с.

Виключення рівняння Якобі в варіаційних задачах з негладким інтегрантом

Метод виключення рівняння і умови Якобі, який розроблено нещодавно в одновимірному та багатовимірному випадках для гладкого інтегранта, перенесений на випадок субгладкого інтегранта в одновимірних варіаційних задачах. У цьому випадку варіаційний функціонал не є двічі диференційованим по Фреше, що призводить нас до техніки негладкого аналізу та компактних субдіфференціалів.

Ключові слова: варіаційний функціонал, субгладкий інтегрант, рівняння Якобі, "нижня" посилена умова Лежандра, локальний екстремум.

Elimination of Jacobi equation in variational problems with non-smooth integrand

The classical approach to the solution of extreme variational problems, as is known, requires as sufficient condition of an extremum, checking the

strengthened Legendre condition and Jacobi condition for Jacobi equation. The second step in the non-quadratic situation is complicated enough and therefore the possibility to avoid checking the Jacobi condition has long attracted the attention of mathematicians.

The method of elimination of the Jacobi equation and Jacobi condition, which was recently developed in the case of smooth integrand, is extended to the case of sub-smooth integrand in one-dimensional variational problems. In this case, variational functional is not twice Frechet differentiable, which leads us to the techniques of nonsmooth analysis and compact subdifferentials. It is shown that the minima problem for the classical Euler-Lagrange variational functional

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b], y(a) = y(b) = 0),$$

can be solved under the conditions of Euler-Lagrange equation

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, 0, 0) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, 0, 0)\right) = 0 \quad (a \le x \le b),$$

"upper" strengthened Legendre condition

$$r(x) := \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}\right)(x, 0, 0) > 0, \quad (a \le x \le b), \quad r := \min_{a \le x \le b} r(x) > 0,$$

and the following additional conditions.

1) *If* $r > 0$, $q_i \ge 0$ $(i = \overline{1, 4})$, *without any restriction on the length of* $[a; b]$.
2) *If* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_i \ge 0$ $(i \ne i_1)$, *under the constraint on the length of* $[a; b]$*:*
$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{|q_{i_1}|}}.$$
3) *If* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_{i_2} < 0$, $q_i \ge 0$ $(i \ne i_1, i_2)$, *under the constraint on the length of* $[a; b]$*:*
$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_{i_1}|, |q_{i_2}|)}}.$$
4) *If* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_{i_2} < 0$, $q_{i_3} < 0$, $q_i \ge 0$ $(i \ne i_1, i_2, i_3)$, *under the constraint on the length of* $[a; b]$*:*
$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_{i_1}|, |q_{i_2}|, |q_{i_3}|)}}.$$
5) *If* $r > 0$, $q_i < 0$ $(i = \overline{1, 4})$, *under the constraint on the length of* $[a; b]$*:*
$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_1|, |q_2|, |q_3|, |q_4|)}}.$$

Here

$$q_1(x) := \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0) \right),$$

$$q_2(x) := \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0) \right),$$

$$q_3(x) := \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0) \right),$$

$$q_4(x) := \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0) \right),$$

$$q_i := \inf_{a \le x \le b} (\inf q_i(x)) \qquad (i = \overline{1,4}).$$

Keywords: variational functional, sub-smooth integrand, Jacobi equation, "upper" strengthened Legendre condition, local extremum.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 177–197.

УДК 519.833 MSC2000: 91A80

В. И. Жуковский, П. К. Ахрамеев

ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО РИСКУ РЕШЕНИЕ В ЗАДАЧЕ ДИВЕРСИФИКАЦИИ ВКЛАДА ПО ТРЕМ ДЕПОЗИТАМ (РУБЛЕВОМУ, В ДОЛЛАРАХ И ЕВРО)

Рассматриваются задачи распределения некоторой суммы (в рублях) на три депозита (в рублях, долларах и евро) с целью получения максимального годового дохода (в пересчете на рубли). При этом ЛПР (вкладчик) не знает курсов доллара и евро в конце года и ориентируется только на некоторые границы их возможных изменений. Решение этой задачи зависит и от отношения ЛПР к риску. Построение гарантированного по риску решения составляет содержание настоящей статьи.

Ключевые слова: многошаговая бескоалиционная игра, позиционная стратегия, равновесие по Нэшу, метод динамического программирования.

E-mail: zhkvlad@yandex.ru, p.akhrameev@gmail.com

1. Математическая модель

Если в начале рассматриваемого периода времени (для определенности года) ЛПР знает, как распределять один рубль по трем депозитам (рублевому, в долларах и евро), то таким образом он распределит по этим депозитам и любую сумму.

Итак, пусть K_d и K_e – курсы доллара и евро в начале года по отношению к рублю, $(1 - x_d - x_e,\ x_d,\ x_e)$ - размеры рублевого, долларового и евро депозитов соответственно (в пересчете на рубли). Известны соответствующие процентные ставки r, d_d, d_e по каждому из трех видов вклада. Однако курсы валют y_d (в долларах) и y_e (в евро) в конце периода депонирования точно неизвестны. Они для рассматриваемой задачи являются неопределенными и относительно них предполагаются известными лишь границы возможных изменений $y_i \in [a_i, b_i]$ $(i = d, e)$. Доход ЛПР в конце года после конвертации определяется как планом диверсификации $(1 - x_d - x_e,\ x_d,\ x_e)$, так и неопределенностями (курсами валют в конце года)

$y = (y_d, y_e) \in Y = [a_d, b_d] \times [a_e, b_e]$. Этот доход можно представить в виде:

$$f(x,y) = (1+r)(1-x_d-x_e) + x_d\frac{1+d_d}{K_d}y_d + x_e\frac{1+d_e}{K_e}y_e. \quad (1)$$

На содержательном уровне задачей ЛПР (лица, принимающего решение) являются аналитическое конструирование такой стратегии $x = (x_d, x_e) \in X = \{x_d + x_e \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0\ (i = d, e)\}$, чтобы добиться наибольшего итогового результата (исхода) $f(x,y)$. При этом ЛПР вынужден учитывать возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$. Неопределенность – это неточность или неполнота информации о результатах предпринятых ЛПРом действий (стратегий).

Итак, математическая модель рассматриваемой задачи о диверсификации представляется упорядоченной тройкой $\Gamma =< X, Y, f(x,y) >$, где множество X стратегий x и множество Y неопределенностей y имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} X &= \{x = (x_d, x_e)|\ x_d + x_e \leqslant 1,\ x_i \geqslant 0\ (i = d, e)\}, \\ Y &= \{y = (y_d, y_e)|\ y_i \in [a_i, b_i]\ (i = d, e)\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Согласно терминологии теории исследования операций Γ является однокритериальной задачей при неопределенности. Именно принятие решений в Γ, базируясь только на риске и составляет содержание настоящей статьи. В экономической литературе (например, в [1, с. 102-103]) разные ЛПР по разному относятся к риску (именно в этом и состоит *субъективная природа риска*). Есть рискофобы (индивидуумы, которые относятся к риску отрицательно, и таких индивидуумов, в том числе предпринимателей, большинство: греч. phobos - страх), рискофилы (индивидуумы, относящиеся к риску положительно, то есть любят рисковать: греч. philos - любящий) и рисконейтралы (индивидуумы, которые стремятся *одновременно* увеличить исход (как рискофобы) и уменьшить риск (как рискофилы)) [1, с.102-103]. Для рискофоба при решении задач типа Γ естественно применять принцип гарантированного результата (по Абрахаму Вальду [3]). Согласно этому подходу *гарантированным по исходам решением* Γ (ГИР) называем пару $(x^g, f^g) \in X \times \mathbb{R}$, определяемую цепочкой равенств

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y} f(x^g, y) = f^g. \quad (3)$$

Согласно (3), операция *внутреннего минимума* $\min\limits_{y\in Y} f(x,y) = f[x]$ реализует для каждой стратегии $x \in X$ гарантию $f[x]$, ибо $f[x] \leqslant f(x,y)\ \forall y \in Y$; операция *внешнего максимума* $\max\limits_{x\in X} f[x] = f[x^g] = f^g$ выделяет из всех гарантий $f[x]$ наибольшую, так как $f[x^g] \geqslant f[x]\ \forall x \in X$ и $f[x^g] = f^g \leqslant f(x^g, y)\ \forall y \in Y$. Стратегию

x^g из ГИР предлагается ЛПРу использовать, ибо она «обеспечит» ЛПР наибольшую гарантию f^g. В [2] получены достаточные условия существования и явный вид ГИР для рискофоба в задаче Г. Именно, имеет место

Утверждение 1. *Гарантированное по исходам решение задачи* Г *имеет вид*

$$(x^g, f^g) = (1 - x_d^g - x_e^g, x_d^g, x_e^g, f^g) =$$

$$= \begin{cases} (1,0,0,1+r) \text{ при } \gamma_i \leqslant 0 \ (i = g, r), \\ (0,1,0,\frac{1+d_d}{K_d}a_d) \text{ при } \{\gamma_d > 0, \gamma_e \leqslant 0\} \vee \{\gamma_d > \gamma_e > 0\}, \\ (0,0,1,\frac{1+d_e}{K_e}a_e) \text{ при } \{\gamma_d \leqslant 0, \gamma_e > 0\} \vee \{\gamma_e > \gamma_d > 0\}, \\ (0, x_d^g, 1 - x_d^g, \frac{1+d_i}{K_i}a_i) \ \forall x_d^g \in [0,1] \ (i = d, e) \text{ при } \gamma_d = \gamma_e > 0, \end{cases}$$

где $\gamma_i = \frac{1+d_i}{K_i}(a_i - \frac{1+r}{1+d_i}K_i)$ $(i = d, e)$, *знак* $\vee$ *означает "или".*

2. Принцип минимаксного сожаления (по Сэвиджу)

Перейдем к способу принятия решения в Г для рискофила. Особенность Г в том, то в ней о неопределенностях у ЛПР известны лишь границы изменения, а какие-либо вероятностные характеристики отсутствуют по тем или иным причинам. Такие неопределенности названы в [4] Еленой Сергеевной Вентцель «дурными» (из-за неопределенности их реализаций). Наличие неопределенности в Г как раз и позволяет говорить о риске ЛПР, возникающим при использовании любых стратегий $x \in X$. В экономической литературе (например, в [5, с.15]) приводятся многочисленные различные понятия риска. Более того, известный специалист по теории управления Сиразетдинов Р.Т. считает: «строгого математического определения риска в настоящее время не существует» [6, с.31]. Мы будем использовать следующее понятие риска: «риск – это возможность отклонения каких-либо величин от их желаемый значений», а под мерой риска будем понимать «разницу между желаемым значением показателя качества функционирования процесса и реализовавшимся значением». Заметим, что именно такое понятие широко используются для оценки микроэкономических рисков [7, с. 38, 45-50].

Наконец, указанному виду неопределенностей как раз и отвечает принцип минимаксного сожаления, предложенный Леонардом Сэвиджем в 1951 г. в статье [8]. Согласно этому принципу, *гарантированным по риску решением* (ГРР) задачи Г будем называть пару (x^r, Φ^r), определяемую цепочкой равенств

$$\min_{x\in X} \max_{y\in Y} \Phi(x,y) = \max_{y\in Y} \Phi(x^r, y) = \Phi^r, \quad (4)$$

где функция риска (сожаления)

$$\Phi(x,y) = \max_{z\in X} f(z,y) - f(x,y), \quad (5)$$

значение которой называют *риском (по Сэвиджу).*

Заметим, что

a) из (5) получаем $\Phi(x, y) \geqslant 0 \ \forall x \in X, y \in Y$ (наилучший риск - нулевой);

b) если $f(x, y)$ непрерывна на произведении компактов $X \times Y$, то ГРР существует в задаче Γ;

c) согласно операции *внутреннего максимума* из (4) $(\max\limits_{y \in Y} \Phi(x, y) = \Phi[x])$ каждой стратегии $x \in X$ отвечает «своя» гарантия по риску $\Phi[x] \geqslant \Phi(x, y) \ \forall y \in Y$, и из таких гарантий операция *внешнего минимума* в (4) $\min\limits_{x \in X} \Phi[x] = \Phi[x^r] = \Phi^r$ выделяет наименьшую, ибо $\Phi^r \leqslant \Phi[x] \ \forall x \in X$ и $\Phi^r = \Phi[x^r] \geqslant \Phi(x, y) \ \forall y \in Y$. Здесь, в отличие от ГИР, гарантии по риску $\Phi[x]$ ограничивают функцию риска $\Phi(x, y)$ сверху. Таким образом, ЛПР, являясь рискофилом, стремится в Γ за счет выбора своей стратегии $x \in X$ уменьшить свой риск $\Phi(x, y)$. При этом он вынужден учитывать возможность реализации любой неопределенности $y \in Y$ («самый хороший» риск - нулевой).

Замечание 1. *Итак, построение ГРР (гарантированного по рискам решения) в задаче* Γ *проводится в 4 этапа.*

Этап 1. *Каждой ситуации* $x \in X$ *ставится в соответствие функция* $f[y] = \max\limits_{x \in X} f(x, y)$.

Этап 2. *Строится функция риска* $\Phi(x, y) = f[y] - f(x, y)$.

Этап 3. *В результате операции внутреннего максимума из (4) определяется гарантия по риску* $\max\limits_{y \in Y} \Phi(x, y) = \max\limits_{y \in Y} (f[y] - - f(x, y)) = \Phi[x] \geqslant \Phi(x, y) \ \forall y \in Y$ *для каждой стратегии* $x \in X$.

Этап 4. *Согласно операции внешнего минимума из (4) находится наименьший гарантированный риск* $\Phi^r = \min\limits_{x \in X} \Phi[x] = \Phi[x^r]$, *и тогда пара: план диверсификации* $(1 - x_d^r - x_e^r, x_d^r, x_e^r)$ *и гарантия* Φ^r *объявляются ГРР задачи* Γ

Остановимся на «оптимизирующем смысле» гарантированного по риску решения (x^r, Φ^r) задачи Γ, именно, что означает (или что «обеспечивает»?) такая стратегия $x^r = (x_d^r, x_e^r)$ и такой риск Φ^r (с точки зрения ЛПР)? Ответ в том, что согласно этапу 1, каждой неопределенности $y \in Y$ ставится в соответствие максимальный годовой доход $f[y] = \max\limits_{x} f(x, y)$, если бы неопределенность y в задаче Γ реализовались бы на самом деле.

А согласно этапу 2 функция риска $\Phi(x, y) = f[y] - f(x, y)$ характеризует, насколько исход $f(x, y)$ «не дотягивает» до вышеупомянутого максимального дохода $f[y]$, и как раз поэтому ЛПР стремится разность $f[y]-f(x,y)$ возможно уменьшить (за счет выбора $x \in X$).

Далее, согласно этапу 3, каждой стратегии $x \in X$ ставится в соответствие наибольшая (по y) такая разность $\Phi[x] = \max_{y \in Y}(f[y]-f(x,y))$ – наибольший (гарантированный) «зазор» между «самым хорошим для ЛПР» доходом $f[y]$ и реализующимся при фиксированной стратегии $x \in X$ доходом $f(x,y)$.

Наконец, следуя этапу 4, из всех таких «зазоров» $\Phi[x]$ ЛПР выбирает наименьший «зазор» $\Phi^r = \Phi[x^r]$, который «обеспечивается» стратегией $x^r = (x^r_d, x^r_e)$ из ГРР (x^r, Φ^r). Итак, ЛПР, следуя стратегии $x^r \in X$, «одним выстрелом убивает сразу двух зайцев», именно,

во-первых, при любых колебаниях курсов доллара и евро $y \in Y$ (к концу года) число Φ^r ограничивает сверху все возможные «зазоры» $\Phi(x^r, y)$, ибо $\Phi(x^r, y) \leqslant \Phi^r = \Phi[x^r]\ \forall y \in Y$;

во-вторых, «зазор» $\Phi^r = \Phi[x^r]$ будет «самым маленьким» из всех $\Phi[x]$, ибо $\Phi[x] \leqslant \Phi^r = \Phi[x^r]\ \forall x \in X$.

Построение явного вида ГИР и ГГР для задачи диверсификации только по двум депозитам (рублевому и валютному) на конец года в [9, с. 58], такая же задача, но уже и для рисконейтрала в [10, с.117-135], гарантированным по риску решениям в многокритериальных задачах и бескоалиционных играх посвящены книги [11, 12, 13]. В следующем разделе как раз, следуя этапам 1-4, и найдем явный вид гарантированного по риску решения задачи Г.

3. Явный вид гарантированного по риску решения задачи Г

Итак, пусть в Г множества стратегий X и неопределенностей Y заданы в (2), а критерий $f(x,y)$ определен в (1). Для построения ГРР будем следовать этапам 1-4 из замечания 1.

<u>Этап 1.</u> В задаче Г каждой неопределенности $y = (y_d, y_e) \in Y = [a_d, b_d] \times [a_e, b_e]$ ставится в соответствие множество X, которое представляет собой прямоугольный треугольник AOB (рис. 1).

Для всякого $y \in Y$ функция $f(x,y)$ из (1) линейна по компонентам вектора $x = (x_d, x_e)$ и поэтому может достигать своего $\max_{x \in X} f(x,y)$ лишь в угловых точках – вершинах треугольника OAB. Поэтому, с учетом явного вида $f(x,y)$ из (1), будет

$$\max_{x \in X} f(x,y) = \{(1+r) \vee [\frac{1+d_d}{K_d}y_d] \vee [\frac{1+d_e}{K_e}y_e]\} = f[y],$$

здесь «$\vee$» - бинарная связка «или».

<u>Этап 2.</u> Согласно (5) тогда функция риска будет

$\Phi(x,y) = f[y] - f(x,y) =$

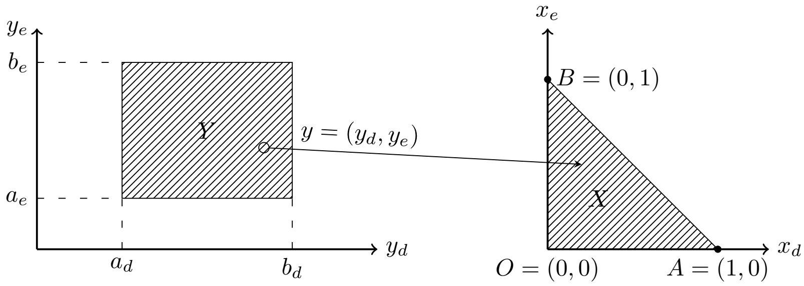


Рис. 1

$$= \begin{cases} \Phi_1(x,y) = 1 + r - f(x,y) = [1 + r - \frac{1+d_d}{K_d} y_d]x_d + [1 + r - \frac{1+d_e}{K_e} y_e]x_e, \\ \vee\Phi_2(x,y) = \frac{1+d_d}{K_d} y_d - f(x,y) = (1 - x_d)[\frac{1+d_d}{K_d} y_d - (1+r)] + [(1+r) - \frac{1+d_e}{K_e} y_e]x_e, \\ \vee\Phi_3(x,y) = \frac{1+d_e}{K_e} y_e - f(x,y) = [1 + r - \frac{1+d_d}{K_d} y_d]x_d + [\frac{1+d_e}{K_e} y_e - (1+r)]x_e. \end{cases}$$

Этап 3. Для каждой стратегии $x \in X$ найдем гарантированный риск

$$\Phi[x] = \max_{y \in Y} \Phi(x,y) =$$

$$= \max_{y \in Y} \left\{ \begin{matrix} [1 + r - \frac{1+d_d}{K_d} y_d]x_d + [1 + r - \frac{1+d_e}{K_e} y_e]x_e, \\ [\frac{1+d_d}{K_d} y_d - (1+r)](1 - x_d) + [1 + r - \frac{1+d_e}{K_e} y_e]x_e, \\ [1 + r - \frac{1+d_d}{K_d} y_d]x_d + [\frac{1+d_e}{K_e} y_e - (1+r)](1 - x_e), \end{matrix} \right\} =$$

$$= \max \left\{ \begin{matrix} [1 + r - \frac{1+d_d}{K_d} a_d]x_d + [1 + r - \frac{1+d_e}{K_e} a_e]x_e = \Phi_1[x], \\ [\frac{1+d_d}{K_d} b_d - (1+r)](1 - x_d) + [1 + r - \frac{1+d_e}{K_e} a_e]x_e = \Phi_2[x], \\ [1 + r - \frac{1+d_d}{K_d} a_d]x_d + [\frac{1+d_e}{K_e} b_e - (1+r)](1 - x_e) = \Phi_3[x], \end{matrix} \right\} =$$

$$= \max_{i=1,2,3} \{\Phi_i[x]\}. \tag{6}$$

т.к. постоянные $r > 0, d_i > 0, b_i > a_i > 0, K_i > 0 (i = d, e)$.

Замечание 2. *Далее, для сокращения записей, будем использовать обозначения*

$$\alpha_d = [1 + r - \frac{1+d_d}{K_d} a_d], \ \alpha_e = [1 + r - \frac{1+d_e}{K_e} a_e],$$

$$\beta_d = [\frac{1+d_d}{K_d} b_d - (1+r)], \ \beta_e = [\frac{1+d_e}{K_e} b_e - (1+r)]. \tag{7}$$

Отсюда,

$$\alpha_e + \beta_d = \frac{1+d_d}{K_d} b_d - \frac{1+d_e}{K_e} a_e, \ \alpha_d + \beta_e = \frac{1+d_e}{K_e} b_e - \frac{1+d_d}{K_d} a_d,$$

$$\alpha_d + \beta_d = \frac{1+d_d}{K_d}(b_d - a_d), \ \alpha_e + \beta_e = \frac{1+d_e}{K_e}(b_e - a_e),$$

$$\beta_d - \alpha_d = \frac{1+d_d}{K_d}(b_d + a_d) - 2(1+r),\ \beta_e - \alpha_e = \frac{1+d_e}{K_e}(b_e + a_e) - 2(1+r),$$

$$\alpha_d - \beta_e = 2(1+r) - (\frac{1+d_d}{K_d}a_d + \frac{1+d_e}{K_e}b_e), \tag{8}$$

$$\alpha_e - \beta_d = 2(1+r) - (\frac{1+d_e}{K_e}a_e + \frac{1+d_d}{K_d}b_d),$$

$$\alpha_e - \alpha_d = \frac{1+d_d}{K_d}a_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e.$$

Лемма 1. *Если постоянные $\alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$, то справедливо*

$$[\alpha_i \leqslant \beta_i\ (i = d, e)] \Longrightarrow [\alpha_e \alpha_d \leqslant \beta_e \beta_d].$$

В самом деле, имеет место цепочка импликаций

$$[(\alpha_e \leqslant \beta_e) \wedge (\alpha_d \leqslant \beta_d)] \Longrightarrow [(\alpha_e \alpha_d \leqslant \beta_e \alpha_d) \wedge (\alpha_d \beta_e \leqslant \beta_e \beta_d)] \Longrightarrow [\alpha_e \alpha_d \leqslant \beta_e \beta_d]. \tag{9}$$

Лемма 2. *Если постоянные $\alpha_i \geqslant 0 \wedge \beta_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$, то*

$$\frac{1+d_d}{K_d}b_d \geqslant \frac{1+d_e}{K_e}a_e,\ \frac{1+d_e}{K_e}b_e \geqslant \frac{1+d_d}{K_d}a_d,$$

$$\frac{1+d_d}{K_d}b_d \geqslant \frac{1+d_d}{K_d}a_d,\ \frac{1+d_e}{K_e}b_e \geqslant \frac{1+d_e}{K_e}a_e. \tag{10}$$

Доказательство 1. *Так как $[\alpha_i \geqslant 0] \Longrightarrow [1+r \geqslant \frac{1+d_i}{K_i}a_i] \wedge [\frac{1+d_j}{K_i}b_j \geqslant (1+r)]$ $(i, j = d, e)$, то отсюда сразу получаем справедливость (10).*

Замечание 3. *С учетом обозначений (8), а также $x_e = 1 - x_d$, для (6) имеем*

$$\Phi[x] = max\,\{\Phi_1[x] = \alpha_d x_d + \alpha_e x_e,\ \Phi_2[x] = \beta_d(1 - x_d) + \alpha_e x_e,$$

$$\Phi_3[x] = \alpha_d x_d + \beta_e(1 - x_e)\}\ \forall x \in X.$$

Этап 4. Чтобы обеспечить, согласно (5) и (6), неравенство $\Phi(x, y) \geqslant 0$ $\forall (x, y) \in X \times Y$, достаточно считать выполненным

Условие 1. *Постоянные $\alpha_i \geqslant 0, \beta_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$. Очевидно, что условие 1 имеет место, если*

$$\alpha_i \leqslant \frac{1+r}{1+d_i}K_i \leqslant b_i \quad (i = d, e).$$

В теории исследований операций установлено [14, с. 55], что максимум выпуклой (и, в частности, линейной) функции на выпуклом многограннике (здесь треугольник AOB из рис. 2) достигается на его границе. Поэтому далее находим минимизаторы $x^r = arg\min_x \Phi[x]$ из (6) на сторонах OA, OB и AB треугольника AOB отдельно, и затем, в качестве Φ^r используем наименьшее из $\min_{x \in X} \Phi[x]$. С этой целью выделим три случая.

Случай 1 (*сторона* $AO = \{x_d \in [0,1],\ x_e = 0\}$. *Тогда стратегия* $x = (x_d, 0)$). *Возвращаясь теперь к (6), с учетом* $x_e = 0$, *получаем*

$$\Phi[x] = max\,\{\Phi_1[x_d, 0] = \alpha_d x_d = \Phi_3[x_d, 0],\ \Phi_2[x_d, 0] = (1 - x_d)\beta_d\}.$$

При выполнении условия 1 график $\Phi[x]$ *представлен на рис. 2, где выделен жирной линией.*

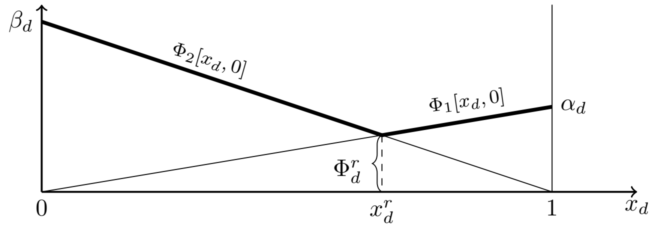


Рис. 2

Из этого рисунка следует, что $\min\limits_{x_d} \Phi[x] = \Phi[x_d^r, 0] = \Phi_d^r$. *Тогда* $\alpha_d x_d^r = (1 - x_d^r)\beta_d$, *и поэтому*

$$x_d^r = \frac{\beta_d}{\alpha_d + \beta_d} = \frac{\frac{1+d_d}{K_d} b_d - (1+r)}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d - a_d)} = \frac{b_d - \frac{1+r}{1+d_d} K_d}{b_d - a_d},$$

$$1 - x_d^r = \frac{\alpha_d}{\alpha_d + \beta_d} = \frac{\frac{1+r}{1+d_d} K_d - a_d}{b_d - a_d}.$$

Наконец,

$$\Phi_g^r = \Phi_1[x_d^r, 0] = \alpha_d x_d^r = \frac{\alpha_d \beta_d}{\alpha_d + \beta_d} = \frac{[\frac{1+r}{1+d_d} K_d - a_d][b_d - \frac{1+r}{1+d_d} K_d]\frac{1+d_d}{K_d}}{b_d - a_d}.$$

Итак, получили

Утверждение 2. *Если в задаче*

$$\Gamma_d = \langle X = X_d = [0,1],\ Y = Y_d = [a_d, b_d], f(x_d,\, 0,\, y_d)\rangle$$

имеет место цепочка неравенств

$$a_d < \frac{1+r}{1+d_d} K_d < b_d,$$

то гарантированное по риску решение Γ_d *будет*

$$(1 - x_d^r, x_d^r, 0, \Phi_d^r) = (\frac{\alpha_d}{\alpha_d + \beta_d}, \frac{\beta_d}{\alpha_d + \beta_d}, 0, \frac{\alpha_d \beta_d}{\alpha_d + \beta_d}) =$$

$$= (\frac{\frac{1+r}{1+d_d} K_d - a_d}{b_d - a_d}, \frac{b_d - \frac{1+r}{1+d_d} K_d}{b_d - a_d}, 0, \frac{[\frac{1+r}{1+d_d} K_d - a_d][b_d - \frac{1+r}{1+d_d} K_d]\frac{1+d_d}{K_d}}{b_d - a_d}). \tag{11}$$

Утверждение 2a. *Если в той же задаче* Γ_d

a) $b_d \leqslant K_d\frac{1+r}{1+d_d}$, *то гарантированное по риску решение (ГРР) имеет вид (0,1,0,0),*

b) $a_d \geqslant K_d\frac{1+r}{1+d_d}$, *то ГРР задачи* Γ_d *будет (1,0,0,0).*

Справедливость утверждения 2a фактически установлена (при переобозначениях $a = a_d, b = b_d, K = K_d$) на стр. 123-124 книги [10].

Аналогично устанавливается справедливость для

Случай 2 (Сторона $BO = \{x_d = 0, x_e \in [0, 1]\}$).

Утверждение 3. *Если в задаче*

$$\Gamma_e = \langle X = X_e = [0, 1], Y = Y_e = [a_e, b_e], f(0, x_e, y_e)\rangle$$

имеет место

$$a_e < \frac{1+r}{1+d_e}K_e < b_e,$$

то гарантированное по риску решение Γ_e *будет*

$$(1 - x_e^r, 0, x_e^r, \Phi_e^r) = (\frac{\alpha_e}{\alpha_e + \beta_e}, 0, \frac{\beta_e}{\alpha_e + \beta_e}, \frac{\alpha_e\beta_e}{\alpha_e + \beta_e}) =$$

$$= (\frac{\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e}{b_e - a_e}, 0, \frac{b_e - \frac{1+r}{1+d_e}K_e}{b_e - a_e}, \frac{[\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e][b_e - \frac{1+r}{1+d_e}K_e]\frac{1+d_e}{K_e}}{b_e - a_e}). \tag{12}$$

Аналогично утверждению 2a справедливо

Утверждение 3a. *Если в задаче* Γ_d

a) $b_e \leqslant K_e\frac{1+r}{1+d_e}$, *то ГРР имеет вид (0,0,1,0),*

b) $a_e \geqslant K_e\frac{1+r}{1+d_e}$, *то ГРР задачи* Γ_d *будет (1,0,0,0).*

Случай 3 (гипотенуза $AB = \{x_d + x_e = 1, x_i \geqslant 0\ (i = d, e)\}$) В этом случае (6) примет, с учетом $x_d = 1 - x_e$, вид

$$\Phi[x] = max\,\{\Phi_1[x] = \alpha_d + (\alpha_e - \alpha_d)x_e, \Phi_2[x] = (\beta_d + \alpha_e)x_e, \Phi_3[x] = (\alpha_d + \beta_e)(1 - x_e)\}.$$

Рассмотрим здесь три варианта.

Вариант 3a

Введем M - точку пересечения отрезков $\Phi_2[x]$ и $\Phi_3[x]$ (рис. 3). Здесь и далее для сокращения записи будем обозначать $\Phi_i[x] = \Phi_i[x_e]$ (на самом деле в нашем случае $x = (1 - x_e, x_e)$), и потребуем, чтобы $\Phi_2[x_e^r] \geqslant \Phi_1[x_e^r]$, т.е. (см. рис. 3) выполнялось неравенство

$$MN \geqslant KN$$

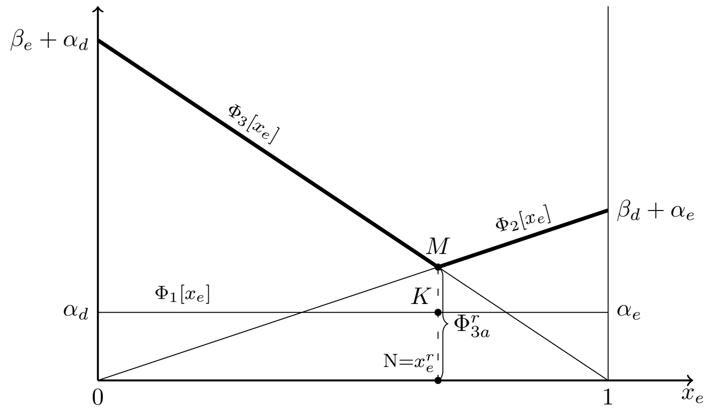


Рис. 3

Лемма 3. *Если*

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i \ (i=d,e), \tag{13}$$

то $MN \geqslant KN$, *т.е., напомним,* $\Phi_2[x_e^r] \geqslant \Phi_1[x_e^r]$.

В самом деле, из $\{\Phi_2[x_e^r]=\Phi_3[x_e^r]\} \Longleftrightarrow \{(\beta_d+\alpha_e)x_e^r=(\beta_e+\alpha_d)(1-x_e^r)\}$ находим, с учетом (8),

$$x_e^r=\frac{\beta_e+\alpha_d}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}=\frac{\frac{1+d_d}{K_d}b_d-\frac{1+d_e}{K_e}a_e}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d)+\frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)}. \tag{14}$$

Так как, согласно (10), (13), (14) будет $x_e^r \geqslant 0$, а

$$1-x_e^r=\frac{\beta_d+\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}=\frac{\frac{1+d_e}{K_e}b_e-\frac{1+d_d}{K_d}a_d}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d)+\frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)},$$

то тогда

$$\Phi_1[x_e^r]=\alpha_d(1-x_e^r)+\alpha_e x_e^r=\frac{\alpha_d(\beta_d+\alpha_e)+\alpha_e(\beta_e+\alpha_d)}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}=$$

$$=\frac{\alpha_d\alpha_e+\alpha_d\beta_d+\alpha_e\beta_e+\alpha_e\alpha_d}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}.$$

Но

$$\Phi_{3a}^r=\Phi_2[x_e^r]=(\beta_d+\alpha_e)x_e^r=\frac{(\beta_d+\alpha_e)(\beta_e+\alpha_d)}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}=$$

$$=\frac{\beta_e\beta_d+\alpha_e\beta_e+\alpha_d\beta_d+\alpha_e\alpha_d}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}=\frac{(\frac{1+d_d}{K_d}b_d-\frac{1+d_e}{K_e}a_e)(\frac{1+d_e}{K_e}b_e-\frac{1+d_d}{K_d}a_d)}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d)+\frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)}. \tag{15}$$

Наконец, согласно лемме 1, имеет место импликация

$$[0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i \ (i = d, e)] \Longrightarrow [\alpha_e \alpha_d \leqslant \beta_e \beta_d],$$

что и доказывает лемму 3.

Лемма 4. *Если*

$$a_i < \frac{1+r}{1+d_i} K_i \leqslant \frac{b_i + a_i}{2} \ (i = d, e), \tag{16}$$

то

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant \beta_i \ (i = d, e). \tag{17}$$

Доказательство 2. *Из (16) и $a_i < b_i$ следует, что*

$$a_i < \frac{1+r}{1+d_i} K_i < b_i \ (i = d, e).$$

Тогда

$$[\frac{1+r}{1+d_i} K_i - a_i] \frac{1+d_i}{K_i} = \alpha_i \geqslant 0,$$

$$[b_i - \frac{1+r}{1+d_i} K_i] \frac{1+d_i}{K_i} = \beta_i > 0,$$

т.е.

$$\alpha_i \geqslant 0, \beta > 0 \ (i = d, e).$$

Далее используем цепочку эквиваленций

$$[\beta_i \geqslant \alpha_i] \Longleftrightarrow [\beta_i - \alpha_i \geqslant 0] \Longleftrightarrow [\frac{1+d_i}{K_i}(b_i + a_i) - 2(1+r) \geqslant 0] \Longleftrightarrow [\frac{b_i + a_i}{2}] \geqslant [\frac{1+r}{1+d_i} K_i] \ (i = d, e).$$

Итак, если выполняется цепочка неравенств (16), то имеет место (17).

Утверждение 4. *Если в задаче* Γ

$$a_i < \frac{1+r}{1+d_i} K_i \leqslant \frac{b_i + a_i}{2} \ (i = d, e),$$

то гарантированное по риску решение задачи Γ *имеет вид*

$$(0, 1 - x_e^r, x_e^r, \Phi_{3a}^r) = (0, \frac{\beta_d + \alpha_e}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d}, \frac{\beta_e + \alpha_d}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d}, \frac{\alpha_d(\beta_d + \alpha_e) + \alpha_e(\beta_e + \alpha_d)}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d}) =$$

$$= (0, \frac{\frac{1+d_e}{K_e} b_e - \frac{1+d_d}{K_d} a_d}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d - a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e - a_e)}, \frac{\frac{1+d_d}{K_d} b_d - \frac{1+d_e}{K_e} a_e}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d - a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e - a_e)},$$

$$\frac{(\frac{1+d_d}{K_d} b_d - \frac{1+d_e}{K_e} a_e)(\frac{1+d_e}{K_e} b_e - \frac{1+d_d}{K_d} a_d)}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d - a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e - a_e)}). \tag{18}$$

Доказательство 3. *Функция* $\Phi[x] = \max\limits_{i=1,2,3}\{\Phi_i[x]\}$ *выделена на рис. 3 жирной линией. Но тогда* $\min\limits_{x\in X}\Phi[x]$ *достигается в точке* x_e^r. *Поэтому, гарантированный риск* $\Phi_{3a}^r = \Phi_1[x_e^r] = MN$, *т.к.* $\{MN \geqslant KN\} \Longleftrightarrow \{\Phi_j[x_e^r] \geqslant \Phi_1[x_e^r]\ (j = 2,3)\}$.

Итак, при выполнении (16) вкладчик, имея в распоряжении 1 рубль, в случае 3a ничего не вкладывает в рублевый депозит, в долларовый вносит $1 - x_e^r$ *и, наконец, оставшуюся часть* x_e^r *на депозит в евро. В этом случае в конце года вкладчик получит максимально возможную наращенную (гарантированную) сумму вклада с риском, не большим* Φ_{3a}^r *(при любых курсах валют* $y = (y_d, y_e) \in Y$*).* Вариант 3b.

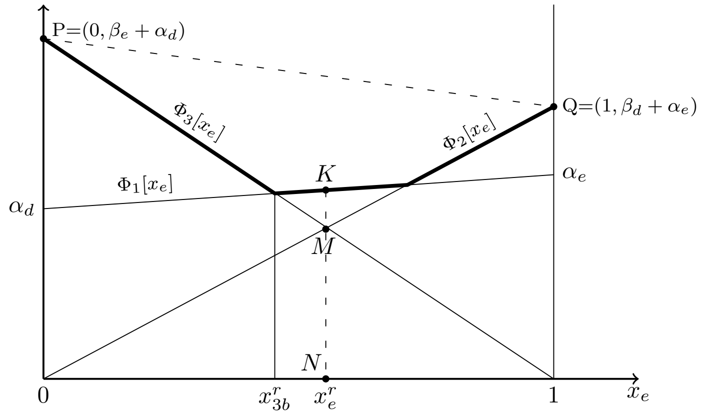


Рис. 4

Следующие заключительные варианты 3b и 3c относятся к случаю, когда $KN > MN$ (см. рис. 4), т.е. $\Phi_1[x_e^r] > \Phi_2[x_e^r] = \Phi_3[x_e^r]$. Заметим, что вследствие $\beta_i \geqslant 0$, $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$ будет $\beta_d + \alpha_e \geqslant \alpha_e$ и $\beta_e + \alpha_d \geqslant \alpha_d$, и поэтому точки отрезка $\Phi_1[x_e]$ не могут находиться выше отрезка PQ. В связи с этим дальнейшие и заключительные варианты будут различаться лишь условиями $\alpha_d < \alpha_e$, $\alpha_d > \alpha_e$, $\alpha_d = \alpha_e$.

Итак, в варианте 3b предполагаем, что $\alpha_d < \alpha_e$ и, конечно, $KN > MN$.

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 5. *Если*

$$0 < \beta_i < \alpha_i\ (i = d, e),$$

то

$$KN > MN \Longleftrightarrow \Phi_1[x_e^r] > \Phi_2[x_e^r] = \Phi_3[x_e^r].$$

В самом деле, в доказательстве леммы 3 установлено,

$$\Phi_2[x_e^r] = \frac{\beta_e\beta_d + \alpha_e\beta_e + \alpha_d\beta_d + \alpha_e\alpha_d}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d},$$

$$\Phi_1[x_e^r] = \frac{\alpha_e\alpha_d + \alpha_e\beta_e + \alpha_d\beta_d + \alpha_e\alpha_d}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d}.$$

Тогда $KN > MN \iff \Phi_1[x_e^r] > \Phi_2[x_e^r]$ и это условие имеет место, если

$$\alpha_d\alpha_e > \beta_d\beta_e.$$

Такое строгое неравенство выполнено при

$$\alpha_i > \beta_i > 0 \ (i = d, e).$$

Доказательство этого факта проводится также, как в лемме 1, в помощью цепочки импликаций

$$[(\alpha_d > \beta_d) \wedge (\alpha_e > \beta_e)] \Longrightarrow [(\alpha_d\alpha_e > \beta_d\alpha_e) \wedge (\beta_d\alpha_e > \beta_e\beta_d)] \Longrightarrow (\alpha_d\alpha_e > \beta_e\beta_d).$$

Лемма 6. *Если*

$$\frac{b_i + a_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i \leqslant b_i \ (i = d, e), \tag{19}$$

то

$$0 \leqslant \beta_i < \alpha_i \ (i = d, e). \tag{20}$$

Доказательство 4. *Из (19) и $a_i < b_i$ следует, что*

$$a_i < \frac{1+r}{1+d_i}K_i \leqslant b_i \ (i = d, e),$$

поэтому

$$[\frac{1+r}{1+d_i}K_i - a_i]\frac{1+d_i}{K_i} = 1 + r - \frac{1+d_i}{K_i}a_i = \alpha_i > 0,$$

$$[b_i - \frac{1+r}{1+d_i}K_i]\frac{1+d_i}{K_i} = \frac{1+d_i}{K_i}b_i - (1+r) \geqslant 0,$$

т.е. $\alpha_i > 0$ и $\beta_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$.

Далее, справедливость (20) устанавливается с помощью цепочки эквиваленций и (8):

$$(\alpha_i > \beta_i) \iff (\alpha_i - \beta_i > 0) \iff (2(1+r) - \frac{1+d_i}{K_i}(a_i + b_i) > 0) \iff$$

$$\iff (\frac{1+r}{1+d_i}K_i - \frac{a_i+b_i}{2} > 0) \iff (\frac{1+r}{1+d_i}K_i > \frac{a_i+b_i}{2}) \ (i = d, e).$$

Утверждение 5 *Если в задаче Γ выполняются условия*

1^0. $\frac{b_i+a_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i < b_i \ (i = d, e)$,

2^0. $\frac{1+d_d}{K_d}a_d > \frac{1+d_e}{K_e}a_e$,

то гарантированное по риску решение примет вид

$$(0, 1-x^r_{3b}, x^r_{3b}, \Phi^r_{3b}) = (0, \frac{\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e}, \frac{\beta_e}{\beta_e+\alpha_e}, \frac{\alpha_d\alpha_e+\alpha_e\beta_e}{\beta_e+\alpha_e}) =$$

$$= (0, \frac{\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e}{b_e-a_e}, \frac{b_e-\frac{1+r}{1+d_e}K_e}{b_e-a_e}, \frac{(\frac{1+d_e}{K_e}b_e - \frac{1+d_d}{K_d}a_d)(\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e)}{b_e-a_e}). \qquad (21)$$

Доказательство 5. *Требование (1^0) утверждения 5 обеспечивает неравенство $KN > MN$, а условие (2^0) и (8) приводит к $\alpha_d < \alpha_e$, в результате чего график функции риска $\Phi[x_e] = \max\limits_{i=1,2,3}\Phi_i[x_e]$ примет вид ломаной, выделенной на рис. 4 жирной линией. Тогда для построения $\min\limits_x\Phi[x_e] = \Phi^r_{3b}$ следует найти x^r_{3b}, исходя из равенства $\Phi_3[x^r_{3b}] = \Phi_1[x^r_{3b}]$, т.е. из*

$$(\alpha_d+\beta_e)(1-x^r_{3b}) = \alpha_d + (\alpha_e-\alpha_d)x^r_{3b}.$$

Отсюда

$$x^r_{3b} = \frac{\beta_e}{\beta_e+\alpha_e} = \frac{b_e-\frac{1+r}{1+d_e}K_e}{b_e-a_e},$$

$$(1-x^r_{3b}) = \frac{\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e} = \frac{\frac{1+r}{1+d_e}K_e-a_e}{b_e-a_e},$$

тогда

$$\Phi^r_{3b} = \Phi_3[x^r_{3b}] = \frac{(\alpha_d+\beta_e)\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e} = \frac{(\frac{1+d_e}{K_e}b_e - \frac{1+d_d}{K_d}a_d)(\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e)}{b_e-a_e}$$

и $\Phi^r_{3b} > 0$, т.к. $\alpha_i > 0, \beta_i \geqslant 0$ $(i = d, e)$. Вариант 3c. Здесь, в отличие от предыдущего варианта 3b, будем считать $\alpha_d > \alpha_e$ (см. рис. 5).

Аналогично утверждению 5 доказывается

Утверждение 6. *Если в задаче* Γ

1^0. $\frac{b_i+a_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i < b_i$ $(i = d, e)$,

2^0. $\frac{1+d_d}{K_d}a_d < \frac{1+d_e}{K_e}a_e$,

то гарантированное по риску решение имеет вид

$$(0, 1-x^r_{3c}, x^r_{3c}, \Phi^r_{3c}) = (0, \frac{\beta_d}{\beta_d+\alpha_d}, \frac{\alpha_d}{\beta_d+\alpha_d}, \frac{\beta_d\alpha_d+\alpha_e\alpha_d}{\beta_d+\alpha_d}) =$$

$$= (0, \frac{b_d-\frac{1+r}{1+d_d}K_d}{b_d-a_d}, \frac{\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d}{b_d-a_d}, \frac{(\frac{1+d_d}{K_d}b_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e)(\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d)}{b_d-a_d}). \qquad (22)$$

Доказательство 6. *Как и при варианте 3b требование (1^0) обеспечивает неравенство $KN > MN$, а (2^0) и (8) приводит к $\alpha_d > \alpha_e$ (см рис. 5). Поэтому функция*

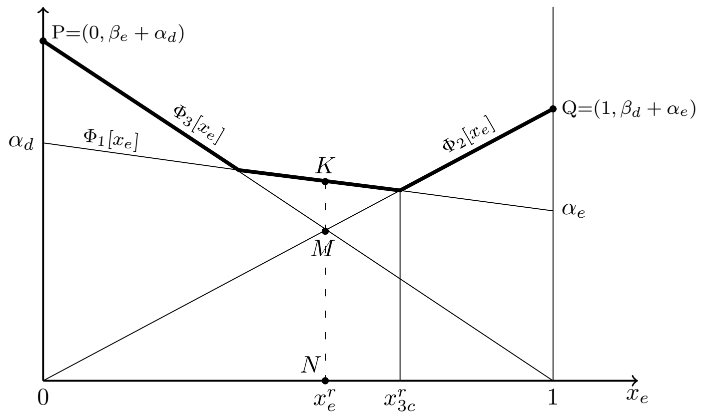


Рис. 5

риска $\Phi[x_e] = \max\limits_{i=1,2,3} \Phi_i[x_e]$ *в этом случае имеет вид ломаной, выделенной на рис. 5 жирной линией. Отсюда минимизатор* x_{3c}^r *функции* $\Phi[x_e]$ *находится из равенства* $\Phi_1[x_{3c}^r] =$
$= \Phi_2[x_{3c}^r]$, *т.е.*

$$\alpha_d + (\alpha_e - \alpha_d)x_{3c}^r = (\beta_d + \alpha_e)x_{3c}^r.$$

Итак,

$$x_{3c}^r = \frac{\alpha_d}{\beta_d + \alpha_d} = \frac{1 + r - \frac{1+d_d}{K_d}a_d}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d - a_d)} = \frac{\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d}{b_d - a_d},$$

$$1 - x_{3c}^r = \frac{\beta_d}{\beta_d + \alpha_d} = \frac{b_d - \frac{1+r}{1+d_d}K_d}{b_d - a_d},$$

$$\Phi_{3c}^r = \Phi_2[x_{3c}^r] = \frac{(\beta_d + \alpha_e)\alpha_e}{\beta_d + \alpha_d} = \frac{\beta_d\alpha_d + \alpha_e\alpha_d}{\beta_d + \alpha_d} = \frac{(\frac{1+d_d}{K_d}b_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e)(\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d)}{b_d - a_d}.$$

Замечание 4. *Пусть в* Γ

$$\frac{b_i + a_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}a_i \leqslant b_i \ (i = d, e),$$

$$\frac{1+d_d}{K_d}a_d = \frac{1+d_e}{K_e}a_e.$$

Тогда гарантированное по риску решение Γ *будет*

$$(0, 1 - x_e^*, x_e^*, \alpha_d) = (0, 1 - x_e^*, x_e^*, 1 + r - \frac{1+d_i}{K_i}a_i) \ (i = d, e) \tag{23}$$

при $\forall\, x_e^* \in [x_e^{(1)}, x_e^{(2)}] = [\frac{\beta_e}{\alpha_d+\beta_e}, \frac{\alpha_d}{\alpha_e+\beta_d}]$.

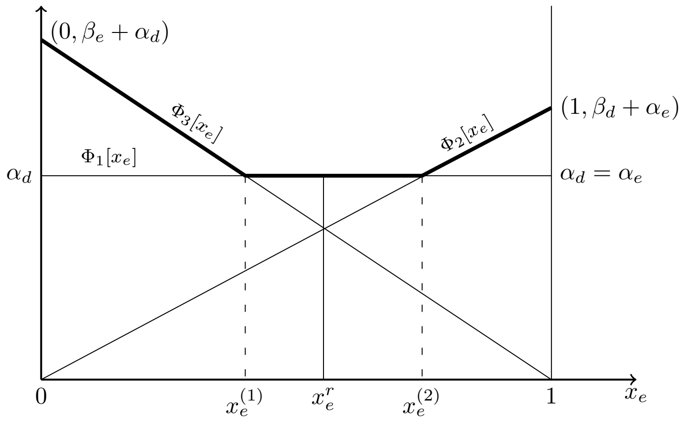


Рис. 6

Доказательство проводится с помощью рис. 6, число $x_e^{(1)}$ определяется из равенства $\Phi_3[x_e^{(1)}] = \Phi_1[x_e^{(1)}] = \alpha_d$, а $x_e^{(2)}$ – из условия $\Phi_2[x_e^{(2)}] = \alpha_d$.

4. Заключение

Переходим к завершению этапа 4, именно к построению минимальной из гарантий с помощью утверждений 2-6, отличающихся ограничениями на $\frac{1+r}{1+d_i}K_i$ $(i = d, e)$. Для этого,

во-первых, объединяем требования утверждений 2, 3 и 4,

во-вторых, то же самое проделываем с утверждениями 2, 3 и 5 (или 6).

Объединение утверждений 2, 3 и 4.

Итак, при $a_i < \frac{1+r}{a+d_i}K_i \leqslant \frac{a_i+b_i}{2}$ $(i = d, e)$, строим минимум из гарантий Φ_d^r, Φ_e^r (из утверждений 2 и 3) и Φ_{3a}^r (из утверждения 4). Таким образом, найдем минимум из трех чисел

$$\Phi^* = min\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3a}^r\}.$$

a) если этот минимум равен Φ_d^r, то гарантированное по риску решение (ГРР) задачи Г примет вид (11),

b) если $\Phi^* = \Phi_e^r$, то ГРР задачи Г доставляет формула (12),

c) если такой минимум Φ^* совпадает с Φ_{3a}^r, то явный вид ГРР в (18).

В результате первая итоговая

Теорема 1. *Пусть в задаче* Г *имеет место*

$$a_i < \frac{1+r}{1+d_i}K_i \leqslant \frac{a_i+b_i}{2} \; (i = d, e).$$

Тогда,

если (a) $min\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3a}^r\} = \Phi_d^r$*, то ГРР примет вид*

$$(1-x_d^r, x_d^r, 0, \Phi_d^r) = (\frac{\alpha_d}{\alpha_d+\beta_d}, \frac{\beta_d}{\alpha_d+\beta_d}, 0, \frac{\alpha_d\beta_d}{\alpha_d+\beta_d}) =$$

$$= (\frac{\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d}{b_d-a_d}, \frac{b_d - \frac{1+r}{1+d_d}K_d}{b_d-a_d}, 0, \frac{\frac{1+d_d}{K_d}[\frac{1+r}{1+d_d}K_d - a_d][b_d - \frac{1+r}{1+d_e}K_d]}{b_d-a_d} = \Phi_d^r \geqslant 0); \quad (24)$$

если (b) $min\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3a}^r\} = \Phi_e^r$, *то ГРР будет*

$$(1-x_e^r, 0, x_e^r, \Phi_e^r) = (\frac{\alpha_e}{\alpha_e+\beta_e}, 0, \frac{\beta_e}{\alpha_e+\beta_e}, \frac{\alpha_e\beta_e}{\alpha_e+\beta_e}) =$$

$$= (\frac{\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e}{b_e-a_e}, 0, \frac{b_e - \frac{1+r}{1+d_e}K_e}{b_e-a_e}, \frac{\frac{1+d_e}{K_e}[\frac{1+r}{1+d_e}K_e - a_e][b_e - \frac{1+r}{1+d_e}K_e]}{b_e-a_e} = \Phi_e^r \geqslant 0); \quad (25)$$

если (c) $min\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3a}^r\} = \Phi_{3a}^r$, *то ГРР имеет вид*

$$(0, 1-x_e^r, x_e^r, \Phi_{3a}^r) = (0, \frac{\beta_d+\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}, \frac{\beta_e+\alpha_d}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}, \frac{\alpha_d(\beta_d+\alpha_e)+\alpha_e(\beta_e+\alpha_d)}{\beta_e+\alpha_e+\beta_d+\alpha_d}) =$$

$$= (0, \frac{\frac{1+d_e}{K_e}b_e - \frac{1+d_d}{K_d}a_d}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)}, \frac{\frac{1+d_d}{K_d}b_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)},$$
$$\frac{(\frac{1+d_d}{K_d}b_d - \frac{1+d_e}{K_e}a_e)(\frac{1+d_e}{K_e}b_e - \frac{1+d_d}{K_d}a_d)}{\frac{1+d_d}{K_d}(b_d-a_d) + \frac{1+d_e}{K_e}(b_e-a_e)}), \quad (26)$$

здесь $\alpha_i = \frac{1+d_i}{K_i}(\frac{1+r}{1+d_i}K_i - a_i)$, $\beta_i = \frac{1+d_i}{K_i}(b_i - \frac{1+r}{1+d_i}K_i)$ $(i = d, e)$.

Объединение утверждений 2, 3 и 5.

Итак, пусть теперь $0 < \frac{\alpha_i+\beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i < b_i$ $(i = d, e)$. Снова находим $min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3b}^r\}$ и $min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3c}^r\}$.

Лемма 7. *При* $\frac{a_i+b_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i}K_i < b_i$ *имеют место*

$$\Phi_e^r < \Phi_{3b}^r,$$

$$\Phi_d^r < \Phi_{3c}^r.$$

Доказательство 7. *Действительно,* $\alpha_i = K\frac{1+r}{1+d_i} - a_i > 0$ $(i = d, e)$ *и тогда*

$$\Phi_e^r = \frac{\alpha_e\beta_e}{\alpha_e+\beta_e} < \frac{\alpha_e\beta_e+\alpha_d\alpha_e}{\alpha_e+\beta_e} = \frac{\alpha_e\beta_e}{\alpha_e+\beta_e} + \frac{\alpha_d\alpha_e}{\alpha_e+\beta_e} = \Phi_{3b}^r = \Phi_e^r + \frac{\alpha_d\alpha_e}{\beta_e+\alpha_e},$$

$$\Phi_d^r = \frac{\alpha_d\beta_d}{\alpha_d+\beta_d} < \frac{\alpha_d\beta_d+\alpha_e\alpha_d}{\alpha_d+\beta_d} = \Phi_{3b}^r = \frac{\alpha_d\beta_d}{\alpha_d+\beta_d} + \frac{\alpha_d\alpha_d}{\alpha_d+\beta_d} = \Phi_d^r + \frac{\alpha_e\alpha_d}{\beta_d+\alpha_d},$$

т.к. имеет место импликация

$$[\alpha_i > 0, \beta_i \geqslant 0 \ (i = d, e)] \Longrightarrow [\frac{\alpha_e \alpha_d}{\alpha_d + \beta_d} > 0].$$

С учетом леммы 7 получаем

Теорема 2. *Если выполнено*

$$\frac{\alpha_i + \beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i} K_i < b_i \ (i = d, e),$$

то гарантированное по риску решение задачи Γ

a) *при* $\Phi_d^r \leqslant \Phi_e^r$ *имеет вид (24),*
b) *при* $\Phi_d^r \geqslant \Phi_e^r$ *имеет вид (25).*

Доказательство 8. *В случае* $\Phi_d^r \leqslant \Phi_e^r$*, с учетом леммы 7, имеем*

$$min \{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3b}^r\} = \Phi_d^r,$$

а в случае $\Phi_d^r \geqslant \Phi_e^r$ -

$$min \{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \Phi_{3c}^r\} = \Phi_e^r.$$

Отсюда и из этапа 4, а также из утверждений 2 и 3 следует справедливость теоремы 2.

Объединение утверждений 2, 3 и 6.

Как и в предыдущем случае предполагаем, что $\frac{\alpha_i+\beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i} K_i < b_i \ (i = d, e)$ и $\frac{1+d_d}{K_d} a_d = \frac{1+d_e}{K_e} a_e$.

Здесь, как и в теореме 1, следует найти $min \{\Phi_d^r, \Phi_{3b}^r, \alpha_d = \alpha_e\}$ и затем, в зависимости от того, при каком из этих трех чисел данный минимум достигается и с помощью соответствующему ему утверждению (2, 3 или 6) построим ГРР. Именно, имеет место

Теорема 3. *Пусть в задаче* Γ *имеет место*

$$\frac{\alpha_i + \beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i} K_i < b_i \ (i = d, e),$$

$$\left[\frac{1+d_d}{K_d} a_d = \frac{1+d_e}{K_e} a_e\right] \Longleftrightarrow \left[\alpha = \alpha_e = \alpha_d\right].$$

Тогда, если

a) $min \{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \Phi_d^r$, *то ГРР имеет вид (24);*
b) $min \{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \Phi_e^r$, *то ГРР имеет вид (25),*
c) $min \{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \alpha$, *то ГРР имеет вид (23).*

5. Выводы

Статью завершим рекомендациями к использованию ЛПРом теорем 1, 2 и 3 для практического построения гарантированного по риску решения (ГРР) в задаче Г.

Шаг 1 Выписать действующие в настоящий момент, числовые значения r, d_e, d_r, K_e, K_d, а также (с помощью экспертов, рекомендаций экономистов или собственных предположений) задать численные значения границ изменения (через год) курсов доллара $[a_d, b_d]$ и евро $[a_e, b_e]$.

Шаг 2 Вычислить семь чисел

$$\alpha_i = K_i \frac{1+r}{1+d_i} - a_i, \beta_i = b_i - K_i \frac{1+r}{1+d_i},$$

$$\Phi_i = \frac{\alpha_i \beta_i}{\alpha_i + \beta_i}\ (i = d, e), \Phi_{3a}^r = \frac{\alpha_d(\beta_d + \alpha_e) + \alpha_e(\beta_e + \alpha_d)}{\beta_e + \alpha_e + \beta_d + \alpha_d}.$$

Шаг 3 Определить $\Phi^0 = min\{\Phi_d, \Phi_e\}$.

Шаг 4 - вариант 1. Если $a_i < \frac{1+r}{1+d_i} K_i < \frac{\alpha_i + \beta_i}{2}$ $(i = d, e)$, то (согласно теореме 1 и утверждению 4) построить $\Phi^* = min\{\Phi^0, \Phi_{3a}^r\}$ и затем, если

a) $\Phi^* = \Phi_d^r$, то ГРР будет

$$(1 - x_d^r - x_e^r, x_d^r, x_e^r, \Phi^r) = (\frac{\alpha_d}{\alpha_d + \beta_d}, \frac{\beta_d}{\alpha_d + \beta_d}, 0, \frac{\alpha_d \beta_d}{\alpha_d + \beta_d});$$

b) $\Phi^* = \Phi_e^r$, то ГРР имеет вид

$$(\frac{\alpha_e}{\alpha_e + \beta_e}, 0, \frac{\beta_e}{\alpha_e + \beta_e}, \frac{\alpha_e \beta_e}{\alpha_e + \beta_e});$$

c) $\Phi^* = \Phi_{3a}^r$, то ГРР станет

$$(0, \frac{\beta_d + \alpha_e}{\alpha_e + \beta_e + \alpha_d + \beta_d}, \frac{\beta_e + \alpha_d}{\alpha_e + \beta_e + \alpha_d + \beta_d}, \frac{\alpha_d(\beta_d + \alpha_e) + \alpha_e(\beta_e + \alpha_d)}{\alpha_e + \beta_e + \alpha_d + \beta_d}).$$

Шаг 4 - вариант 2. Если $\frac{\alpha_i + \beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i} K_i < b_i$ $(i = d, e)$ и $\alpha_e \neq \alpha_d$, то (согласно теореме 2),

a) при $\Phi_d^r \leqslant \Phi_e^r$ искомое ГРР примет вид

$$(1 - x_d^r - x_e^r, x_d^r, x_e^r, \Phi^r) = (\frac{\alpha_d}{\alpha_d + \beta_d}, \frac{\beta_d}{\alpha_d + \beta_d}, 0, \frac{\alpha_d \beta_d}{\alpha_d + \beta_d});$$

b) при $\Phi_d^r > \Phi_e^r$ ГРР задачи Г будет

$$(\frac{\alpha_e}{\alpha_e + \beta_e}, 0, \frac{\beta_e}{\alpha_e + \beta_e}, \frac{\alpha_e \beta_e}{\alpha_e + \beta_e}).$$

Шаг 4 - вариант 3. Если $\frac{\alpha_i + \beta_i}{2} < \frac{1+r}{1+d_i} K_i$ $(i = d, e)$ и $\alpha = \alpha_e = \alpha_d$, то (согласно теореме 3), ГРР имеет вид

$$(1-x_d^r-x_e^r, x_d^r, x_e^r, \Phi^r) = \begin{cases} (24) \text{ при } min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \Phi_d^r, \\ (25) \text{ при } min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \Phi_e^r, \\ (23) \text{ при } min\,\{\Phi_d^r, \Phi_e^r, \alpha\} = \alpha. \end{cases}$$

Наконец (согласно утверждениям 2а и 3а) гарантированное по риску решение (ГРР) будет

$$(1-x_d^r-x_e^r, x_d^r, x_e^r, \Phi^r) = \begin{cases} (1,0,0,0) \text{ при } a_d \geqslant K_d\frac{1+r}{1+d_d}, \\ (1,0,0,0) \text{ при } a_e \geqslant K_e\frac{1+r}{1+d_e}, \\ (0,1,0,0) \text{ при } b_d \leqslant K_d\frac{1+r}{1+d_d}, \\ (0,0,1,0) \text{ при } b_e \leqslant K_e\frac{1+r}{1+d_e}. \end{cases}$$

Таким образом, в отличие от вариантов 1-3 шага 4, в данном случае все деньги направляются только в один депозит (рублевый (1,0,0,0), долларовый (0,1,0,0) и евро (0,0,1,0)) и с нулевым риском (т.е. «наверняка!») обеспечат себе «самый большой» гарантированный выигрыш: при рублевом $(1+r)$, при долларовом $\frac{1+d_d}{K_d}a_d$ и в евро $\frac{1+d_e}{K_e}a_e$ соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-01-90408).

Список литературы

[1] Черемных Ю.Н. *Микроэкономика. Продвинутый уровень.* - М.: ИНФА-М, 2008.

[2] Жуковский В.И., Солдатов Н.Г. *К задаче диверсификации по трем депозитам.* // Вестник Удмурского университета. “Математика, механика, компьютерные науки“, 2013, вып. 4, с. 55-61.

[3] Wald A. *Statistical Decision Functions.* - N.Y.: Wiley, 1950.

[4] Венцель Е.С. *Исследование операций.* - М.: Знания, 1976.

[5] Шахов В.В. *Введение в страхование. Экономический аспект.* - М.: Финансы и статистика, 1994.

[6] Спразетдинов Т.К., Спразетдинов Р.Т. *Проблема риска и его моделирование.* // Проблемы человеческого риска, 2007, №1, с. 31-43.

[7] Цветкова Е.В., Орлюкова И.О. *Риски в экономической деятельности.* - Санкт-Петербург: СПбИВЭСЭП, 2002.

[8] Sawage L.Y. *The theory of statistical decision.* // J. American Statistic Association, 1951, №46, p. 55-67.

[9] Капитоненко В.В. *Финансовая матиматика и её приложения.* - М.: Изд-во ПРИОР, 2000.

[10] Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н. *Уравновешивание конфликтов и приложения.* - М.: URSS, ЛЕНАНД, 2012.

[11] Жуковский В.И., Жуковская Л.В. *Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенностях.* - М.: Едиториал URSS, 2004.

[12] Zhukovskiy V.I.*Lyapunov Functions in Differential Games.* - London and N.Y.: Taylor and Francis, 2003.

[13] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The Vector - Valued Maximin.* - N.Y., etc.: Academic Press, 1994.

[14] Морозов В.В., Сухарев А.Г. и Федоров В.В. *Исследование операций в задачах и упражнениях.* - М.: Высшая школа, 1986.

Guaranteed on risk solution in problem of sum distribution into three deposits (in rubles, dollars and euros) *We are looking at problems of sum distribution (in rubles) into three deposits (in rubles, dollars and euros) in order to obtain the maximum annual income (in terms of rubles). The decision maker (investor) does not know the real dollar and the euro rates at the end of the year, and has to look at some possible rate boundaries or limits for them. The solution of this problem depends on the readiness of the decision-maker to take risks. The contents of this article are the ways to construct the decisions of guaranteed risks onto account. This paper is actually devoted to constructing of a guaranteed on risk solution.*

Keywords: probability measure, mixed strategy, weak compactness in itself, guarantee, Berge-Vaisman equilibrium, Nash equilibrium, maximin.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 198–210.

УДК 519.853.53 MSC2000: 49K35, 91410

В. И. Жуковский, М. И. Высокос

ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО ИСХОДАМ И РИСКАМ РЕШЕНИЕ В ОДНОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

На основе модификации максимина предлагается понятие Парето-гарантированного по исходам и рискам решения для однокритериальной задачи при неопределенности. Найден явный вид в задаче диверсификации единичного вклада по рублевому и валютному депозитам.

Ключевые слова: Риск, неопределенность, стратегия, максимин, исход

E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Введение

В статье рассматривается однокритериальная задача $\Gamma = \langle X, Y, f(x,y)\rangle$ в условиях риска и неопределенности (игра с природой). В рамках этой задачи лицо, принимающее решение (ЛПР), выбирает свою стратегию $x \in X \subseteq \mathbf{R}^n$ так, чтобы достичь возможно большего исхода (значения скалярного критерия $f(x,y)$), ориентируясь при этом на реализацию любой чистой неопределенности $y \in \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$. Предполагается, что о неопределенностях ЛПР известны лишь границы изменения и отсутствуют какие-либо вероятностные характеристики. Такая модель Γ возникает, например, на рынке сбыта, где продавец действует с учетом импорта (или конкуренции), добиваясь как можно большей прибыли.

Заметим, что подробные обзоры различных видов неопределенности (неполноты и (или) неточности информации об условиях реализации выбранной стратегии) можно найти, например, в книгах [1, с. 106-114; 2, с. 20-32] и др.

Наличие неопределенностей приводит к множественности исходов $f(x,Y) = = \{f(x,y) | \forall y \in Y\}$, «порожденных» каждой конкретной стратегией $x \in X$. «Сужается» $f(x,Y)$ за счет рисков. Однако, как считает известный специалист в области оптимизации Т.К. Сиразединов, «строгого математического определения риска в настоящее время не существует» [3, с. 31]. В книге [4, с. 15] приводится целая серия различных понятий риска. Все из них, кроме приводимого далее, требуют статистических данных. Однако зачастую у исследователя операций (ИО) просто отсутствует возможность описать «поведение» неопределенностей статистическими методами. Как раз этого случая будем в дальнейшем придерживаться.

Итак, приведем определение: «Риск - это возможность отклонения каких-либо величин от их желаемых значений».

Отметим, что именно такому понятию риска отвечают общепринятые многочисленные микроэкономические риски, вид которых приведен в работе [5, с. 40-50].

Численно оценивается риск значением функции сожаления (риска)

$$\Phi(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y), \tag{1}$$

предложенной Леонардом Сэвиджем [6] в 1951 г. Лауреат Нобелевской премии по экономике Милтон Фридман сказал о Сэвидже, что тот «... был одним из немногих встреченных мною людей, о которых я, не задумываясь, могу сказать - гений». Предложенный в работе [6] принцип минимаксного сожаления, сводящийся к построению пары (x^S, Φ^S) согласно

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} \Phi(x, y) = \max_{y \in Y} \Phi(x^S, y) = \Phi^S,$$

активно используется для решения задачи Г наравне с принципом максимина (гарантированного результата по Вальду [7]), сводящемуся к нахождению пары (x^g, f^g) такой, что

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^g, y) = f^g.$$

Сама функция сожаления $\Phi(x, y)$ в отечественной и мировой литературе получила название «функция риска по Сэвиджу». Именно функцию риска $\Phi(x, y)$ и привлекаем в настоящей статье для оценки гарантированного риска.

Каким бывает отношение людей к риску? В ряде книг по финансовой экономике [1, с. 103; 5, с. 5; 8, с. 343] выделено три группы субъектов в зависимости от отношения их к риску:

- противники риска — рискофобы (люди, боящиеся риска и отвергающие его);
- любители риска — рискофилы;
- рисконейтралы (люди, нейтрально относящиеся к риску).

В экономике считается, что большинство людей относятся к противникам риска. На вопрос о том, как фактор неопределенности влияет на поведение людей, экономист обычно отвечает: «Люди не любят рисковать и готовы заплатить деньги за то, чтобы избежать бремени риска» [5, с.6].

Однако возникают ситуации, когда риск просто необходим. Люди прошлого выходили в море, что часто было связано с риском для жизни. Существует даже латинская пословица: «Плавать по морю необходимо, жить — не очень». Так любители риска относятся и к альпинизму, авиации, экстремальным ситуациям. Более того, предпринимательство и риск — понятия неразделимые. В экономической практике принято, что некоторая доля риска является необходимым условием увеличения дохода. Зачастую возникают ситуации, когда без риска вообще обойтись невозможно (например, в чрезвычайных ситуациях).

Наконец, значительное большинство относится к рисконейтралам. Они будут пускаться пусть даже и в рискованные ситуации, но в том только случае, если доход будет выглядеть достаточно привлекательным и одновременно, чтобы возможно меньше нужно было бы рисковать.

В соответствии с приведенной градацией, работы [9,10] и глава 3 из книги [11] посвящены исследованию бескоалиционных игр с позиции противников риска; те же игры но с позиции любителей риска — в работе [12]; взгляд рисконейтрала на принятие решений в Γ — в этой статье. Принятый здесь подход предполагается в дальнейшем распространить на бескоалиционные и кооперативные игры при неопределенности. Именно с этой целью в статье привлечены некоторые положения теории «игр с приоритетом в действиях у управляющего центра, получивших название иерархических игр Гермейера» [13, с. 8].

Итак, цели настоящей работы:

- формализовать гарантированное решение задачи Γ с *одновременным* учетом исходов и рисков (т.е. с позиции рисконейтрала);

- найти явный вид такого решения в задаче диверсификации вклада (на год) на рублевый и валютный депозиты.

1. Информированные неопределенности

Иерархическая игра представляет собой «математическую модель конфликтной ситуации при фиксированной последовательности ходов и обменом информацией участников» [14, с. 477]. Активное развитие теории иерархических тгр в России началось со второй половины прошлого века и возглавлялось Юрием Борисовичем Гермейером ([13-17] и др.), продолжается сейчас его учениками. В игре двух лиц «такие игры описывают взаимодействие между верхним (ведущим) и нижним (ведомым) уровнями управления» [17, с.103], именно, задают порядок ходов игроков, т.е. очередность выбора стратегий и (возможно) сообщение о таком выборе партнеру.

Основной момент в иерархических играх заключается в выборе класса используемых стратегий, зависящий от имеющейся у игроков информации. В теории иерархических игр Гермейера сформулировано точное математическое определение информационного расширения игры [14, с. 497; 15, с. 49-51], которое, в частном случае, приводит к использованию в задаче Γ наряду с чистыми неопределеностями $y \in Y$ так называемых, «информированных неопределенностей» — m-векторфункций $y(x) : X \to Y$. Именно такие стратегии применялись в работе [18, с. 353] при изучении детерминированного варианта минимаксной антагонистической позиционной игры, в которой игроки наделены различными информационными возможностями. Такие возможности определяют соответствующие виды стратегий, что приводит, в свою очередь, к различным видам иерархических игр (Γ_1, Γ_2 и т.д.) [13,15,17].

Наконец, в теории иерархических игр принято выделять *оперирующую сторону*— ЛПР, несущего полную ответственость за результаты, и *исследователя операций* — консультанта, который готовит аргументированные варианты решений.

При рассмотрении задачи Γ будем считать, что один игрок (у нас ИО) ограничен только чистыми стратегиями $x \in X$, другой же может использовать «любую мыслимую информацию» [18, с. 353]. В часности, он может знать стратегию x (информационная дискриминация ИО) и формировать неопределенность в виде функции $y(x) : X \to Y$. В этом случае критерий в задаче Γ определяется скалярной функцией $f(x, y(x))$, а исходом будет (при выборе ИО конкретной стратегии $x^* \in X$) значение $f(x^*, y(x^*))$. Такие функции $y(\cdot) \in Y^X$ (множеству m-вектор функций $y(x)$, определенных на X со значениями в Y) в теории дифференциальных игр иногда называют *контрстратегиями*, а задача вида Γ, где в качестве неопределенности используются контрстратегии $y(x)$, названа в работе [18, с. 354] *минимаксной игрой*. Повторим, что такие задачи возникают при информационной дискриминации ИО и дополнительной информированности игрока, «ведающего» формированием неопределенностей. Заметим также, что далее будем применять подмножество Y^X, именно множество $C(X, Y)$ всех покомпонентно непрерывных на X m-вектор-функций $y(x) : X \to Y$.

Итак, в статье используется два вида неопределенностей: чистые $y \in Y$ и информированные $y(\cdot) \in Y^X$.

Приведем два результата из теории исследования операций, касающиеся «информированных неопределенностей».

Лемма 1. *Если в* $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$ *множества* X, Y *суть компакты, а* $f(x, y)$ *напрерывна на* $X \times Y$*, то:*

а) *функция максимума (минимума)* $\max\limits_{x \in X} f(x, y)$ *(соответственно,* $\min\limits_{y \in Y} f(x, y)$*) непрерывна на* Y *(соответственно, на* X*);*

б) *если дополнительно* Y *- выпукло и* $f(x, y)$ *строго выпукла по* $y \in Y$ *при каждом* $x \in X$*, то существует единственная непрерывная функция* $y(\cdot) \in C(X, Y)$ *такая, что*

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y(x)) \ \forall x \in X.$$

Напомним, что $f(x, y)$ *строго выпукла по* $y \in Y$ при каждом $x \in X$, если

$$f(x, \lambda y^{(1)} + (1 - \lambda) y^{(2)}) < \lambda f(x, y^{(1)}) + (1 - \lambda) f(x, y^{(2)})$$

при любых постоянных $\lambda \in (0,1)$ и всяких $y^{(j)} \in Y$, $(j=1,2)$, $y^{(1)} \neq y^{(2)}$.

Утверждение (*а*) — известный факт, имеющийся во многих учебных книгах, например, [19, с. 146], а справедливость утверждения (*б*) указана, например, в книге [20, с. 54].

2. Двухкритериальная задача, соответствующая задаче Γ

Однокритериальной задаче

$$\Gamma = \langle X, Y, f(x,y)\rangle \tag{2}$$

поставим в соответствие двухкритериальную при неопределенности

$$\bar{\Gamma} = \langle X, Y, F(x,y)\rangle, \tag{3}$$

где двухкомпонентная вектор-функция

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)), F_1(x,y) = f(x,y), F_2(x,y) = -\Phi(x,y). \tag{4}$$

В задаче (3) ИО выбором стратегии $x \in X$ стремится к возможно *большим* значениям обоих исходов $F_i(x,y)$ $(i=1,2)$ одновременно (именно для такого «однообразия» в выражении (4) функция риска по Севиджу фигурирует со знаком «минус»). При этом ИО учитывает возможную реализацию любой неопределенности $y \in Y$ (или $y(\cdot) \in Y^X$).

Приведем ряд сведений из теории многокритериальных задач вида $\Gamma^{(2)} = \langle X, F[x]\rangle$, где $x \in X$ (множеству стратегий x у ИО), вектор критериев $F[x] = (F_1[x], F_2[x])$ определен на X. Используем для двух векторов $F^{(j)} = (F_1^{(j)}, F_2^{(j)})$, $j=1,2$, отношения *строгого порядка*:

$$\begin{array}{l} F^{(1)} < F^{(2)} \Leftrightarrow (F_i^{(1)} < F_i^{(2)},\ i=1,2) \\ F^{(1)} \not< F^{(2)} \Leftrightarrow \rceil(F^{(1)} < F^{(2)}), \end{array}$$

и *нестрогого порядка:*

$$\begin{array}{l} F^{(1)} = F^{(2)} \Leftrightarrow (F_i^{(1)} = F_i^{(2)},\ i=1,2), \\ F^{(1)} \neq F^{(2)} \Leftrightarrow \rceil(F^{(1)} = F^{(2)}), \\ F^{(1)} \ngeqslant F^{(2)} \Leftrightarrow (F_i^{(1)} \ngeqslant F_i^{(2)},\ i=1,2), \\ F^{(1)} \ngeq F^{(2)} \Leftrightarrow \rceil(F^{(1)} \geq F^{(2)} \wedge F^{(1)} \neq F^{(2)}). \end{array}$$

Перейдем к формализации двух максимальных векторных оптимумов:

1) стратегия $x^S \in X$ называется *максимальной по Слейтеру* в $\Gamma^{(2)} = \langle X, F[x]\rangle$, если

$$F[x^S] \not< F[x]\ \forall x \in X,$$

вектор $F[x^S]$ является *максимумом по Слейтеру* в $\Gamma^{(2)}$ (что эквивалентно: для каждой стратегии $x \in X$ найдется хотя бы один номер $j(x) = j \in \{1, 2\}$ такой, что $F_j(x) \leq F_j(x^S)$);

2) стратегия $x^P \in X$ называется *максимальной по Парето* в $\Gamma^{(2)}$, если

$$F[x^P] \nleq F[x] \ \forall x \in X,$$

а вектор $F[x^P] \in R^2$ есть *максимум по Парето* для $\Gamma^{(2)}$ (что эквивалентно любому из двух определений - для каждого $x \in X$:

а) либо $F[x^P] = F[x]$, либо $\exists j(x) = j \in \{1, 2\}$ такой, что $F_j[x] < F_j[x^P]$;

б) несовместна система неравенств $F_i[x] \geqslant F_i[x^P]$, $i = 1, 2$, из которых, по крайней мере, одно строгое).

Обозначим множество $x^S(x^P)$ через X^S (соответственно, X^P). Согласно определениям $X^P \subseteq X^S$, но они могут не совпадать. Факт максимальности (минимальности) в $\Gamma^{(2)}$ по Слейтеру (по Парето) обозначаем

$$F[x^S] = MAX^S_{x \in X} F[x] \ (F[x^P] = MAX^P_{x \in X} F[x]),$$

$$F[x^S] = MIN^S_{x \in X} F[x] \ (F[x^P] = MIN^P_{x \in X} F[x]).$$

Будем использовать и множества $F[X^S] = \{F[x] | x \in X^S\}$, $F[X^P] = \{F[x] | x \in X^P\}$. В теории многокритериальных задач [21, с. 158] установлены следующие факты:

Лемма 2. [21, с. 158]. *Если в $\Gamma^{(2)} = \langle X, F(x) \rangle$ множество X суть непустой компакт, а компоненты вектора $F[x]$ непрерывны, то множество $X^P \neq \emptyset$ и стратегия $x \in X$, найденная из*

$$\max_{x \in X} (\alpha_1 F_1[x] + \alpha_2 F_2[x]) = \alpha_1 F_1[x^P] + \alpha_2 F_2[x^P]$$

при каких-либо $\alpha_i = const > 0$ $(i = 1, 2)$, максимальна по Парето в $\Gamma^{(2)}$; множество X^P внутренне P-устойчиво, т.е. $\forall x^{(j)} \in X^P$ имеет место $F[x^{(1)}] \nleq F[x^{(2)}]$, а также внешне P-устойчиво, т.е. $\forall x \in X$ и $x \notin X^P$ существует стратегия $x^P \in X^P$ такая, что $F[x] \leq F[x^P]$.

Аналогично, имеет место

Лемма 3. *Пусть «информированная» неопределенность $y_P(x) \in Y^X$, найдена из*

$$\min_{y \in Y} [\alpha_1 F_1(x, y) + \alpha_2 F_2(x, y)] = \alpha_1 F_1(x, y_P(x)) + \alpha_2 F_2(x, y_p(x)) \ \forall x \in X,$$

при каких-либо $\alpha_i = const > 0$ $(i = 1, 2)$.

Тогда при каждом $x \in X$ неопределенность $y_P(x)$ минимальна по Парето в двухкритериальной задаче $\Gamma(x) = \langle x, Y, \{F_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle$, т.е. $F(x, y) \nleq F(x, y_P(x))$ $\forall x \in X$, $y \in Y$.

Замечание 1. Положим в леммах 2 и 3 постоянные $\alpha_1 = 1-\sigma$, $\alpha_2 = \sigma$, где постоянная $\sigma \in (0,1)$. Тогда, с учетом (1), а также $F_1(x,y) = f(x,y)$ и $F_2(x,y) = -\Phi(x,y)$ и обозначения

$$\varphi(x,y) = \alpha_1 F_1(x,y) + \alpha_2 F_2(x,y),$$

получаем

$$\begin{gathered}\varphi(x,y) = (1-\sigma)f(x,y) - \sigma\Phi(x,y) = \\ = f(x,y) - \sigma f(x,y) - \sigma[\max_{z\in X} f(z,y) - f(x,y)] = f(x,y) - \sigma \max_{z\in X} f(z,y).\end{gathered} \tag{5}$$

3. Парето-гарантированное по исходам и рискам решение

Интерпретация максимина «с позиции» двухуровневой иерархической игры двух лиц

Максиминное решение (x^g, f^g) задачи (2) определяется цепочкой равенств

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y} f(x^g,y) = f^g. \tag{6}$$

Используя «информированные неопределенности», выражение (6) можно представить как последовательное «действие» двух операций: *внутреннего минимума* – для игрока нижнего уровня – построение $y(x): X \to Y$ такого, что

$$\min_{y\in Y} f(x,y) = f(x,y(x)) = f[x] \ \forall x \in X; \tag{7}$$

предполагая, что вектор-функция $y(x)$ единственна, переходим к операции *внешнего максимума* (для игрока верхнего уровня иерархии)

$$\max_{x\in X} f(x,y(x)) = f(x^g, y(x^g)) = f^g. \tag{8}$$

Тогда в иерархической двухуровневой игре с одним игроком на каждом уровне:

первый ход за ИО - игроком верхнего уровня: он предает на нижний уровень «свои» возможные стратегии $x \in X$;

второй ход за игроком нижнего уровня - он аналитически конструирует $y(x)$ согласно (7) и, если $y(x)$ единственно, передает $y(x)$ на верхний уровень;

третий ход за игроком верхнего уровня - он находит пару (x^g, y^g) согласно (8).

Приведенное «трехходовое понятие» укладывается *полностью* в определение гарантированного результата первого (ведущего) игрока в игре Γ_1 (по Гермейеру), если в работе [17, с. 104] заменить функцию выигрыша ведомого на $-f(x,y)$. Еще раз подчеркнем, что аналог и модификацию такого «трехходового понятия» удобно применять к построению гарантированного решения с учетом исходов и рисков для бескоалиционного и кооперативного вариантов конфликта, здесь применим для формализации решения задачи Γ с позиции рисконейтрала.

Замечание 2. Максиминное решение определяется парой (x^g, f^g) по двум причинам:

а) каждой стратегии $x \in X$ (в результате операции *внутреннего минимума* (6)) ставится в соответствие гарантия $f[x]$, ибо

$$f[x] \leq f(x, y) \ \forall y \in Y$$

(так как исход $f[x]$ «обеспечивает себе» ИО при любых $y \in Y$ благодаря применению стратегии x);

б) из таких гарантий ЛПР выбирает наибольшую (максимальную), ибо

$$f^g = f[x^g] \geq f[x] \ \forall x \in X.$$

Итак, ЛПРу предлогается применить в задаче (2) стратегию x^g, тем самым «обеспечивая себе» наибольшую (максимальную) гарантию $f[x^g] = f(x^g, y(x^g)) \leq$ $\leq f(x^g, y) \ \forall y \in Y$. Этот же прием применим при формализации сильно гарантированного по исходам и рискам решения (СГР) задачи (3), (4).

Формализация

Здесь будем использовать функцию $\varphi(x, y) = f(x, y) - \sigma \max\limits_{z \in X} f(z, y)$ из замечания 1.

Определение 1. Пару $(x^P,\ F^P = F[x^P]) \in X \times R^2$ назовем *Парето-гарантированным по исходам и рискам решением* (ПГИР) однокритериальной задачи (2), если в задаче (3):

1^0) существует для каждой стратегии $x \in X$ и какой-либо хотя бы одной $\sigma \in (0, 1)$ своя паретовская гарантия $F[x] = (F_1[x], F_2[x])$ такая, что

$$\varphi[x] = \min_{y \in Y} \varphi(x, y) = \varphi(x, y_P(x)) \ \forall x \in X,$$
$$(F_1[x] = f(x, y_P(x)), F_2[x] = -\Phi(x, y_P(x)).$$

Тогда

$F[x] = F(x, y_P(x))$ является паретовской (а, значит, и слейтеровской) гарантией [22], ибо

$$F[x] \nleq F(x, y) \text{ (соответственно}, F[x] \nless F(x, y)) \ \forall y \in Y;$$

2^0) стратегия x^P максимальна по Парето ($x^P \in X^P$) в двухкритериальной «задаче гарантий» $\langle X, F[x] \rangle$, т.е. $F[x^P] \nleq F[x] \ \forall x \in X$.

Замечание 3. Отметим, что:

- п. 1^0 определения 1 связывает с каждой стратегией $x \in X$ векторную гарантию $F[x] \leq F(x, y) \ \forall y \in Y$ (аналог операции внутреннего минимума в определении максимина);

- п. 2^0 предлагает лицу, принимающему решение, применять максимальную (по Парето) гарантию $F[x^P]$ (аналог операции внешнего максимума), ибо при $x \in X$ и

$x \neq x^P$ увеличение одной из гарантий $F_j[x] > F_j[x^P]$ неизбежно влечет уменьшение другой $F_k[x] < F_k[x^P]$, $k \neq j \in \{1, 2\}$;

- вследствие внешней и внутренней P-устойчивости множества X^P, выбор лицом, принимающим решение, стратегии $x^P \in X^P$ «обеспечивает» ему «самую большую» – неулучшаемую векторную гарантию $F[x^P]$ (конечно, в рамках максимальности по Парето);

- гарантия $F_1[x]$ ограничивает исходы $f(x, y)$ снизу, ибо из $f(x, y) > F_1[x]$ следует ограничесние рисков $\Phi(x, y)$ снизу, так как тогда $\Phi(x, y) > \Phi[x]$ $\forall y \in Y$ и обратно. Поэтому предпринятый здесь подход полностью соответствует желаниям рисконейтрала (см. Введение) увеличить исход и одновременно уменьшить риск.

Иерархическая интерпретация определения 1

Как и в п. 3.1, рассматриваем двухуровневую игру с одним игроком на каждом уровне (рис. 1).

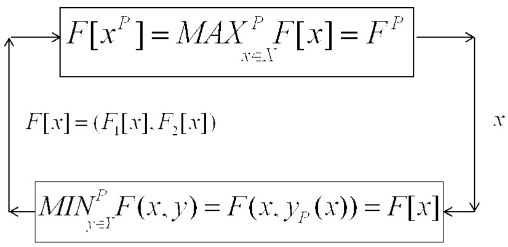


Рис. 1. Порядок построения ПГИР

Порядок построения СГР

Первый ход за игроком верхнего уровня: он, также как в понятии максимина, посылает на нижний уровень свои возможные стратегии $x \in X$.

Второй ход за игроком нижнего уровня; он аналитически конструирует две функции $F_i[x]$, $i = 1, 2$, согласно

$$F[x] = MIN^P_{y \in Y} F(x, y) = F(x, y_P(x)),\ F_i[x] = F_i(x, y_P(x))\ (i = 1, 2)\ \forall x \in X,$$

строя тем самым для каждой стратегии $x \in X$ векторную гарантию $F[x] = (F_1[x], F_2[x])$, и отправляет векторную гарантию $F[x]$ на верхний уровень иерархии.

Третий ход снова за игроком верхнего уровня: он находит максимальную по Парето стратегию x^P в двухкритериальной «задаче гарантий» $\langle X, F[x] \rangle$ и строит соответствующий вектор $F^P = (F_1[x^P], F_2[x^P])$. Тогда тройка $(x^P, F^P) \in X \times R^2$ и образует Парето-гарантированное по исходам и рискам решение задачи (2). «Двухкритериальный смысл» такого решения см. в замечании 3.

Замечание 4. Для построения явного вида Парето-гарантированного решения (x^P, F^P) определение 1 «диктует» следующие этапы.

Этап 1. Найти

$$\min_{y\in Y}\varphi(x,y)=\varphi(x,y_P(x))=\varphi[x]=(1-\sigma)F_1[x]+\sigma F_2[x]\ \forall x\in X. \tag{9}$$

Этап 2. Определить максимизатор

$$x^P = arg\max_{x\in X}\varphi(x,y_P(x)). \tag{10}$$

Этап 3. Найти векторную гарантию $F^P=(F_1[x^P],F_2[x^P])=(F_1^P=f^P=$ $=f(x^P,y_P(x^P)),\ F_2^P=-\Phi^P(x^P,y_P(x^P))=-\Phi^P$.

Тогда пара (x^P, F^P) является Парето-гарантированным по исходам и рискам решением задачи (2)

Замечание 5. Объединение (9) и (10) означает, что $x^P\in X$ является максиминной стратегией в антагонистической игре

$$\langle X, Y, \varphi(x,y)=f(x,y)-\sigma\max_{z\in X}f(z,y)\rangle,$$

где седловая точка (x^P, y_P) функции $\varphi(x,y)$ определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x,y_P)\le\varphi(x^P,y_P)\le\varphi(x^P,y)\ \forall x\in X,\ y\in Y, \tag{11}$$

что эквивалентно

$$\max_{x\in X}\varphi(x,y_P)=\min_{y\in Y}\max_{x\in X}\varphi(x,y)=\min_{y\in Y}\varphi(x^P,y)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}\varphi(x,y).$$

Отсюда получаем следующий способ построения Парето-гарантированного по исходам и рискам решением задачи (2).

I этап: найти $f[y]=\max_{z\in X}f(z,y)\ \forall y\in Y$;

II этап: построить скалярную функцию $\varphi(x,y)=f(x,y)-\sigma f[y]$ для постоянной $\sigma\in(0,1)$;

III этап: определить седловую точку $(x^P,y_P)\in X\times Y$ функции $\varphi(x,y)$ из (5);

IV этап: с помощью (x^P,y_P) вычислить два числа $f^P=f(x^P,y_P)$, $\Phi^P=$ $=\Phi^P(x^P,y_P)=f[y_P]-f(x^P,y_P)$. Тогда найденная тройка (x^P,f^P,Φ^P) и будет искомым ПГИР задачи (2).

Этот способ в следующем разделе применяется для задачи диверсификации вклада (на 1 год) по рублевому и валютному депозитам.

4. Задача о диверсификации

Математическая модель

Наращенную за год сумму единичного вклада по двум депозитам (рублевому и валютному) на конец года можно [23, с. 58-60] представить в виде

$$f(x,y) = x(1+r) + \frac{1-x}{K_0}(1+d)y, \qquad (12)$$

где r и d – процентные ставки по рублевому и валютному депозитам соответственно; K_0 и y – курс валюты (к рублю) в начале и в конце годового периода; $x \in [0,1]$ – дробь, которая определяет пропорцию, в которой вклад разделяется на рублевую и валютную части.

Согласно (12), x есть доля рублевого вложения, а остаток $1-x$ вкладчик конвертирует в валюту $\frac{1-x}{K_0}$ и помещает ее на валютный депозит. В конце года с помощью обратной конвертации валютный вклад по курсу y переводится в рубли и итоговая наличность определяется суммой $f(x,y)$ из (12). Для вкладчика требуется определить пропорцию x, при которой итоговая наличность $f(x,y)$ будет возможно большей. При этом следует учесть, что будущий курс валюты y, как правило, неизвестен. Но он все-таки может быть задан коридором возможных значений, именно, $y \in [a,b]$, где постоянные $b > a > 0$ заданы или выбраны априори.

Итак, математическую модель задачи диверсификации можно представить упорядоченной тройкой

$$\Gamma^* = \langle X = [0,1],\ Y = [a,b], f(x,y)\rangle,$$

где функция $f(x,y)$ определена в (12). Здесь $X = [0,1]$ – *множество стратегий* x у ЛПР (вкладчика), $Y = [a,b]$ – множество неопределенностей y, наконец, $f(x,y)$– -*функция полезности* вкладчика, значение которой в дальнейшем называется *исходом.* С точки зрения исследования операций, Γ^* есть однокритериальная задача принятия решений при неопределенности.

Замечание 6. Замечание 5 «диктует» способ построения Парето-гарантированного по исходам и рискам решения задачи Γ^*. Он сводится к выполнению трех этапов, именно,

I этап: построить скалярную функцию $f[y] = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x,y)$, и с ее помощью найти $\varphi(x,y) = f(x,y) - \sigma f[y]$, постоянная $\sigma \in (0,1)$;

II этап: определить седловую точку $(x^P, y_P) \in [0,1]\times[a,b]$ функции $\varphi(x,y)$, именно,

$$\max_{x\in[0,1]} \varphi(x,y_P) = \varphi(x^P,y_P) = \min_{y\in[a,b]} \varphi(x^P,y).$$

III этап: с помощью пары (x^P, y_P) вычислить два числа

$$f^P = f(x^P,y_P),\ \Phi^P = f[y_P] - f(x^P,y_P). \qquad (13)$$

Тогда найденная в результате тройка (x^P, f^P, Φ^P) как раз и образует Парето-гарантированное по исходам и рискам решение задачи Γ^*.

Явный вид Парето-гарантированного решения

Утверждение 1. Для задачи Γ^* Парето-гарантированное по исходам и рискам решение имеет вид

$$(x^r, f^r, \Phi^r) = \begin{cases} (1, 1+r, 0) & \text{при} \quad b < K_0\frac{1+r}{1+d}, \\ (0, \frac{1+d}{K_0}a, 0) & \text{при} \quad a > K_0\frac{1+r}{1+d}, \\ \text{для} & a \leq K_0\frac{1+r}{1+d} \leq b \\ (1, 1+r, 0) & \text{при} \quad a \leq y < K_0\frac{1+r}{1+d}, \\ (0, 1+r, 0) & \text{при} \quad K_0\frac{1+r}{1+d} \leq y \leq b. \end{cases} \tag{14}$$

Доказательство основывается на замечании 5.

Замечание 7. Чтобы использовать утверждение 1 следует,

- *во-первых,* по заданным постоянным K_0, a, b, r и d найти число $\frac{1+r}{1+d}K_0$,

- *во-вторых,* выяснить какое из четырех неравенств

$$b < \frac{1+r}{1+d}K_0,\ a > \frac{1+r}{1+d}K_0,\ a \leq y < \frac{1+r}{1+d}K_0 \text{ или } \frac{1+r}{1+d}K_0 \leq y \leq b$$

имеет место; для третьего и четвертого соотношений дополнительно учесть границы изменения неопределенности y,

-*в-третьих,* в зависимости от реализации хотя бы одного из этих четырех случаев, с помощью утверждения 1 выписать Парето-гарантированное по исходам и рискам решение (x^P, f^P, Φ^P).

Например, пусть $r = 0,12$, $d = 0,8$, $K_0 = 30$, $a = 30$ и $b = 40$. Тогда

$$\frac{1+r}{1+d}K_0 = \frac{1,12}{1,08}30 \cong 31,3 > a = 30.$$

Согласно третьей и четвертой строке из (14) будет

$$(x^P, f^P, \Phi^P) = \begin{cases} (1, 1+r, 0) & \text{при} \quad y \in [30; 31,3], \\ (0, 1+r, 0) & \text{при} \quad y \in [31,3; 40]. \end{cases}$$

Этот результат означает, что ЛПР получит один и тот же гарантированный выигрыш $1 + r$ с нулевым риском, вкладывая всю сумму в рублевый вклад, если неопределенность $y \in [30; 31,3)$ и в валютный, если $y \in [31,3; 40]$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-01-90408 Укр_а.

Список литературы

[1] Черемных Ю.Н. *Микроэкономика. Продвинутый уровень.* - М.: ИНФРА, – 2008.

[2] Жуковский В.И. *Риски при конфликтных ситуациях.* - М.: URSS, ЛЕНАНД, 2011.

[3] Сиразетдинов Т.К., Сиразетдинов Р.Т. *Проблемы риска и его моделирование* //Проблемы человеческого риска. - 2007. - № 1.-С. 31-43.

[4] Шахов В.В. *Введение в страхование. Экономический аспект.* - М.: Финансы и статистика, 1994.

[5] Цветкова Е.В., Арлюкова И.О. *Риски в экономической деятельности.* - СПб.: ИВЭСЭП, 2002.

[6] Savage L.Y. *The theory of statistical decision* // J. American Statistic Association.- 1951. № 46. - P. 55-67.

[7] Wald A. *Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis* // Annuals Math. Statist.- 1939. Vol. 10 - P. 299-326.

[8] Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. *Экономика.* - М.: Дело, 1998.

[9] Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры при неопределенности.* - М.: МНИИПУ, 1997.

[10] Zhukovskiy V.I. *Luapunov Function in Differential Games.*- London, N.-Y.: Taylor& Fransis, 2003.

[11] Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Линейно-квадратичные дифференциальные игры.*- Киев: Наукова Думка.- 1994.

[12] Жуковский В.И., Жуковская Л.В. *Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности.*- М.: Эдиториал УРСС. -2004.

[13] Гермейер Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами.* - М.: Наука. - 1978.

[14] Ватель И.А., Ерешко Ф.И. *Игра с иерархической структурой* // Математическая энциклопедия. - М. - 1979. - Т.2.

[15] Кукушкин Н.С., Морозов В.В. *Теория неантагонистических игр.* - М.: МГУ, 1984.

[16] Ватель И.А., Ерешко Ф.И. *Математика конфликта и сотрудничества.* - М.: Знание, 1974.

[17] Морозов В.В. *Основы теории игр.* - М.: Изд. отдел фак-та ВМиК МГУ, 2002.

[18] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* - М.: Наука, 1974.

[19] Дмитрук В.А. *Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс.* - М.: ВМиК МГУ, 2012.

[20] Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. *Исследование операций в задачах и упражнениях.* - М.: Высшая школа, 1968.

[21] Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* - М.: Наука, 1982.

[22] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The vector-Valued Maximin.* - N.-Y.: Academic Press, 1994.

[23] Капитоненко В.В. *Финансовая математика ее приложения.* - М.: ПРИОР, 2000.

Guaranteed in outcomes and risks solution for single-criterion problem

Concept of Pareto-guaranteed in outcomes and risks solution for single-criterion problem under uncertainty is proposed. It is based on a modification of the maximin. Explicit solution for the problem of a single contribution to the diversification of ruble and foreign currency deposit is found.

Keywords: Risk, uncertainty, strategy, maximin, outcome.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 211–221.

УДК 004.021 : 004.312.4

A. V. Dereza

DEFINITION OF TIME COMPONENT PETRI NET FOR DIFFERENT WAYS OF IT CONSTRUCTION

In article features of creation of a component Petri net with time characteristics are considered. Definitions for each possible way of construction of the temporary component model are formulated.

Key words: Component Petri net with time, component modeling, structural delay, behavioral delay

E-mail: gdevredina@ukr.net

Introduction

Creation of difficult industrial systems required not only for careful designing of working blocks and their communications, but also for rational management of necessary resources. Time is one of such resources and it's optimum use can lead to the essential reduction in price of manufacture. The theory of Petri nets [1], [2] allows to create and verify models with the true parallelism, what is extremely important for the modern computing systems. The extension of the existing Petri nets theory by adding of temporal property, allows to reflect more in detail dynamics of functioning of the researched task. But thus, because of explosive character in growth of the size of a state graph, formal verification becomes complicated considerably.

In search of a solution of *state explosion problem* at verification of Petri nets, the theory of component modeling and analysis of Petri nets has been created. Which basic property to "show"difficult, by the functional point of view, and the same type parts of an initial Petri net, facilitating and accelerating of verification [3], [4]. This is the result of the primary goal of component modeling — selection of compound component, what allows to receive the reduced model (concerning initial detailed), being adequate to initial investigated system.

Addition of the time characteristic to component modeling, will allow to receive more capacious representation of models of real time systems. After which it is possible to order in time the events of modeled structure (i.e. drawing up of schedules) already at an analysis stage of the component nets. Introduction of temporary restrictions probably at different stages of creation of the time component model. Namely: allocation a component in time model or introduction of the concrete time construction in existing component model.

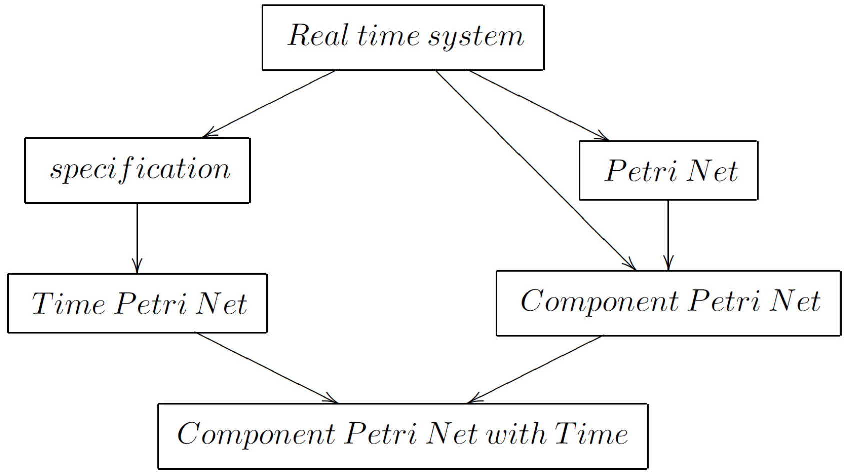
Specificity and properties of temporal extensions of Petri nets is formed by singularities of the specific researched systems, purpose setting at modeling and also existing methods of verification concrete and abstract models. There are [5] some basic approaches to introduction of the temporary characteristics in the device of modeling by Petri nets. The first of them consists in assigned clocks to the net's various elements(to the places [6], to the transitions [7], or to the processes [5]), whereas the second one uses so-called firing intervals [8], time delays of the transitions [12] or availability of labels [9]. Each of these approaches has many nuances.

The aim of the article is reviewing of singularities of introduction of the temporal characteristic in the component Petri net theory. And also the description of possibilities of the component analysis at various stages of creation of model of initial system with time.

Problem statement

Component Petri net (CN-net), as the modeling structure, has the important singularities. Places and transitions in a CN-net can be various types: finite sets of places and transitions include the subsets of composite components(components-places C_p and components-transitions C_t). Functioning of composite components in a CN-net is understood as the instant performance that allows to ignore internal operation of a composite component at this level of the model. The instant operation of the compound components for CN-net, for components causes it's being in an active condition some time [10], in what finds the display of two-aspect approach to functioning of compound components. This approach is used at realisation of the component analysis of a detailed Petri net and, as consequence, only one of representatives of the same components is checked [3].

Introduction of the explicit time characteristic in the theory of component modeling means deviation from, traditional for the general theory of Petri nets, understanding of instant operation of transitions. Thus, to expand component model with time designs probably in the various ways: an association clocks to places , an association clocks to transitions, by use of firing intervals of transitions, by introduction time delays for transitions of a net. In given article used the approach, which will associate time delays to transitions of the Petri net. The formal description of the given approach is resulted



Pic. 1. Different ways of Time component Petri net construction

in work [12], we will use it for a case of Petri nets with single-channel transitions. The explicit advantage here consists in independent verification of structural and temporal properties already on the model constructed in terms of time Petri nets [13].

Addition of a time condition will be carried out in two ways:

(1) introduction of the time restrictions in the component Petri net, constructed on a detailed Petri net of investigated system or at once for investigated system;
(2) allocation composite components in a Petri net, described in terms of time Petri net.

The scheme presented in picture1, reflects these various ways of construction of CN-model with time characteristics.

Following logic of this scheme, we will result formal definition of a component net in due course, which will be different for various ways of construction of model of real time system. The expediency of uniform definition will be considered.

Time inclusion in a CN-net

The component Petri net is a tuple (P, T, F, W, D, M_0), where $P = P_1^* \bigcup P_2$ — finite set of places, $T = T_1^* \bigcup T_2$ — finite set of the transitions, understood in terms of component Petri net (P_1^* and T_1^* accordingly finite sets of composite-places and composite-transitions, P_2 и T_2 — accordingly finite sets of places and transitions, understood in normal sense of places and transitions of Petri net, remained after selection of composite-places and composite-transitions), $F \subseteq P \times T \bigcup T \times P$ — the flow relation between places and transitions, $W : F \to N \setminus \{0\}$ — frequency rates of arcs function, M_0 — an initial marking of a net [11].

The flow relation F and function of frequency rate of arches W define flow function$I$, setting a rule $I : (P \times T) \bigcup (T \times P) \to N$ and defining that elements of one set cannot be connected by arches, and also describing sets of entrance and target elements.

Let's consider CN-net functioning in the discrete time, consisting of the equal intervals (steps) numbered by integers. And if the condition of a component net is described unequivocal by marks of places, division in time of starts and ending operations of transitions in time model, brings additional variability (as consequence, growth of space of states of a system occurs like explosion). Hence, under a state of the time component net we will understand the concrete moment of functioning of the given net which will be described state of places (marking) and a state of transitions (history of starts of transition, during time, not exceeding it's maximum duration of operation [13]).

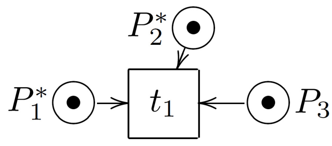
In a CN-net there can be either composite-transitions (C_t), or composite-places (C_p), or both simultaneously. For the component net in due course we will enter designation CN_t, without dependence from the type of allocated component.

Introduction of the time characteristic in a CN-net only with composite-transitions. Addition of time delays to transitions of a CN-net, demands consideration the understanding of time of operation of transitions, internal for component C_t. Following variants are possible:

(1) all internal transitions of component will necessarily finish the work in given to C_t time ("the schedule"approach). Analysis of properties of composite-transition will separate time by proportional parts, which appointed between all transitions forming it's structure;
(2) time associated to a composite-transition, will be considered as the assumption that it's internal transitions will have time to fulfil in due time ("the assumption"approach). Given to C_t component time can be too much or not suffice for work of all it's internal transitions — that is subject to check at verification properties of the components.

Characteristic for the first variant of understanding of time operation of composite components is orientation on finding-out of structural properties of a net, for the second — finding-out of time properties. In the consecutive application of these two considerations at first to a CN_t-net, and then to separated compound components, finds the representation of the two-aspect approach to understanding of functioning of a CN_t-net.

Definition 1. Component Petri net with time characteristics (CN_t-net), containing only composite-transitions, is a tuple (P, T, F, W, D, M_0), where P — finite set of places;$T = T_1^* \bigcup T_2$ — finite set of transitions (T_1^* — finite set of composite-transitions); $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ — the flow relation. Display $W : F \to \{1, 2, \ldots\}$ defines number of arches connecting places and transitions, temporary map $D : T \to \{1, 2, \ldots\}$ sets times of



PIC. 2. Transition connected by incidence arches with several components-places

operations of transitions of a net, out of dependences on their type. M_0 — an initial marking of a net.

Introduction of the time characteristic in a CN-net only with composite-places. Associating of temporary restrictions to transitions of the CN-net containing only components-places, attracts some feature: timing delays also will be appropriate to internal transitions of components-places, but how and on what stage will be presented time delay for the graph of a component time Petri net, if time properties associates only to transitions? After all, unlike a non-temporary net, in which operation time of C_p vaguely, time spent in a composite-place of a CN_t-net , will have the concrete component. Means, two alternative approaches are possible:

(1) Concrete operation time of C_p is described obviously on the graph, thus the logic of associating time restrictions to transitions remains.

(2) Concrete operation time of internal transitions is not displayed obviously for composite components on the graph, for the purpose of preservation of an initial formalism of uncertainty of stay a tokens in places of a Petri net.

And, implicit representation of a time delay of composite components on the graph of a net, can be expressed by increase in a time delay of the output transition (transitions) for components C_p:

  (a) by known time operation of composite-places,
  (b) by some preliminary (parametrized) value of time of actuating component of this kind,
  (c) it is kept invariable (a convenient variant at creation of model of time system, when time frameworks of separate working blocks are not yet known).

It is required to specify value which will be increase the concrete time delay of the transition connected by incidence arches with several components-places (picture 2) for variants $2a$, $2b$.

Activating of the transition will happens only when in all entrance places will be tokens, and their number will be equal to value of frequency rates of arcs function W. After moving of tokens in entrance places of composite components, internal for components-places C_p transitions can work:

- In parallel — simultaneous operation of the maximum number of internal transitions various composite-places.
- Consecutive operation of internal transitions of various composite-places probably, at existence of any long delays of tokens in places C_p.
- Independent operation of internal transitions of various composite-places means them and parallel, and consecutive work.

So, if the way of functioning parallel composite components is not known, their common time delay will be represented by a time interval which bottom border will be correspond to parallel operation of internal transitions of composite-places, and top border –– to consecutive operation of internal transitions of composite component C_p. Means, time delay of a transition, which is output for several components C_p, will be increase on their common time delay or on average value from an interval of common operation. The bottom border of an added time interval can be calculated as the longest operations time of one of the parallel composite component, and top border –– the sum of times of all the functioning transitions, which are internal for parallel compound component.

The variant 2c obviously is easier previous and represents advantage of the two-aspect approach of Component Modeling. Consideration of time properties of C_p-components will be carried out at a stage of finding-out it's properties, i.e. for a CN^t-net time of composite-places will be neither displayed (obvious 1 or indirect 2a, 2b way), nor investigated.

Hence, a CN^t-net exclusive with composite-places can be defined as follows:

Definition 2. Component Petri net with time characteristics , containing only composite-places, is a tuple (P, T, F, W, D, M_0), where $P = P_1^* \bigcup P_2$ — finite set of places (P_1^* — finite set of composite-places); T — finite set of transitions; $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ — the flow relation. M_0 — an initial marking of a net. Display $W : F \to \{1, 2, \ldots\}$ defines frequency rate of arches connecting places and transitions. Temporary map D will look like:

- For the approach 1 $D : T, P_1^* \to \{1, 2, \ldots\}$.
- For the approaches 2a и 2b $D : T \to \{t_k + [t_l, \sum_{t_l \in P_m^* F t_k} t_l]\}$, where t_k — concrete temporal delay of the transition, $k = \overline{1, n}$, where n — number of transitions of CN-net, $m = \overline{1, s}$, where s — number of composite-places of CN-net
  - for 2a t_l — known concrete time delay of the composite-place.
  - for 2b t_l — prospective concrete time delay of the composite-place.
- For the approach 2c $D : T \to \{1, 2, \ldots\}$.

Introduction of time characteristic in a CN-net with components of both types. Addition of time properties in a CN-net possessing composite-places and composite-transitions, will carried out by following stages:

(1) Time delays associate to CN-net transitions, without dependence from their type,
(2) The concrete time delay peculiar for composite-place C_p increases operation time for it's output transition (transitions) and it is not described on the graph (variants 2a, 2b or 2c). It can be a composite-transition for output of composite-places, the rule doesn't change.

Thus, using approaches of "schedule"and "assumption"in understanding of operation time of transitions of all types, probably to design models of systems with set time of functioning working blocks or to investigate time properties of systems with certain structure.

Definition 3. Component Petri net with time characteristics is a tuple (P, T, F, W, D, M_0), where $P = P_1^* \bigcup P_2$ — finite set of places; $T = T_1^* \bigcup T_2$ — finite set of transitions (P_1^* и T_1^* accordingly finite sets of composite-places and composite-transitions); $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ — flow relation. M_0 — an initial marking of a net. Map $W : F \to \{1, 2, \ldots\}$ defines a number of the arcs connecting places and transitions. Temporary map D will look like:

- For the approaches 2a и 2b $D : T \to \{t_k + [t_l, \sum_{t_l \in P_m^* F t_k} t_l]\}$, where t_k — concrete temporal delay of the transition, $k = \overline{1, n}$, where n— number of transitions of CN-net, $m = \overline{1, s}$, where s— number of composite-places of CN-net
  - for 2a t_l — known concrete time delay of the composite-place.
  - for 2b t_l — prospective concrete time delay of the composite-place.
- For the approach 2c $D : T \to \{1, 2, \ldots\}$.

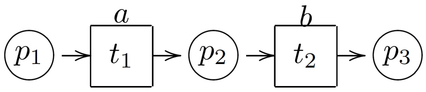
Selection composite components in a time Petri net

Time Petri Net is a tuple (P, T, F, W, D, M_0), where $P = \{p\}$ — finite set of places, $T = \{t\}$ — finite set of transitions; $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ — flow relation. Map $W : F \to \{1, 2, \ldots\}$ defines a number of the arcs connecting places and transitions, $D : T \to \{1, 2, \ldots\}$ sets operations times of transitions of a net, M_0 — initial marking of a net.

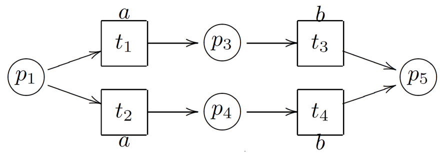
Multiplicity of the arcs $(p, t) \in F$, $(t, p) \in F$ and operations times of transitions $t \in T$ will be Accordingly designated $w_{p,t}$, $w_{t,p}$, d_t.

Let's select composite components so that the size of a net reduce as much as possible. In spite of the fact that verification of composite-transitions is easier than verification of composite-places, selection of the last is in certain cases more advantageous from the point of view of verification simplification for all CN-model. Therefore we will select composite components in a time Petri net, without rejecting possibility of selection composite component of other kind.

We will select section of the time Petri Net as a composite component $C_p(C_t)$, if it's starting and finishing with place or places (one or several transitions), not having the



Pic. 3. Elementary composite component of Petri net



Pic. 4. Composite component of Petri net with parallel transitions

flow arches connecting another parts of the net and internal places or transitions of this section. If there are section with just the same structure in a detailed Petri net, they will be selected as compound composite-places (composite-transitions) with the same name $P_i(T_i)$. If the structure of a part of a net differs from structure of already selected composite-places (composite-transitions) by number of parallel processes, we select the same type composite-place (the same type composite-transition) and sign it accordingly $P_i^*(T_i^*)$. The parts of a net selected as the same type composite-places (the same type composite-transitions) presented on pictures 3 and 4. As a result of replacement of parts of a detailed time Petri net with places P_i, P_i^* and transitions T_i, T_i^* we will have a component time Petri net.

Let's consider now a question of the description of the time delays peculiar to composite components selected in time Petri net.

Calculation of the time delays peculiar to composite components of the CN_t-net. Time delay peculiar to selected composite component of any type, will depend from:

- the structure create, formed by
  - amount of places and transitions in composite component,
  - presence of parallel transitions in composite component,
  - duration of the time delays of the initial for composite component transitions.
- the behavioural create, formed by
  - amount of tokens, going through the composite component;
  - size of the indefinite delay in places of the net.

To calculate a concrete time delay for composite component of any type probably only with known both structural, and behavioural the forming.

Example. There is elementary component-place presented at picture 3. It's structural time delay, obviously, will be received by addition of time delays of all internal transitions (t_1 and $t_2 - a + b$). The general time delay depending both from behavioural, and from the structural forming, will be calculated:

- at simultaneous arrival of several tokens in a component-place:

  - if the time delay of transitions $a \leq b$, then the general time delay of a component will be equal $a + b \cdot k$, where k — number of the tokens sequentially transiting a composite component.
  - if the time delay of transitions $a > b$, then the general time delay of a component will be equal $a \cdot k + b$, where k — number of the tokens sequentially transiting a composite component.
- at consecutive arrival of several tokens in a component-place with an interval δ
  - if an inflow interval between tokens $b \leq \delta \leq a$, a tokens will go one for another without interval since transitions one-channel. Hence the general time delay for a component will be same as well, as at simultaneous arrival of tokens in the component (look point above).
  - if an inflow interval between tokens $a \leq \delta \leq b$, then the general time delay will be $a \cdot k + b \cdot (k-1) + \delta$, where k — number of the tokens transiting a composite component.
  - if an inflow interval between tokens $\delta + a \leq b$, then the general time delay will be $a + b \cdot k + \delta$, where k — number of the tokens transiting a composite component.
  - at strongly removed from each other in time inflow of several tokens in a component-place — i.e. $\delta \geq (a + b)$ $(a + b) \cdot k$,where k — number of the tokens transiting a composite component.

For the composite component presented in picture 4, the structural time delay will be $a + b$. (But already at other duration of transition, for example the time delay of t_3 will be c instead of b, structural time delay will be indefinite and differ from the passed way — $a + b$ or $a + c$.) And the general time delay, at the most simple case of simultaneous inflow of tokens into the composite component and their uninterrupted movement will be:

- at a ratio of time delays of transitions $a < b$, then the general time delay will be $a \cdot k + b$, $k = 1, 2, \ldots$ for amount of tokens from 1 till 2 for $k = 1$, for $k = 2$ amount of tokens is 3 or 4 and e.t.c.
- at a ratio of time delays of transitions $a \geq b$, then the general time delay will be $b \cdot k + a$, $k = 1, 2, \ldots$ for amount of tokens from 1 till 2 for $k = 1$, for $k = 2$ amount of tokens is 3 or 4 and e.t.c.

Consideration of a case of arrival of tokens with some interval δ, will demand comparison of sizes of time delays of transitions with duration of δ and various combinations of their common duration for several tokens. What will be enough labour-intensive process even for the elementary on structure composite-place.

Hence, we will calculate a time delay of composite components after finding of behaviour properties of CN-net, when the maximum quantity of passing through tokens becomes known.

And as the theory of component modeling allows to verify properties only one of representatives of same type components, and we can know properties of the others from theorems [3]. Time properties of composite components also would be convenient for calculating on the basis of one formula, which would be peculiar to composite components of certain structure.

The two-aspect approach apply to the time functioning of composite components of CN_t-model will result in not representing of time delay of composite-places C_p and/or composite-transitions C_t. Consideration of time properties will be carried out first for the composite components, and after for the initial, not composite model.

Definition 4. Component Petri net with time characteristics (CN_t-net), containing only composite-transitions, is a tuple (P, T, F, W, D, M_0), where $P = P_1^* \bigcup P_2$ — finite set of places; $T = T_1^* \bigcup T_2$ — finite set of transitions (P_1^* and T_1^* — finite sets of composite-places and composite-transitions); $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ — the flow relation. Display $W : F \to \{1, 2, \ldots\}$ defines number of arches connecting places and transitions, temporary map $D : T_2 \to \{1, 2, \ldots\}$ sets times of operations of non composites transitions of a net. M_0 — an initial marking of a net.

Conclusions

Mathematical model of time Petri net containing subsets of places and the transitions of a special kind named composite components formulated in paper . This allows to use advantages of component Petri net theory to effective research of models of systems with time in due course. Singularities of work of the component model arising from adding of temporary feature are considered. In case of creation of component model on the basis of system with time, constructed the examples illustrating necessity of two-aspect approach of component modeling for a solution of "state explosion"in case of temporary Petri nets.

Following stage of work in given direction seen in researching of temporary properties of composite components of certain structure. The ways of finding of temporary properties of component models also represent certain practical interest.

References

[1] Murata T. Petri nets: Properties, the application, analysis // TIIER, — 1989. — v.77, № 4. — P. 41-85.

[2] Kotov V. E. Petri Net.// — M.: Science, 1984.

[3] Lukyanova E. A, Dereza A. V. Analysis of like elements of a CN-network during componential modeling and analysis of a complex sysrem with parallelism // Kibernetika i sistemniy analiz, 2012, — № 6. — P. 20-29.

[4] Lukyanova E. A. About the component analysis of the parallel distributed systems // TWIM, — 2011. — № 2. — P. 71-81.

[5] Penczek W, Potrola A. Advances in Verification of Time Petri Nets and Timed Automata. A temporal logic approach // Vol. 20, Springer-Verlag. — 2006.

[6] Coolahan J, Roussopoulos N. Timing requirements for time-driven systems using augmented Petri nets. // In: IEEE Trans. on Software Eng., SE-9(5):603–616, — 1983.

[7] Virbitskaite I. B, Pokozy E. A. A partial order method for the verification of time Petri nets. // In Fundamental of Computation Theory, Vol.1684 of LNCS, Springer-Verlag, — 1999. — P. 547–558.

[8] Berthomieu B and Diaz M. Modeling and verification of time dependent systems using time Petri nets. // IEEE Transactions on Software Engineering, 17(3), — 1991. — P. 259–273.

[9] Srba J. Timed-Arc Petri Nets vs. Networks of Timed Automata. // In Proceedings of the 26th International Conference on Application and Theory of Petri Nets(ICAPTN'05), Vol.3536 of LNCS, Springer-Verlag, — 2005. — P. 385–402.

[10] Lukyanova E. A. About structural elements of component net // Problemi programuvanya, — 2012. — № 2-3. — P. 25-32.

[11] Lukyanova E. A. About component modeling of systems with parallelism // NaUKMA. Compyuterni Nauki , — 2012. — № 121.

[12] Zaitsev D. A, Slepcov A. I. The equation of states and the equivalent conversions of temporal Petri networks, // Kibernetika i sistemniy analiz, — 1997. — №5. — P. 134-150.

[13] Zaitsev D. A. Invariants of temporal Petri networks, // Kibernetika i sistemniy analiz, — 2004. — №2. — P. 92-106.

Определение временной компонентной сети Петри для различных путей ее построения *В статье рассматриваются особенности создания компонентной сети Петри с временными характеристиками. Формулируются определения для каждого возможного пути построения временной компонентной модели.*

Ключевые слова: Компонентная сеть Петри со временем, компонентное моделирование, структурная задержка, поведенческая задержка

Означення компонентної сеті Петрі із часом для різноманітних шляхів конструювання *У роботі розглянуті властивості конструююваня компонентої сеті Петрі із часовою характеристикою. Сформульовані означення для кожного із шляхів конструююваня компонентої моделі з часом.*

Ключові слова: Компонентна сеть Петрі із часом, компонентне моделювання , структурна затримка, затримка поведіння

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 222–233.

УДК 519.837

A. S. Gorbatov, V. I. Zhukovskiy

ABOUT DEPOSIT DIVERSIFICATION PROBLEM

Possible ways to take into account risks, caused by uncertain factors, are investigated using the problem of optimal deposit diversification as an applied example. It is assumed that the investor (Decision Maker - DM) does not know future exchange rates at the end of the deposit period, and focuses only on some limits of their possible changes. Solution for this problem of decision-making under uncertainty depends on DM's attitude to the risk/income. Various solutions: optimal with respect to guaranteed income, optimal with respect to guaranteed risk (Savage minimax regret solution), as well as solution of multiple-criteria problem with two criteria of equal importance, namely, risk and income, are obtained.[1]

Keywords: minimax regret principle, uncertainty, maximin, risk, vector optimization.

E-mail: gorbatovanton@gmail.com, zhkvlad@yandex.ru

Introduction

Conditionally economists divide Decision Makers (DMs) into three categories according to their relation to risk and income (Cheremnykh 2008, Fisher, Dornbush and Schmalensee 1988). "Riskphobes"eliminate any risk and prefer to maximize the guaranteed income . "Riskphils"in their decisions take into account only the risks and seek to minimize them. The concept of risk is ambiguous. We should note that in this study the risk is understood as the risk by Savage - as a loss of income due to ignorance values of uncertain factors. "Neutral"DMs try to consider both indicators: the income and the risk. This leads to a problem of multiple-criteria decision making under uncertainty (MCDM). There are different approaches to its solution.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (14-01-90408).

1. Problem of formalization

In the beginning of some time period (to be specific - year) DM distributes \$1 to $m+1$ deposits in various currencies. Let $K_1 ..., K_m$ be courses of these currencies at the beginning of the year against the U.S. dollar (obviously the dollar's course $K_0 = 1$), and $x_0, x_1, \dots, x_m$ be sizes of deposits in dollar terms. Interest rates of all types of the deposits $d_0 = r, d_1, \dots, dm$ are supposed known. However, exchange rates at the end of the deposit period are unknown. This fact is reflected by uncertain parameters $y_1, ..., y_m$ (obviously, $y_0 = 1$). For these uncertain parameters only borders of their possible values are known:

$$y_1 \in [a_1, b_1], \dots, y_m \in [a_m, b_m].$$

Financial result at the end of the year after conversion into dollars depends on both a plan of diversification $x = (x_0, x_1, \dots, x_m)$ and the exchange rates at the end of the period — uncertainties $y_1, \dots, y_m$:

$$f(x, y) = (1 + r)x_0 + \frac{(1 + d_1)x_1 y_1}{K_1} + ... + \frac{(1 + d_m)x_m y_m}{K_m}. \tag{1}$$

DM is interested in getting the greatest value of the final result $f(x, y)$. However, he should take into account the possibility of realizing any values of uncertain factors — the exchange rates $y_1 \in [a_1, b_1], ..., y_m \in [a_m, b_m]$.

Thus, the mathematical model of the problem of \$1 diversification is represented by triple

$$\Gamma =< X, Y, f(x, y) >,$$

where $X = \left\{x \in \mathbb{R}^{m+1} \middle| \sum_{i=0}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0,\ (i = 0, \dots, m)\right\}$ is a set of all admissible plans of diversification (a set of DM's strategies), $Y = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$ is a set of possible values of uncertain vector $y = (y_1, \dots, y_m)$, and $f(x, y)$ is an utility function (1) of depositor (DM). The value of this function will be called outcome.

From the standpoint of operations research, Γ is a single-criterion problem of decision making under uncertainty. At a fixed uncertainty y we are facing a problem of maximizing a linear function of x on a polyhedron X. The set X is a canonical simplex in $\mathbb{R}^{m+1}$.

Presence of uncertainty and desire to consider it leads to a concept of risk as a possibility of deviation of some results from their desired or expected values. DM's attitude to risk, willingness or unwillingness to consider it determines the type of decision-maker (Riskphobes , Riskphils, Neutral).

Decision-making in the problem Γ from the standpoint of all three grades constitutes the content of this paper.

2. The best guaranteed result (case of riskphobes)

Here we discuss a guaranteed solution for the DM, who does not accept (ignores) the risk, focuses only on outcomes and uses the principle of the best guaranteed result by Wald (maximin principle) (Wald 1939).

Definition 1. A pair (x^g, f^g) is referred as guaranteed on outcomes solution of the problem Γ if

$$f^g = \min_{y \in Y} f(x^g, y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y).$$

Maximin strategy x^g is a guarantying one and f^g is a guaranteed income. Construction of this solution consists of two stages:

Stage 1. Calculation of inner minimum (for every strategy $x \in X$) yields a guarantee

$$f[x] = \min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y(x)) \leq f(x, y) \quad \forall y \in Y. \tag{2}$$

Stage 2. Calculation of outer maximum yields

$$f^g = f[x^g] = \max_{x \in X} f[x] \tag{3}$$

This stage yields the best (the biggest) guarantee because $f[x^g] \geq f[x]$ $\forall x \in X$. The result of the stage 1 is

$$f[x] = f(x, a_1, \ldots, a_m) = (1 + r)x_0 + \frac{(1 + d_1)x_1 a_1}{K_1} + ... + \frac{(1 + d_m)x_m a_m}{K_m} =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} (1 + d_i)x_i \frac{a_i}{K_i} + (1 + r)x_0.$$

It follows from linearity $f(x, y)$ on variables $y_1, ..., y_m$ and special form of the set of uncertainties Y. The worst case of uncertainty $y(x) = a = (a_1, ..., a_m)$ is the same for every strategy $x \in X$, and the guarantee function $f[x]$ will be a linear function of $x_0, x_1, ..., x_m$ with coefficients $k_0 = (1 + r), k_1 = \frac{(1+d_1)a_1}{K_1}, ..., k_m = \frac{(1+d_m)a_m}{K_m}$. These coefficients define relative guaranteed effectiveness of various currencies deposits.

Hence the stage 2 is a special kind problem of Linear Programming (LP) with an objective function

$$f[x] = \sum_{i=0}^{m} k_i x_i$$

and with very special kind of linear constraints

$$\sum_{i=0}^{m} x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \ (i = 0, ..., m).$$

They define the set of all admissible strategies X as a polyhedron with $m + 1$ vertices $x^{(1)} = (1, 0, 0.....0), x^{(2)} = (0, 1, 0, ..., 0), ..., x^{(m)} = (0, ..., 0, 1)$.

Remember one known in LP theory extreme property of a linear function on a polyhedron: maximal value is reached on some vertex of this polyhedron and a set of all points of maximum coincides with the convex linear hull of all vertices with maximal value of the function.

Therefore, $f^g = f[x^g] = \max_{x\in X} f[x] = \max_{0\leq i\leq m} f[x^{(i)}] = \max_{0\leq i\leq m} k_i$.

Let $R = \max_{0\leq i\leq m} k_i$ and I_R is a set of numbers of "the best"currencies with $k_i = R$. Then a set of all points of maximum for $f[x] = \sum_{i=0}^m k_i x_i$ on X will be

$$X^* = \left\{ x \in \mathbb{R}^{m+1} | \sum_{i=0}^{m} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ (i \in I_R),\ x_i = 0\ (i \notin I_R) \right\}.$$

Proposition 1. The guaranteed on outcomes solution for the Problem Γ has the following form:

$$(x^g, f^g) = (x^g, R = \max_{0\leq i\leq m} k_i),$$

where

$$\begin{aligned} &x_i^g = 0,\ if\ k_i < R \\ &x_i^g \geq 0,\ if\ k_i = R = \max_{0\leq i\leq m} k_i,\ \sum_{i=0}^{m} x_i = 1. \end{aligned} \tag{4}$$

On the other words, DM should calculate coefficients $k_0 = (1+r)$, $k_1 = = \frac{(1+d_1)a_1}{K_1}, ..., k_m = \frac{(1+d_m)a_m}{K_m}$, and deposit all \$1 to the currency with maximal value of coefficient $k_i = R$. If there are two or more such maximal coefficients, total sum may be distributed among the corresponding currencies in any arbitrary way.

3. Risk-oriented approach (Savage minimax regret solution)

This section relates to DM, who is oriented on minimization of guaranteed risk level. We shall use a principle of minimax regret by Savage (Savage 1954). To simplify calculations we consider later the problem with two currencies. Further notations are associated with previous ones as follows:

$x_0 = x,\ x \in [0,1],\ x_1 = 1-x,\ y_1 = y, y \in [a,b],\ a_1 = a,\ b_1 = b,\ d_0 = r,\ d_1 = d, K_1 = K.$

Then the utility function has a form

$$f(x,y) = (1+r)x + \frac{(1+d)(1-x)y}{K}. \tag{1'}$$

Definition 2. A pair (x^r, Φ^r) is referred as a guaranteed on risk solution of the problem Γ if $\Phi^r = \max_{y\in Y} \Phi(x^r, y) = \min_{x\in X} \max_{y\in Y} \Phi(x,y)$, where Savage risk function is

$$\Phi(x,y) = \max_{z\in X} f(z,y) - f(x,y).$$

Risk by Savage may be interpreted as a loss of the utility due to lack of knowledge of the uncertain parameters values at the moment of decision making.

Choosing the strategy $x \in X$, DM tries to minimize the guaranteed risk by Savage. Construction of this solution consists of three stages:

Stage 1: construction of functions $f[y] = \max\limits_{x\in X} f(x,y)$ and $\Phi(x,y) = f[y] - f(x,y)$.
Stage 2: computation of inner maximum – for every $x \in X$ the guarantee on risk $\max\limits_{y\in Y} \Phi(x,y) = \Phi[x] \geq \Phi(x,y)\ \forall y \in Y$ is defined.
Stage 3: computation of outer maximum – construction of $\Phi^r = \min_{x\in X} \Phi[x] = \Phi[x^r]$.

The second Stage for every strategy gives the guaranteed risk ($\Phi[x] \geq \Phi(x,y)\ \forall y \in Y$), on the third one the strategy with the least guaranteed risk is founded:

$$\Phi[x^r] = \Phi^r \leq \Phi[x]\ \forall x \in X \ \mathit{and}\ \Phi[x^r] \geq \Phi(x^r,y)\ \forall y \in Y.$$

Proposition 2. The guaranteed on risk solution of the problem Γ has the form

$$(x^r,\Phi^r) = \begin{cases} (1,0),\ if\ K\dfrac{1+r}{1+d} \geq b, \\ (0,0),\ if\ K\dfrac{1+r}{1+d} \leq a, \\ \left(\dfrac{K\frac{1+r}{1+d} - a}{b-a}, \dfrac{\left(b - K\frac{1+r}{1+d}\right)\left(K\frac{1+r}{1+d} - a\right)(1+d)}{K(b-a)}\right),\ if\ a < K\dfrac{1+r}{1+d} < b. \end{cases} \tag{5}$$

Proof. Let us consider 3 cases: first, $K\frac{1+r}{1+d} \geq b$, second, $K\frac{1+r}{1+d} \leq a$ and third $a < K\frac{1+r}{1+d} < b$. These cases overlay all possible variants of relative interposition of the point $K\frac{1+r}{1+d}$ and the segment $[a,b]$ on axis y.

Case 1. Let $K\frac{1+r}{1+d} \geq b \Rightarrow (1+r)K \geq b(1+d)$. Then

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x(1+r) + (1-x)\frac{1}{K}(1+d)y \leq x(1+r) + (1-x)\frac{1}{K}(1+d)b \leq \\ &\leq x(1+r) + (1-x)\frac{1}{K}K(1+r) = 1+r \quad \forall x \in [0,1],\ \forall y \in [a,b]. \end{aligned}$$

But $f(1,y) = (1+r)$ for all $y \in [a,b]$. That is why with $K\frac{1+r}{1+d} \geq b$

$$\max_{x\in[0,1]} f(x,y) = f(1,y) = (1+r) = f[y]\ \forall y \in [a,b]\ (\mathit{Stage}\ 1).$$

In according with the Stages 2 and 3 $\Phi^r = \min\limits_{x\in[0,1]} \max\limits_{y\in[a,b]} \Phi(x,y) = 1 + r - {}$ $- \max\limits_{x\in[0,1]} \min\limits_{y\in[a,b]} f(x,y)$.

Due to the assumption $K\frac{1+r}{1+d} \geq b \geq a$ and the Proposition 1 we obtain $x^r = 1$ and $\min\limits_{y\in[a,b]} f(x^r,y) = 1+r$. Hence, if $K\frac{1+r}{1+d} \geq b$, then

$$\Phi(x^r,y) = \Phi(1,y) = 1 + r - (1+r) = 0\ \forall y \in [a,b].$$

Therefore, $\Phi^r = \max\limits_{y\in[a,b]} \Phi(x^r,y) = 0$.

Case 2. Let $K\frac{1+r}{1+d} \le a \Rightarrow (1+r)K \le a(1+d)$. Just like the previous case for all $x \in [0,1],\ y \in [a,b]$ we have a chain of inequalities

$$f(x,y) = x(1+r) + (1-x)\frac{1}{K}(1+d)y \le \frac{1+d}{K}x\left(\frac{1+r}{1+d}K - a\right) + \frac{1+d}{K}y \le \frac{1+d}{K}y.$$

On the other hand, with $x=0$ $f(0,y) = \frac{1+d}{K}y$. Then with $K\frac{1+r}{1+d} \le a$ we have (Stage 1)

$$\max_{x\in[0,1]} f(x,y) = \frac{1+d}{K}y = f[y] = f(0,y)\ \forall y \in [a,b],$$

therefore

$$\Phi(x,y) = \frac{1+d}{K}y - x(1+r) - (1+d)(1-x)\frac{y}{K} = -\frac{1+d}{k}x\left[\frac{1+r}{1+d}K - y\right].$$

Later, with $K\frac{1+r}{1+d} \le a$ we have

$$\Phi^r = \min_{x\in[0,1]}\max_{y\in[a,b]}\left\{-\frac{1+d}{K}x\left[\frac{1+r}{1+d}K - y\right]\right\} =$$

$$= \min_{x\in[0,1]}\left\{\begin{array}{r} 0,\quad x=0 \\ -\sup\limits_{x\in(0,1]}\min\limits_{y\in[a,b]}\dfrac{1+d}{K}x\left[\dfrac{1+r}{1+d}K - y\right] \end{array}\right\} =$$

$$= \min_{x\in[0,1]}\left\{\begin{array}{r} 0,\quad x=0 \\ -\sup\limits_{x\in(0,1]}\dfrac{1+d}{K}x\left[\dfrac{1+r}{1+d}K - b\right] = 0,\quad K\dfrac{1+r}{1+d} \le a \end{array}\right\} = 0,$$

and $x^r = 0$

Case 3: $a < K\frac{1+r}{1+d} < b$. Let us calculate $f[y] = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x,y)$ using inequalities $a(1+d) < (1+r)K,\ b(1+d) > (1+r)K$. As the function $f(x,y)$ linearly depends on x (with fixed y) its maximum is obtained in a boundary point of the segment $[0,1]$:

$$f[y] = \max_{x\in[0,1]} f(x,y) = \max\{f(0,y), f(1,y)\} = \max\{(1+r), \frac{1+d}{K}y\},$$

and $\Phi(x,y) = f[y] - f(x,y) = \max(\Phi_1, \Phi_2)$, where

$$\Phi_1(x,y) = (1+r) - (1+r)x - (1-x)\frac{1+d}{K}y = \frac{1-x}{K}[(1+r)K - (1+d)y],$$

$$\Phi_2(x,y) = \frac{1+d}{K}y - (1+r)x - (1-x)\frac{1+d}{K}y = \frac{x}{K}[(1+d)y - (1+r)K].$$

In according with Stage 2 and using the linearity of the functions $\Phi_1(x,y),\ \Phi_2(x,y)$ on y, we obtain $\forall x \in [0,1]$ the guarantee on risk

$$\Phi[x] = \max_{y\in[a,b]}\Phi(x,y) = \max_{y\in[a,b]}\max\left\{\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)\right\} =$$

$$= \max\max_{y\in[a,b]}\left\{\Phi_1(x,y), \Phi_2(x,y)\right\} = \max\left\{\Phi_1(x,a), \Phi_2(x,b)\right\} = \max\left\{\Phi_1[x], \Phi_2[x]\right\} \tag{6}$$

where $\Phi_1[x]$, $\Phi_2[x]$ are linear functions:

$$\Phi_1[x] = \frac{1-x}{K}[(1+r)K - (1+d)a], \quad \Phi_2[x] = \frac{x}{K}[(1+d)b - (1+r)K]. \tag{7}$$

Hence, the function $\Phi[x] = \max\left\{\Phi_1[x], \Phi_2[x]\right\}$ is a piece-wise linear convex function with one break point. This point of interception x^r can be find from the condition $\Phi_1[x^r] = \Phi_2[x^r]$

$$x^r = \frac{1}{b-a|}\left[\frac{1+r}{1+d}K - a\right] \; (x^r \in (0,1) \textit{ due to Case } 3 \textit{ condition } a < K\frac{1+r}{1+d} < b).$$

As $\Phi_1[x]$ decreases and $\Phi_2[x]$ increases, x^r will be unique point of minimum for strong convex guaranteed risk function $\Phi[x]$ on $[0,1]$. Minimal guaranteed risk will be

$$\Phi^r = \min_{x\in[0,1]} \Phi[x] = \Phi[x^r] = \Phi_1[x^r] = \Phi_2[x^r] = \frac{\left(b - K\frac{1+r}{1+d}\right)\left(K\frac{1+r}{1+d} - a\right)(1+d)}{K(b-a)}. \tag{8}$$

Note that with Case 3 assumptions $\Phi^r > 0$.

4. Two-criterion approach (riskneytral case)

Suppose that DM takes into account both outcomes and risks, seeking to increase the value of the outcome $f(x,y)$ and reduce the value of the risk function $\Phi(x,y)$. At the same time DM should consider the possibility of any uncertainty $y \in Y$. Therefore we put into correspondence initial single-criterion problem Γ two-criterion problem under uncertainty:

$$\overline{\Gamma} = < X, Y, \{f(x,y), -\Phi(x,y)\}) >, \tag{9}$$

where $X, Y, f(x,y)$ are the same as in the problem Γ, and $\Phi(x,y)$ is the risk function.

In this problem DM, choosing his strategy $x \in X$, seeks to increase both criteria $f(x,y)$ and $-\Phi(x,y)$ (which corresponds in particular to reduction of risk $\Phi(x,y)$). Recall that the uncertainty y can take any value from the set $Y = [a,b]$.

Multiple-criteria problems under uncertainty were first studied in detail by Zhukovskiy and Molostvov in the paper (1980) and later in their monographs (1988, 1990). Various aspects of multiple-criteria optimization under uncertainty were investigated for both static and dynamic cases by Zhukovskiy and Salukvadze (1994), Salukvadze, Topchishvili and Zhukovskiy (2002), Molostvov (1983, 2004). The further development of the theory was carried out by Zhukovskiy and Kudryavtsev (2013). Following these results, introduce the concept of solution for the problem $\overline{\Gamma}$.

Definition 3. A triplet $(x^s, f^s, \Phi^s) \in X \times \mathbb{R}^2$ is referred as a strongly guaranteed on outcomes and risks solution (SGOR) of the problem $\overline{\Gamma}$, if:

a) there exists functions $y^{(i)} : [0,1] \to [a,b]$ $(i = 1,2)$ such that $\forall x \in [0,1]$

$$f^g[x] = \min_{y\in[a,b]} f(x,y) = f(x, y^{(1)}(x)), \;\; \Phi^g[x] = \max_{y\in[a,b]} \Phi(x,y) = \Phi(x, y^{(2)}(x)); \tag{10}$$

b) $\max\limits_{x\in[0,1]}(f^g[x]-\Phi^g[x])=f^g[x^s]-\Phi^g[x^s]$;

c) $f^s=f^g[x^s],\ \Phi^s=\Phi^g[x^s]$. (11)

Remark 3. A game interpretation of the strongly guaranteed on outcomes and risks solution $x^s\in X$ is the following. Using the strategy $x^s\in X$, DM provides, with any possible realization of the uncertainty $y\in Y$, the guaranteed outcome $f^s\le f(x^s,y)$ with the least possible risk $\Phi^s\ge\Phi(x^s,y)$ .If with any another strategy $x\in X$ the outcome will be better ($f(x,y)>f^s$), then in any case the risk will be worse ($\Phi(x,y)>\Phi^s$).

Calculation of the strongly guaranteed on outcomes and risk solution consists of three Stages.

Stage 1: construction of functions $f^g[x]=\min\limits_{y\in[a,b]}f(x,y),\Phi^g[x]=\max\limits_{y\in[a,b]}\Phi(x,y)$.

Stage 2: construction of Pareto-maximal strategy $x^s\in X$ in two-criterion «problem of guarantees» $\overline{\Gamma}_g=<X,f^g[x],-\Phi^g[x]>$ through maximization of linear convolution of two criteria with both coefficients equal 1.

Stage 3: construction with help of (11) guarantees on outcome f^s and risk Φ^s.

Lemma.

$$f^g[x^r]-\Phi^g_1[x^r]=\frac{2}{b-a}\left[\frac{1+r}{1+d}K-\frac{b+a}{2}\right]\left[\frac{1+r}{1+d}K-a\right]+\frac{1+d}{K}a,$$

where x^r and $\Phi_1[x^r]=\Phi^r$ were defined earlier in (5) and (8).

Proposition 3. The strongly guaranteed on outcomes and risks solution (SGOR) (x^s,f^s,Φ^s) for the Problem $\overline{\Gamma}$ has the following form:

$$(x^s,f^s,\Phi^s)=\begin{cases}(1,1+r,0),\ if\ K\dfrac{1+r}{1+d}\ge b,\\ \left(1,1+r,\dfrac{1+d}{K}\left[b-\dfrac{1+r}{1+d}K\right]\right),\ if\ \dfrac{a+b}{2}<K\dfrac{1+r}{1+d}<b,\\ (x^r,f^r,\Phi^r),\ if\ a<K\dfrac{1+r}{1+d}\le\dfrac{a+b}{2},\\ \left(0,\dfrac{1+d}{K}a,0\right),\ if\ K\dfrac{1+r}{1+d}\le a,\end{cases}$$

where

$$x^r=\frac{1}{b-a}\left[K\frac{1+r}{1+d}-a\right],$$

$$f^r=f[x^r]=\frac{1+d}{K(b-a)}\left[K\frac{1+r}{1+d}-a\right]^2+\frac{1+d}{K}a,$$

$$\Phi^r=\frac{\left(b-K\frac{1+r}{1+d}\right)\left(K\frac{1+r}{1+d}-a\right)(1+d)}{K(b-a)}.$$

Proof. Depending on relative interposition of the point $K\frac{1+r}{1+d}$ and the segment $[a,b]$ one should consider 4 cases.

Cases 1 and 4: $K\frac{1+r}{1+d} \geq b > a$ or $K\frac{1+r}{1+d} \leq a$. Here in appliance with the Propositions 1 and 2 will be:

$$\max_{x\in[0,1]}(f^g[x] - \Phi^g[x]) = \begin{cases} f^s = f^g[1] = 1 + r,\ if\ K\dfrac{1+r}{1+d} \geq b > a, \\ f^s = f^g[0] = \dfrac{1+d}{K}a,\ if\ K\dfrac{1+r}{1+d} \leq a, \end{cases}$$

because $\Phi^s = \Phi^g[1] = \Phi^g[0] = 0$.

So SGOR in Cases 1 and 4 has the form:

$$(x^s, f^s, \Phi^s) = \begin{cases} (1, 1+r, 0),\ if\ K\dfrac{1+r}{1+d} \geq b, \\ \left(0, \dfrac{1+d}{K}a, 0\right),\ if\ K\dfrac{1+r}{1+d} \leq a. \end{cases}$$

Next two Cases are specified by the condition $a < K\frac{1+r}{1+d} < b$.

On the Stage 1 we will use the guarantee of the outcome

$$f^g[x] = \min_{y\in[a,b]} f(x,y) = x\frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K - a\right] + \frac{1+d}{K}a$$

and the guarantee of the risk

$$\Phi^g[x] = \max_{y\in[a,b]} \Phi(x,y) = \begin{cases} \Phi_1[x] = \dfrac{1-x}{K}[(1+r)K - (1+d)a],\ for\ x \in [0, x^r], \\ \Phi_2[x] = \dfrac{x}{K}[(1+d)b - (1+r)K],\ for\ x \in [x^r, 1]. \end{cases}$$

On the second Stage, to calculate the difference $f^g[x] - \Phi^g[x]$, formulas for $f^g[x]$ and $\Phi^g[x]$ from the Stage 1 are used. Namely, for $x \in [0, x^r]$

$$\begin{aligned} f^g[x] - \Phi^g_1[x] &= 2x\frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K - a\right] + 2\frac{1+d}{K}a - 1 + r = \\ &= 2x\frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K - a\right] - \frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K - 2a\right], \end{aligned}$$

and for $x \in [x^r, 1]$

$$f^g[x] - \Phi^g_2[x] = 2x\frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K - \frac{a+b}{2}\right] + \frac{1+d}{K}a.$$

Then the problem Γ (where $X = [0,1]$) we associate a pair of two-criterion problems:

$$\Gamma_1 =< [0, x^r], f^g[x], -\Phi^g_1[x] >, \quad \Gamma_2 =< [x^r, 1], f^g[x], -\Phi^g_2[x] > .$$

In view of earlier obtained expressions for x^r and (8)

$$x^r = \frac{1}{b-a}\left[K\frac{1+r}{1+d} - a\right],$$

$$\Phi^r = \frac{\left(b - K\frac{1+r}{1+d}\right)\left(K\frac{1+r}{1+d} - a\right)(1+d)}{K(b-a)}.$$

Case 2: $a < K\frac{1+r}{1+d} \leq \frac{a+b}{2}$. A "maximizator"$x^s$ for the difference $f^g[x] - \Phi_1^g[x]$ for the Problem Γ_1 has the form:

$$x^s = argmax_{x\in[0,x^r]}\left\{2x\frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K - a\right] - \frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K - 2a\right]\right\} = x^r,$$

and by Lemma

$$f^g[x^r] - \Phi_1^g[x^r] = \frac{2}{b-a}\left[\frac{1+r}{1+d}K - \frac{b+a}{2}\right]\left[\frac{1+r}{1+d}K - a\right] + \frac{1+d}{K}a \geq 0.$$

Analogously the "maximizator"x^s for the difference $f^g[x] - \Phi_2^g[x]$ for the Problem Γ_2 will be $x^s = x^r$, and by Lemma

$$f^g[x^r] - \Phi_2^g[x^r] = \frac{2}{b-a}\left[\frac{1+r}{1+d}K - \frac{b+a}{2}\right]\left[\frac{1+r}{1+d}K - a\right] + \frac{1+d}{K}a \geq 0.$$

So, with $a < K\frac{1+r}{1+d} \leq \frac{a+b}{2}$ we have $x^s = x^r$ and

$$f^g[x^s] = f^s = \frac{1+d}{K(b-a)}\left[K\frac{1+r}{1+d} - a\right]^2 + \frac{1+d}{K}a,$$

$$\Phi^g[x^s] = \Phi^s = \frac{\left(b - K\frac{1+r}{1+d}\right)\left(K\frac{1+r}{1+d} - a\right)(1+d)}{K(b-a)}.$$

Finally, strongly guaranteed on outcomes and risks solution has the form:

$$(x^r, f^r, \Phi^r) = \left(\frac{1}{b-a}\left[K\frac{1+r}{1+d} - a\right], \frac{1+d}{K(b-a)}\left[K\frac{1+r}{1+d} - a\right]^2 + \frac{1+d}{K}a,\right.$$
$$\left.\frac{\left(b - K\frac{1+r}{1+d}\right)\left(K\frac{1+r}{1+d} - a\right)(1+d)}{K(b-a)}\right).$$

Case 3: $\frac{a+b}{2} < K\frac{1+r}{1+d} < b.$

As $\frac{a+b}{2} > a$, then for the Problem Γ_1 we have

$$x^s = arg\max_{x\in[0,x^r]}\left\{2x\left[\frac{1+r}{1+d}K - a\right]\right\} = x^r,$$

and by Lemma we get the following equality:

$$f^g[x^r] - \Phi_1^g[x^r] = 2\frac{1+d}{(b-a)K}\left[\frac{1+r}{1+d}K - a\right]^2 - \frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K - 2a\right].$$

Similarly for the Problem Γ_2:

$$x^s = arg\max_{x\in[x^r,1]}\left\{2x\left[\frac{1+r}{1+d}K - \frac{a+b}{2}\right]\right\} = 1 \quad (as\ \frac{a+b}{2} < K)$$

and

$$f^g[1] - \Phi_2^g[1] = 2\frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K - \frac{a+b}{2}\right] - \frac{1+d}{K}a.$$

Since $\max_{x\in[0,1]}(f^g[x]-\Phi^g[x]) = \max(f^g[x^r]-\Phi_1^g[x^r], f^g[1]-\Phi_2^g[1]) =$

$$= \max\Big\{2\frac{1+d}{(b-a)K}\left[\frac{1+r}{1+d}K-a\right]^2 - \frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K-2a\right],$$

$$2\frac{1+d}{K}\left[\frac{1+r}{1+d}K-\frac{a+b}{2}\right]-\frac{1+d}{K}a\Big\},$$

the condition $\frac{a+b}{2} < K\frac{1+r}{1+d} < b$ implies the inequality $f^g[x^r]-\Phi_1^g[x^r] < f^g[1]-\Phi_2^g[1]$.

So in Case 3 ($\frac{a+b}{2} < K\frac{1+r}{1+d} < b$) we have x^s=1 and SGOP has the following form

$$(x^s, f^s, \Phi^s) = \left(1, 1+r, \frac{1+d}{K}\left[b-\frac{1+r}{1+d}K\right]\right)$$

The proof of Proposition 3 is finished.

5. Conclusions

We investigated the problem of optimal structure of multi-currency deposit under uncertainty of future exchange rates. We had only the limits of possible changes for these uncertain parameters, any statistical characteristics are unavailable. We considered three possible approaches for accounting risk: complete elimination of any risk, minimization of expected losses due to the uncertainty, and multi-criteria approach, which takes into account both criteria - the outcome and the risk. These approaches correspond to the type of a decision-maker, namely to his/her attitude to the risk: adversary of risk, lover of risk or neutral DM. Propositions 1, 2 and 3 give an explicit form of the optimal solutions for the problem of the guaranteeing deposit diversification depending on values of the meaningful economic parameters r, d, K, a, b and on DM's attitude to the risk. After defining his/her type, the value $K\frac{1+r}{1+d}$ and the limits a and b of the uncertain parameter y, DM obtains, by applying the corresponding formula, a numerical value for his/her guaranteeing deposit strategy. By the way, Proposition 3 shows that use of a "risk"strategy (from Proposition 2) reduces both the guaranteed risk and at the same time increases the guaranteed outcome, thus "killing two birds with one stone."Two last cases have been restricted by two-dimensional considerations. General approaches, solution concepts are the same for the problem with n currencies, but explicit farm of the solution will be replaced by some algorithm associated with piece-wise linear programming technique. Other possible direction for further investigations concerns on a "mixed variant"of incompleteness of the information, when we know stochastic distributions of some nondetermined factors, but only to within uncertain parameters. Such problems can be considered by combining stochastic and maximin approaches.

References

[1] Cheremnykh, Y.N. *Microeconomics. Advanced level.* //Moscow State University, INFRA-M, Moscow (in Russian). 2008.

[2] Molostvov, V.S. *Multiple-criteria optimization under uncertainty: concepts of optimality and sufficient conditions. Theory and Practice of Multiple Criteria Decision Making.//* North-Holland: 91-105. 1983.

[3] Molostvov, V.S. *Savage's principle for non-cooperative games under uncertainty, Proceedings of the international scientific conference "Problems of control and power engineering".//* Tbilisi'. 38-39. 2004.

[4] Salukvadze, M.E., Topchishvili, A.L., and Zhukovskiy, V.I. *Solutions of differential games under uncertainty.//* Bulletin of Tbilisi International Center of Mathematics and Informatics (TICMI), 5: 20 - 22. 2002.

[5] Savage, L.Y. *The Foundation of Statistics.* //Willey, New York. 1954.

[6] Wald, A. *Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis.//* Annuals Math. Statist., 10: 299-326. 1939.

[7] Zhukovskiy, V.I., and Molostvov, V.S. *On Pareto-optimality in cooperative differential games with multi-valued objective functionals.//* Mathematical Methods in Systems Theory (collected papers of the Institute for System Studies, Moscow), 6: 96-108 (in Russian). 1980.

[8] Zhukovskiy, V.I., and Molostvov V.S. *Multiple-criteria Decision Making in Conditions of Uncertainty (Mnogokriterial'noe prinyatie resheniy v usloviyah neopredelennosti).//* International Research Institute of Management Sciences, Moscow (in Russian). 1988.

[9] Zhukovskiy, V.I., and Molostvov, V.S. V.S. (1990). *Multiple-criteria Optimization of Systems in Conditions of Incomplete Information (Mnogokriterial'naya optimizaciya sistem v usloviyah nepolnoy informacii).//* International Research Institute of Management Sciences, Moscow (in Russian). 1990.

[10] Zhukovskiy, V.I., and Salukvadze, M.E. *The Vector-valued Maximin.//* Academic Press, New York, NY. 1994.

[11] Zhukovskiy, V.I., and Kudryavtsev, K.N. *Balancing of conflicts under uncertainty, Part II, Analogue of maximin, Mathematical theory of games//* 5-2: 3-45 (in Russian). 2013.

О задаче диверсификации вклада

На примере задачи диверсификации вклада исследуются возможные пути учитывать риски, вызванные неопределенными факторами. Предполагается, что инвестор (лицо, принимающее решение — ЛПР) не знает обменный курс на конец срока вклада и ориентируется только на некоторые границы, внутри которых он может изменяться. Решение этой задачи зависит от того, как ЛПР относится к риску и прибыли. Возможные решения: оптимальное в смысле гарантированной прибыли, оптимальное в смысле гарантированного риска (минимаксное сожаление Сэвиджа), а также решение многокритериальной задачи с двумя равнозначными критериями, а именно величиной риска и прибыли.

Ключевые слова: принцип минимаксного сожаления, неопределенность, максимин, риск, векторная оптимизация.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 234–246.

УДК 517.98

O. S. Kisel, J. S. Pashkova

COMPARISON OF ORLICZ, LORENTZ AND ORLICZ-LORENTZ SPACES

In this paper we investigate conditions imposed on Orlicz functions and Lorentz functions such that one Orlicz-Lorentz space is embedded to another or these spaces coincide. Similar results are showed for general rearrangement invariant spaces and, in particularly, for Orlicz and Lorentz spaces.

Keywords: rearrangement spaces, Orlicz-Lorentz spaces, comparison

Introduction

The theory of symmetric spaces dates back to the classical $\mathbf{L}_p$ spaces, $1 \leq p \leq \infty$. The theory was developed intensively during the last century; it contains many interesting and deep results that have important applications in various areas of the theory of functions and functional analysis. It applies in particularly, to the areas of interpolation of linear operators, ergodic theory, harmonic analysis and mathematical physics.

Last years much attention has been given to Orlicz-Lorentz spaces. From a general point of view It help us to investigate such rearrangement invariant spaces as Orlicz spaces, Lorentz spaces and $\mathbf{L}_{p,q}$ spaces. There are several ways of defining these spaces.

We can refer to [14], [15], [3], [4], [5], [6], [9] and to the references cited therein as well.

Our definition of Orlicz-Lorentz spaces is differ from another which is the basis in cited papers. In our opinion, it is more convenient to deal with issues related to the question embedding one Orlicz-Lorents space to another.

1. Preliminaries

Let μ be the Lebesgue measure on the positive semiaxis $[0,\infty)$, $\mathbf{L}_0$ the space of all μ-measurable almost everywhere finite functions f on $(0,\infty)$, $\mathbf{L}_p$, $1 \leq p \leq +\infty$ — Banach space of functions from $\mathbf{L}_0$, an integrable p degree.

A Banach space $\mathbf{E} \subset \mathbf{L}_0$ is called *rearrangement invariant* if

$$f \in \mathbf{L}_0 \ , \ g \in \mathbf{E}, \ f^* \leq g^* \implies f \in \mathbf{E} \ , \ \|f\|_{\mathbf{E}} \leq \|g\|_{\mathbf{E}} \ .$$

Here f^* denotes the decreasing right-continuous rearrangement of $|f|$. It can be defined as the right-continuous generalized inverse

$$f^*(x) := \inf\{y \in [0, +\infty) \colon \mathbf{n}_f(y) \leq x\}, \qquad x \in [0, \infty)$$

of the distribution function $\mathbf{n}_f$ of $|f|$, which is

$$\mathbf{n}_f(x) = \mu \{u \in (0, \infty) \colon |f(u)| > x\} \ ,$$

It is known (see [10], Ch. II, §4.1 or [12], Ch. 2.a), that for every rearrangement invariant space $\mathbf{E}$ there exist continuous inclusions

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{L}_0.$$

Enclosed symmetric space. Let $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{E}_2$ — are two symmetric spaces.

Theorem 1. *Let $\mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{E}_2$. Then the embedding*

$$i : \mathbf{E}_1 \ni f \to f \in \mathbf{E}_2$$

is continuous (bounded).

Proof. Let $\{f_n\}$ is the sequence in the space $\mathbf{E}_1$, such that

$$\|f_n - f\|_{\mathbf{E}_1} \to 0 \ \text{ and } \ \|f_n - g\|_{\mathbf{E}_2} \to 0.$$

Then we have $f_n \to f$ and $f_n \to g$ in measure and $f = i(f) = g$. Thus the graph is closed for embedding operator i. In accordance with the theorem on a closed operator, the operator i is bounded (continuous). □

Remark 1. The continuity of the embedding $\mathbf{E}_1 \subseteq \mathbf{E}_2$ means that

$$\|f\|_{\mathbf{E}_2} \leq c\|f\|_{\mathbf{E}_1}, \quad f \in \mathbf{E}_1.$$

for some $c > 0$.

As follows from the open mapping theorem, the space $\mathbf{E}_1$ is closed in the space $\mathbf{E}_2$ if and only if this embedding is open, i.e.

$$\|f\|_{\mathbf{E}_1} \leq c_1\|f\|_{\mathbf{E}_2}, f \in \mathbf{E}_1.$$

for some $c_1 > 0$.

2. Comparison of Orlicz spaces

Let $\Phi\colon [0,+\infty) \to [0,+\infty]$ be an Orlicz function, i.e., $\Phi(0)=0$, Φ is increasing left-continuous and convex. Assume also that Φ is nontrivial, i.e., $\Phi(x)>0$ and $\Phi(y)<\infty$ for some $x,y>0$. The derivative Φ' exists a.e., and it is assumed to be left-continuous with $\Phi'(x)=+\infty$ iff $\Phi(x)=+\infty$.

The *Orlicz space* $\mathbf{L}_\Phi$ is the set defined as follows

$$\mathbf{L}_\Phi := \left\{ f \in \mathbf{L}_0\colon \int\limits_0^\infty \Phi(f/a)\, d\mu < \infty \text{ for some } a>0 \right\},$$

equipped with the norm

$$\|f\|_{\mathbf{L}_\Phi} := \inf \left\{ a>0\colon \int\limits_0^\infty \Phi(|f|/a)\, d\mu \le 1 \right\}, \ f \in \mathbf{L}_0 ,$$

where $\inf \emptyset := \infty$.

Notice that this "slightly generalized" definition includes the spaces $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_\infty$ and also $\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty$, $\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ as the smallest and largest Orlicz spaces (see , [8], Ch. 2, [2], Ch. 2, §2.1 and also [16], [17], [18]).

The fundamental function of Orlicz space. Now we turn to the fundamental function $\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}$ of the Orlicz space $\mathbf{L}_\Phi$.

Proposition 1. The fundamental function $\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}$ of the Orlicz space $\mathbf{L}_\Phi$ is:

$$\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}(x) = \left(\Phi^{-1}\left(x^{-1}\right)\right)^{-1}, \quad x>0. \tag{1}$$

Proof. For all $x>0$ and $a>0$ we have:

$$\mathcal{I}_\Phi\left(\frac{1}{a}\cdot 1_{[0,x]}\right) = \int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{1}{a}\cdot 1_{[0,x]}\right) dm = \int\limits_0^x \Phi\left(\frac{1}{a}\right) dm = x\,\Phi\left(\frac{1}{a}\right).$$

Therefore

$$\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}(x) = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \inf\left\{a>0 : x\,\Phi\left(\frac{1}{a}\right) \le 1\right\} =$$

$$= \inf\left\{a>0 : a \ge \left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}\right\} = \left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}.$$

□

Corollary 1. *The Orlicz function Φ is uniquely reconstructed from the fundamental function $\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}$ of Orlicz space $\mathbf{L}_\Phi$, that is*

$$\Phi^{-1}(x) = \left(\varphi_{\mathbf{L}_\Phi}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}, \ x>0,$$

and $\Phi = (\Phi^{-1})^{-1}$ *is the inverse function of the function* Φ^{-1}.

The embedding $\mathbf{L}_{\Phi_1} \subseteq \mathbf{L}_{\Phi_2}$ of Orlicz space $\mathbf{L}_{\Phi_1}$ in the Orlicz space $\mathbf{L}_{\Phi_2}$ can be described in terms of corresponding Orlicz functions Φ_1 and Φ_2.

Recall, that the embedding space $\mathbf{L}_{\Phi_1}$ in the space $\mathbf{L}_{\Phi_2}$ is always bounded, i.e.

$$\|f\|_{\mathbf{L}_{\Phi_2}} \leq c\|f\|_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}, \quad f \in \mathbf{L}_{\Phi_1},$$

for some $c > 0$ (Theorem 1).

Definition 1. Let Φ_1 и Φ_2 are Orlicz functions. It say that

1). Φ_1 is *majorizes* the Φ_2 in 0 ($\Phi_1 \succ_0 \Phi_2$), if there are exist positive numbers a, b, x_0 such that the inequality

$$\Phi_2(x) \leq b\ \Phi_1(ax)$$

is satisfied for all $0 \leq x \leq x_0$.

2). Φ_1 is *majorizes* Φ_2 on ∞ ($\Phi_1 \succ_\infty \Phi_2$), if there are exist positive numbers a, b, x_0 such that the inequality

$$\Phi_2(x) \leq b\ \Phi_1(ax)$$

is satisfied for all $x \geq x_0$.

3). Φ_1 is *majorizes* Φ_2 ($\Phi_1 \succ \Phi_2$), if $\Phi_1 \succ_0 \Phi_2$ and $\Phi_1 \succ_\infty \Phi_2$.

Remark 2. 1). We can take $b = 1$ in the conditions 1) and 2).

2). The condition $\Phi_1 \succ \Phi_2$ has the form

$$\Phi_2(x) \leq b\,\Phi_1(ax),\ x \geq 0$$

for some $b > 0$ and $a > 0$.

Theorem 2. *Let Φ_1 and Φ_2 are Orlicz functions, the functions $\varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}$ and $\varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_2}}$ are fundamental function of corresponding Orlicz spaces $\mathbf{L}_{\Phi_1}$ и $\mathbf{L}_{\Phi_2}$. Then the following conditions are equivalent:*

1). $\Phi_1 \succ \Phi_2$;

2). $\mathbf{L}_{\Phi_1} \subseteq \mathbf{L}_{\Phi_2}$;

3). $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_{\Phi_2}} \leq a\|\cdot\|_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}$ *for some* $a > 0$;

4). $\varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_2}} \leq a\varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}$ *for some* $a > 0$;

5). $\Phi_2(x) \leq \Phi_1(ax)$ *for some* $a > 0$ *and for all* $x > 0$.

Proof. 1) $\Longrightarrow$ 2). The condition $\Phi_1 \succ \Phi_2$ has the form:

$$\Phi_2(x) \leq b\, \Phi_1(ax),\ \ x \geq 0$$

for some $b > 0$ and $a > 0$.

If $f \in \mathbf{L}_{\Phi_1}$, then for some $c > 0$ we have

$$\mathcal{I}_{\Phi_1}\left(\frac{f}{c}\right) = \int\limits_0^\infty \Phi_1\left(\frac{|f|}{c}\right) dm < \infty.$$

Therefore

$$\mathcal{I}_{\Phi_2}\left(\frac{f}{ac}\right) = \int\limits_0^\infty \Phi_2\left(\frac{|f|}{ac}\right) dm \leq b \int\limits_0^\infty \Phi_1\left(\frac{|f|}{c}\right) dm = b\, \mathcal{I}_{\Phi_1}\left(\frac{f}{c}\right) < \infty,$$

i.e. $f \in \mathbf{L}_{\Phi_2}$, whence $\mathbf{L}_{\Phi_1} \subseteq \mathbf{L}_{\Phi_2}$.

2) $\Longrightarrow$ 3). It is following from Proposition 1.

3) $\Longrightarrow$ 4). We use the function $f = 1_{[0,x]}$ in the condition 3). Thus we have 4).

4) $\Longrightarrow$ 5). We use the formula (1) for the fundamental function of the Orlicz space. Thus

$$\left(\Phi_2^{-1}\left(x^{-1}\right)\right)^{-1} \leq a\left(\Phi_1^{-1}\left(x^{-1}\right)\right)^{-1},\quad x > 0.$$

Suppose $x^{-1} = \Phi_2(y)$, then

$$\Phi_1^{-1}\left(\Phi_2(y)\right) \leq a\, \Phi_2^{-1}\left(\Phi_2(y)\right) = ay,\ \ y > 0$$

or

$$\Phi_2(y) \leq \Phi_1(ay),\ \ y > 0.$$

5) $\Longrightarrow$ 1). It is obvious. □

Definition 2. Two Orlicz functions Φ_1 and Φ_2 are called *equivalent* ($\Phi_1 \approx \Phi_2$), if the conditions $\Phi_1 \succ \Phi_2$ and $\Phi_2 \succ \Phi_1$ are hold.

Corollary 2. *Let Φ_1 and Φ_2 are Orlicz functions. Then the following conditions are equivalent:*

1). $\Phi_1 \approx \Phi_2$;
2). $\mathbf{L}_{\Phi_1} = \mathbf{L}_{\Phi_2}$ *(as sets);*
3). *Norms* $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}$ *and* $\|\cdot\|_{\mathbf{L}_{\Phi_2}}$ *are equivalent, i.e.*

$$a_1\|f\|_{\mathbf{L}_{\Phi_1}} \leq \|f\|_{\mathbf{L}_{\Phi_2}} \leq a_2\|f\|_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}$$

for all f and some $a_1 > 0$, $a_2 > 0$;

4). *Fundamental functions* $\varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}$ *and* $\varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_2}}$ *are equivalent, i.e.*

$$a_1\varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}(x) \le \varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_2}}(x) \le a_2\varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}(x)$$

for all f *and some* $a_1 > 0$, $a_2 > 0$;

5). *Functions* Φ_1 *and* Φ_2 *are equivalent in the next sense:*

$$\Phi_1(a_1x) \le \Phi_2(x) \le \Phi_1(a_2x),\ \ x \ge 0$$

for some $a_1 > 0$ *and* $a_2 > 0$.

Remark 3. Constants a_1 and a_2 in all conditions 3), 4) and 5) of previous Theorem 2 are the same. For example, the condition 5) is equivalent of the condition

$$\frac{1}{a_2}\Phi_1^{-1}(y) \le \Phi_2^{-1}(y) \le \frac{1}{a_1}\Phi_1^{-1}(y),\ \ y > 0$$

(by $y = \Phi_2(x)$). So

$$a_1\left(\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1} \le \left(\Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1} \le a_2\left(\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{-1}, \quad x > 0,$$

i.e.

$$a_1\varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}(x) \le \varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_2}}(x) \le a_2\varphi_{\mathbf{L}_{\Phi_1}}(x), \quad x > 0.$$

3. Comparison of Lorentz spaces

Let W be an increasing function on $[0, +\infty)$ such that: $W(0) = 0$, W is concave on $(0, +\infty)$, and $W(x) > 0$ for some $x > 0$. Then W is absolutely continuous on the open interval $(0, \infty)$ with the decreasing density function $W'(x)$, $x > 0$, while $W(0+)$ may be positive.

The Lorentz space $\mathbf{\Lambda}_W$ is defined as

$$\mathbf{\Lambda}_W := \{f \in \mathbf{L}_0\colon \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} < +\infty\}$$

with the norm

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} := \int_0^\infty f^*(x)\,dW(x) = f^*(0)W(0+) + \int_0^\infty f^*(x)\,W'(x)\,dx < \infty\,,$$

where $+\infty\cdot 0 = 0$ (see [10], Ch. II, §5.1, and also [12], Ch. 2, [13] and references therein.

The Stieltjes integral $\int_0^\infty f^*(x)\,dW(x)$ has an atomic part $f^*(0)\,W(0+)$ in the case $W(0+) > 0$. The Lorentz spaces are maximal rearrangement invariant spaces with respect to the norm $\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$.

The norm $\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W}$ of function $f \in \mathbf{\Lambda}_W$ can be written as

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} = \int\limits_0^\infty W(\eta_{|f|}(x))dx = \int\limits_0^\infty W \circ \eta_{f^*} dm. \tag{2}$$

Indeed, using the substitution $x = \eta_{f^*}(y),\ \ y = f^*(x)$, we get:

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_W} = \int\limits_0^\infty f^* dW = f^*(x)W(x)|_0^\infty - \int\limits_0^\infty W(x)df^*(x) =$$

$$= \int\limits_\infty^0 W(x)df^*(x) = \int\limits_0^\infty W(\eta_{f^*}(y))dy = \int\limits_0^\infty W \circ \eta_{f^*} dm.$$

By this definition $\mathbf{\Lambda}_W \subseteq \mathbf{L}_\infty$ if $W(0+) > 0$, and $\mathbf{\Lambda}_W \supseteq \mathbf{L}_\infty$ if $W(+\infty) := \lim\limits_{x\to\infty} W(x) < +\infty$. Whence $\mathbf{\Lambda}_W = \mathbf{L}_\infty$ if both the conditions $W(0+) > 0$ and $W(+\infty) < +\infty$ hold.

We calculate the fundamental function of Lorentz space $\mathbf{\Lambda}_W$:

$$\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W}(x) = \int\limits_0^\infty (1_{[0,x]})^* dW = \int\limits_0^x dW = W(x)$$

for all $x > 0$ and $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W}(0) = W(0) = 0$, i.e.,

$$\varphi_{\mathbf{\Lambda}_W} = W. \tag{3}$$

Theorem 3. *Let W_1 u W_2 are two Lorentz function. Then the following conditions are equivalent:*

1). $\mathbf{\Lambda}_{W_1} \subseteq \mathbf{\Lambda}_{W_2}$*;*
2). $W_2(x) \le c\,W_1(x)$ *for all* $x \ge 0$ *and some* $c > 0$.

Proof. 1) $\implies$ 2). Let $\mathbf{\Lambda}_{W_1} \subseteq \mathbf{\Lambda}_{W_2}$. Then, there exists $c > 0$ such that

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{W_2}} \le c\,\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{W_1}},$$

(from Proposition 1).

Therefore

$$W_2(x) = \varphi_{\mathbf{\Lambda}_{W_2}}(x) = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{\Lambda}_{W_2}} \le c\|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{\Lambda}_{W_1}} = c\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{W_1}}(x) = c\,W_1(x).$$

2) $\implies$ 1). Backwards, let $W_2(x) \le c\,W_1(x)$ for all $x \ge 0$ and some $c > 0$ and $f \in \mathbf{\Lambda}_{W_1}$. Then

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{W_1}} = \int\limits_0^\infty W_1(\eta_{|f|}(x))dx < \infty,$$

(from formula (2)).

Therefore

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{W_2}} = \int_0^\infty W_2(\eta_{|f|}(x))dx \leq c \int_0^\infty W_1(\eta_{|f|}(x))dx < \infty,$$

and $f \in \mathbf{\Lambda}_{W_2}$. Thus $\mathbf{\Lambda}_{W_1} \subseteq \mathbf{\Lambda}_{W_2}$.

□

Corollary 3. *Let W_1 and W_2 are two Lorentz functions. Then, the following conditions are equivalent*

1). $\mathbf{\Lambda}_{W_1} = \mathbf{\Lambda}_{W_2}$;
2). $c_1 W_1(x) \leq W_2(x) \leq c_2\, W_1(x)$ *for all* $x \geq 0$ *and some* $c_1, c_2 > 0$.

4. Comparison of Orlicz-Lorentz spaces

The rearrangement invariant spaces $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}$, can be defined by

$$\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W} := \{f \in \mathbf{L}_0 \colon \mathcal{I}_{\Phi,W}(f/a) < \infty \text{ for some } a > 0\} \ ,$$

with the norm

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}} := \inf \{a > 0 \colon \mathcal{I}_{\Phi,W}(f/a) \leq 1\} \ ,$$

where

$$\mathcal{I}_{\Phi,W}(f) := \int_0^\infty \Phi(f^*(x))\, d\, W(x) \ , \ f \in \mathbf{L}_0.$$

The functions Φ and W is Orlicz and Lorentz functions consequently.

We can refer to [14], [15], [3], [4], [5], [6], [9] and to the references cited therein as well.

Remark 4. As $f \in \mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}$ if and only if when exist such $a > 0$ that

$$\mathcal{I}_{\Phi,W}\left(\frac{f^*}{a}\right) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{f^*(x)}{a}\right) d\, W(x) = \left\|\Phi\left(\frac{f^*(x)}{a}\right)\right\|_{\mathbf{\Lambda}_W} < \infty,$$

so

$$f \in \mathbf{\Lambda}_{\Phi,W} \Longleftrightarrow \Phi\left(\frac{f^*}{a}\right) \in \mathbf{\Lambda}_{\Phi,W} \quad \text{для некоторого} \quad a > 0.$$

We obtain the fundamental function of Orlicz-Lorentz space $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}$.

Proposition 2. The fundamental function $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}}$ of Orlicz-Lorentz space $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}$ is:

$$\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}}(x) = \left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{W(x)}\right)\right)^{-1}, \quad x > 0. \tag{4}$$

Proof. For any $x > 0$ and $a > 0$ we have:

$$\mathcal{I}_{\Phi,W}\left(\frac{1}{a}\cdot 1_{[0,x]}\right) = \int\limits_0^\infty \Phi\left(\frac{1}{a}\cdot 1_{[0,x]}(t)\right) dW(t) = \int\limits_0^x \Phi\left(\frac{1}{a}\right) dW(t) = W(x)\,\Phi\left(\frac{1}{a}\right).$$

So

$$\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}}(x) = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}} = \inf\left\{a > 0 : W(x)\,\Phi\left(\frac{1}{a}\right) \le 1\right\} =$$

$$= \inf\left\{a > 0 : a \ge \left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{W(x)}\right)\right)^{-1}\right\} = \left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{W(x)}\right)\right)^{-1}.$$

□

Theorem 4. *Let Φ_1 and Φ_2 are Orlicz functions, W is Lorentz functions, the functions $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$ and $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}}$ are fundamental functions of corresponding Orlicz-Lorentz spaces $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}$ and $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}$. Then the following conditions are equivalent:*

1). $\Phi_1 \succ \Phi_2$;
2). $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W} \subseteq \mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}$;
3). $\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}} \le c\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$ *for some* $c > 0$;
4). $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}} \le c\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$ *for some* $c > 0$;
5). $\Phi_2(x) \le \Phi_1(cx)$ *for some* $c > 0$ *and for all* $x > 0$.

Proof. 1) $\Longrightarrow$ 2). The condition $\Phi_1 \succ \Phi_2$ has the form:

$$\Phi_2(x) \le b\ \Phi_1(ax),\ x \ge 0$$

for some $b > 0$ and $a > 0$.

If $f \in \mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}$, then for some $c > 0$ we have

$$\mathcal{I}_{\Phi_1,W}\left(\frac{f}{c}\right) = \int\limits_0^\infty \Phi_1\left(\frac{f^*}{c}\right) dW < \infty.$$

Therefore

$$\mathcal{I}_{\Phi_2,W}\left(\frac{f}{ac}\right) = \int\limits_0^\infty \Phi_2\left(\frac{f^*}{ac}\right) dW \le b\int\limits_0^\infty \Phi_1\left(\frac{f^*}{c}\right) dW = b\,\mathcal{I}_{\Phi_1,W}\left(\frac{f}{c}\right) < \infty,$$

i.e. $f \in \mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}$, whence $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W} \subseteq \mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}$.

2) $\Longrightarrow$ 3). It is follows from 1.

3) $\Longrightarrow$ 4). Let $\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}} \le c\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$ for some $c > 0$ and for any $f \in \mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}$. Using the function $f = 1_{[0,x]}$, we get:

$$\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}}(x) = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}} \le c\|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}} = c\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}(x).$$

4) $\Longrightarrow$ 5). We use the formula (4) for the fundamental function of Orlicz-Lorentz space $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W}$, we have:

$$\left(\Phi_2^{-1}\left(\frac{1}{W(x)}\right)\right)^{-1} \leq c\left(\Phi_1^{-1}\left(\frac{1}{W(x)}\right)\right)^{-1}, \quad x>0.$$

Suppose $\dfrac{1}{W(x)} = t$, then

$$\left(\Phi_2^{-1}(t)\right)^{-1} \leq c\left(\Phi_1^{-1}(t)\right)^{-1}, \quad t>0,$$

therefore

$$\Phi_1^{-1}(t) \leq c\Phi_2^{-1}(t).$$

Suppose $t=\Phi_2(y)$. Then

$$\Phi_1^{-1}\left(\Phi_2(y)\right) \leq c\,\Phi_2^{-1}\left(\Phi_2(y)\right) = cy,\ \ y>0$$

or

$$\Phi_2(y) \leq \Phi_1(cy),\ \ y>0.$$

5) $\Longrightarrow$ 1). It is obvious. □

Corollary 4. *Let Φ_1 and Φ_2 are Orlicz functions, W is Lorentz function. the functions $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$ and $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}}$ are fundamental functions of corresponding Orlicz-Lorentz spaces $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}$ and $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}$. Then the following conditions are equivalent:*

1). $\Phi_1 \approx \Phi_2$;

2). $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W} = \mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}$ *(as sets);*

3). *Norms $\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$ u $\|\cdot\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}}$ are equivalent, i.e.*

$$a_1\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}} \leq \|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}} \leq a_2\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$$

for all f and some $a_1>0$, $a_2>0$;

4). *Fundamental functions $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}$ and $\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}}$ are equivalent, i.e.*

$$a_1\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}(x) \leq \varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W}}(x) \leq a_2\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W}}(x)$$

for all f and some $a_1>0$, $a_2>0$;

5). *Functions Φ_1 and Φ_2 are equivalent in the next sense:*

$$\Phi_1(a_1x) \leq \Phi_2(x) \leq \Phi_1(a_2x),\ \ x\geq 0$$

for some $a_1>0$ and $a_2>0$.

Theorem 5. *Let W_1 and W_2 are Lorentz functions and Φ is Orlicz function.*

1). *If $W_2(x) \leq c\,W_1(x)$ for all $x\geq 0$ and some $c>0$, then $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_1} \subseteq \mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_2}$;*

2). *If the space $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_1}$ is normally embedded in the space $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_2}$ with embedded constant $c\leq 1$, mo $W_2(x) \leq c\,W_1(x)$ for all $x\geq 0$.*

Proof. 1) $\Longrightarrow$ 2). As the space $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_1}$ is normally embedded in the space $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_2}$, so

$$\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_2}} \le c\,\|f\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_1}},$$

where $c \le 1$. Therefore

$$\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_2}}(x) = \|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_2}} \le c\|1_{[0,x]}\|_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_1}} = c\varphi_{\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_1}}(x),$$

i.e.

$$\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{W_2(x)}\right)\right)^{-1} \le c\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{W_1(x)}\right)\right)^{-1}.$$

Consequently,

$$\Phi^{-1}\left(\frac{1}{W_1(x)}\right) \le c\Phi^{-1}\left(\frac{1}{W_2(x)}\right)$$

The function Φ is increasing convex on $(0,\infty)$. So

$$\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{W_1(x)}\right)\right) \le \Phi\left(c\Phi^{-1}\left(\frac{1}{W_2(x)}\right)\right) \le c\Phi\left(\Phi^{-1}\left(\frac{1}{W_2(x)}\right)\right),$$

i.e.,

$$\frac{1}{W_1(x)} \le c\frac{1}{W_2(x)},$$

Whence

$$W_2(x) \le c\,W_1(x)$$

for all $x \ge 0$.

2) $\Longrightarrow$ 1). Conversely, let $W_2(x) \le c\,W_1(x)$ for all $x \ge 0$ and some $c > 0$ and let $f \in \mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_1}$. So $\Phi\left(\frac{f^*}{a}\right) \in \mathbf{\Lambda}_{W_1}$ for some $a > 0$ and, using the formula (2),

$$\left\|\Phi\left(\frac{f^*}{a}\right)\right\|_{\mathbf{\Lambda}_{W_1}} = \int_0^\infty W_1\left(\eta_{\Phi\left(\frac{f^*}{a}\right)}(x)\right)dx < \infty.$$

Therefore

$$\left\|\Phi\left(\frac{f^*}{a}\right)\right\|_{\mathbf{\Lambda}_{W_2}} = \int_0^\infty W_2\left(\eta_{\Phi\left(\frac{f^*}{a}\right)}(x)\right)dx \le c\int_0^\infty W_1\left(\eta_{\Phi\left(\frac{f^*}{a}\right)}(x)\right)dx < \infty,$$

whence $f \in \mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_2}$. Thus, $\mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_1} \subseteq \mathbf{\Lambda}_{\Phi,W_2}$.

□

Corollary 5. *Let Φ_1 и Φ_2 are Orlicz functions, and W_1 и W_2 are Lorentz functions. If*

1). $\Phi_1 \approx \Phi_2$;

2). $c_1 W_1(x) \le W_2(x) \le c_2\,W_1(x)$ *for all* $x \ge 0$ *and some* $c_1, c_2 > 0$,

so $\mathbf{\Lambda}_{\Phi_1,W_1} = \mathbf{\Lambda}_{\Phi_2,W_2}$*;*

References

[1] Cerda J. Geometric properties of symmetric spaces with applications to Orlicz-Lorentz spaces/ J. Cerda, H. Hudzik, A. Kaminska, M. Mastylo// Positivity – 1998. – №2. – P. 311-337.

[2] Edgar G. A. Stopping times and directed processes/ G. A. Edgar, L. Sucheston. - Cambridge Univ. Press, 1992. – 444p.

[3] Hudzik H. Geometric properties of some Calderon-Lozanovskii and Orlicz-Lorentz spaces/ H. Hudzik, A. Kaminska, M. Mastylo// Houston J. Math. – 1996. – №22. – P. 639-663.

[4] Hudzik H. Geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces/ H. Hudzik, A. Kaminska, M. Mastylo// Canad. Math. Bull. – 1997. – №40. – P. 316-329.

[5] H. Hudzik, A. Kaminska, M. Mastylo. On the dual of Orlicz-Lorentz spaces/ H. Hudzik, A. Kaminska, M. Mastylo// Proc. AMS. – 2003. – №130. – P. 1645-1654.

[6] Kaminska A. Some remarks on Orlicz-Lorentz spaces/ A. Kaminska// Math. Nachr. – 1990. – №147. – P. 29-38.

[7] Kantorovich L. V. Functional Analysis/ L. V. Kantorovich, G. P. Akilov. Pergamon Press, Oxford, 1982. – 589p.

[8] Krasnoselskii M. A. Convex functions and Orlicz spaces/ M. A. Krasnoselskii, Ya. B. Rutitzkii. Gordon and Breach Sc. Publ., 1961. – 249p.

[9] Krbec M. Embeddings between weighted Orlicz-Lorentz spaces/ M. Krbec, J. Lang// Georg. Math. J. – 1997. – №4.– P. 117-128.

[10] Krein S. G. Interpolation of liniar operators/ S. G. Krein, Yu. I. Petunin, E. M. Semenov. American Mathematical Soc., 1982. – 375p.

[11] Lin P. K. Some geometric properties of Orlicz-Lorentz spaces/ P. K. Lin, H. Sun// Arch. Math. – 1995. – №64. – P. 500-511.

[12] Lindenstrauss J. Classical Banach Spaces II. Function Spaces/ J. Lindenstrauss, L. Tzafriri. Springer, 1979. – 273p.

[13] Lorentz G. G. On the theory of spaces Λ/ G. G. Lorentz// Pacific J. of Math. – 1951. – №1. – P. 411-429.

[14] Montgomery-Smith S. J. Orlicz-Lorentz spaces/ S. J. Montgomery-Smith// Proc. Orlicz Mem. Conf., Oxford, Mississippi. – 1992.

[15] Montgomery-Smith S. J. Comparison of Orlicz-Lorentz spaces/ S. J. Montgomery-Smith// Studia Math. – 1992. – №103. – P. 161-189.

[16] Rao M. M. Theory of Orlicz spaces/ M. M. Rao. – M.Dekker, New-York, 1991. – 455p.

[17] Rao M. M. Application of Orlicz spaces/ M. M. Rao, Z. D. Ren. – M.Dekker, New-York, 2002. – 488p.

[18] Muratov M. Order Convergence Ergodic Theorems in Rearrangement Invariant Spaces/ M. Muratov, J. Pashkova, B. Rubshtein // Operator Theory: Advances and Applications. – 2013. – Vol. 227. – P. 123-142.

Сравнение пространств Орлича, Лоренца и Орлича-Лоренца

В работе рассматриваются условия на функции Орлича и функции Лоренца, при выполнении которых одно пространство Орлича-Лоренца содержится в другом или когда эти пространства совпадают. Приведены аналогичные результаты для общих перестановочно инвариантных пространств и, в частности, для пространств Орлича и Лоренца.

Ключевые слова: перестановочно инвариантные пространства, пространства Орлича-Лоренца, сравнение пространств.

Порівняння просторів Орліча, Лоренца та Орліча-Лоренца

В роботі розглядаються умови на функції Орліча та на функції Лоренца, при виконанні яких один простір Орліча-Лоренца є у іншому або коли ці простори співпадають. Наведено аналогічні результати для загальних перестановочно інваріантних просторів та, зокрема, для просторів Орліча та Лореца.

Ключові слова: перестановочно інваріантні простори, простори Орліча-Лоренца, порівняння просторів.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 247–260.

УДК 517.984:517.958 MSC 2010: 35P15, 47A75, 34L20

V. I. Voytitsky, D. A. Zakora

ON THE SPECTRAL PROPERTIES OF SOME AUXILIARY BOUNDARY VALUE PROBLEMS FROM THEORY OF METAMATERIALS

We study new spectral boundary value problem arising in theory of metamaterials. We prove that spectrum of the general problem is discrete and situated in some sector. In the special one-dimensional case we find localization of eigenvalues tending to infinity and some asymptotic formulas.

Key words: Spectral boundary value problem, discrete spectrum, localization of eigenvalues, asymptotic formulas

E-mail: victor.voytitsky@gmail.com, dmitry.zkr@gmail.com

1. Introduction. The general statement of the problem

The present paper is devoted to study some model boundary value spectral problems arising in theory of composite materials. Such materials consist of many thin layers of materials with different properties that make possible to obtain some extra characteristics of composite material. Almost 40 years ago Russian scientist Victor Veselago had an idea for a material with negative index of refraction [1]. Such composite material with a lot of amazing attributes was obtained experimentally by the group of American physics at the beginning of XXI century (see [2], [3]). The negative refraction provides some effects that destroy the classical theory of electromagnetics. For example, superlens effect allows imaging of details finer than the wavelength of light used. Another possible application is effect of cloaking devices: at a given frequency, a spherical volume could be cloaked by means of a spherical shell within which the electric permittivity and magnetic permeability vary in certain prescribed ways. At the given frequency, any object contained within the spherical volume would be invisible to outside observers (see [4], [5]). Obviously, such phenomenons need for the physical and mathematical modeling.

We attempt to study some spectral boundary value problem generated by physical statements from [4], [5]. We consider the following general statement. One have to find the unknown functions $u_k(x)$ $(k=1,2,3)$ (electromagnetic intensity) in given arbitrary smooth domains Ω_k that satisfy equations

$$-\alpha\Delta u_1(x) = \lambda u_1(x), \quad x\in\Omega_1, \tag{1}$$
$$-\beta\Delta u_2(x) = \lambda u_2(x), \quad x\in\Omega_2, \tag{2}$$
$$-\alpha\Delta u_3(x) = \lambda u_3(x), \quad x\in\Omega_3, \tag{3}$$

and boundary conditions

$$u_1(x)=u_2(x), \quad \alpha\frac{\partial u_1}{\partial n}(x) = \beta\frac{\partial u_2}{\partial n}(x), \quad x\in\Gamma_1, \tag{4}$$
$$u_2(x)=u_3(x), \quad \beta\frac{\partial u_2}{\partial n}(x) = \alpha\frac{\partial u_3}{\partial n}(x), \quad x\in\Gamma_2, \tag{5}$$
$$u_3(x)=0, \qquad x\in\Gamma_3. \tag{6}$$

We suppose that domain Ω_1 situates inside Ω_2 including in Ω_3, and Γ_1 is common boundary of Ω_1 and Ω_2, Γ_2 is common boundary of Ω_2 and Ω_3 with outward normal vector $\vec{n}$. The requirement of unboundedness of Ω_3 we substitute for condition (6), where Γ_3 is sufficiently large outward boundary. The number $\lambda\in\mathbb{C}$ is unknown spectral parameter, complex numbers $\alpha,\ \beta\in\mathbb{C}$ $(0\le\arg\alpha<\arg\beta\le\pi)$ are given as we consider. Notice that given statement corresponds to problems from [4], [5] for concentric rings Ω_k, where Ω_3 is unbounded and $\alpha=1$, $\beta=-1+i\varepsilon$ $(0<\varepsilon<<1)$.

In the present work we introduce the first step to study the problem. We prove that problem (1)–(6) has the discrete spectrum with unique limit point at infinity that consist of isolated eigenvalues of finite multiplicity $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ situated in the sector $\arg\beta\le\arg\lambda\le\arg\alpha$. If domains Ω_k are one-dimension segments then for any given $\delta>0$ there exists the number $R(\delta)>0$ such that for $|\lambda|>R(\delta)$ we have no eigenvalues in the sector $\arg\alpha+\delta\le\arg\lambda\le\arg\beta-\delta$. In polar coordinate system we have a branch of eigenvalues tending asymptotically to some parabola with axis of symmetry $\varphi=\arg\beta$ and two branches of eigenvalues tending asymptotically to another parabola with axis of symmetry $\varphi=\arg\alpha$.

2. Properties of the problem in arbitrary domains Ω_k

Suppose that element $u=(u_1(x);u_2(x);u_3(x))\in E:=L_2(\Omega_1)\oplus L_2(\Omega_2)\oplus L_2(\Omega_3)$ is a solution of (1)–(6). Left-hand-sides of (1)–(3) determine the linear operator $\mathcal{A}$ in E. If we set it on the elements u with properties: $u_k(x)\in C^2(\Omega_k)$ $(k=1,2,3)$ and $u_k(x)$ satisfy boundary conditions (4)–(6), then using first Green's formula we obtain

$$(\mathcal{A}u,u)_E = -\alpha\int\limits_{\Omega_1}\Delta u_1\overline{u_1}\,d\Omega_1 - \beta\int\limits_{\Omega_2}\Delta u_2\overline{u_2}\,d\Omega_2 - \alpha\int\limits_{\Omega_3}\Delta u_3\overline{u_3}\,d\Omega_3 =$$

$$= \alpha \int\limits_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 \, d\Omega_1 + \beta \int\limits_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 \, d\Omega_2 + \alpha \int\limits_{\Omega_3} |\nabla u_3|^2 \, d\Omega_3 -$$

$$- \alpha \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} \overline{u_1}|_{\Gamma_1} \, d\Gamma_1 + \beta \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u_2}{\partial n} \overline{u_2}|_{\Gamma_1} \, d\Gamma_1 - \beta \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} \overline{u_2}|_{\Gamma_2} \, d\Gamma_2 + \alpha \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial u_3}{\partial n} \overline{u_3}|_{\Gamma_2} \, d\Gamma_2 -$$

$$- \beta \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\partial u_3}{\partial n} \overline{u_3}|_{\Gamma_3} \, d\Gamma_3 = \alpha \int\limits_{\Omega_1} |\nabla u_1|^2 \, d\Omega_1 + \beta \int\limits_{\Omega_2} |\nabla u_2|^2 \, d\Omega_2 + \alpha \int\limits_{\Omega_3} |\nabla u_3|^2 \, d\Omega_3.$$

Therefore $(\mathcal{A}u, u)_E = c_1\alpha + c_2\beta$, where $c_1, c_2 \geq 0$. So, the numerical range of the operator $\mathcal{A}$ is the sector of complex plane, forming by polar axes $\varphi = \arg \alpha$ and $\varphi = \arg \beta$. In particular, the case $\alpha, \beta > 0$ corresponds to nonnegative operator. If $\alpha > 0$, $\beta < 0$ (superlens without dissipation of energy) then we have a symmetric operator.

To prove the discreteness of the spectrum let us change the spectral parameter λ to the parameter $\mu = \dfrac{\lambda}{\beta} + 1$. Then equations (1)–(3) can be rewritten as

$$-\Delta u_2(x) + u_2(x) = \mu u_2(x), \qquad x \in \Omega_2, \tag{7}$$

$$-\Delta u_k(x) + u_k(x) = \frac{\beta\mu - 1 + \alpha}{\beta} u_k(x), \quad x \in \Omega_k \quad (k = 1, 3). \tag{8}$$

The following Green's formulas are valid:

$$\alpha \int\limits_{\Omega_1} (-\Delta u_1 + u_1) \overline{\eta_1} \, d\Omega_1 = \alpha \int\limits_{\Omega_1} (\nabla u_1 \cdot \nabla \eta_1 + u_1 \overline{\eta_1}) \, d\Omega_1 - \alpha \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u_1}{\partial n} \overline{\eta_1}|_{\Gamma_1} \, d\Gamma_1;$$

$$\beta \int\limits_{\Omega_1} (-\Delta u_2 + u_2) \overline{\eta_2} \, d\Omega_2 = \beta \int\limits_{\Omega_2} (\nabla u_2 \cdot \nabla \eta_2 + u_2 \overline{\eta_2}) \, d\Omega_2 +$$

$$+ \beta \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial u_2}{\partial n} \overline{\eta_2}|_{\Gamma_1} \, d\Gamma_1 - \beta \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial u_2}{\partial n} \overline{\eta_2}|_{\Gamma_2} \, d\Gamma_2;$$

$$\alpha \int\limits_{\Omega_3} (-\Delta u_3 + u_3) \overline{\eta_3} \, d\Omega_3 = \alpha \int\limits_{\Omega_3} (\nabla u_3 \cdot \nabla \eta_3 + u_3 \overline{\eta_3}) \, d\Omega_3 +$$

$$+ \alpha \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial u_3}{\partial n} \overline{\eta_3}|_{\Gamma_2} \, d\Gamma_2 - \alpha \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\partial u_3}{\partial n} \overline{\eta_3}|_{\Gamma_3} \, d\Gamma_3.$$

Suppose now that

$$\eta = (\eta_1; \eta_2; \eta_3) \in F_0 := \{\eta_k \in H^1(\Omega_k) : \ \eta_1|_{\Gamma_1} = \eta_2|_{\Gamma_1}, \ \eta_2|_{\Gamma_2} = \eta_3|_{\Gamma_2}, \ \eta_3|_{\Gamma_3} = 0\}$$

and the element $u = (u_1; u_2; u_3) \in E$ is a solution of spectral problem. Then we have the identity

$$(\beta\mu - 1 + \alpha) \int\limits_{\Omega_1} u_1 \overline{\eta_1} \, d\Omega_1 + \beta\mu \int\limits_{\Omega_2} u_2 \overline{\eta_2} \, d\Omega_2 + (\beta\mu - 1 + \alpha) \int\limits_{\Omega_3} u_3 \overline{\eta_3} \, d\Omega_3 =$$

$$= \alpha(u_1, \eta_1)_{H^1(\Omega_1)} + \beta(u_2, \eta_2)_{H^1(\Omega_2)} + \alpha(u_3, \eta_3)_{H^1(\Omega_3)}.$$

As the spaces $H^1(\Omega_k)$ (with the standard inner products) are boundedly (compactly) imbedded into $L_2(\Omega_k)$ $(k = 1, 3)$, there exist positive compact in $L_2(\Omega_k)$ operators V_k which satisfy the identities

$$\int\limits_{\Omega_k} u_k \overline{\eta_k}\, d\Omega_k = (V_k u_k, \eta_k)_{H_1(\Omega_k)}.$$

On the base of these formulas we have

$$\beta\mu(u,\eta)_E = (\alpha u_1 + (1-\alpha)V_1 u_1, \eta_1)_{H^1(\Omega_1)} + \beta(u_2,\eta_2)_{H^1(\Omega_2)} + (\alpha u_3 + (1-\alpha)V_3, \eta_3)_{H^1(\Omega_3)}.$$

Hence

$$\mu(u,\eta)_E = (\mathcal{B}u, \eta)_{F_0},$$

where $\mathcal{B} = \operatorname{diag}\{\frac{\alpha}{\beta}I_1 + (1-\alpha)V_1;\ I_2;\ \frac{\alpha}{\beta}I_3 + (1-\alpha)V_3\}$ in E. As the space F_0 is compactly imbedded into E (see, for e.g. [6]), there exists positive definite in E operator $\mathcal{A}_0$ such that $(\mathcal{B}u,\eta)_{F_0} = (\mathcal{A}_0\mathcal{B}u, \eta)_E$ for any element $\eta \in F_0$. Therefore μ is an eigenvalue of unbounded in E operator $\mathcal{A}_0\mathcal{B}$.

It is easy to show that if $\dfrac{\beta}{\alpha} - \beta \notin \mathbb{R}_-$ then the operator $\mathcal{B}$ is boundedly invertible. In this case the numbers μ are characteristic numbers of compact operator $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}_0^{-1}$. Therefore they form the countable set of values with unique limit point at infinity. The same property is valid for the eigenvalues $\lambda = \beta\mu - 1$.

Let us consider separately the case $\alpha = 1$. We obtain $\mathcal{B}^{-1} = \operatorname{diag}\{\beta I_1;\ I_2;\ \beta I_3\}$. If additionally $\beta = 1$ then $\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{I}$. Therefore the spectrum of the problem is the set of positive eigenvalues of the operator $\mathcal{A}_0$. It tends to infinity, and the set of eigenfunction form the orthonormal basis in E (analogous result in the space E equipped with equivalent inner product is valid for $\beta > 0$).

If $\beta = -1$ then the operator $\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{J} = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$ is the operator of canonical symmetry in E, and the operator $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}_0^{-1}$ is $\mathcal{J}$-positive in the space of M. Krein with the indefinite inner product $[u,\eta] = (\mathcal{J}u,\eta)_E$. One can prove that the operator $\mathcal{J}\mathcal{A}_0^{-1}$ has infinite dimensional positive and negative maximal invariant subspaces $L_\pm$. So, in these spaces the operator has $\mathcal{J}-$orthonormal systems of eigenelements $\{e_k^\pm\}_{k=1}^\infty$, $[e_k^\pm, e_k^\pm] = \pm 1$, with corresponding branches of positive and negative eigenvalues of the operator $\mathcal{J}\mathcal{A}_0^{-1}$ with a unique limit point at zero (see, e.g., [7], p. 41-42). Therefore the problem has branches of positive and negative eigenvalues with limit points at $\pm\infty$.

The problem with $\beta \notin \mathbb{R}$ is rather difficult. To show it we can write the matrix form of the operator

$$\mathcal{A}_0\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \beta^{-1}A_{11} & \beta^{-1}A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & \beta^{-1}A_{32} & \beta^{-1}A_{33} \end{pmatrix}.$$

The spectrum of the boundary value problem (1)–(6) coincides with the spectrum of this operator. Here we have unbounded operator coefficients A_{ij} without any subordinates, so the classical approaches are not effective to study the spectral properties.

3. Characteristic equation in one-dimensional case

Let $\arg\alpha < \arg\beta$ and $\Omega_1 = (-R;-l),\ \Omega_2 = (-l;l),\ \Omega_3 = (l;R)$ be three intervals then problem (1)–(6) can be rewritten in the form

$$-\alpha u_1''(x) = \lambda u_1(x), \qquad x \in (-R;-l), \tag{9}$$

$$-\beta u_2''(x) = \lambda u_2(x), \qquad x \in (-l;l), \tag{10}$$

$$-\alpha u_3''(x) = \lambda u_3(x), \qquad x \in (l;R), \tag{11}$$

$$u_1(0) = u_2(0), \qquad u_2(l) = u_3(l), \tag{12}$$

$$\alpha u_1'(-l) = \beta u_2'(-l), \qquad \beta u_2'(l) = \alpha u_3'(l), \tag{13}$$

$$u_1(-R) = u_3(R) = 0. \tag{14}$$

Let us consider two auxiliary problems

$$\begin{cases} -u_1''(x) = \dfrac{\lambda}{\alpha}\, u_1(x), \quad x \in (-R;-l), \\ u_1(-R) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} -u_3''(x) = \dfrac{\lambda}{\alpha}\, u_3(x), \quad x \in (l;R), \\ u_3(R) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Their solutions are

$$u_1(x) = d_1 \sin\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(x+R), \qquad u_3(x) = d_3 \sin\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(x-R). \tag{16}$$

Therefore

$$\frac{u_1'(-l)}{u_1(-l)} = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l) =: m(\lambda), \qquad \frac{u_3'(l)}{u_3(l)} = -\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l) = -m(\lambda). \tag{17}$$

Using this notations we obtain the problem for $u_2(x)$:

$$-u_2''(x) = \frac{\lambda}{w} u_2(x), \quad x \in (0;l), \tag{18}$$

$$\beta u_2'(-l) = \alpha u_1'(-l) = \alpha m_1(\lambda) u_1(-l) = \alpha m(\lambda) u_2(-l), \tag{19}$$

$$\beta u_2'(l) = \alpha u_3'(l) = \alpha m_3(\lambda) u_3(l) = -\alpha m(\lambda) u_3(l). \tag{20}$$

Equation (18) has the solution $u_2(x) = c_1 \sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}x + c_2\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}x$. So, boundary conditions (19)–(20) imply

$$\beta u_2'(-l) = \beta\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\left[c_1\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + c_2\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l\right] = \alpha m(\lambda)\left[-c_1\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + c_2\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l\right],$$

$$\beta u_2'(l) = \beta\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}\left[c_1\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - c_2\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l\right] = -\alpha m(\lambda)\left[c_1\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + c_2\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l\right].$$

It is linear homogeneous system of two equation with unknown constants c_1 and c_2 which has nontrivial solutions if and only if

$$\det = \begin{vmatrix} \sqrt{\beta\lambda}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + \alpha m(\lambda)\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l & \sqrt{\beta\lambda}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - \alpha m(\lambda)\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l \\ \sqrt{\beta\lambda}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + \alpha m(\lambda)\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l & -\sqrt{\beta\lambda}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + \alpha m(\lambda)\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

Hence

$$2\left(\sqrt{\beta\lambda}\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + \alpha m(\lambda)\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l\right)\left(\sqrt{\beta\lambda}\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - \alpha m(\lambda)\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l\right) = 0. \quad (22)$$

If $\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l = 0$ then (22) implies that either $\lambda = 0$ or $m(\lambda) = 0$. One can check that $\lambda = 0$ is not eigenvalue. Therefore

$$m(\lambda) = \sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l) = 0.$$

So, we obtain $\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{\alpha}}{R-l}(\frac{\pi}{2} + \pi n)$ $(n \in \mathbb{Z})$. On the other hand by the assumption we have $\sqrt{\lambda} = \frac{\sqrt{\beta}}{l}\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$. It can not be possible since $\arg\alpha \neq \arg\beta$, hence $\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l \neq 0$.

Equation (22) implies two characteristic equations

$$f_1(\lambda) := \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l) = 0, \quad (23)$$

$$f_2(\lambda) := -\operatorname{tg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l) = 0. \quad (24)$$

These equations can be reduced to the problem of zeros of some entire functions, so the spectrum is discrete and it has the unique limit point at infinity.

4. Localization of the eigenvalues with great absolute value

Let us study the case $|\lambda| \to \infty$. To this aim we divide the numerical range of the operator $\mathcal{A}$ to the three domains $V_\alpha := \{z \in \mathbb{C} : \arg\alpha < \arg z < \arg\alpha + \delta\}$, $V_0 := \{z \in \mathbb{C} : \arg\alpha + \delta < \arg z < \arg\beta - \delta\}$, $V_\beta := \{z \in \mathbb{C} : \arg\beta - \delta < \arg z < \arg\beta\}$, where $\delta > 0$ is a given little number.

For $|\lambda| \to \infty$ inside the domain $V_0 \cup V_\alpha$ we have

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l \to i. \quad (25)$$

Analogously, inside the domain $V_0 \cup V_\beta$ we have

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l) \to -i. \quad (26)$$

Lemma 1. *There exist such a number $R(\delta) > 0$ that there is no solutions of* (23), (24) *in the domain V_0 for $|\lambda| > R(\delta)$.*

Proof. Indeed, let us suppose that we have infinitely many solutions $\{\lambda_{n_k}\}$ of (23) situated in the V_0. Using (25), (26) we obtain

$$f_1(\lambda_{n_k}) \to i - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\, i = i\frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} \neq 0 \quad (n \to \infty), \tag{27}$$

since $\arg\alpha < \arg\beta$. It is impossible as $f(\lambda_{n_k}) \equiv 0$. Analogous result is obviously valid for (24). $\square$

Using asymptotic (25) inside the domain $V_0 \cup V_\alpha$ we obtain that (23) and (24) are close to equation

$$\widetilde{f}_1(\lambda) := i + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l) = 0. \tag{28}$$

Inside the domain $V_0 \cup V_\beta$ we have asymptotic (26), therefore equations (23) and (24) are close to

$$\widetilde{f}_{21}(\lambda) := \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}i = 0, \tag{29}$$

$$\widetilde{f}_{22}(\lambda) := \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}i = 0. \tag{30}$$

Union (29), (30) can be reduced to the unique equation. Suppose that

$$\widetilde{f}_{21}(\lambda)\cdot\widetilde{f}_{22}(\lambda) = \operatorname{ctg}^2\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}i + \sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}i\right) - 1 =$$

$$= \frac{\cos^2\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - \sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l}{\sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l} - \frac{2\cos\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l\sin\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l}{\sin^2\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l}\left(\frac{i(\alpha+\beta)}{2\sqrt{\alpha\beta}}\right) = 0. \tag{31}$$

It is equivalent to

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}2l = \frac{i(\alpha+\beta)}{2\sqrt{\alpha\beta}}. \tag{32}$$

All of limit equations (28), (32) can be reduced to the form

$$\operatorname{ctg} z = a + ib, \qquad a, b \in \mathbb{R}. \tag{33}$$

Using the exponent we have $\dfrac{i(e^{iz}+e^{-iz})}{e^{iz}-e^{-iz}} = a + ib$ or $i(e^{2iz}+1) = (a+ib)(e^{2iz}-1)$. Hence $e^{2iz} = \dfrac{a+i(b+1)}{a+i(b-1)}$. Finding the logarithm we obtain the countable set of solutions

$$z_n = \frac{1}{2}\arg\frac{a+i(b+1)}{a+i(b-1)} + \pi n - \frac{i}{2}\ln\left|\frac{a+i(b+1)}{a+i(b-1)}\right| =: A + \pi n - iB, \quad n \in \mathbb{Z}\ (A, B \in \mathbb{R}). \tag{34}$$

Therefore corresponding solutions of (28) have the form

$$\lambda_n = \frac{\alpha z^2}{(R-l)^2} = \frac{\alpha}{|\alpha|}\Big[\frac{|\alpha|((A_1+\pi n)^2 - B_1^2)}{(R-l)^2} - 2i\frac{|\alpha|B_1(A_1+\pi n)}{(R-l)^2}\Big], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

All these points are situated on the branch of parabola

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2(R-l)^2}{4|\alpha|B_1^2} - \frac{|\alpha|B_1^2}{(R-l)^2}, \tag{36}$$

rotated through the angle $\arg\alpha$. Notice that there exist some number N_1 such that for $n \geq N_1$ these points are situated in V_α. For $R - l \to \infty$ parabola (36) stretches along its axis of symmetry and coincides with the ray $\varphi = \arg\alpha$ in limit. This conclusion argues the hypothesis that the problem with unbounded domains has the continuous spectrum and it fills all the polar axis $\varphi = \arg\alpha$. This problem will be discussed in the further articles.

Analogous solutions of (32) have the form

$$\lambda_n = \frac{\beta z^2}{l^2} = \frac{\beta}{|\beta|}\Big[\frac{|\beta|((A_2+\pi n)^2 - B_2^2)}{4l^2} - 2i\frac{|\beta|B_2(A_2+\pi n)}{4l^2}\Big], \quad n \in \mathbb{N}. \tag{37}$$

All these points are situated on the branch of parabola

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2 l^2}{|\beta|B_2^2} - \frac{|\beta|B_2^2}{4l^2}, \tag{38}$$

rotated through the angle $\arg\beta$. Obviously, there exist some number N_2 such that $\lambda_n \in V_\beta$ for $n \geq N_2$.

All of the limit equations are close to solutions of characteristic equations (23), (24) for $\lambda \to \infty$. More precise, for sufficiently large n solutions of characteristic and limit equations are as close as greater the number n.

Lemma 2. *For given $\gamma > 1$ and the sequence of positive numbers $r_n = n^{-\gamma} \to 0$ ($n \to \infty$) there exists such a number $N_\gamma \geq N_1 > 0$ that for all $n \geq N_\gamma$ in the neighborhood $|\lambda - \lambda_n| < r_n$ of each solution λ_n of* (28) *we have a unique solution of* (23) *and a unique solution of* (24).

Proof. Let λ_n ($n \geq N_1$) are solutions of (28) situated inside the domain V_α. To prove the lemma we can use the theorem of Rouche (see, e.g., [8], p. 131). It is sufficient to prove the inequality

$$|f_1(\lambda)f_2(\lambda) - \widetilde{f}_1^2(\lambda)| < |\widetilde{f}_1^2(\lambda)| \tag{39}$$

for all $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $|\lambda - \lambda_n| = r_n = n^{-\gamma}$ ($n \geq N_\gamma \geq N_1$).

Indeed, function $\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l)$ is analytic inside V_α, so near λ_n we have

$$\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l) = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}}(R-l) - \frac{(R-l)(\lambda-\lambda_n)}{2\sqrt{\alpha\lambda_n}\cdot\sin^2\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}}(R-l)} + O(|\lambda-\lambda_n|^2). \tag{40}$$

Using the assumption $\widetilde{f}_1(\lambda_n)=0$ we obtain

$$|\widetilde{f}_1^2(\lambda)| = |i+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l)|^2 =$$
$$= |i+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}}(R-l) - \frac{(R-l)(\lambda-\lambda_n)}{2\sqrt{\beta\lambda_n}\cdot\sin^2\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}}(R-l)} + O(|\lambda-\lambda_n|^2)|^2 >$$
$$> \left(\frac{(R-l)|\lambda-\lambda_n|}{|2\sqrt{\beta\lambda_n}\cdot\sin^2\sqrt{\frac{\lambda_n}{\beta}}(R-l)|} - |O(|\lambda-\lambda_n|^2)|\right)^2 = \left(\frac{\mathrm{const}\cdot r_n}{\sqrt{(A+\pi n)^2+B^2}} - O(r_n^2)\right)^2 =$$
$$= c\cdot n^{-2\gamma-2} + o(n^{-2\gamma-2}) \quad (n\to\infty,\ \gamma>1). \quad (41)$$

Here $|\sin^2\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}}(R-l)|>0$ is a fixed number, $|\sqrt{\lambda_n}| = c\cdot\sqrt{(A+\pi n)^2+B^2}$ according to (34), (35).

On the other hand

$$|f_1(\lambda)f_2(\lambda)-\widetilde{f}_1^2(\lambda)| =$$
$$= |\left(\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l)\right)\left(-\operatorname{tg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l)\right) -$$
$$-\left(i+\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l)\right)^2| = |\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l)|\cdot|\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - \operatorname{tg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - 2i| <$$
$$< \left(\mathrm{const} + \frac{\mathrm{const}\cdot r_n}{\sqrt{(A+\pi n)^2+B^2}} + O(r_n^2)\right)\left(|\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - i| + |\operatorname{tg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + i|\right). \quad (42)$$

We have

$$|\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - i| = |i\frac{e^{2il\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}}+1}{e^{2il\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}}-1} - i| = \frac{2}{|e^{2il\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}}-1|} < \frac{2}{||e^{2il\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}}|-1|}. \quad (43)$$

For $\lambda\in V_\alpha$ we have $\operatorname{Im}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}<0$. By the assumption $|\lambda-\lambda_n| = r_n\to 0$ and $\lambda\in V_\alpha$, so $\operatorname{Im}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}} < \operatorname{Im}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}} + \varepsilon_n < 0$ for some $0<\varepsilon_n\to 0$ $(n\to\infty)$. If $\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = a-ib$ then $\arg\beta > \arg\alpha$ imply $b>0$. So, using (34), (35) we obtain

$$\operatorname{Im}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\beta}} = \operatorname{Im}\left(\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}}\cdot\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\right) = \operatorname{Im}\left(c(A_1+\pi n+iB_1)(a-ib)\right) = -c(A_1+\pi n)b + caB_1, \quad c>0. \quad (44)$$

Therefore

$$|\exp(2il\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}})| = \exp(-2l\operatorname{Im}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}) > \exp(-2l\operatorname{Im}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\beta}} - 2l\varepsilon_n) =$$

$$= \exp(-2l(-cb\pi n - cbA_1 + caB + \varepsilon_n)) > c_1 e^{c_2 n}, \quad c_1,\ c_2 > 0. \quad (45)$$

So, for $|\lambda - \lambda_n| = r_n \to 0$ there exist constants $c_1,\ c_2 > 0$ not depending on the number n such that

$$|\mathrm{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - i| < \frac{2}{c_1 e^{c_2 n} - 1}, \quad (46)$$

For the same λ we have

$$|\mathrm{tg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l + i| = |-i\frac{e^{2il\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}} - 1}{e^{2il\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}} + 1} + i| = \frac{2}{|e^{2il\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}} + 1|} < \frac{2}{|e^{2il\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}}| + 1} < \frac{2}{c_1 e^{c_2 n} + 1}. \quad (47)$$

As exponent increases to infinity faster then any power function we really can find such a number N_γ that

$$|f_1(\lambda) f_2(\lambda) - \widetilde{f}_1^2(\lambda)| < \mathrm{const}\cdot\left(\frac{2}{c_1 e^{c_2 n} - 1} + \frac{2}{c_1 e^{c_2 n} + 1}\right) < c \cdot n^{-2\gamma-2} + + o(n^{-2\gamma-2}) < |\widetilde{f}_1^2(\lambda)| \quad (48)$$

for $n \geq N_\gamma$ and $|\lambda - \lambda_n| = r_n = n^{-\gamma}$. □

Lemma 3. *For given $\gamma > 1$ and the sequence of positive numbers $r_n = n^{-\gamma} \to 0$ ($n \to \infty$) there exist such a number $M_\gamma \geq N_2 > 0$ such that for all $n \geq M_\gamma$ in the neighborhood $|\lambda - \lambda_n| < r_n$ of each solution λ_n of* (29) *we have a unique solution of* (23) *and in the neighborhood $|\lambda - \lambda_n| < r_n$ of each solution λ_n of* (30) *we have a unique solution of* (24).

Proof. We prove only the first part of the theorem connected with the equations (29) and (23). The second part can be proved analogously.

Let λ_n ($n \geq N$) are solutions of (29) situated inside the domain V_β. By the theorem of Rouche (see, e.g., [8], p. 131) it is sufficient to prove the inequality

$$|f_1(\lambda) - \widetilde{f}_{21}(\lambda)| = |\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}\mathrm{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R - l) + \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}i| < |\mathrm{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l - \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}i| = |\widetilde{f}_{21}(\lambda)| \quad (49)$$

for all $\lambda \in \mathbb{C}$ such that $|\lambda - \lambda_n| = r_n = n^{-\gamma}$ and $n \geq M_\gamma \geq N_2$.

Indeed, function $\mathrm{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l$ is analytic inside V_β, and we have

$$\mathrm{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\beta}}l = \mathrm{ctg}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\beta}}l - \frac{l(\lambda - \lambda_n)}{2\sqrt{\beta\lambda_n}\cdot\sin^2\sqrt{\frac{\lambda_n}{\beta}}l} + O(|\lambda - \lambda_n|^2). \quad (50)$$

Using the assumption $\widetilde{f}_{21}(\lambda_n) = 0$ we obtain

$$|\widetilde{f}_{21}(\lambda)| = |-\frac{l(\lambda - \lambda_n)}{2\sqrt{\beta\lambda_n}\cdot\sin^2\sqrt{\frac{\lambda_n}{\beta}}l} + O(|\lambda - \lambda_n|^2)| >$$

$$> |\frac{i\sqrt{\alpha}l}{\sqrt{\lambda_n}\cdot\sin^2\sqrt{\frac{\lambda_n}{\beta}}l}|\cdot|\lambda-\lambda_n| - |O(|\lambda-\lambda_n|^2)| = \frac{\mathrm{const}\cdot r_n}{\sqrt{(A+\pi n)^2+B^2}} - O(r_n^2) =$$

$$= cn^{-\gamma-1} + O(n^{-2\gamma}) = cn^{-\gamma-1} + o(n^{-\gamma-1}) \quad (n\to\infty,\ \gamma>1). \quad (51)$$

Here $|\sin^2\sqrt{\frac{\lambda_n}{\beta}}l| > 0$ is a fixed number, $|\sqrt{\lambda_n}| = c\cdot\sqrt{(A+\pi n)^2+B^2}$ according to (34), (35).

On the other hand

$$|\mathrm{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l)+i| = |i\frac{e^{2i(R-l)\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}}+1}{e^{2i(R-l)\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}}-1}+i| = \frac{2}{|1-e^{-2i(R-l)\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}}|} < \frac{2}{|e^{-2i(R-l)\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}}|-1}. \quad (52)$$

For all $\lambda_n \in V_\beta$ we have $\mathrm{Im}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}} > 0$. By the assumption $|\lambda-\lambda_n| = r_n = n^{-\gamma} \to 0$ and $\lambda \in V_\beta$, so $\mathrm{Im}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}} > \mathrm{Im}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}} - \varepsilon_n > 0$ for some $0 < \varepsilon_n \to 0$ $(n\to\infty)$. If $\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}} = a+ib$ then $\arg\beta > \arg\alpha$ imply $b>0$. So, using (34), (35) we obtain

$$\mathrm{Im}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}} = \mathrm{Im}\left(\sqrt{\frac{\lambda_n}{\beta}}\cdot\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) = \mathrm{Im}\,(c(A+\pi n+iB)(a+ib)) = c(A+\pi n)b + caB, \quad c>0. \quad (53)$$

Therefore

$$|\exp(-2i(R-l)\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}})| = \exp(2(R-l)\mathrm{Im}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}) > \exp(2(R-l)\mathrm{Im}\sqrt{\frac{\lambda_n}{\alpha}} - 2R\varepsilon_n) =$$

$$= \exp(2(R-l)(cb\pi n + cbA + caB - \varepsilon_n)) > d_1e^{d_2 n}. \quad (54)$$

for some $d_1,\ d_2 > 0$. Finally, we can find such a number M_γ that

$$|\widetilde{f}_{21}(\lambda)| = |\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}||\mathrm{ctg}\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}(R-l)+i| < \frac{2}{d_1e^{d_2n}-1} < cn^{-\gamma-1}+o(n^{-\gamma-1}) < |\widetilde{f}_{21}(\lambda)|, \quad (55)$$

for $|\lambda-\lambda_n| = r_n = n^{-\gamma}$ and $n \geq M_\gamma$. □

5. Some asymptotic formulas for the limit equations

Now, let us consider the interesting special case

$$\alpha = 1, \quad \sqrt{\beta} = i+\varepsilon \quad (\beta = -1+\varepsilon^2+2i\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0. \quad (56)$$

We can rewrite the limit equations (28), (32)

$$\mathrm{ctg}\left(\sqrt{\lambda}(R-l)\right) = 1 - i\varepsilon, \quad (57)$$

$$\mathrm{ctg}\left(\sqrt{\lambda}\frac{2l}{i+\varepsilon}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{2(\varepsilon^2+1)} + i\frac{2\varepsilon+\varepsilon^3}{2(\varepsilon^2+1)} \approx -\frac{\varepsilon^2}{2} + i\varepsilon, \quad (58)$$

If $z = \sqrt{\lambda}(R-l)$ then we obtain by the formula (34)

$$z_n = \frac{\pi}{4} + \pi n - \frac{\varepsilon^2}{4} + i\left(\frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right) + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{59}$$

Let us define $u_n := \frac{\pi}{4} + \pi n$, then we have asymptotic formula for the solutions of (57)

$$\lambda_n(\varepsilon) = \frac{z_n^2}{(R-l)^2} = \frac{1}{(R-l)^2}\left[u_n^2 - \varepsilon^2 \frac{2u_n + 1}{4} + i(\varepsilon u_n - \varepsilon^2 u_n)\right] + o(\varepsilon^2). \tag{60}$$

For $\varepsilon = 0$ we have the branch of positive eigenvalues

$$\lambda_n(0) = \frac{\pi^2(\frac{1}{4} + n)^2}{(R-l)^2}. \tag{61}$$

If ε increases then all this values move asymptotically in upper complex half plane along some parabolas, and its shift is as big as the number n. By formula (36) for all fixed $\varepsilon > 0$ the branch of eigenvalues is situated along the parabola

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2(R-l)^2}{(\varepsilon - \varepsilon^2)^2} - \frac{(\varepsilon - \varepsilon^2)^2}{4(R-l)^2}. \tag{62}$$

If we change the variable $z = \dfrac{2l\sqrt{\lambda}}{i+\varepsilon}$ in (58) then using formula (34) we obtain

$$z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{\varepsilon^2}{2} - i(\varepsilon + 2\varepsilon^2) + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{63}$$

Let us define $v_n := \frac{\pi}{2} + \pi n$. So, we have asymptotic formula for the solutions of (58)

$$\begin{aligned} \lambda_n(\varepsilon) &= \frac{-1 + \varepsilon^2 + 2i\varepsilon}{4l^2} z_n^2 = \\ &= \frac{1}{4l^2}\left[-v_n^2 + \varepsilon^2(1 + 5v_n + v_n^2) + 2i(\varepsilon(v_n + v_n^2) + 2\varepsilon^2 v_n)\right] + o(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{64}$$

If $\varepsilon = 0$ then it is the branch of negative eigenvalues

$$\lambda_n(0) = -\frac{\pi^2(\frac{1}{2} + n)^2}{4l^2}. \tag{65}$$

If ε increases then all this values move asymptotically in upper complex half plane along some parabolas, and its displacement as big as the number n. By formula (38) for all fixed $\varepsilon > 0$ the branch of eigenvalues is situated along the parabola

$$\operatorname{Re}\lambda = \frac{(\operatorname{Im}\lambda)^2 l^2}{\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)} - \frac{\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2)}{4l^2}, \tag{66}$$

rotated through the angle $\arg(-1 + \varepsilon^2 + 2i\varepsilon)$.

6. Conclusion

In present work we consider some auxiliary spectral boundary value problems arising in theory of metamaterials. We prove that general problem has discrete spectrum situated in the sector $\arg\beta \leq \arg\lambda \leq \arg\alpha$. In the special one-dimensional case we find characteristic equation for eigenvalues λ_n and establish its localization in the narrow angles $\arg\alpha \leq \arg\lambda \leq \arg\alpha + \delta$ and $\arg\beta - \delta \leq \arg\lambda \leq \arg\beta$ $(\delta > 0)$ for $n \to \infty$. More precise, we find exact solutions of limit characteristic equations corresponding to each of these sectors and prove that asymptotic behavior of the eigenvalues coincides with these solutions which are parabolas with polar axis of symmetries $\arg\lambda = \arg\alpha$ and $\arg\lambda = \arg\beta$. For the interesting physical case $\alpha = 1$, $\sqrt{\beta} = i + \varepsilon$ we find asymptotic behavior of the eigenvalues λ_n for $\varepsilon \to +0$ depending on the number n.

Authors thank to Kiselev A.V. and Kopachevsky N.D. for statement the problem and useful advises.

References

[1] Veselago V.G. Electrodynamics of the materials with negative values of ε and μ // Uspehi phiz. nauk, Vol. 92, no. 3. – 1967. - P. 517-526.

[2] Smith D.R. et al. Composite Medium with Simultaneously Negative Permeability and Permittivity // Phys. Rev. Lett., Vol. 84, no, 18. – 2000. – P. 4184 - 4187.

[3] Shelby R.A., Smith D.R., Schultz S. Experimental Verification of a Negative Index of Refraction // Science – Vol. 292, no. 5514. – P. 77-79

[4] Milton G.W., Nicorovici N.-A.P., McPhedran R.C. and others. Solutions in folded geometries, and associated cloaking due to anomalous resonance // New Journal of Physics, Vol. 10. – 2008. – P. 1–22.

[5] Bruno O.P. and Lintner S., Superlens-cloaking of small dielectric bodies in the quasistatic regime // Journal of applied physics, Vol. 102, 124502. – 2007.

[6] Voytitsky V.I., Kopachevsky N.D., Starkov P.A. Multicomponent conjugation problems and auxiliary abstract boundary value problems // Journal of Math Sciences (Springer). – 2010. – Vol. 170., no. 2. – P. 131-172.

[7] Kopachevsky, N.D., Krein, S.G. Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems for an Ideal Fluid. Birkhäuser Verlag, Basel, Boston, Berlin. – 2001. – 374 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 128).

[8] Beardon A.F. Complex Analysis: The Argument Principle in Analysis and Topology. – 1979, Hardcover. Wiley & Sons, Incorporated, John. – 239 pp.

О спектральных свойствах некоторых вспомогательных краевых задач теории метаматериалов

Рассматривается новая спектральная краевая задача, возникающая в теории метаматериалов. В общем случае доказано, что ее спектр является дискретным и расположен в некотором секторе. В частном одномерном случае найдена локализация собственных значений, стремящихся к бесконечности, а также некоторые асимптотические формулы.

Ключевые слова: Спектральная краевая задача, дискретный спектр, локализация собственных значений, асимптотические формулы

Про спектральні властивості деяких допоміжних крайових задач теорії метаматеріалів

Розглядається нова спектральна крайова задача, що виникає в теорії метаматеріалів. У загальному випадку доведено, що її спектр є дискретним та розташованим у деякому секторі. У частному одномірному випадку знайдена локалізація власних значень, що збігаються до нескінченості, а також деякі асимптотичні формули.

Ключевые слова: Спектральная краевая задача, дискретный спектр, локализация собственных значений, асимптотические формулы

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 261–279.

УДК 519.833.2 MSC2000: 91A06

V. I. Zhukovskiy, S. N. Sachkov, L. V. Smirnova

EXISTENCE OF BERGE EQUILIBRIUM IN MIXED STRATEGIES

We formalize a guaranteed solution notion for a non-cooperative game of n persons under uncertainty. This notion is based on the appropriate modification of maximin and the Berge-Vaisman equilibrium. We obtain existence conditions for the guaranteed solution in the class of mixed strategies (probability measures).[1]

Keywords: probability measure, mixed strategy, weak compactness in itself, guarantee, Berge-Vaisman equilibrium, Nash equilibrium, maximin.

E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Introduction

The Berge equilibrium concept was introduced *intuitively* by French mathematician Claude Berge [1]. A brief review of Berge's book by Shubik [2] scared economists and contributed to its subsequent neglect in the English-speaking world. Particularly it was marked: "The arguments have been presented in a rather abstract manner and no attention has been paid to applications to economics. The book will be of a little direct interest to economists". The Berge's book was translated into Russian in 1961, and V.Zhukovskiy in 1994-1995 formalized the Berge equilibrium for linear-quadratic differential games under uncertainties [3], [4].

Note that Nash equilibrium is a common optimality concept for non-cooperative games. The key difference is that in case of Nash equilibrium an individual player's deviation from the equilibrium cannot increase the player's own payoff whereas; at the same time in case of Berge equilibrium a deviation by one or more players can reduce the payoff of a player, who does not deviate from an equilibrium situation. The Berge

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-01-90408 Укр_а.

equilibrium concept formalizes mutual support among players motivated by the altruistic social value orientation in such games.

Now turn to formal definitions. Consider a non-cooperative game of three persons

$$\Gamma_3 = \langle \{1,2,3\}, \{X_i\}_{i=1,2,3}, \{f_i(x)\}_{i=1,2,3} \rangle\,,$$

where $X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ is a set of strategies x_i of the i-th player, $f_i(x)$ is his payoff function, a situation $x = (x_1, x_2, x_3) \in X = \prod\limits_{i=1}^{3} X_i$.

K. Vaisman called a couple $(x^{\mathrm{v}}, f^{\mathrm{v}}) \in X \times \mathbb{R}^3$ a *Berge equilibrium solution for the game* Γ_3 [5]-[7] if the following conditions

(1^0) a situation $x^{\mathrm{v}} = (x_1^{\mathrm{v}}, x_2^{\mathrm{v}}, x_3^{\mathrm{v}})$ satisfies a *Berge equilibrium condition*, i.e.

$$f_1(x_1^{\mathrm{v}}, x_2, x_3) \leq f_1(x^{\mathrm{v}}) \ \ \forall\, x_j \in X_j \ (j = 2,3),$$

$$f_2(x_1, x_2^{\mathrm{v}}, x_3) \leq f_2(x^{\mathrm{v}}) \ \ \forall\, x_k \in X_k \ (k = 1,3),$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3^{\mathrm{v}}) \leq f_3(x^{\mathrm{v}}) \ \ \forall\, x_r \in X_r \ (r = 1,2);$$

(2^0) a property of *individual rationality holds* for all players, i.e.

$$f_1(x^{\mathrm{v}}) \geq \max_{x_1} \min_{x_2,x_3} f_1(x),$$

$$f_2(x^{\mathrm{v}}) \geq \max_{x_2} \min_{x_1,x_3} f_2(x),$$

$$f_3(x^{\mathrm{v}}) \geq \max_{x_3} \min_{x_1,x_2} f_3(x)$$

hold.

The "game"sense of the condition (2^0) is as follows. If the property of individual rationality (2^0) holds then every player provides himself a payoff $f_i(x^{\mathrm{v}})$ $(i = 1,2,3)$ which is at least not less than the i-th player's maximin. The condition (2^0) first was proposed by Zhukovskiy's doctoral student Konstantin Vaisman in 1994 [5]-[7]. He constructed some examples such that a situation satisfying the Berge equilibrium conditions (1^0) provides some players payoffs which are less than their maximins. In order to overcome this negative property of the Berge equilibrium Vaisman proposed to use additionally condition (2^0). Moreover, the following results were obtained by Vaisman:

– in some cases the Berge equilibrium exists, when there is no Nash equilibrium;
– in some games (The Prisoners' Dilemma, The Environmental Protection [8, p. 193]) if players simultaneously choose Berge equilibrium strategies, then everyone receives a larger payoff than if they chose Nash equilibrium strategies.

Konstantin Vaisman died suddenly at the age of 35 in 1998. He owned a remarkable trait: he had been helping everyone and forgetting himself. The authors of this paper think that Vaisman's researches of Berge equilibrium provide a basis to call the above mentioned solution $(x^{\mathrm{v}}, f^{\mathrm{v}})$ of the non-cooperative game Γ_3 the *Berge-Vaisman equilibrium*.

Sufficient existence conditions of the Berge equilibrium were obtained by Zhukovskiy [9] in the form of existence conditions for a saddle point $(x^0, z^{\mathrm{v}}) \in X \times X$ of the Germayer convolution $\max_i (f_i(x\|z_i) - f_i[z])$, $z_i \in X_i$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in X = \prod_{i \in N} X_i$. The ideas of this approach have been used in the current research.

The aim of this paper is

- to formalize the Berge guaranteed solution for the non-cooperative game of n persons under uncertainty, when we have only the limits of variations of these uncertainties;
- to prove existence of the Berge guaranteed solution in the class of mixed strategies (probability measures).

1. Auxiliary data

1.1. **Existence conditions for continuous selector.** First introduce some facts from mathematical programming [10], [11].

Suppose that

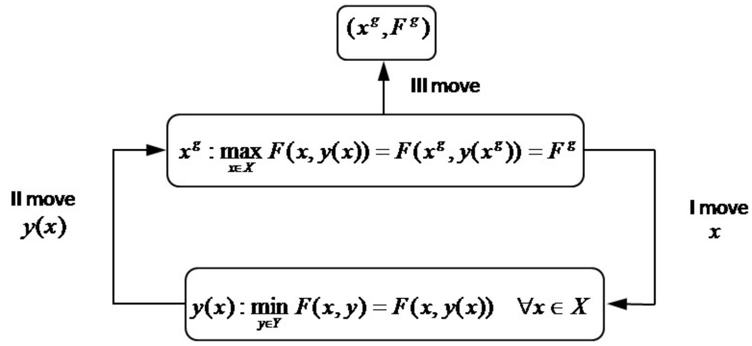
(1) a set $X \subset \mathbb{R}^l$ ($\mathbb{R}^l$ is the Euclidean l-dimensional space) is a compact one;
(2) a set $Y \subset \mathbb{R}^m$ is a convex compact one;
(3) a scalar function $F(x, y)$ is determined and continuous on $X \times Y$, $x \in X$ and $y \in Y$;
(4) for any $x \in X$ the function $F(x, y)$ is strictly convex in $y \in Y$, i.e.
$$F(x, \lambda y^{(1)} + (1-\lambda) y^{(2)}) < \lambda F(x, y^{(1)}) + (1-\lambda) F(x, y^{(2)})$$
for all $y^{(j)} \in Y$ $(j = 1, 2)$ and any $\lambda = const \in (0, 1)$.

Then there exists a continuous m-vector function $y(x) : X \to Y$ such that
$$\min_{y \in Y} F(x, y) = F(x, y(x)) \ \ \forall x \in X.$$

1.2. **Maximin in terms of hierarchical game.** In game theory a maximin strategy x^g and a maximin F^g are defined by the chain of equalities
$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} F(x, y) = \min_{y \in Y} F(x^g, y) = F^g. \tag{1}$$

For the process of accepting a guaranteed solution $(x^g, F^g) \in X \times \mathbb{R}$ we can suggest the following interpretation in terms of bilevel hierarchical game [10]. Two players are participating in the game: Center and a player at a lower level on the hierarchy. Assume that Center forms his own strategy $x \in X$ and the player at the lower level constructs an uncertainty $y(x) : X \to Y$, $y(\cdot) \in C(X, Y)$ (see Fig. 1). The game proceeds as follows.

The first move is made by Center. He informs the lower level player of his possible strategies $x \in X$.



Pic. 1

The following (second) move is transferred to the lower level player, who forms an uncertainty $y(x) : X \to Y$ such that for every $x \in X$

$$\min_{y \in Y} F(x, y) = F(x, y(x)) = F[x], \tag{2}$$

and informs Center about a specific type of the uncertainty $y(x)$.

Finally (third move): Center forms a pair (x^g, F^g) which is defined by the condition

$$\max_{x \in X} F(x, y(x)) = F(x^g, y(x^g)) = F^g. \tag{3}$$

Thus, Center can use the strategy x^g. In this case Center provides himself the guarantee F^g whatever uncertainty $y(x) \in Y$ has been realized because $F^g \leq F(x^g, y) \ \forall y \in Y$. Since $F^g \geq F[x] \ \forall x \in X$, the guarantee F^g is the largest of all guaranties $F[x]$.

The given above "hierarchical"approach will be applied in Section 2.

1.3. **Mathematical model of conflict.** Assume that a mathematical model of conflict is represented by a non-cooperative game of N persons under uncertainty

$$\Gamma_N = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, Y^X, \{f_i(x, y)\}_{i \in N} \rangle.$$

Here $N = \{1, \ldots, n\}$ is a set of the agents (players) numbers. A strategy of the i-th player $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ $(i \in N)$. The players choose their strategies independently of each other in the game Γ_N. Each i-th player formes and uses his own strategy $x_i \in X_i$ $(i \in N)$. As a result we get a situation $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X = \prod_{i \in N} X_i \subset \mathbb{R}^l$ $(l = \sum_{i \in N} l_i)$. A set of uncertainties $y(x) : X \to Y \subset \mathbb{R}^m$ is denoted as Y^X. In the terminology of the theory of zero-sum games $y(x)$ is a *countersituation*. We define a payoff function $f_i(x, y)$ of the i-th player on the sets $(x, y(x))$. The i-th player obtains the payoff $f_i(x, y(x))$ which is equal to the value of his payoff function in the concrete couple $(x, y(x))$. The aim of the i-th player is to choose a strategy $x_i \in X_i$ such that his payoff is rational according to his point of view. By choosing their strategies the players need to focus on possibility of realization of any uncertainty $y(x) \in Y^X$.

Let us now turn to the notion of a guaranteed solution of the game Γ_N.

2. Guaranteed solution of game Γ_N

2.1. **Definition.** To formalize a solution of the game Γ_N we shall use the approach from Subsection 1.2. The only difference is that we replace formation of the *interior minimum* from (2) by formation of n minimums (for every i-th player)

$$f_i[x] = \min_{y \in Y} f_i(x, y) = f_i(x, y^{(i)}(x)) \;\; \forall i \in N, \;\; x \in X. \tag{4}$$

Moreover we replace formation of the *outer maximum* from (3) by two following operations:

a) find a set X^{v} of all situations x^{v} in the "game of guaranties"

$$\Gamma_g = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i[x] = f_i((x, y^{(i)}(x))\}_{i \in N} \rangle$$

such that the *Berge equilibrium condition* is satisfied, i.e.

$$\max_{x_{N \setminus \{i\}} \in X_{N \setminus \{i\}}} f_i[x \| x_i^{\mathrm{v}}] = f_i[x^{\mathrm{v}}] \;\; (i \in N), \tag{5}$$

where

$$[x \| x_i^{\mathrm{v}}] = [x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i^{\mathrm{v}}, x_{i+1}, \ldots, x_n], \;\; x_{N \setminus i} = [x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n],$$

$$X_{N \setminus \{i\}} = \prod_{j \in N, j \neq i} X_j;$$

b) find a Slater maximal situation $\bar{x}^{\mathrm{v}} \in X^{\mathrm{v}}$ in the n-criteria problem

$$\langle X^{\mathrm{v}}, \{f_i[x]\}_{i \in N} \rangle \tag{6}$$

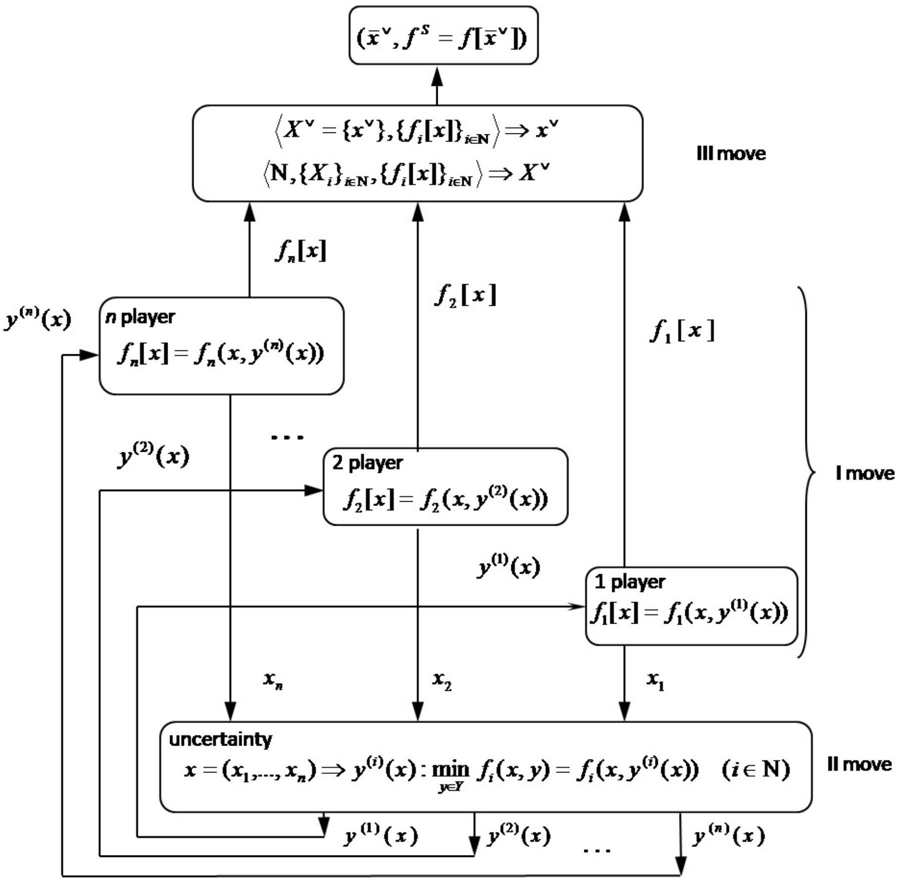
such that the system of strict inequalities

$$f_i[x] > f_i[\bar{x}^{\mathrm{v}}] = f_i^s \;\; (i \in N) \tag{7}$$

is inconsistent for any $x \in X^{\mathrm{v}}$.

Then the couple $(\bar{x}^{\mathrm{v}}, f^s) \in X \times \mathbb{R}^n$ is called a *Berge strong guaranteed solution (equilibrium) in the game* Γ_N. Here the n-vector $f = (f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{R}^n$. We present a construction process of the Berge strong guaranteed solution in the game Γ_N in Fig. 2.

Now introduce a formal definition.



Pic. 2

Definition 1. A couple $(\bar{x}^{\mathrm{v}}, f^s) \in X \times \mathbb{R}^n$ in the problem Γ_N is called a *Berge strong guaranteed solution (BVSGS)* if there exist n continuous m-vector functions $y^{(i)}(x)$ $(i \in$

$\in N$) such that

$$\min_{y(\cdot)\in Y^X} f_i(x, y(x)) = f_i(x, y^{(i)}(x)) = f_i[x] \ \ \forall x \in X \ \ (i \in N),$$

and

1^0) there exists a situation $x^{\mathrm{v}} \in X$ in the non-cooperative "game of guarantees"

$$\langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{f_i[x]\}_{i\in N}\rangle \tag{8}$$

such that the equality (5) is satisfied. The set of all situations x^{v} is designated by X^{v} ;

2^0) the situation $\bar{x}^{\mathrm{v}}$ is Slater maximal for the n-criteria problem

$$\langle X^{\mathrm{v}}, \{f_i[x]\}_{i\in N}\rangle,$$

i.e. for any $x \in X^{\mathrm{v}}$ there exists an index $j(x) = j \in N$ such that

$$f_j(x) \leq f_j(\bar{x}^{\mathrm{v}}) = f_j^s.$$

This condition is equivalent to inconsistency of the system $f_i[x] > f_i[\bar{x}^{\mathrm{v}}] = f_i^s$ $(i \in N)$ for any $x \in X^{\mathrm{v}}$.

3^0) the n-vector $f^S = (f_1[\bar{x}^{\mathrm{v}}], \ldots, f_n[\bar{x}^{\mathrm{v}}]) = (f_1^S, \ldots, f_n^S)$.

2.2. **Sufficient conditions for the Berge equilibrium.** We assign the Germayer convolution [12]

$$\varphi(x, z) = \max_{i\in N}(f_i[x\|z_i] - f_i[z]) \tag{9}$$

to the "game of guarantees"(8). Here

$$[x\|z_i] = [x_1, \ldots, x_{i-1}, z_i, x_{i+1}, \ldots, x_n] \in X = \prod_{i\in N} X_i, \ \ z_i \in X_i \ \ (i \in N),$$

$$z = [z_1, \ldots, z_i, \ldots, z_n] \in X.$$

A saddle point (x^0, z^v) *of the scalar function* $\varphi(x, z)$ is determined by the chain of inequalities

$$\varphi(x, z^{\mathrm{v}}) \leq \varphi(x^0, z^{\mathrm{v}}) \leq \varphi(x^0, z) \ \ \forall x, z \in X. \tag{10}$$

Taking into account (9) from the left inequality in (10) for $z^{\mathrm{v}} = x^0$ we get

$$\varphi(x^0, x^0) = \max_{i\in N}(f_i[x^0\|x_i^0] - f_i[x^0]) = 0.$$

Then (10) yields

$$\varphi(x, z^{\mathrm{v}}) = \max_{i\in N}(f_i[x\|z_i^{\mathrm{v}}] - f_i[z^{\mathrm{v}}]) \leq 0 \ \ \forall x \in X.$$

Hence for every $i \in N$

$$f_i[x\|z_i^{\mathrm{v}}] - f_i[z^{\mathrm{v}}]) \leq 0 \ \ \forall x \in X.$$

Thus, we get for all $x \in X$

$$f_i[x\|z_i^{\mathrm{v}}] \leq f_i[z^{\mathrm{v}}]) \ \ (i \in N). \tag{11}$$

Fulfillment of the conditions (11) for all $x \in X$ $(i \in N)$ means that the second component $z^{\mathrm{v}} = x^{\mathrm{v}} \in X$ of the saddle point (x^0, z^{v}) satisfies the Berge equilibrium condition (5).

Remark. Construction of the Berge equilibrium situation $z^{\mathrm{v}} = x^{\mathrm{v}} \in X$ (which is determined by (5)) is reduced to construction of the saddle point $(x^0, z^{\mathrm{v}}) \in X^2$ of the scalar function (9). The second component $z^{\mathrm{v}} \in X$ of the saddle point (x^0, z^{v}) satisfies the Berge equilibrium condition (5).

2.3. **Continuity of function $\varphi(x, z)$.**

Proposition. Suppose that in the "game of guarantees"(8) the following conditions

1. the sets X_i are compact ones (i.e. closed and bounded) in $\mathbb{R}^{l_i}$;
2. the payoff functions $f_i[x]$ are continuous on X $(i \in N)$

take place. Then the scalar function $\varphi(x, z)$ from (9) is continuous on $X \times X$.

This proposition follows immediately from the well-known property [11]: suppose that the function $\psi(u, w)$ is continuous on $U \times W$ and the set W is compact; then the function $\eta(u) = \max\limits_{w \in W} \psi(u, w)$ is continuous on U.

3. Mixed strategies

3.1. **Borel σ-algebra.** We consider the segment $Y^* = [y_1, y_2] \subset \mathbb{R}$. A collection $\Im$ of subsets of $Y = \{y \in \mathbb{R} | y_1 \leq y \leq y_2\}$ is called σ-algebra if it satisfies the following three properties:

1. $[y_1, y_2]$ is an element of $\Im$;
2. if $T \subset [y_1, y_2]$ is an element of $\Im$, then its complement $[y_1, y_2] \setminus T$ is an element of $\Im$ as well;
3. if $T_k \subset [y_1, y_2]$ $(k = 1, 2, \dots)$ are an elements of $\Im$ then their union $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} T_k$ is an element of $\Im$ too.

If every element of σ-algebra $\Im^{(1)}$ is an element of σ-algebra $\Im^{(2)}$ then one can say that *σ-algebra $\Im^{(2)}$ contains σ-algebra $\Im^{(1)}$*.

First, we consider any σ-algebra $\Im$ which contains all segments $[\alpha, \beta] \subset [y_1, y_2]$. One can prove that there exists a smallest σ-algebra $B(Y^*)$ such that

1. it is an element of any other σ-algebra;
2. all closed segments from $[y_1, y_2]$ are the elements of $B(Y^*)$.

This σ-algebra $B(Y^*)$ is called the *Borel σ-algebra*. Elements of the Borel σ-algebra $B(Y^*)$ are called *Borel measurable sets*. Thus for the segment $[y_1, y_2]$ the Borel σ-algebra is the smallest σ-algebra over $[y_1, y_2]$ containing all closed subsets of $[y_1, y_2]$.

Second, for the set $Y^* = \{y = (y_1, \dots, y_m) \mid y_i \in [y_i^{(1)}, y_i^{(2)}]\ (i = 1, \dots, m)\}$ σ-algebra $\Im$ is a collection of subsets of Y^* such that

1. Y^* is an element of $\Im$;
2. $\Im$ is closed with respect to the complementation operation $Y^*\backslash Y_k$ for all $Y_k \in \Im$ $(k = 1, 2, \ldots)$;
3. $\Im$ is closed with respect to the operation of countable unions $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} Y_k$.

The Borel σ-algebra $B(Y^*)$ is the smallest σ-algebra over Y^* containing all closed subsets of Y^*.

Third, we consider a set $Y \in \mathbb{R}^m$. Let Y be compact and hence bounded. Then there exist numbers $y_i^{(1)}$, $y_i^{(2)}$ $(i = 1, \ldots, m)$ such that

$$Y \subset Y^* = \{y = (y_1, \ldots, y_m) \mid y_i^{(1)} \leq y \leq y_i^{(2)} \ (i = 1, \ldots, m)\}.$$

Let us construct $B(Y^*)$. Then

$$B(Y) = B(Y^*) \bigcap Y = \{Y_k \bigcap Y \mid Y_k \in B(Y^*)\}.$$

The Borel σ-algebra $B(X_i)$, where the set X_i $(i \in N)$ of pure strategies x_i of the i-th player is a compact set in $\mathbb{R}^{l_i}$, is constructed in the same way.

3.2. **Mixed strategies and situations in mixed strategies.** Assume that in the class of pure strategies $x_i \in X_i$ $(i \in N)$ there does not exist a situation x^{v} satisfying the Berge equilibrium condition (5). Then one can follow the approach proposed by Borel, von Neumann and Nash. The approach is that the set X_i of pure strategies x_i should be extended to the set of mixed strategies; then for the game (8)

$$\langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i[x]\}_{i \in N} \rangle$$

existence of situation satisfying the Berge equilibrium condition can be established on a class of mixed strategies.

For this construct the Borel σ-algebra $B(X_i)$ for every set X_i $(i \in N)$ and construct the Borel σ-algebra $B(X)$ for the set of situations $X = \prod\limits_{i \in N} X_i$. Assume that $B(X)$ contains all Cartesian products of elements of the Borel σ-algebras $B(X_i)$ $(i \in N)$.

In game theory a mixed strategy $\nu_i(\cdot)$ of the i-th player is a probability measure on the compact set X_i. Consider the definition from [8]. Assume that $B(X_i)$ is a Borel σ-algebra over a compact set $X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$. A probability measure is a nonnegative scalar function $\nu_i(\cdot)$ which is defined on $B(X_i)$ and satisfies the following two conditions:

1^0) for every sequence $\{Q_k^{(i)}\}_{k=1}^{\infty}$ of mutually disjoint elements from $B(X_i)$ the relation

$$\nu_i(\bigcup_k Q_k^{(i)}) = \bigcup_k \nu_i(Q_k^{(i)})$$

holds. We call this the property of countable additivity of the function $\nu_i(\cdot)$;

2^0) the equality

$$\nu_i(X_i) = 1$$

takes place. We call this the property of normability.

Hence $\nu_i(Q^{(i)}) \leq 1 \; \forall Q^{(i)} \in B(X_i)$.

Denote the set of mixed strategies $\nu_i(\cdot)$ of the i-th player by $\{\nu_i\}$ $(i \in N)$.

Let $\delta(\cdot)$ be Dirac function. Then a measure of the form $\delta(x_i - x_i^*)(dx)$ is also a mixed strategy from the set $\{\nu_i\}$ $(i \in N)$. Note that the measure-products $\nu(dx) = \nu_1(dx_1) \cdot \ldots \cdot \nu_n(dx_n)$ determined in [13], [14] are the probability measures on the set X of situations (in pure strategies). Denote the set of probability measures $\nu(dx)$ by $\{\nu\}$. The measure $\nu(dx)$ is called a *situation in mixed strategies*.

Note that for constructing the measure-product $\nu(dx)$ we use the smallest σ-algebra $B(X)$ over $X_1 \times \ldots \times X_n = X$ such that $B(X)$ contains all Cartesian products $Q^{(1)} \times \ldots \times Q^{(n)}$, where $Q^{(i)} \in B(X_i)$ $(i \in N)$.

By [15], [16] the sets of all possible probability measures $\nu_i(dx_i)$ $(i \in N)$ and $\nu(dx)$ are weakly closed and weakly compact in itself sets. This means (for $\{\nu\}$) that from every infinite sequence $\{\nu^{(k)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ we can choose a subsequence $\{\nu^{(k_j)}\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ such that $\{\nu^{(k_j)}\}$ weakly converges to a measure $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$. In other words, for any scalar function $\varphi(x)$ which is continuous on X, we have

$$\lim_{j \to \infty} \int\limits_X \varphi(x) \nu^{(k_j)}(dx) = \int\limits_X \varphi(x) \nu^0(dx)$$

and $\nu^{(0)}(\cdot) \in \{\nu\}$.

Since $\varphi(x)$ is continuous, the integrals (mathematical expectations) $\int\limits_X \varphi(x)\nu(dx)$ exist. By Fubini's theorem we have

$$\int\limits_X \varphi(x)\nu(dx) = \int\limits_{X_1} \ldots \int\limits_{X_n} \varphi(x) \nu_n(dx_n) \ldots \nu_1(dx_1),$$

where the order of integration can be changed.

3.3. **Mixed extension of the game (8).** We put into correspondence to the "game of guarantees"in pure strategies (8) its mixed extension

$$\langle N, \{\nu_i\}_{i \in N}, \{f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx)\}_{i \in N}\rangle. \tag{12}$$

Here (as in (8)) N is a set of players' numbers, $\{\nu_i\}$ is a set of mixed strategies $\nu_i(\cdot)$ of the i-th player $(i \in N)$. In the game (12) each i-th player chooses his own strategy $\nu_i(\cdot) \in \{\nu_i\}$. As a result the situation $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ in mixed strategies is composed. Further we introduce the payoff function (mathematical expectation) $f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx)$ of i-th player on the set $\{\nu\}$.

For the game (12) the situation in mixed strategies $\nu^{\mathrm{v}}(\cdot) \in \{\nu\}$ satisfies the *Berge equilibrium condition* if

$$\max_{\nu_{N\setminus\{i\}}(\cdot)\in\{\nu_{N\setminus\{i\}}\}} f_i[\nu\|\nu_i^{\mathrm{v}}] = f_i[\nu^{\mathrm{v}}] \quad (i \in N), \tag{13}$$

where

$$\nu_{N\setminus\{i\}}(dx_{N\setminus\{i\}} = \nu_1(dx_1)\ldots\nu_{i-1}(dx_{i-1})\nu_{i+1}(dx_{i+1})\ldots\nu_n(dx_n),$$

$$[\nu\|\nu_i^{\mathrm{v}}] = [\nu_1(dx_1)\ldots\nu_{i-1}(dx_{i-1})\nu_i^{\mathrm{v}}(dx_i)\nu_{i+1}(dx_{i+1})\ldots\nu_n(dx_n)],$$

$$\nu^{\mathrm{v}}(dx) = \nu_1^{\mathrm{v}}(dx_1)\ldots\nu_n^{\mathrm{v}}(dx_n).$$

For the game (12) the condition (13) determines the analogue of Berge equilibrium situation x^{v} satisfying (5). Denote the set of situations in mixed strategies $\nu^{\mathrm{v}}(\cdot) \in \{\nu\}$ satisfying (13) by $\{\nu^{\mathrm{v}}\}$.

3.4. **Properties of situations in mixed strategies satisfying the Berge equilibrium condition.**

3.4.1. *Weak compactness in itself of the set* $\{\nu^v\}$*.* We establish the weak compactness in itself of the subset $\{\nu^{\mathrm{v}}\} \subset \{\nu\}$.

Assume that $\varphi[x]$ is an arbitrary continuous on X scalar function. Suppose that the elements $\nu^{(k)}(\cdot)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ of the infinite sequence $\{\nu^{(k)}(\cdot)\}_{k=1}^{\infty}$ belong to the set $\{\nu^{\mathrm{v}}\}$. Then, since $\{\nu^{\mathrm{v}}\} \subset \{\nu\}$, it follows that $\{\nu^{(k)}\}_{k=1}^{\infty} \subset \{\nu\}$. As $\{\nu\}$ is weakly compact in itself (see Subsection 3.2) there exists a subsequence $\{\nu^{(k_j)}(\cdot)\}_{j=1}^{\infty}$ and a measure $\nu^0(\cdot) \in \{\nu\}$ such that

$$\lim_{j\to\infty} \int_X \varphi[x]\nu^{(k_j)}(dx) = \int_X \varphi[x]\nu^0(dx).$$

Now we prove the validity of the inclusion $\nu^0(\cdot) \in \{\nu^{\mathrm{v}}\}$. Assume *the contrary.* Then for a rather large j there exists a number $i \in N$ and a situation $\bar{\nu}(\cdot) \in \{\nu\}$ such that $f_i[\bar{\nu}\|\nu_i^{k_j}] > f_i[\nu^{k_j}]$. This inequality contradicts the inclusion $\{\nu^{(k_j)}(\cdot)\}_{j=1}^{\infty} \subset \{\nu^{\mathrm{v}}\}$.

Thus for the game (12) we obtained weak compactness in itself of the set of situations $\{\nu^{\mathrm{v}}\}$.

Compactness of the set $f[\{\nu^{\mathrm{v}}\}] = \bigcup\limits_{\nu(\cdot)\in\{\nu^{\mathrm{v}}\}} f[\nu]$ (n-vector $f = (f_1, \ldots, f_n)$) in the criteria space $\mathbb{R}^n$ can be established in the same way.

3.4.2. *Auxiliary property 1.* Consider scalar functions (9) $\varphi_i(x, z) = f_i[x \parallel z_i] - f_i[z]$ and $\varphi(x, z) = \max\limits_{i\in N} \varphi_i(x, z)$. According to Subsection 2.3 it follows that if $f_i[x]$ $(i \in N)$ are continuous and the set $X \subset \mathbb{R}^l$ of situations x is compact, then $\varphi(x, z)$ is determined and continuous on $X \times X$.

We have $\varphi_i(x,z) \le \varphi(x,z) = \max_{i\in N} \varphi_i(x,z)$. Integrating the both parts of this inequality by an arbitrary measure-product $\mu(dx)\nu(dz)$, where $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$, we get

$$\int\limits_{X\times X} \varphi_i(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \le \int\limits_{X\times X} \max_{i\in N} \varphi_i(x,z)\mu(dx)\nu(dz)$$

for all $i \in N$. Therefore

$$\max_{i\in N} \int\limits_{X\times X} \varphi_i(x,z)\mu(dx)\nu(dz) \le \int\limits_{X\times X} \max_{i\in N} \varphi_i(x,z)\mu(dx)\nu(dz).$$

Taking into account the form of $\varphi_i(x,z)$ from (9) we have

$$\max_{i\in N} \int\limits_{X\times X} (f_i[x \parallel z_i] - f_i[z])\mu(dx)\nu(dz) \le \int\limits_{X\times X} \max_{i\in N}(f_i[x \parallel z_i] - f_i[z])\mu(dx)\nu(dz). \quad (14)$$

Remark. The inequality (14) is a generalization of the well-known property: maximum of sum do not exceed sum of maxima.

3.4.3. *Auxiliary property 2.* Now consider an auxiliary two-person zero-sum game

$$\Gamma_2 = \langle \{1,2\}, \{X_1 = X, X_2 = X\}, \varphi(x,z)\rangle.$$

In the game Γ_2 the set of strategies x of the first player is $X_1 = X$, the set of strategies z of the second player is $X_2 = X$. The payoff function $\varphi(x,z)$ of the first player is of the form (9). The aim of the first player is to choose his strategy $x \in X$ such that to get the largest possible value of the payoff function $\varphi(x,z)$. The aim of the second player is to choose a strategy $z \in X$ such that the function $\varphi(x,z)$ takes the least possible value.

The solution of the game Γ_2 is a saddle point $(x^0, z^0) \in X \times X$. It satisfies the relation

$$\varphi(x, z^{\mathrm{v}}) \le \varphi(x^0, z^{\mathrm{v}}) \le \varphi(x^0, z)$$

for $\forall x \in X$ and $\forall z \in X$.

Now assign a mixed extension

$$\widetilde{\Gamma}_2 = \langle \{1,2\}, \{\nu\}, \{\mu\}, \varphi(\nu,\mu)\rangle$$

for the game Γ_2.

Here $\{\nu\}$ is the set of mixed strategies $\nu(\cdot)$ of the first player,$\{\mu\} = \{\nu\}$ is the set of mixed strategies $\mu(\cdot)$ of the second player, the payoff function (mathematical expectation) of the first player is $\varphi(\nu,\mu) = \int\limits_{X\times X} \varphi_i(x,y)\mu(dx)\nu(dy)$.

The solution of the game $\widetilde{\Gamma}_2$ is a saddle point $(\nu^0, \mu^{\mathrm{v}})$, where $(\nu^0, \mu^{\mathrm{v}})$ is defined by the inequalities

$$\varphi(\nu, \mu^{\mathrm{v}}) \le \varphi(\nu^0, \mu^{\mathrm{v}}) \le \varphi(\nu^0, \mu) \quad (15)$$

for all $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$. This solution is called a saddle point in mixed strategies for the game Γ_2.

Glicksberg proved in 1952 the theorem of existence of Nash equilibrium in mixed strategies for a non-cooperative game with $n \geq 2$ players [17]. For the special case of a non-cooperative game of $n \geq 2$ players, namely for a two-person zero-sum game $\widetilde{\Gamma}_2$, this theorem implies the following proposition.

Proposition. Suppose that the set $X \subset \mathbb{R}^l$ is compact and the payoff function of the first player $\varphi(x, z)$ is continuous on $X \times X$ in the game Γ_2. Then there exists a solution $(\nu^0, \mu^{\mathrm{v}})$ satisfying (15) in the game Γ_2, i.e. there exists a saddle point in mixed strategies for the game Γ_2.

Taking into account (9) we can present the inequalities (15) as

$$\int\limits_{X\times X} \max_{i\in N}(f_i[x \parallel z_i] - f_i[z])\mu(dx)\nu^{\mathrm{v}}(dz) \leq \int\limits_{X\times X} \max_{i\in N}(f_i[x \parallel z_i] - f_i[z])\mu^0(dx)\nu^{\mathrm{v}}(dz) \leq$$

$$\leq \int\limits_{X\times X} \max_{i\in N}(f_i[x \parallel z_i] - f_i[z])\mu^0(dx)\nu(dz) \tag{16}$$

for all $\mu(\cdot) \in \{\nu\}$ and $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$. Setting $\nu(dz) = \mu^0(dx)$ the equality

$$\varphi(\mu^0, \nu) = \int\limits_{X\times X} \max_{i\in N}(f_i[x \parallel z_i] - f_i[z])\mu^0(dx)\nu(dz)$$

implies

$$\varphi(\mu^0, \nu) = 0.$$

Hence, taking into account (16) we obtain

$$\int\limits_{X\times X} \max_{i\in N}(f_i[x \parallel z_i] - f_i[z])\mu(dx)\nu^{\mathrm{v}}(dz) \leq 0.$$

By (14) we get

$$\max_{i\in N} \int\limits_{X\times X} (f_i[x \parallel z_i] - f_i[z])\mu(dx)\nu^{\mathrm{v}}(dz) \leq 0,$$

$$\max_{i\in N}\left[\int\limits_{X\times X} f_i[x \parallel z_i]\mu(dx)\nu^{\mathrm{v}}(dz) - \int\limits_{X\times X} f_i[z]\mu(dx)\nu^{\mathrm{v}}(dz)\right] \leq 0.$$

Then

$$\int\limits_{X\times X} f_i[x \parallel z_i]\mu(dx)\nu^{\mathrm{v}}(dz) \leq \int\limits_{X\times X} f_i[z]\mu(dx)\nu^{\mathrm{v}}(dz) \quad \forall \mu(\cdot) \in \{\nu\}.$$

Taking into account normalization of probability measure $\mu(\cdot)$ (see Subsection 3.2) we have $\int\limits_X \mu(dx) = 1$. Then the previous inequality implies

$$\int\limits_{X\times X} f_i[x \parallel z_i]\mu(dx)\nu^{\mathrm{v}}(dz) \leq \int\limits_{X\times X} f_i[z]\mu(dx)\nu^{\mathrm{v}}(dz) \quad \forall i \in N.$$

Using notations from (12), taking into account $f_i[\mu \parallel \nu_i] = \int\limits_{X\times X} f_i[x \parallel z_i]\mu(dx)\nu^{\text{v}}(dz)$, we get

$$f_i[\mu \parallel \nu_i^{\text{y}}] \leq f_i[\nu^{\text{v}}] \ \ (i \in N),$$

i.e. condition (13) holds.

Thus, if the sets $X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ $(i \in N)$ are compact and the payoff functions $f_i[x]$ of every i-th player are continuous on X in the game (8), then there exists a situation in mixed strategies $\nu^{\text{v}}(\cdot) \in \{\nu\}$ satisfying Berge equilibrium condition (5) in the game (8).

4. Existence

4.1. **The notion of strong guaranteed Berge equilibrium in mixed strategies.** In this section we present the main result of present paper. We establish existence of a strong guaranteed Berge equilibrium in mixed strategies for the game

$$\Gamma_N = \langle N, \{X_i\}_{i\in N}, Y^X, \{f_i(x,y)\}_{i\in N}\rangle.$$

For this we assign a quasimixed extension

$$\widetilde{\Gamma}_N = \langle N, \{\nu_i\}_{i\in N}, Y^X, \{f_i(\nu,y)\}_{i\in N}\rangle$$

to the game Γ_N.

Recall that in Γ_N the sets $X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ $(i \in N)$ are compact ones. $N = \{1,\dots,n\}$ is the set of players' numbers in the game $\widetilde{\Gamma}_N$ (as in Γ_N). In $\widetilde{\Gamma}_N$ every i-th player $(i \in N)$ can use both pure strategies $x_i \in X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ $(i \in N)$ (as in Γ_N) and mixed strategies (probability measures) $\nu(\cdot)$ determined on the Borel σ-algebra $B(X_i)$ over the compact set $X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ (see subsection 3.2). Y^X is the set of uncertainties $y(x) : X \to Y$, $Y \subset \mathbb{R}^m$. The payoff function of the i-th player is of the form

$$f_i(\nu,y) = \int\limits_X f_i(x,y)\nu(dx). \tag{17}$$

Similarly to Subsection 2.1, we introduce the notion of a strong guaranteed equilibrium $(\bar{\nu}^V, \bar{f}^s) \in \{\nu\} \times \mathbb{R}^n$ $(f = (f_1,\dots,f_n))$ in mixed strategies for the game Γ_N. For this we use three stages:

Stage 1. Taking into account the relation

$$\min_{y\in Y} f_i(x,y) = f_i(x, y^{(i)}(x)) = f_i[x] \ \ \forall x \in X \ \ (i \in N)$$

we construct n vector-functions $y^{(i)}(x) \in Y^X$.

Stage 2. For the non-cooperative "game of guarantees"of n persons

$$\langle N, \{\nu_i\}_{i\in N}, \{f_i[\nu]\}_{i\in N}\rangle, \tag{18}$$

where the payoff function of the i-th player is defined by the equality $f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx)$ $(i \in N)$, we find a set $\{\nu^{\text{v}}\} \subset \{\nu\}$ of situations in mixed strategies $\nu^{\text{v}}(\cdot)$ such that

$$\max_{\nu_{N\setminus\{i\}}(\cdot)\in\{\nu_{N\setminus\{i\}}\}} f_i[\nu\|\nu_i^{\text{v}}] = f_i[\nu^{\text{v}}] \ \ (i \in N). \tag{19}$$

Here the measure-product $\nu_{N\setminus\{i\}}(dx_{N\setminus\{i\}}) = \nu_1(dx_1)\dots\nu_{i-1}(dx_{i-1})\nu_{i+1}(dx_{i+1})\dots\nu_n(dx_n)$, i.e. $\nu^{\text{v}}(\cdot)$ satisfies the Berge equilibrium condition in the game (18).

Stage 3. For the n-criteria problem

$$\langle\{\nu^{\text{v}}\}, \{f_i[\nu]\}_{i\in N}\rangle$$

construct a Slater maximal solution $\bar{\nu}^{\text{v}}(\cdot) \in \{\nu\}$ such that for any $\nu^{\text{v}}(\cdot) \in \{\nu^{\text{v}}\}$ the system of strict inequalities

$$f_i[\nu] > f_i[\bar{\nu}^{\text{v}}] = \bar{f}_i^s \quad (i \in N)$$

is inconsistent.

Then the couple $(\bar{\nu}^{\text{v}}, \bar{f}^s = (\bar{f}_1^s, \dots, \bar{f}_n^s))$ is called a *Berge strong guaranteed equilibrium in mixed strategies for the game* Γ_N. The situation in mixed strategies $\bar{\nu}^{\text{v}}(\cdot)$ is called a *guaranteeing situation*; n-vector $\bar{f}^s$ is called a *vector guarantee.*

4.2. **Proof of existence.** Assume that the following conditions hold for the game Γ_N:

(1^0) the sets $X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ $(i \in N)$ and $Y \subset \mathbb{R}^m$ are compact and Y is convex as well;

(2^0) the payoff functions $f_i(x, y)$ $(i \in N)$ are continuous on $X \times Y$ $(X = \prod\limits_{i\in N} X_i)$;

(3^0) for any $x \in X$ the payoff functions $f_i(x, y)$ $(i \in N)$ are strictly convex in $y \in Y$, i.e. for all $\lambda = \mathit{const} \in (0, 1)$ and $y^{(j)} \in Y$ $(j = 1, 2)$ the following strict inequalities hold

$$f_i(x, \lambda_i y^{(1)} + (1-\lambda_i)y^{(2)}) < \lambda_i f_i(x, y^{(1)}) + (1-\lambda_i)f_i(x, y^{(2)}) \quad (i \in N).$$

We prove that fulfillment of conditions $1^0 - 3^0$ provides existence of strong guaranteed equilibrium of Berge in mixed strategies in the game Γ_N. In other words, we are going to prove that conditions $1^0 - 3^0$ yield existence of a couple $(\bar{\nu}(\cdot), \bar{f}^s)$ satisfying the requirements of Stages 1-3 from Subsection 4.1.

Stage 1. By Subsection 1.1 fulfillment of conditions $1^0 - 3^0$ yields existence of a continuous m-vector function

$$y^{(i)}(x) : \min_{y\in Y} f_i(x, y) = f_i(x, y^i(x)) = f_i[x] \ \ \forall x \in X \ \ (i \in N). \tag{20}$$

Note that the functions $f_i[x] = f_i(x, y^{(i)}(x))$ $(i \in N)$ are continuous on X (as a superposition of continuous functions $f_i(x, y)$ and $y^{(i)}(x)$). By (20) for every $x \in X$ we have

$$f_i[x] \le f_i(x, y) \ \ \forall y \in Y (i \in N). \tag{21}$$

Integrating the both parts of the inequality (21) by an arbitrary measure $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$ we get

$$f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx) \leq \int\limits_X f_i(x,y)\nu(dx) = f_i(\nu, y) \ \ \forall y \in Y \ \ (i \in N). \qquad (22)$$

Due to the inequality (21) we can assign the "game of guarantees"

$$\Gamma_g = \langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{f_i[x]\}_{i\in N}\rangle$$

to the game Γ_N.

Since for all $y \in Y$ we have

$$f_i[x] \leq f_i(x,y) \ \ (i \in N),$$

then the vector guarantee $f[x] = (f_1[x], \dots, f_n[x])$ corresponds to each situation $x \in X$ in Γ_g. In the same way, due to the inequality (22) in the "game of guarantees"in mixed strategies

$$\widetilde{\Gamma}_g = \langle N, \{\nu_i\}_{i\in N}, \{f_i[\nu] = \int\limits_X f_i[x]\nu(dx)\}_{i\in N}\rangle$$

the vector guarantee $f[\nu] = (f_1[\nu], \dots, f_n[\nu])$ corresponds to each situation in mixed strategies $\nu(\cdot) \in \{\nu\}$.

Since inequalities (21) and (22) hold for all $i \in N$ then it follows that the guarantees $f[x]$ and $f[\nu]$ are the "smallest". This is a main reason to use the term "strong guaranteed".

Stage 2. Since the sets X_i $(i \in N)$ are compact and the function $f_i[x]$ is continuous on $X = \prod\limits_{i\in N} X_i$ (see conditions $1^0 - 2^0$ and Stage 1), taking into account Subsection 3.4.3, there exists a situation in mixed strategies $\nu^{\text{v}}(\cdot)$ satisfying the requirement of Berge equilibrium (19) in the game $\widetilde{\Gamma}_g$. Therefore the set $\{\nu^{\text{v}}\} \neq \emptyset$. By Subsection 3.4.1 the set $\{\nu^{\text{v}}\}$ is weakly compact in itself, then the set of values of payoff functions

$$\Phi = f[\{\nu^{\text{v}}\}] = \bigcup_{\nu(\cdot)\in\{\nu^{\text{v}}\}} f[\nu^{\text{v}}] \ \ (here f[\nu] = (f_1[\nu], \dots, f_n[\nu])) \qquad (23)$$

is a compact set in $\mathbb{R}^n$ (see the proof in Subsection 3.4.1).

Stage 3. Let $\alpha_i = const \geq 0$ and $\sum\limits_{i\in N} \alpha_i > 0$. Consider a linear convolution $\sum\limits_{i\in N} \alpha_i f_i$ determined on Φ (see (23)). Since $\sum\limits_{i\in N} \alpha_i f_i$ is continuous on Φ and taking into account Weierstrass theorem we get that there exists a constant n-vector $\bar{f}^s = (\bar{f}_1^s, \dots, \bar{f}_n^s)) \in \Phi$ such that $\max\limits_{f\in\Phi} \sum\limits_{i\in N} \alpha_i f_i = \sum\limits_{i\in N} \alpha_i \bar{f}_i^s$. Due to Karlin's Lemma [19] the alternative $\bar{f}^s$ is maximal by Slater in the n-criteria problem

$$\langle \Phi, \{f_i\}_{i\in N}\rangle,$$

i.e. for any $f \in \Phi$ the system of inequalities

$$f_i > \bar{f}_i^s \quad (i \in N)$$

is inconsistent. Taking into account the construction way of the set Φ (see (23)) one can state that there exists a situation $\bar{\nu}^s(\cdot) \in \{\nu\}$ such that $\bar{f}^s = f[\bar{\nu}^s]$. This situation in mixed strategies $\bar{\nu}^s(\cdot)$ is Slater maximal in n-criteria problem $\langle \{\nu^{\mathrm{v}}\}, \{f_i[\nu]\}_{i \in N} \rangle$. According to the definition from Subsection 4.1 the couple $(\bar{\nu}^{\mathrm{v}}, \bar{f}^s)$ is a Berge strong guaranteed equilibrium in mixed strategies for the game Γ_N.

Thus, if for the game Γ_N the following conditions

- the sets $X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ $(i \in N)$ and $Y \subset \mathbb{R}^m$ are compact;
- the set Y is convex;
- the scalar payoff functions $f_i(x, y)$ $(i \in N)$ are continuous on $X \times Y$;
- for any $x \in X$ the payoff functions $f_i(x, y)$ $(i \in N)$ are strictly convex in $y \in Y$

hold, then there exists a Berge strong guaranteed solution (BVSGS) in mixed strategies in the game Γ_N.

Remark. The "game sense"of the notion of BVSGS is as follows. Every situation has a corresponding vector guarantee. Among these guarantees we have to select the ones which correspond to the Berge equilibrium situations. Then from such guarantees a Slater maximal guarantee (with respect to the selected guarantees) has to be chosen. The couple (the equilibrium situation and the corresponding vector guarantee) is offered as a "good"solution (BVSGS) for the game Γ_N. In fact, whatever uncertainty is realized in the game Γ_N, the players (using the situation from BVSGS) provide themselves "the largest"guaranteed payoffs. For each player this guaranteed payoff coincides with the corresponding component of the vector guarantee.

5. Conclusions

In this paper two new basic results of game theory have been established. These results concern Berge equilibrium (see the review [18]).

First, for the non-cooperation game

$$\Gamma_g = \langle N, \{X_i\}_{i \in N}, \{f_i[x]\}_{i \in N} \rangle,$$

where $N = \{1, \ldots, n\}$ is the set of players' numbers, the set of strategies x_i of the i-th player is $X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ $(i \in N)$, the situations $x = (x_1, \ldots, x_n) \in X = \prod_{i \in N} X_i \subset \mathbb{R}^l$, the i-th player payoff function $f_i[x]$ is determined on X, the following proposition have been obtained.

Proposition 1. If X_i are compact and $f_i[x]$ are continuous on X_i $(i \in N)$ then in the game Γ_g there exist the situations in mixed strategies $\bar{\nu}^{\mathrm{v}}(\cdot) \in \{\nu\}$ satisfying the Berge equilibrium condition (19) such that $\bar{\nu}^{\mathrm{v}}(\cdot)$ is Slater maximal with respect to all other situations satisfying the Berge equilibrium condition.

Second, we considered a non-cooperation game of n persons under uncertainty

$$\Gamma_N = \langle N, \{X_i\}_{i\in N}, Y^X, \{f_i(x,y)\}_{i\in N}\rangle,$$

where N, x_i, X_i, x, X are the same as in Γ_g, Y^X is the set of uncertainties $y(x) : X \to$ $\to Y \subset \mathbb{R}^m$, on the set $X \times Y$ the payoff function $f_i(x,y)$ of any i-th player is determined.

In subsection 4.1 for the game Γ_N we have introduced the notion of Berge strong guaranteed equilibrium in mixed strategies.

Proposition 2. Let in the game Γ_N the following conditions

- the sets $X_i \subset \mathbb{R}^{l_i}$ $(i \in N)$ and $Y \subset \mathbb{R}^m$ are compact;
- the set Y is convex;
- the scalar payoff functions $f_i(x,y)$ $(i \in N)$ are continuous on $X \times Y$;
- for any $x \in X$ the payoff functions $f_i(x,y)$ $(i \in N)$ are strictly convex in $y \in Y$

hold, then there exists a Berge strong guaranteed solution in mixed strategies in the game Γ_N.

References

[1] Berge C. *Théorie Générale des Jeux a n Personnes Games* // Paris: Gauthier-Villars, 1957.

[2] Shubik M. *Review: The general theory of n-person games by Claude Berge* // Econometrica 29(4) (1961), p. 821.

[3] Zhukovskiy V.I. and Chikrii A.A. *Linear-Quadratic Differential Games* // Naukova Dumka, Kiev, 1994 (in Russian).

[4] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. and Vaisman K.S. *The Berge equilibrium* // Preprint, Institute of Control Systems, Tbilisi, 1994.

[5] Vaisman K.S. *Berge Equilibrium* // PhD Thesis, Saint-Petersburg State University, 1995 (in Russian).

[6] Vaisman K.S. *Berge equilibrium in one differential game, in: Complex Dynamical Systems*// Pskov Pedagogical Institute, Pskov, Russia, 1994, pp. 58-63 (in Russian).

[7] Vaisman K.S. *The Berge equilibrium for linear-quadratic differential game* // Multiple criteria problems under uncertainty: Abstracts of the 2-d International Workshop, Orekhovo-Zuevo, Russia, 1994, pp. 27-28.

[8] Vorob'ev N.N. *Game Theory for Economists-Cyberneticists* // Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).

[9] Zhukovskiy V.I., Zhyteneva J.N. *Existence of Berge-Vaisman equilibrium* // International Scientific Journal "Spectral and Evolution Problems"18 (2008), 61-64 (in Russian).

[10] Morozov V.V. *Foundations of Game Theory* // Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, 2002 (in Russian).

[11] Morozov V.V., Sukharev A.G. and Fiodorov V.V. *Operations Research: Problems and Exercises* // Vys'shaya shkola, Moscow, 1986 (in Russian).

[12] Germayer Y.B. *Introduction to Operations Research* // Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).

[13] Krasovskiy N.N. and Subbotin A.I. *Game-theoretical Control Problems.* Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[14] Loeve M. *Probability Theory* // Princeton, D. Van Nostrand Company Inc., London, New York, Toronto, 1955.

[15] Dunford N. and Schwartz T. *Linear Operators* // Part 1, Interscience Publishers, New York and London, 1958.

[16] Lusternic L.A. and Sobolev V.I. *Elements of Functional Analysis* // Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).

[17] Glicksberg I.I. *A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points* // Proc. Amer. Math. Soc., 3(1) (1952), 170-174.

[18] Colman A.M., Körner T.W., Musy O. and Tazdaït T. *Mutual support in games: Some properties of Berge equilibria* // Journal of Mathematical Psycology 55(2) (2011), 1-10.

[19] Karlin S. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming and Economics* // Pergamon Press, London-Paris, 1959.

[20] Zhukovskiy V.I. *Introduction to Differential Games under Uncertainty: Berge-Vaisman Equilibrium* // PRASAND, Moscow 2010 (in Russian).

Существование равновесия по Бержу в смешанных стратегиях

Для бескоалиционной игры n лиц при неопределенности формализуется понятие гарантированного решения, основанного на подходящей модификации максимина и равновесия по Бержу. Получены условия существования гарантированного решения в классе смешанных стратегий (вероятностных мер).

Ключевые слова: вероятностные меры, смешанная стратегия, слабая компактность, гарантия, равновесие по Бержу-Вайсману, равновесие по Нэшу, максимин.

Содержание