Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 1–9.

УДК 531.36, 517.977

Т. Н. Астахова, А. Л. Зуев

СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ

Расмотрена задача о построении функции управления, обеспечивающей существование предельной точки $x = 0$ для всех решений $x(t)$ нелинейной системы. Предложен локальный подход к решению этой задачи в классе функций управления с переключениями в дискретные моменты времени. Полученный результат применен для модели неголономной системы с ограничениями на управления. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: управляемость, стабилизация, дискретно переключаемая обратная связь.

Введение

Задача стабилизации систем, удовлетворяющих ранговому условию достижимости, занимает одно из центральных мест в нелинейной теории управления (см. [1, 2]). Известно, что для линейных систем необходимым и достаточным условием стабилизируемости является свойство асимптотической нуль-управляемости. Развитие линейной теории позволяет использовать свойство управляемости по линейному приближению и для стабилизации широкого класса нелинейных систем. Однако в критических случаях теории устойчивости вопрос о разрешимости задачи стабилизации является весьма сложной проблемой. В работе [3] был построен содержательный пример полностью управляемой системы, которая не удовлетворяет необходимому условию стабилизируемости в классе дифференцируемых функций обратной связи.

Для доказательства стабилизируемости нуль-управляемых нелинейных систем, в работе [2] были использованы функции управления с дискретно переключаемой обратной связью (sampled feedback control). Функции обратной связи с дискретными переключениями широко используются при компьютерной реализации систем управления. Решения системы дифференциальных уравнений с разрывной функцией обратной связи $v(x)$ при этом определяются в смысле "π-траекторий", т.е. фиксируется разбиение $\pi = \{t_j\}_{j\geq 0}$ временной полуоси $t \in [0, +\infty)$ и применяется кусочно-постоянное управление $u = v(x(t_j))$ на отрезке $t \in [t_j, t_{j+1}]$, где $x(t)$ – искомое решение системы дифференциальных уравнений. В отличие от работы [2], в данной статье вводится параметрическое семейство управлений вида $u = v(t, a(x(t_j)))$ на отрезках $t \in [t_j, t_{j+1}]$. Для описания условий локальной управляемости используется модификация метода возврата [2].

Управляемость нелинейных систем

Пусть в области $D \subseteq \mathbb{R}^n$ задана система нелинейных дифференциальных уравнений с управлением:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in D, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

где x – вектор состояния, u – вектор управления, точка обозначает производную по времени t, $0 \in D$, $f \in C(D \times U)$. Будем предполагать, что для любого начального значения $x_0 \in D$ и ограниченной измеримой функции $u = u(t) \in U$, $t \in [0, \tau]$, существует единственное решение $x(t)$ системы (1) на отрезке $t \in [0, \tau]$, обладающее свойством $x(0) = x_0$.

Напомним [5, с. 39], что система (1) называется *вполне управляемой*, если для любых точек $x^{(0)}, x^{(1)} \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ существуют положительное число τ и допустимая функция управления $u = u(t) \in U$, $t \in [0, \tau]$, при которых система (1) имеет решение $x(t)$, $t \in [0, \tau]$, удовлетворяющее краевым условиям $x(0) = x^{(0)}$, $x(\tau) = x^{(1)}$.

Если в определении управляемости заменить область D на некоторую ε-окрестность точки $x = 0$, то получим свойство *локальной управляемости* в нуле.

Для исследования локальной управляемости предположим, что при некотором $\tau > 0$ имеется семейство функций управления $u = v(t, a) \in U$, $t \in [0, \tau]$, зависящих от параметра $a \in G \subseteq R^p$. Обозначим через $x(t; x_0, v(\cdot, a))$ решение задачи Коши

$$\dot{x} = f(x, v(t, a)), \quad t \in [0, \tau], \tag{2}$$

$$x|_{t=0} = x_0 \in D. \tag{3}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что при всех $x_0 \in D$ и $a \in G$ выполнены условия существования, единственности и дифференцируемости по (x_0, a) решения $x(t; x_0, v(\cdot, a))$ задачи Коши (2)–(3). Достаточные условия дифференцируемости решений по начальным условиям и параметрам описаны, например, в книге [6, с. 119].

В статье [7] приведен следующий результат о локальной управляемости нелинейных систем.

Утверждение 1. [7] *Пусть решение $x(t; x_0, v(\cdot, a))$ задачи Коши (2)–(3) удовлетворяет условию $x(\tau; 0, v(\cdot, a^*)) = 0$ при некоторых $\tau > 0$, $a = a^* \in G$.*

Тогда, если

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial x(\tau; 0, v(\cdot, a))}{\partial a}\right)\Bigg|_{a=a^*} = n, \tag{4}$$

то система (1) *локально управляема в нуле.*

При проведении операций с векторами и вычислении матрицы Якоби будем считать все векторы столбцами. Ранговое условие локальной управляемости будет использовано в дальнейшем с целью синтеза управления с переключениями для системы (1).

Основной результат

Для решения задачи стабилизации нелинейных систем в работе [2] был рассмотрен класс дискретно переключаемых функций обратной связи (sampled feedback control). Распространяя этот подход на семейство функций управления $u = v(t, a)$, зависящих от времени $t \in [0, \tau]$ и параметра $a \in G \subseteq \mathbb{R}^p$, введем *разбиение* $\pi = \{t_j\}_{j\geq 0}$ полуинтервала $t \in [0, +\infty)$:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots, \quad t_j = j\tau.$$

Если каждому вектору $\xi \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ поставлено в соответствие значение параметра $a(\xi) \in G \subseteq \mathbb{R}^p$, то $a(\xi)$ будем называть *функцией переключения.*

Определение 1. Для заданных $\tau > 0$, разбиения $\pi = \{t_j\}_{j\geq 0}$, семейства управлений $v(t, a)$ и функции переключения $a(\xi)$ назовем π-*решением* системы (1) абсолютно непрерывную на полуинтервале $[0, +\infty)$ функцию $x(t) \in D$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), v(t - t_j, a(x(t_j)))\right), \quad t \in [t_j, j_{j+1}],$$

при всех $j = 0, 1, 2, \dots$.

Если функция управления $v(t, a)$ не зависит от t, то приведенное определение задает π-траекторию системы (1) в смысле статьи [2] для случая разбиения с постоянным шагом $\tau = t_{j+1} - t_j$, $j \geq 0$.

Покажем, что при выполнении условий утверждения 1 точка $x = 0$ является ω-предельной для всех π-решений системы (1) с начальными значениями из некоторой окрестности нуля.

Утверждение 2. *Пусть решение $x(t; x_0, v(\cdot, a))$ задачи Коши (2)–(3) удовлетворяет условиям*

$$x(\tau; 0, v(\cdot, a^*)) = 0, \quad \operatorname{rank}\left(\frac{\partial x(\tau; 0, v(\cdot, a))}{\partial a}\right)\Bigg|_{a=a^*} = n, \tag{5}$$

при некоторых $\tau > 0$, $a^* \in G$. Определим функцию переключения

$$a(\xi) = a^* - \left(\left. \frac{\partial x(\tau; 0, v(\cdot, a))}{\partial a} \right|_{a=a^*} \right)^+ \left(\left. \frac{\partial x(\tau; z, v(\cdot, a^*))}{\partial z} \right|_{z=0} \right) \xi. \tag{6}$$

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что всякое π-решение $x(t)$ системы (1), соответствующее разбиению $\pi = \{j\tau\}_{j\geq 0}$, семейству управлений $v(t, a)$, функции переключения (9) и начальному условию $\|x(0)\| < \varepsilon$, обладает свойством

$$\lim_{t_j \to +\infty} x(t_j) = 0. \tag{7}$$

Матрица $\left(\left. \frac{\partial x(\tau;0,v(\cdot,a))}{\partial a} \right|_{a=a^*} \right)^+$ в формуле (9) обозначает псевдообратную матрицу [8, с. 32] к $n \times p$-матрице Якоби $J = \frac{\partial x(\tau;0,v(\cdot,a))}{\partial a}$ при $a = a^*$. Для доказательства утверждения 2 воспользуемся вспомогательной леммой.

Лемма 1. *Пусть при некоторых $\tau > 0$, $a^* \in G$ выполнены условия (5). Тогда для всякого $h > 0$ существует такое $\varepsilon = \varepsilon(h) > 0$, что*

$$\|x(\tau; \xi, v(\cdot, a(\xi)))\| \leq h\|\xi\|, \quad \forall\, \xi \in D : \|\xi\| < \varepsilon, \tag{8}$$

где функция переключения $a(\xi)$ задана формулой (9).

Доказательство. Применим формулу Тейлора для функции $\phi(\xi, a) = x(\tau; \xi, v(\cdot, a))$ в окрестности точки $(\xi, a) = (0, a^*)$ с учетом соотношений (5), (9) при $a = a(\xi)$:

$$\phi(\xi, a(\xi)) = \phi(0, a^*) + \left. \frac{\partial \phi(\xi, a)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0,\, a=a^*} \xi + \left. \frac{\partial \phi(\xi, a)}{\partial a} \right|_{\xi=0,\, a=a^*} (a(\xi) - a^*) +$$

$$+ o\left(\|\xi\| + \|a(\xi) - a^*\|\right) = \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0,\, a=a^*} \xi - \frac{\partial \phi}{\partial a} \left(\frac{\partial \phi}{\partial a} \right)^+ \left. \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=0,\, a=a^*} \xi + o(\|\xi\|). \tag{9}$$

При выполнении рангового условия (5) строки матрицы Якоби $J = \left. \frac{\partial \phi(\xi,a)}{\partial a} \right|_{\xi=0,\, a=a^*}$ линейно независимы. Следовательно [9, с. 29], $J^+ = J^T (J J^T)^{-1}$ и $J J^+ = I$ – единичная $n \times n$-матрица. Таким образом, из представления (9) вытекает

$$x(\tau; \xi, v(\cdot, a(\xi))) = \phi(\xi, a(\xi)) = o(\|\xi\|).$$

Это означает, что для всякого $h > 0$ найдется $\varepsilon > 0$ при котором

$$\|x(\tau; \xi, v(\cdot, a(\xi)))\| \leq h\|\xi\|$$

лишь только $\|\xi\| < \varepsilon$. $\square$

Для *доказательства утверждения 2* зададимся произвольным числом $h \in (0, 1)$ и применим оценку (8) для π-решения $x(t)$ системы (1), соответствующего разбиению $\pi = \{j\tau\}_{j\geq 0}$, семейству управлений $v(t, a)$ и функции переключения $a(\xi)$ при начальном условии $\|x(0)\| < \varepsilon$, где число $\varepsilon > 0$ указано в лемме 1:

$$\|x(\tau)\| \leq h\|x(0)\|.$$

Применяя это неравенство последовательно для $t_j = j\tau$, $j = 2, 3, ...$, получим

$$\|x(t_j)\| \le h^j \|x(0)\| \to 0 \quad \text{при} \quad j \to \infty.$$

□

Управление неголономной системой

Применим полученные результаты для исследования следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = u_2 \cos x_3, \\ \dot{x_2} = u_2 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = u_1, \end{cases} \tag{10}$$

где $x = (x_1, x_2, x_3)^T \in \mathbb{R}^3$ – вектор состояния, $u = (u_1, u_2)^T$ – вектор управления. Система (10) моделирует качение колеса по плоскости (x_1, x_2) без проскальзывания, где координата x_3 обозначает угол между плоскостью колеса и осью Ox_1 (см. напр. [10]). Переменные управления u_1 и u_2 обозначают угловую скорость поворота колеса и скорость движения центра колеса, соответственно. Будем предполагать, что управляющие воздействия могут принимать значения из дискретного множества:

$$U : u_1 \in \{-1, 0, 1\},\ u_2 \in \{0, 1\}.$$

Такое ограничение означает, что в любой момент времени t имеется возможность остановить качение ($u_2 = 0$), двигаться прямо ($u_1 = 0$, $u_2 = 1$), повернуть направо ($u_1 = -1$, $u_2 = 1$) или налево ($u_1 = 1$, $u_2 = 1$). В случае $u_2 \equiv 1$ модель (10) известна в теории управления как машина Дубинса (см. [11]).

Введем множество $G = (0, +\infty)^4 \subset \mathbb{R}^4$. Для вектора параметров $a = (a_1, a_2, a_3, a_4)^T \in G$ рассмотрим полуинтервалы $S_1 = [0, a_1)$, $S_j = \left[\sum_{i=1}^{j-1} a_i, \sum_{i=1}^{j} a_i\right)$, $j = 2, 3, 4$. Определим семейство управлений $u = v(t, a)$ для системы (10) следующим образом:

$$v_1(t,a) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in S_1 \cup S_3, \\ -1, & \text{если} \quad t \in S_2 \cup S_4, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4; \end{cases}$$

$$v_2(t,a) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad t \in S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4, \\ 0, & \text{если} \quad t \notin S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4, \end{cases} \tag{11}$$

Найдем решение задачи Коши $x(t; 0, v(\cdot, a))$ для системы (10) с управлением $u = v(t, a)$ и начальными условиями $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$:

$$x_3(t) = \int\limits_0^t v_1(s,a)ds = \begin{cases} t, \quad t \in S_1, \\ 2a_1 - t, \quad t \in S_2, \\ -2a_2 + t, \quad t \in S_3, \\ 2a_1 + 2a_3 - t, \quad t \in S_4; \end{cases}$$

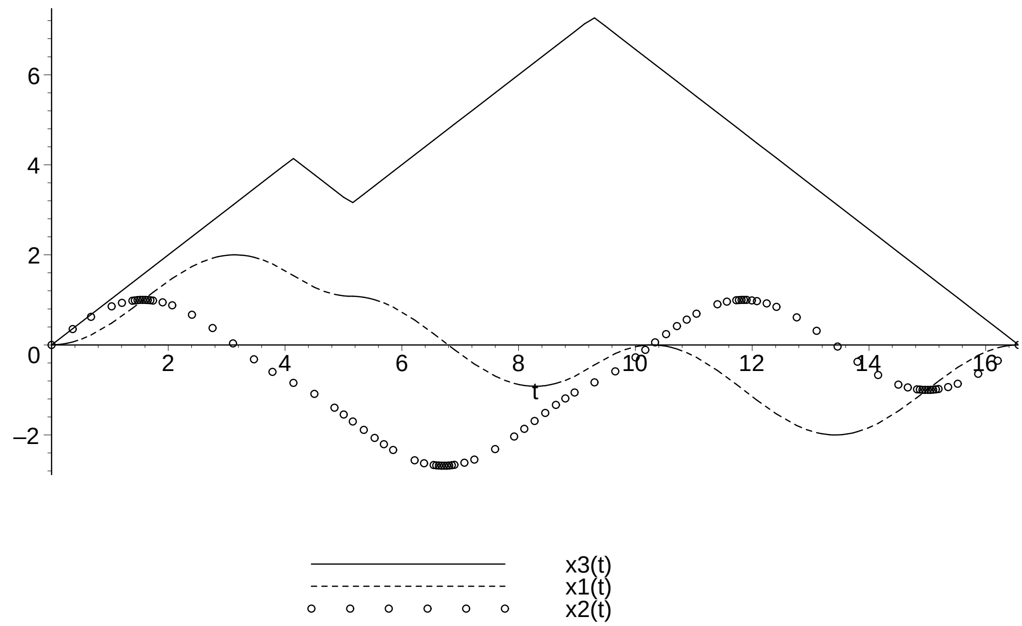

Рис. 1. Решение системы (10) с начальным условием $x(0) = 0$ и управлением $u = v(t, a^*)$.

$$x_1(t) = \int_0^t \cos x_3(s)ds = \begin{cases} \sin t,\ t \in S_1, \\ 2\sin a_1 - \sin(2a_1 - t),\ t \in S_2, \\ 2\sin a_1 - 2\sin(a_1 - a_2) - \sin(2a_2 - t),\ t \in S_3, \\ 2\sin a_1 - 2\sin(a_1 - a_2) + 2\sin(-a_2 + a_1 + a_3)- \\ \qquad - \sin(2a_1 + 2a_3 - t),\ t \in S_4; \end{cases}$$

$$x_2(t) = \int_0^t \sin x_3(s)ds = \begin{cases} 1 - \cos t,\ t \in S_1, \\ 1 - 2\cos a_1 + \cos(2a_1 - t),\ t \in S_2, \\ 1 - 2\cos a_1 + 2\cos(2a_1 - a_2) + \cos(2a_2 - t),\ t \in S_3, \\ 1 - 2\cos a_1 + 2\cos(a_1 - a_2) - 2\cos(-a_2 + a_1 + a_3)+ \\ \qquad + \cos(2a_1 + 2a_3 - t), \quad t \in S_4, \end{cases}$$

при этом $x(t) = x(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ в случае $t \geq a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Для того, чтобы в момент времени $\tau \geq a_1+a_2+a_3+a_4$ решение обращалось в нуль, нам потребуется решить систему нелинейных уравнений относительно a_1, a_2, a_3, a_4:

$$x_1(\tau) = x_2(\tau) = x_3(\tau) = 0.$$

Данная система имеет семейство решений, зависящих от параметра c:

$$a_1^* = \pi + c,\ a_2^* = c,\ a_3^* = \pi + c,\ a_4^* = 2\pi + c. \tag{12}$$

Для дальнейших вычислений положим $\tau = a_1^* + a_2^* + a_3^* + a_4^* + \delta$, $c = 1$, $\delta = 10^{-1}$. Ранг матрицы Якоби (4) равен трем при таких значениях параметров $a_1^*, a_2^*, a_3^*, a_4^*$. Следовательно, система (10) локально управляема в окрестности нуля по утверждению 1. Графики координатных функций соответствующего решения $x(t; 0, v(\cdot, a^*))$ показаны на рис. 1.

Определим функцию переключения $a(\xi) = (a_1(\xi), a_2(\xi), a_3(\xi), a_4(\xi))^T$ по формуле (9) с использованием системы компьютерной алгебры:

$$a_1(\xi) = \pi + c,\ a_2(\xi) = c + \frac{1}{2}\left(\xi_1 - \frac{1}{2}\xi_2 \sin 2c + \xi_3\right),$$

$$a_3(\xi) = \pi + c + \frac{1}{2}\left(\xi_1 - 1 - \frac{1}{2}\xi_2 \sin 2c + \xi_3\right),\ a_4(\xi) = 2\pi + c - \frac{\xi_2}{2\sin c} + \xi_3.$$

Для разбиения $\pi = \{j\tau\}_{j\geq 0}$ полуинтервала $t \in [0, +\infty)$, семейства управлений $v(t, a)$ и функции переключения $a(\xi)$, проведем численное интегрирование системы (10) для нахождения ее π-решения $x(t)$ при следующих начальных условиях

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0,5.$$

Приближенные значения координатных функций π-решения $x(t)$ приведены ниже.

	$t = 0$	$t = \tau$	$t = 2\tau$	$t = 3\tau$	$t = 4\tau$
$x_1(t)$	0,5	$-1,75 \cdot 10^{-1}$	$3,16 \cdot 10^{-2}$	$3,9 \cdot 10^{-4}$	10^{-7}
$x_2(t)$	0,5	$2,1 \cdot 10^{-1}$	$-7,8 \cdot 10^{-3}$	$-2,9 \cdot 10^{-4}$	$-3,8 \cdot 10^{-8}$
$x_3(t)$	0,5	-10^{-9}	$-2,8 \cdot 10^{-9}$	$6,98 \cdot 10^{-9}$	$4,6 \cdot 10^{-10}$

Поведение π-решения $x(t)$ в моменты времени $t_j = j\tau$ показано на рис. 2. Для удобства графической иллюстрации точки $x(t_j)$ соединены отрезками.

Выводы

Полученные в работе результаты развивают подход статьи [2] для стабилизации положения равновесия нелинейных систем с помошью дискретно переключаемой функции управления.

Отметим, что система (10) приводится к известному примеру Брокетта с помощью невырожденного преобразования с обратной связью для случая управлений без ограничений ($U = \mathbb{R}^2$) [1]. В свою очередь, пример Брокетта не является стабилизируемым в классе непрерывных функций управления с обратной связью (см. [3, 1]). Таким образом, использование разрывных управлений является естественным для стабилизации рассматриваемого класса систем.

Поскольку свойство (7) не дает исчерпывающего описания всех предельных точек π-решения $x(t)$, то представляет интерес для дальнейшей работы вопрос об исследовании ω-предельных множеств π-решений. Однако, для возможной практической реализации предложенного закона управления, достаточно по заданному $\Delta > 0$ определить управление с переключениями по описанной выше схеме вплоть

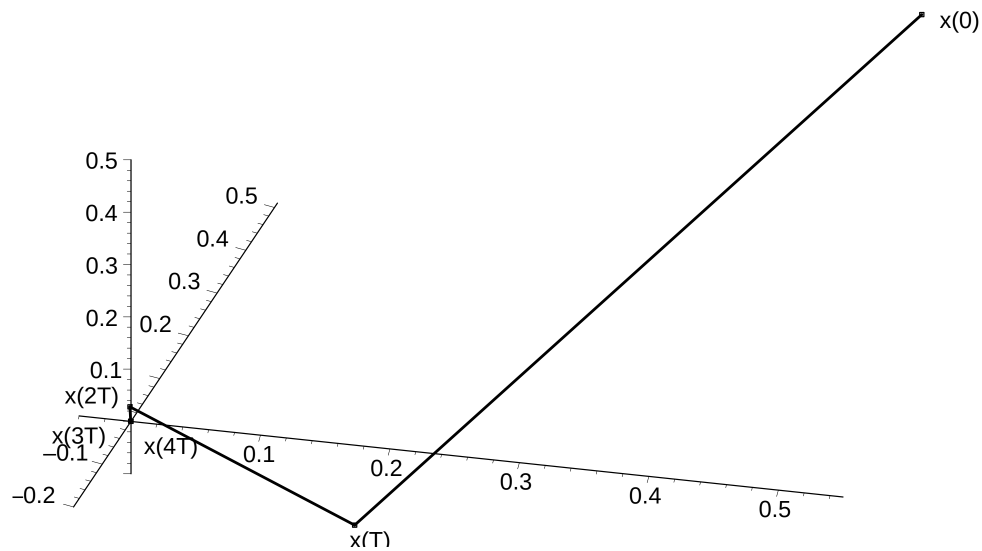

Рис. 2. π-решение системы (10) для разбиения $\pi = \{j\tau\}_{\tau \geq 0}$, семейства управлений $u = v(t, a)$ и функции переключения $a(\xi)$.

до момента времени $t_N = N\tau$ из условия $\|x(t_N)\| < \Delta$ и положить $u_1 = u_2 = 0$ при $t \geq t_N$ в системе (10). Такое управление обеспечивает перевод системы (10) в произвольно заданную Δ-окрестность нуля за конечное время.

Список литературы

[1] Sontag E.D. *Stability and Stabilization: Discontinuities and the Effect of Disturbances* // in: Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control (Proc. NATO Advanced Study Institute, Montreal). – Kluwer, 1998. – P. 551-598.

[2] Coron J.-M. *Control and Nonlinearity.* – Providence, AMS: 2007. – 426 p.

[3] Brockett R.W. *Asymptotic stability and feedback stabilization* // Differential Geometric Control Theory (R.W. Brockett, R.S. Millman, and H.J. Sussmann, eds.). – Boston: Birkhäuser, 1983. – P. 181–191.

[4] Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Sontag E.D., Subbotin A.I. *Asymptotic controllability implies feedback stabilization* // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1997. – Vol. 42. – P. 1394–1407.

[5] Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления.* – М.: Наука, 1972. – 576 с.

[6] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М: Мир, 1970. – 720 с.

[7] Зуев А.Л., Чумаченко Т.Н. *Исследование локальной управляемости нелинейных систем методом возврата* // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 136–144.

[8] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – 4-е изд. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

[9] Алберт А. *Регрессия, псевдоинверсия и рекуррентное оценивание.* – М.: Наука, 1977. – 224 с.

[10] Bloch A. *Nonholonomic mechanics and control.* – New York: Springer, 2003. – 483 p.
[11] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. *Геометрическая теория управления.* – М.: Физматлит, 2004. – 392 с.

Стабілізація нелінійних систем у класі функцій керування із дискретним перемиканням

Розглянуто задачу про побудову функції керування, що забезпечує існування граничної точки $x = 0$ *для всіх розв'язків* $x(t)$ *нелінійної системи. Запропоновано локальний підхід до розв'язання цієї проблеми у класі функцій керування з перемиканнями у дискретні моменти часу. Одержаний результат застосовано до моделі неголономної системи з обмеженнями на керування. Наведено результати чисельного моделювання.*

Ключові слова: керованість, стабілізація, зворотний зв'язок із дискретним перемиканням.

Stabilization of nonlinear systems in the class of control functions with discrete switching

A problem on the construction of a control function that ensures the existence of a limit point $x = 0$ *for all solutions* $x(t)$ *of a nonlinear system is considered. A local approach to the solvability of this problem is proposed in the class of sampled controls with switching at discrete time instants. The result obtained is applied for a nonholonomic model with constraints on the control. Simulation results are presented.*

Keywords: controllability, stabilization, sampled feedback.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 10–22.

УДК 517.51

С. Ю. Артамонов

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ПРОИЗВОДНОЙ РИССА

В работе построен модуль непрерывности, соответствующий производной Рисса. Изучены его свойства в пространствах L_p 2π-периодических функций с $1 \le p \le +\infty$. Доказаны прямая оценка типа Джексона, обратная оценка типа Бернштейна и эквивалентность K-функционалу, соответствующему производной Рисса.

Ключевые слова: модуль непрерывности, производная Рисса, средние Фейера, K-функционал.

Введение

Модуль гладкости является классическим средством описания гладкости функции. Концепция модуля гладкости находит множество приложений в теории аппроксимации, теории функциональных пространств и других областях современного анализа. Напомним (см., например, [2]), что модулем гладкости k-го порядка ($k \in \mathbb{N}$) в пространстве $L_p[0, 2\pi)$, $p \ge 1$, называется величина

$$\omega_k(f, \delta)_p \, = \sup_{0 \le h \le \delta} \left\| \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^{k-\nu} C_k^\nu f(x + \nu h) \right\|_p , \;\; f \in L_p \;\, \delta \ge 0 \,, \tag{1}$$

где

$$C_k^\nu \, = \, \frac{k(k-1)\ldots(k-\nu+1)}{\nu\,!} \,. \tag{2}$$

Конструкция (1) может быть обобщена, если натуральный параметр k заменить на вещественный неотрицательный параметр α, а конечную сумму в (1) заменить на бесконечную сумму по всем неотрицательным целым значениям. Полученные таким путем модули гладкости изучались многими авторами, в частности Б.В. Симоновым, С.Ю. Тихоновым и М.К. Потаповым [10]. Для них были доказаны прямая оценка типа Джексона, обратная оценка типа Бернштейна и теорема об эквивалентности K-функционалу, соответствующему производной Вейля.

Вместе с тем, список существующих модулей гладкости должен быть существенно пополнен даже в одномерном случае. Действительно, для многих K-функционалов и аппроксимационных методов модули, упоминавшиеся выше, не годятся с точки зрения их эквивалентности K-функционалу и аппроксимационной ошибки данного метода. K-функционал, соответствующий производной Рисса, дает простейший пример. Качество аппроксимации средними Фейера может быть полностью описано в терминах K-функционала. С другой стороны, аппроксимационная ошибка средних Фейера не эквивалентна ни одному из рассматриваемых ранее модулей гладкости.

В работе К.В. Руновского и Х.-Ю. Шмайссера [8] введен модуль непрерывности, соответствующий производной Рисса

$$\omega(f,\delta)_p \,=\, \sup_{0\le h\le\delta} \left\| \frac{4}{\pi^2}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \frac{f(x+(2\nu+1)h)}{(2\nu+1)^2} \,-\, f(x) \right\|_p ,\ \delta\ge 0\,. \tag{3}$$

Получены прямая оценка типа Джексона, обратная оценка типа Бернштейна и теорема об эквивалентности K-функционалу, соответствующему производной Рисса.

В данной статье на основании методики, разработанной в [8] предлагается модификация модуля (3)

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p \,=\, \sup_{0\le h\le\delta} \left\| \frac{3}{\pi^2}\sum_{\nu\ne 0} \frac{f(x+\nu h)}{\nu^2} \,-\, f(x) \right\|_p ,\ \delta\ge 0\,. \tag{4}$$

Основными результатами статьи являются доказанные для модуля (4) прямая оценка типа Джексона, теорема об эквивалентности K-функционалу, соответствующему производной Рисса и обратная оценка типа Бернштейна (Теоремы 2, 3 и 4 соответственно). Таким образом, мы показываем, что модуль непрерывности (3) – не единственный модуль, обладающий такими свойствами.

Определения, обозначения и предварительные сведения

Как обычно, $L_p \equiv L_p([0,2\pi))$, где $1\le p<+\infty$, есть пространство измеримых вещественнозначных 2π-периодических функций $f(x)$, для которых

$$\|\, f\,\|_p \;=\; \left(\int\limits_0^{2\pi} |f(x)|^p\ dx \right)^{1/p} \;<\; +\infty\,,$$

и $C\equiv C([0,2\pi))$ $(p=+\infty)$ есть пространство непрерывных вещественнозначных 2π-переодических функций $f(x)$, снабженное нормой Чебышева

$$\| f \|_\infty \ = \ \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| \ .$$

Как обычно, коэффициенты Фурье функции $f \in L_1$ заданы формулой:

$$f^\wedge(k) \ = \ (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx\,,\ k \in \mathbb{Z}\,.$$

Преобразование Фурье функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ будем обозначать через $\widehat{f}(\xi)$:

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-ix\xi}\, dx\,,\ \xi \in \mathbb{R}\,.$$

Аппроксимативные свойства функций будем мерить с помощью наилучших приближений:

$$E_n(f)_p \ = \ \inf_{t \in \mathcal{T}_n} \| f - t \|_p\,,\ n \in \mathbb{N}_0\,,$$

где $\mathcal{T}_n$ - пространство тригонометрических полиномов степени не выше n.

Следуя [4], [5], назовем функцию $\varphi(x)$ генератором, если она определена на $\mathbb{R}$, является вещественно- или комплекснозначной и удовлетворяет следующим условиям:

- φ имеет компактный носитель ($r(\varphi) = \sup\{\, |\,\xi\,| : \ \xi \in \operatorname{supp} \varphi\,\} < +\infty$);
- $\varphi(-\xi) \ = \ \overline{\varphi(\xi)}$ для любого $\xi \in \mathbb{R}$;
- $\varphi(0) = 1$;
- φ непрерывна.

Класс генераторов будем обозначать через $\mathcal{K}$. Любая функция $\varphi \in \mathcal{K}$ порождает ядро

$$W_0(h) \equiv 1\,,\ W_\sigma(h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)\, e^{ikh}\,,\ n \in \mathbb{N}\,, \tag{5}$$

и средние

$$\mathcal{F}_n^{(\varphi)}(f;x) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{2\pi} f(h)\, W_n(\varphi)(x-h)\, dh \ . \tag{6}$$

Отметим, что средние Фейера являются частным случаем (2), когда функция $\varphi(\xi) \ = \ (\,1 - |\,\xi\,|\,)_+ \ (\,a_+ \ = \ \max(a,0)\,)$. В данной статье будем обозначать средние Фейера символом $\mathcal{F}_n$.

Символом $\mathcal{P}_\varphi$ будем обозначать множество $\{p \in (0,+\infty] : \widehat{\varphi} \in L_p(\mathbb{R})\}$.

Согласно определению, производная Рисса является линейным оператором корректно определенном на множестве всех тригонометрических полиномов

$$(e^{ikx})^{\langle\prime\rangle} \ = \ |\,k\,|\, e^{ikx}\,,\ k \in \mathbb{Z}\,. \tag{7}$$

Производная Рисса порождает K-функционал

$$K_{\langle\prime\rangle}(f,\delta)_p \;=\; \inf_{g\,\in\,\widetilde{W}_p^1} \left\{ \|\, f-g\,\|_p + \delta\,\|\, g^{\langle\prime\rangle}\,\|_p \right\},\;\; f\in L_p\,,\;\; \delta\ge 0\,, \tag{8}$$

где пространство $\widetilde{W}_p^1$ состоит из функций, таких что сама функция и ее сопряженная принадлежат пространству Соболева W_p^1.

Более полная информация по производной Рисса, пространствам $\widetilde{W}_p^1$ и K-функционалам (4) может быть найдена в [1], [3], [6], [7], [5].

Запись $A(f,n)\asymp B(f,n)$ будет обозначать одновременное выполнение двух неравенств

$$c_1B(f,n)\le A(f,n)\le c_2B(f,n),$$

где константы c_1 и c_2 не зависят от f и n.

Далее в работе символами c, c_1, c_2, c', c'' и т.д. будем обозначать константы, не зависящие от f и n. В разных формулах они могут быть разными.

Модуль непрерывности и его элементарные свойства

Рассмотрим модуль непрерывности, который определяется следующим образом:

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p \;=\; \sup_{0\le h\le\delta} \left\| \frac{3}{\pi^2}\sum_{\nu\ne 0}\frac{f(x+\nu h)}{\nu^2} \;-\; f(x) \right\|_p,\;\; \delta\ge 0\,. \tag{9}$$

Введем операторы:

$$\widehat{T}_h f(x) \;=\; \frac{3}{\pi^2}\sum_{\nu\ne 0}\frac{f(x+\nu h)}{\nu^2}\,,\;\; h\in\mathbb{R}\,, \tag{10}$$

$$\widehat{\Delta}_h \;=\; \widehat{T}_h \;-\; I\,, \tag{11}$$

где I – единичный оператор.

Тогда модуль (9) может быть записан в виде

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p \;=\; \sup_{0\le h\le\delta}\,\|\,\widehat{\Delta}_h f(x)\,\|_p\,,\;\; \delta\ge 0\,. \tag{12}$$

Следует отметить, что коэффициенты в представлении $\widehat{\Delta}_h$ связаны с коэффициентами Фурье 2π-периодической функции

$$\theta(x)=\frac{3}{2\pi^2}x^2-\frac{3}{\pi}x$$

соотношением

$$\widehat{\Delta}_h f(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\theta(hk)\,f^{\wedge}(k)\,e^{ikx}\,, \tag{13}$$

которое несложно проверить непосредственным вычислением.

Простейшие свойства введенного модуля непрерывности, доказательства которых очевидны, даны в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть* $1 \le p \le \infty$. *Тогда* $\widehat{T}_h$ *и* $\widehat{\Delta}_h$, $h \in \mathbb{R}$, *линейные ограниченные операторы в* L_p *и*

$$\| \widehat{T}_h \|_{(p)} \ \le \ 1\,, \ h \in \mathbb{R}\,, \tag{14}$$

$$\| \widehat{\Delta}_h \|_{(p)} \ \le \ 2\,, \ h \in \mathbb{R}\,, \tag{15}$$

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p \ \le \ 2 \| f \|_p\,, \ f \in L_p\,, \ \delta \ge 0\,. \tag{16}$$

Отметим также, что в силу (13) и учитывая определение производной Рисса, будем иметь для произвольного тригонометрического полинома $t(x)$

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{\widehat{\Delta}_h t(x)}{h} \ &= \ \lim_{h\to 0} \sum_{|\,k\,| \le n} \frac{\theta(hk)}{h}\, t^\wedge(k)\, e^{ikx} \ = \\ &= \ \lim_{h\to 0} \sum_{|\,k\,| \le n} \left(\frac{3}{2\pi^2}(h^2k^2)\frac{1}{h} - \frac{3}{\pi} h|\,k\,|\frac{1}{h} \right) t^\wedge(k)\, e^{ikx} \ = \\ &= \ -\tfrac{3}{\pi} \sum_{|\,k\,| \le n} |\,k\,|\, t^\wedge(k)\, e^{ikx} \ = \\ &= \ -(3/\pi) t^{\langle\prime\rangle}(x)\,, \end{aligned} \tag{17}$$

где n – порядок тригонометрического полинома $t(x)$. Из (17) получаем, для производной Рисса

$$(\cdot)^{\langle\prime\rangle} \ = \ -(\pi/3) \lim_{h\to 0} \frac{\widehat{T}_h \, - \, I}{h} \tag{18}$$

по крайней мере на множестве тригонометрических полиномов.

Основные свойства

Пусть $m \ge 2$ и $m \in \mathbb{Z}$. Символом $\theta_m(\xi)$ обозначим 2π-периодическую четную функцию, заданную на $(0, \pi)$ формулой

$$\theta_m(\xi) \ = \ \frac{\theta(m\xi)}{\theta(\xi)}\ . \tag{19}$$

Очевидно, что

$$\theta_m(\xi) \ = \ \sum_{j=1}^{m} \frac{f_j(x)}{\theta(x)},\ 0 < \xi < \pi\,, \tag{20}$$

где

$$f_j(x) = \begin{cases} a_j(m)x^2 + b_j(m)x + c_j(m), x \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}] \\ \\ 0, \quad x \notin [\alpha_j, \alpha_{j+1}]. \end{cases} \tag{21}$$

Здесь

$$\alpha_j(m) = \frac{(j-1)\pi}{m}, \quad j = \overline{1, m+1},$$

$$\begin{cases} a_j(m) = \frac{6m^2}{\pi^2}, \\ \\ b_j(m) = -\frac{6m}{\pi}(2j-1), \\ \\ c_j(m) = 6j(j-1). \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть $m \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\, \theta_m^{\wedge}(k)\,| \,\le\, Cm^3\,, \tag{22}$$

где положительная константа C не зависит от m.

Доказательство. Обозначим через $Q_j(m)$ отношение $f_j(x)/\theta(x)$. Заметим, что $Q_j(\alpha_j) = Q_j(\alpha_{j+1}) = 0$, так как $f_j(\alpha_j) = f_j(\alpha_{j+1}) = 0$. Тогда, используя формулу интегрирования по частям, будем иметь:

$$\theta_m^{\wedge}(k) = \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} Q_j(x)\cos kx dx =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \left[\frac{1}{k^2}\left(Q_j'(x)\cos kx\Big|_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} \right) - \frac{1}{k^2}\left(\int\limits_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} Q_j''(x)\cos kx dx \right) \right].$$

Оценим первое слагаемое в квадратных скобках. Так как

$$\left| Q_j'(x)\cos kx\Big|_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} \right| \le |Q_j'(\alpha_{j+1})| + |Q_j'(\alpha_j)|,$$

то, учитывая что

$$Q_j'(x) = \frac{f_j'(x)\theta(x) - f_j(x)\theta'(x)}{\theta^2(x)},$$

$$f_j(\alpha_j) = f_j(\alpha_{j+1}) = 0,$$

получаем:

$$|Q_j'(\alpha_j)| = \frac{|2\frac{6m(j-1)}{\pi} - 2\frac{6m(2j-1)}{\pi}|}{|\frac{3(j-1)^2\pi^2}{m^2} - \frac{6\pi^2(j-1)}{m}|} \cdot 2\pi^2 \le C_1 \cdot m^2,$$

где, положительная константа C_1 не зависит от m и j. Здесь мы воспользовались тем, что $|2m-(j-1)| \geq \frac{m}{2}$ и тем что $\frac{2j-1}{j-1} \leq 3$. Для получения оценки $|Q_j'(\alpha_{j+1})| \leq C_2 m^2$ все выкладки проводятся аналогично.

Второе слагаемое в квадратных скобках оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} Q_j''(x)\cos kx dx\right| \leq \int\limits_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} |Q_j''(x)||\cos kx|dx \leq \\ &\leq \int\limits_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} |Q_j''(x)|dx = -Q_j'(x)\big|_{\alpha_j(m)}^{\alpha_{j+1}(m)} = Q_j'(\alpha_j(m)) - Q_j'(\alpha_{j+1}(m)) \leq \\ &\leq |Q_j'(\alpha_{j+1})| + |Q_j'(\alpha_j)| \leq C_3 m^2,\end{aligned}$$

где положительная константа C_3 не зависит от m и j.

Таким образом,

$$|\theta_m^\wedge(k)| \leq \frac{C' m^2}{k^2}\sum_{j=1}^{m} 1 = \frac{C' m^3}{k^2},$$

и окончательно получаем, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\,\theta_m^\wedge(k)\,| \,\leq\, Cm^3\,.$$

Доказательство леммы завершено. ■

Пусть $t \geq 0$. Будем использовать обозначение $]\,t\,[$ для $[\,t\,]$, если $t \notin \mathbb{N}$, и для $[\,t\,]-1$, в противном случае.

Теорема 1. *Пусть* $1 \leq p \leq +\infty$. *Тогда*

$$\widehat{\omega}(f, t\delta)_p \,\leq\, c\,(\,1+]\,t\,[\,)^3\,\widehat{\omega}(f,\delta)_p\,,\;\; f \in L_p\,,\;\; \delta, t \geq 0\,, \tag{23}$$

где положительная постоянная c *не зависит от* δ, t *и* f.

Доказательство. В силу (12) оценка (23) является прямым следствием неравенства

$$\|\,\widehat{\Delta}_{mh} f(x)\,\|_p \,\leq\, Cm^3\,\|\,\widehat{\Delta}_h f(x)\,\|_p\,,\;\; f \in L_p\,,\;\; h, t \geq 0\,. \tag{24}$$

Для доказательства (24) заметим, что в силу (13)

$$\widehat{\Delta}_{mh} \,=\, \mathcal{D}\left(\frac{\theta(mh\cdot)}{\theta(h\cdot)}\right) \circ \mathcal{D}(\theta(h\cdot)) \,=\, \mathcal{D}(\theta_m(h\cdot)) \circ \widehat{\Delta}_h\,, \tag{25}$$

где символом $\mathcal{D}(g)$ обозначен линейный оператор мультипликаторного типа, действующий по закону

$$\mathcal{D}(g)(e^{ikx}) = g(k)e^{ikx},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Для $f \in L_p$ функция $g = \widehat{\Delta}_h f$ также принадлежит L_p в силу Леммы 1. Используя Лемму 2 и (25) будем иметь

$$\begin{aligned}\| \widehat{\Delta}_{mh} f \|_p \;&=\; \| \mathcal{D}(\theta_m(h\cdot))\, g \|_p \;=\; \left\| \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} \theta_m^{\wedge}(\nu)\, g(x+\nu h) \right\|_p \;\le\; \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\, \theta_m^{\wedge}(\nu)\, | \\ &\le\; \| g(x+\nu h) \|_p \;\le\; \| g \|_p \sum_{\nu\in\mathbb{Z}} |\, \theta_m^{\wedge}(\nu)\, | \;\le\; Cm^3 \| g \|_p \,,\end{aligned}$$

откуда и получаем (24). ■

Прямая оценка типа Джексона

В этом разделе мы доказываем прямую теорему теории аппроксимации в одномерном случае для модуля непрерывности (9) в пространствах L_p с $1 \le p \le +\infty$ (Теорема 2). Этот результат базируется на новой формуле для средних (Лемма 3) и Лемме 4, показывающей, что генератор $\Phi(\xi)$, построенный по правилу

$$\Phi(\xi) \;=\; \sum_{\nu\ne 0} \theta^{\wedge}(\nu)\, \varphi(\nu\xi) \tag{26}$$

удобен для описания качества аппроксимации в терминах модуля гладкости (9).

Доказательства Леммы 3 и Леммы 4 существенно не отличаются от доказательства аналогичных утверждений в [8], поэтому ограничимся лишь их формулировками.

Лемма 3. *Пусть $\varphi \in \mathcal{K}$ и $1 \in \mathcal{P}_\varphi$. Тогда для $f \in L_p$ и $\sigma > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f;x) \;=\; (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+\sigma^{-1}h)\, \widehat{\varphi}(h)\, dh\,. \tag{27}$$

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in \mathcal{K}$ и $1 \in \mathcal{P}_\varphi$. Тогда для $f \in L_p$ и $\sigma > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{F}_\sigma^{(\Phi)}(f;x) \;=\; (2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{T}_{\sigma^{-1}h}\, f(x)\, \widehat{\varphi}(h)\, dh\,. \tag{28}$$

Теперь перейдем к доказательству основного результата данного раздела.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p \le +\infty$. *Тогда*

$$E_\sigma(f)_p \;\le\; c\,\widehat{\omega}\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p\,,\;\; f\in L_p\,,\;\sigma\ge 0\,, \tag{29}$$

где положительная постоянная c *не зависит от* f *и* σ.

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$E_\sigma(f)_p \;\le\; c\,\widehat{\omega}\left(f,\sigma^{-1}\right)_p\,,\;\; f\in L_p\,,\;\sigma\ge 1/2\,. \tag{30}$$

В самом деле, для $0\le\sigma<1/2$ утверждение теоремы будет следовать из (30) и Теоремы 1

$$E_\sigma(f)_p = E_{1/2}(f)_p \le c\,\widehat{\omega}(f,2)_p \le c'\,\widehat{\omega}(f,2/3)_p \le c'\,\widehat{\omega}\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p\,.$$

Если $\sigma\ge 1/2$, то в силу (30) и Теоремы 1 справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} E_\sigma(f)_p \;&\le\; c\,\widehat{\omega}\left(f,\sigma^{-1}\right)_p = c'\left(1+\frac{\sigma+1}{\sigma}\right)\widehat{\omega}\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p \le \\ &\le\; c''\widehat{\omega}\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p\,. \end{aligned}$$

Для доказательства (30) рассмотрим вещественнозначную четную бесконечно дифференцируемую функцию φ с носителем, сосредоточенным на отрезке $[-1,1]$. Очевидно, что

$$|\,\widehat{\varphi}(h)\,| \;\le\; c\,(1+|\,h\,|)^{-5}\,,\;\; h\in\mathbb{R}\,. \tag{31}$$

Применяя (26), Лемму 4, (12), Теорему 1 и (31), для $f\in L_p$ и $\sigma\ge 1/2$ будем иметь

$$\begin{aligned} E_\sigma(f)_p \;&\le\; \|\,f-\mathcal{F}_\sigma^{(\Phi)}(f)\,\|_p \le (2\pi)^{-1}\int_{\mathbb{R}} \|\,\widehat{T}_{\sigma^{-1}h}f(x)-f(x)\,\|_p\,|\,\widehat{\varphi}(h)|\,dh \le \\ &\le\; \int_{\mathbb{R}}\widehat{\omega}\left(f,\sigma^{-1}|\,h\,|\right)_p |\,\widehat{\varphi}(h)|\,dh \le c\,\widehat{\omega}\left(f,\sigma^{-1}\right)_p\int_{\mathbb{R}}(\,1+|\,h\,|\,)\,|\,\widehat{\varphi}(h)|\,dh \\ &\le\; c'\,\widehat{\omega}\left(f,\sigma^{-1}\right)_p\,, \end{aligned}$$

что и завершает доказательство (30). ■

Эквивалентность

Хорошо известно [3], что аппроксимационная ошибка средних Фейера в пространстве L_p с $1\le p\le+\infty$ эквивалентна K-функционалу, соответствующему производной Рисса, т.е.,

$$\|\,f-\mathcal{F}_\sigma(f)\,\|_p \asymp K_{\langle\prime\rangle}\left(f,(\sigma+1)^{-1}\right)_p\,,\;\; f\in L_p\,,\;\sigma\ge 0\,. \tag{32}$$

В [8] было доказано, что

$$\| f - \mathcal{F}_\sigma(f) \|_p \asymp K_{\langle\prime\rangle} \left(f, (\sigma+1)^{-1}\right)_p \asymp \omega \left(f, (\sigma+1)^{-1}\right)_p .$$

для модуля (3). В данном разделе мы покажем, что аналогичный результат имеет место также и для модуля (9).

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p \le +\infty$. *Тогда для* $f \in L_p$, $\sigma \ge 0$

$$\| f - \mathcal{F}_\sigma(f) \|_p \asymp K_{\langle\prime\rangle} \left(f, (\sigma+1)^{-1}\right)_p \asymp \widehat{\omega} \left(f, (\sigma+1)^{-1}\right)_p . \tag{33}$$

Доказательство. *Шаг 1.* Сначала докажем, что

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p \le c\, K_{\langle\prime\rangle}(f,\delta)_p , \; f \in L_p , \; \delta \ge 0 . \tag{34}$$

Принимая во внимание, что ($\varphi(\xi) = (1 - |\,\xi\,|)_+$)

$$\frac{2}{3}\, \theta(\pi\xi) = \varphi^2(\xi) - 1 , \; \xi \in \mathbb{R} ,$$

получаем для любого $h > 0$ ($\mathcal{F}_\infty = I$)

$$\frac{2}{3}\, \widehat{\Delta}_{\pi h} = -(\, I - \mathcal{F}_{1/h}\,) \circ (\, I + \mathcal{F}_{1/h}\,) . \tag{35}$$

Используя свойства оператора $\mathcal{F}_\sigma$ и (32), (35), получаем

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}(f,\delta)_p \;&\le\; \widehat{\omega}(f,\pi\delta)_p = \sup_{0 \le h \le \delta} \| \widehat{\Delta}_{\pi h} f(x) \|_p \le \sup_{0 \le h \le \delta} \left\| I + \mathcal{F}_{1/h} \right\|_{(p)} \\ &\sup_{\lambda \ge \delta^{-1}} \| f - \mathcal{F}_\lambda(f) \|_p \le c_1 \sup_{\lambda \ge \delta^{-1}} \| f - \mathcal{F}_\lambda(f) \|_p \le \\ &\le\; c \sup_{\lambda \ge \delta^{-1}} K_{\langle\prime\rangle} \left(f, (\lambda+1)^{-1}\right)_p = c\, K_{\langle\prime\rangle} \left(f, \frac{\delta}{\delta+1}\right)_p \le c\, K_{\langle\prime\rangle}(f,\delta)_p , \end{aligned}$$

что и завершает доказательство (34).

Шаг 2. Докажем следующую оценку

$$K_{\langle\prime\rangle}(f,\delta)_p \le c\, \widehat{\omega}(f,\delta)_p , \; f \in L_p , \; \delta \ge 0 . \tag{36}$$

Для $\delta = 0$ оценка (36) немедленно следует из элементарных свойств модуля и K-функционала. Обозначим

$$g_\delta(x) \;=\; \mathcal{F}^{(\eta)}_{1/\delta}(f;x) , \; \delta > 0 . \tag{37}$$

где функция η вещественнозначная четная бесконечно дифференцируемая, имеет компактный носитель на $[-\pi,\pi]$ и $\eta(\xi) = 1$ для $|\,\xi\,| \le 1$. Хорошо известно [9], что

$$\| f - \mathcal{F}^{(\eta)}_\sigma(f) \|_p \le c\, E_\sigma(f)_p , \; f \in L_p , \; \sigma \ge 0 . \tag{38}$$

Используя (37), (38) и Теорему 2, получаем

$$\| f - g_\delta \|_p \le c\, E_{1/\delta}(f)_p \le c'\, \widehat{\omega}\left(f, \frac{\delta}{\delta+1}\right)_p \le c'\, \widehat{\omega}(f,\delta)_p . \tag{39}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x) = \frac{-3}{\pi}\frac{1}{Ax-B}\eta(x)$, где $A = \frac{3}{2\pi^2}$, $B = \frac{3}{\pi}$. Как легко видеть, φ принадлежит классу генераторов и

$$\theta(\xi)\,\varphi(\xi) = -(3/\pi)\,|\,\xi\,|\,\eta(\xi)\,,\ \xi \in \mathbb{R}\,,$$

следовательно

$$\widehat{\Delta}_\delta \circ \mathcal{F}^{(\varphi)}_{1/\delta} = -(2/\pi)\,\delta\,(\,\mathcal{F}^{(\eta)}_{1/\delta}\,)^{\langle\prime\rangle}\,.$$

Используя (37), будем иметь

$$\widehat{\Delta}_\delta\, \mathcal{F}^{(\varphi)}_{1/\delta}(f;x) = -(3/\pi)\,\delta\, g_\delta^{\langle\prime\rangle}(x)\,. \tag{40}$$

В силу (37) и (40) получаем

$$\begin{aligned} \delta\,\|\, g_\delta^{\langle\prime\rangle}\,\|_p &= (\pi/3)\,\|\,\widehat{\Delta}_\delta\,\mathcal{F}^{(\varphi)}_{1/\delta}(f;x)\,\|_p = (\pi/3)\,\|\,\mathcal{F}^{(\varphi)}_{1/\delta}(\,\widehat{\Delta}_\delta f(x))\,\|_p \le \\ &\le (\pi/3)\|\,\mathcal{F}^{(\varphi)}_{1/\delta}\,\|_p\,\|\,\widehat{\Delta}_\delta f(x)\,\|_p \le c\,\widehat{\omega}(f,\delta)_p\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Причем, $\sup\limits_{\sigma\ge 0}\|\,\mathcal{F}^{(\varphi)}_\sigma\,\|_p < +\infty$, так как $\widehat{\varphi} \in L_1(\mathbb{R})$.

Теперь (36) следует из (39) и (41).

Объединяя (34), (36), получаем (33). Доказательство теоремы завершено. ■

Комбинируя полученный результат с обратной теоремой для K-функционала, порожденного однородным генератором [7], мы немедленно получим обратную оценку типа Бернштейна для модуля (9).

Теорема 4. *Для $1 \le p \le +\infty$ справедливо неравенство*

$$\widehat{\omega}(f,\delta)_p \le c\min(\delta,1)\sum_{\nu\in\mathbb{N}_0:\ \nu<1/\delta} E_\nu(f)_p\,,\ f\in L_p\,,\ \delta>0\,, \tag{42}$$

где положительная константа c не зависит от f и δ.

Следуя [8], назовем модуль непрерывности, эквивалентный K-функционалу, соответствующему производной Рисса, *модулем непрерывности, соответствующему производной Рисса* или *модулем Рисса.*

Объединяя Теорему 3 и Теорему 4, получаем цепочку эквивалентностей в пространстве L_p для $1 \le p \le +\infty$, содержащую как классические, так и новые результаты:

$$\begin{aligned} E_{n-1}(f)_p \ &\leq \ \| f - \mathcal{F}_{n-1}(f) \|_p \asymp K_{\langle\prime\rangle}\left(f, n^{-1}\right)_p \asymp \\ &\asymp \ \widehat{\omega}\left(f, n^{-1}\right)_p \leq \frac{c}{n} \sum_{\nu=0}^{n-1} E_\nu(f)_p \,, \ f \in L_p \,, \ n \in \mathbb{N} \,. \end{aligned} \tag{43}$$

В качестве следствия (43) покажем, что оценка (23) может быть усилена. В самом деле, для $m \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\omega}(f, m\delta)_p \leq cK_{\langle\prime\rangle}(f, m\delta)_p \leq c' m K_{\langle\prime\rangle}(f, \delta)_p \leq c'' m \widehat{\omega}(f, \delta)_p, \tag{44}$$

что влечет за собой справедливость следующего неравенства

$$\widehat{\omega}(f, t\delta)_p \ \leq \ c\,(\,1 +]\,t\,[\,)\,\widehat{\omega}(f, \delta)_p \,, \ f \in L_p \,, \ \delta, t \geq 0 \,. \tag{45}$$

Список литературы

[1] Butzer, P. and R. Nessel: *Fourier Analysis and Approximation*. Vol. 1. New-York and London: Academic Press 1971.

[2] DeVore, R. and G. Lorentz: *Constructive Approximation*. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag 1993.

[3] Ditzian, Z., Hristov, V. and K. Ivanov: *Moduli of smoothness and K-functionals in* L_p, $0 < p < 1$. Constr. Approx. 11 (1995), 67–83.

[4] Rukasov, V., Runovski, K. and H.-J. Schmeisser: *On convergence of families of linear polynomial operators*. Func. et Approx. 41 (1) (2009), 41–54.

[5] Rukasov, V., Runovski, K. and H.-J. Schmeisser: *On quality of trigonometric approximation by families of linear polynomial operators*. Math. Nachr. (2011)

[6] Runovski, K. and H.-J. Schmeisser: *Smoothness and function spaces generated by homogeneous multipliers*. J. of Function Spaces and Appl. (2010) (*to appear*).

[7] Runovski, K. and H.-J. Schmeisser: *On K-functionals generated by homogeneous multipliers*. Revista Mat. Comp. (2011) (*to appear*).

[8] K. Runovski, H.-J. Schmeisser: *On Modulus of Continuity Related to Riesz Derivative*. Jenaer Schriften fur Math. und Inf. Math/Inf/01/11. Preprint.

[9] K. Runovski, I. Rystsov, H.-J. Schmeisser, Computational aspects of a method of stochastic approximation, J. Anal. and Appl. 25 (2006), 367-383.

[10] Tikhonov, S.: *Moduli of smoothness and the interrelation of some classes of functions.* In: Function Spaces, Interpolation Theory and Related Topics". Proc. of Int. Conf. in honour of J. Peetre on his 65-th birthday, Lund, Sweden, August 17-22, 2000. Printed by W. de Gruyter: Berlin, New York, 2002, 413–424.

Про деякі властивості модуля неперервності, відповідного похідної Рісса

У роботі побудован модуль неперервності, відповідний похідної Рісса. Вивчено його властивості в просторах L_p 2π-періодичних функцій с $1 \leq p \leq +\infty$. Доведено пряма оцінка типу Джексона, зворотна оцінка типу Бернштейна і еквівалентність K-функціоналу, відповідному похідної Рісса.

Ключові слова: модуль неперервності, похідна Рісса, середні Фейєра, K-функціонал.

On Some Properties of Modulus of Continuity Related to Riesz Derivative

A modulus of continuity related to the Riesz derivative is constructed. Its properties are studied in the spaces L_p of periodic functions with $1 \leq p \leq +\infty$. The direct Jackson type estimate, the inverse Bernstein type estimate and equivalence to the K-functinoal related to the Riesz derivative are proved.

Keywords: modulus of continuity, Riesz derivative, Fejer means, K-functional.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 23–31.

УДК 517.98

И. И. Карпенко, А.М. Гончаренко

ОДНОВРЕМЕННАЯ ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ КВАТЕРНИОННЫХ НЕЭРМИТОВО САМОСОПРЯЖЕННЫХ МАТРИЦ

В работе рассматриваются задачи одновременной диагонализации пары кватернионных матриц, самосопряженных относительно неэрмитовой инволюции в вещественной алгебре кватернионов (a–самосопряженные матрицы). Получены критерии унитарной и невырожденной диагонализации таких матриц.

Ключевые слова: алгебра кватернионов, алгебра с инволюцией, матричная диагонализация.

Введение. Настоящая работа является непосредственным продолжением результатов, изложенных в [1]. Известно, что одни из первых постановок задач об одновременном приведении комплексных матриц к диагональному виду посредством некоторого преобразования конгруэнтности связаны с изучением "малых колебаний"около точки равновесия в механике. В комплексном случае для пары самосопряженных и соответственно для пары симметрических матриц получен ряд условий их одновременного приведения в диагональному виду. И если для эрмитово самосопряженных кватернионных матриц мы всегда легко получаем аналогичные результаты, то решение задачи одновременной диагонализации внутренними методами (т.е. с помощью кватернионной матрицы) для пары неэрмитово самосопряженных матриц является далеко не очевидным.

Используя особенности спектральных свойств кватернионных матриц, в работе приводятся четыре критерия одновременной диагонализации двух неэрмитово самосопряженных матриц.

1. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{H}$ — вещественная алгебра кватернионов, в которой для каждого кватерниона $q = q_0+q_1 i+q_2 j+q_3 k$ наряду с классической инволюцией $\overline{q} = q_0-q_1 i-q_2 j-q_3 k$ можно рассматривать инволюцию $\widehat{q} = q_0 + q_1 i - q_2 j + q_3 k$ (более подробно см. [1]).

Эти инволюции алгебры $\mathbb{H}$ порождают инволюции $(^a)$ и $(^*)$ в вещественной алгебре $M_n(\mathbb{H})$. Пусть $A \in M_n(\mathbb{H})$, $\quad A = \|a_{st}\|$. Вводя следующие обозначения:

$$\overline{A} = \|\overline{a}_{st}\|, \quad \widehat{A} = \|\widehat{a}_{st}\|,$$

определим

$$A^* := \overline{A}^{\,T}; \quad A^a := \widehat{A}^{\,T}.$$

Заметим, что

$$A^a = -JA^*J, \tag{1}$$

где $J = Ej$, E — единичная матрица. Инволюцию $(^*)$ называют, как правило, *эрмитовой*. Поэтому инволюцию $(^a)$ мы называем *неэрмитовой*. Композиция этих инволюций порождает автоморфизм алгебры $M_n(\mathbb{H})$:

$$A^c := (A^*)^a = (A^a)^*,$$

где $A^c = \|a^c_{st}\|$, $\quad$ где $\quad a^c_{st} = \widehat{\overline{a}}_{st}$.

Пусть $A = \|a_{st}\| \in M_n(\mathbb{H})$. Матрицу A назовем *неэрмитово самосопряженной* (или *a–самосопряженной*), если $A = A^a$.

Ввиду равенства (1) a–самосопряженная матрица A удовлетворяет условию:

$$A^* = -JAJ.$$

В работе [1] показано, что класс a–самосопряженных кватернионных матриц является аналогом класса комплексных симметрических матриц, причем для него прослеживается сохранение целого ряда свойств симметрических матриц. В частности, имеет место аналог разложения Такаги [2], которое является базовым в теории комплексных симметрических матриц:

Теорема 1. [1] *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ является a-самосопряженной, то она допускает разложение вида:*

$$A = U\Sigma U^a,$$

где U — унитарная матрица, столбцы которой образуют множество ортонормированных собственных векторов матрицы AA^c, Σ — неотрицательная диагональная матрица, диагональные элементы которой являются неотрицательными квадратными корнями из собственных значений матрицы AA^c, соответствующих этим собственным векторам.

Пример 1. Рассмотрим обобщение ганкелевых комплексных квадратичных форм. Пусть $h_2, h_3, ..., h_{2n}$ — набор кватернионов, удовлетворяющих условию $\widehat{h}_t = h_t,\ t = \overline{2, 2n}$. При помощи этих чисел составим квадратичную форму от n переменных $x_t \in \mathbb{H},\ x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{H}^n$:

$$H(x, x) = \sum_{s,t=1}^{n} \widehat{x}_t h_{s+t} x_s. \tag{2}$$

По аналогии с комплексным случаем (см. [3]) назовем эту квадратичную форму *ганкелевой*. Ей соответствует матрица

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} h_2 & h_3 & ... & h_{n+1} \\ h_3 & h_4 & ... & h_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n+1} & h_{n+2} & ... & h_{2n} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{H}),$$

удовлетворяющая условию $H^a = H$, т.е. a–самосопряженная. С учетом равенства (2) квадратичную форму $H(x, x)$ можно записать в векторном виде:

$$H(x, x) = x^a \mathcal{H} x.$$

В соответствии с разложением Такаги

$$\mathcal{H} = U^a D U,$$

где U — унитарная матрица, $D = \mathrm{diag}\{d_1, d_2, ...d_n\},\ d_t \geq 0$. Тогда

$$H(x, x) = x^a U^a D U x = (Ux)^a D(Ux),$$

или в новых переменных $y = Ux$

$$H(y, y) = y^a D y = \sum_{t=1}^{n} d_t \widehat{y}_t y_t.$$

Таким образом, разложение Такаги дает возможность приводить ганкелевы кватернионные квадратичные формы вида (2) к диагональному (каноническому) виду.

Здесь и ниже используется такое естественное условие конгруэнтности матриц, которое сохраняет свойство неэрмитовой самосопряженности. А именно, матрицы A и B назовем *конгруэнтными*, если существует невырожденная матрица S такая, что

$$B = SAS^a.$$

Еще одним приложением кватернионного разложения Такаги является простое условие конгруэнтности a–самосопряженных кватернионных матриц.

Предложение 1. *a-самосопряженные матрицы A и B из $M_n(\mathbb{H})$ конгруэнтны тогда и только тогда, когда* $\mathrm{rank} A = \mathrm{rank} B$.

Доказательство. Пусть матрица $A = SBS^a$, где S — невырожденная матрица. Так как при умножении кватернионной матрицы на невырожденную матрицу ее ранг не меняется, то $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B$.

Обратно, пусть $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}B = r$. Рассмотрим разложение Такаги для матрицы A:

$$A = U_1\Sigma_1 U_1^a,$$

где U_1 — унитарная матрица, $\Sigma_1 = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0\}$. Заметим, что $\mathrm{rank}\Sigma_1 = \mathrm{rank}A$ в силу невырожденности матриц U_1, U_1^a.

Матрицу Σ_1 можно представить следующим образом:

$$\Sigma_1 = I(\Sigma_1)D_1^2,$$

где $I(\Sigma_1) = \mathrm{diag}\{1, 1, \dots, 1, 0, \dots, 0\}$, $D_1 = \mathrm{diag}\{\sqrt{\sigma_1}, \sqrt{\sigma_2}, \dots, \sqrt{\sigma_r}, 1, 1, \dots, 1\}$. Тогда

$$A = (U_1D_1)I(\Sigma_1)(D_1U_1^a) = (U_1D_1)I(\Sigma_1)(U_1D_1)^a.$$

Аналогично для матрицы B:

$$B = (U_2D_2)I(\Sigma_2)(U_2D_2)^a.$$

Так как $\mathrm{rank}B = \mathrm{rank}A$, то $I(\Sigma_2) = I(\Sigma_1)$ и

$$(U_1D_1)^{-1}A(U_1D_1)^{-a} = (U_2D_2)^{-1}B(U_2D_2)^{-a},$$

откуда

$$A = (U_1D_1)(U_2D_2)^{-1}B(U_2D_2)^{-a}(U_1D_1)^a.$$

Следовательно, матрицы A и B конгруэнтны. □

Замечание 1. Следует напомнить не совсем очевидное определение ранга кватернионной матрицы как максимального количества линейного независимых строк в левом $\mathbb{H}$–модуле $\mathbb{H}^n$. Так как максимальное количество линейно независимых столбцов в этом модуле может быть иным, то при транспонировании, а, следовательно, и при эрмитовом сопряжении ранг матрицы может измениться. Однако можно показать, что операция неэрмитова сопряжения *не меняет* ранга матрицы.

2. Одновременная диагонализация неэрмитово самосопряженных матриц

Лемма 1. (i) *Матрица $C \in M_n(\mathbb{H})$ является нормальной тогда и только тогда, когда C^a — нормальная матрица.*

(ii) *Матрица $U \in M_n(\mathbb{H})$ является унитарной тогда и только тогда, когда U^a — унитарная матрица.*

Доказательство. Утверждение (i) доказывается непосредственной проверкой с использованием равенства (1).

Утверждение (ii) является следствием утверждения (i). □

Для более детального понимания дальнейших рассуждений приведем ряд сведений относительно спектральных свойств кватернионных матриц (см. [4], [5]).

Пусть $A \in M_n(\mathbb{H})$. Кватернион $q \in \mathbb{H}$ называется *собственным значением* матрицы A, если существует ненулевой вектор $x \in \mathbb{H}^n$ такой, что $Ax = xq$.

Множество всех собственных значений матрицы A обозначим через $\sigma(A)$. При этом если $q \in \sigma(A)$, то $K(q) \subset \sigma(A)$, где $K(q) = \{uq\overline{u} \mid u \in \mathbb{H},\ |u| = 1\}$ — класс сопряженности кватерниона q. Количество классов сопряженности, составляющих спектр матрицы, всегда конечно, и каждый класс содержит ровно одну пару взаимно сопряженных чисел, принадлежащих полю $\mathbb{C}$.

Матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ называется *нормальной*, если $A^*A = AA^*$. Нормальная кватернионная матрица допускает унитарную диагонализацию, причем все собственные значения в соответствующем разложении могут быть выбраны из верхней полуплоскости поля $\mathbb{C}$.

Теорема 2. *Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{H})$, причем матрица A является a-самосопряженной и невырожденной, матрица B — a-самосопряженной, $C = A^{-1}B$. Матрицы UAU^a и UBU^a диагональны для некоторой унитарной матрицы $U \in M_n(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда C — нормальная матрица.*

Доказательство. Пусть $UAU^a = \Sigma$, $UBU^a = \Lambda$, где Σ, Λ — диагональные a-самосопряженные матрицы. Так как $A = U^{-1}\Sigma U^{-a}$, $B = U^{-1}\Lambda U^{-a}$, то $C = A^{-1}B = U^a(\Sigma^{-1}\Lambda)U^{-a}$, где матрица $\Sigma^{-1}\Lambda$ является диагональной. Из Леммы 1 следует, что U^a — унитарная матрица, поэтому C — нормальная матрица.

Обратно, пусть $C = A^{-1}B$ — нормальная матрица. Тогда C унитарно диагонализуема посредством унитарной матрицы $R \in M_n(\mathbb{H})$ и диагональной матрицы $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ таких, что $C = R\Lambda R^*$. Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $\Lambda \in M_n(\mathbb{C}_+)$, откуда $\Lambda^a = \Lambda$.

Следовательно, $BR = AR\Lambda$ и

$$R^aBR = R^aAR\Lambda, \tag{3}$$

причем, согласно Лемме 1 R^a — также унитарная матрица.

Пусть совпадающие числа λ_t сгруппированы так, что

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Lambda_p \end{bmatrix},$$

где $\Lambda_t = \mu_t E \in M_{n_t}(\mathbb{H}),\ \mu_t \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\},\ 1 \le n_t \le n,\ t = \overline{1,p}$ и $\mu_t \ne \mu_s$, если $t \ne s$.

Рассмотрим конгруэнтные матрицы $\widetilde{B} := R^aBR$ и $\widetilde{A} := R^aAR$, которые также являются a-самосопряженными, причем из равенства (3) следует

$$\widetilde{B} = \widetilde{A}\Lambda, \tag{4}$$

или, переходя к a-сопряжению,

$$\widetilde{B} = \Lambda \widetilde{A}. \tag{5}$$

Пусть $\widetilde{B} = [\widetilde{B}_{st}]$, $\quad \widetilde{A} = [\widetilde{A}_{st}]$, где $\widetilde{B}_{st}$, $\widetilde{A}_{st}$ — блоки, согласованные с блочной структурой матрицы Λ, при этом $\widetilde{B}^a_{st} = \widetilde{B}_{ts}$, $\quad \widetilde{A}^a_{st} = \widetilde{A}_{ts}$.

Из равенств (4), (5) следует, что

$$\widetilde{B}_{st} = \widetilde{A}_{st}\mu_t, \quad \widetilde{B}_{st} = \mu_s \widetilde{A}_{st},$$

откуда $\widetilde{A}_{st}\mu_t = \mu_s \widetilde{A}_{st}$.

Пусть $a^{(st)}_{uv}$ — произвольный элемент матрицы $\widetilde{A}_{st}$, $a^{(st)}_{uv} = x_{uv} + y_{uv}j$, где $x_{uv}, y_{uv} \in \mathbb{C}$. Тогда $(x_{uv} + y_{uv}j)\mu_t = \mu_s(x_{uv} + y_{uv}j)$ или

$$\begin{cases} x_{uv}\mu_t = \mu_s x_{uv}, \\ y_{uv}\overline{\mu_t} = \mu_s y_{uv}. \end{cases}$$

Если $s \neq t$, то $\mu_s \neq \mu_t$, $\mu_s \neq \overline{\mu_t}$, откуда $x_{uv} = y_{uv} = 0$ и $\widetilde{A}_{st} = 0$ для любого $s \neq t$. Это означает, что матрицы R^aBR и R^aAR имеют блочную структуру, согласованную со структурой матрицы Λ, то есть:

$$\widetilde{B} = R^aBR = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_p \end{bmatrix}; \ \widetilde{A}\Lambda = R^aAR\Lambda = \begin{bmatrix} A_1\mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p\mu_p \end{bmatrix},$$

где все матрицы $A_t, B_t \in M_{n_t}(\mathbb{H}), t = \overline{1,p}$, a-самосопряженные. При $p = n$ получаем тем самым требуемое приведение. При $p < n$ имеется блок размера $n_t > 1$.

Применим к каждой такой матрице A_t разложение Такаги:

$$A_t = S_i \Sigma_t S^a_t, \tag{6}$$

где $S_t, \Sigma_t \in M_{n_t}(\mathbb{H})$, S_t — унитарные матрицы, а Σ_t — вещественные диагональные матрицы с неотрицательными элементами.

Так как $B_t = \mu_t A_t = A_t \mu_t$, то для любого элемента $a^t_{uv} = x_{uv} + y_{uv}j$, $\quad x_{uv}, y_{uv} \in \mathbb{C}$ матрицы A_t имеет место равенство

$$\mu_t(x_{uv} + y_{uv}j) = (x_{uv} + y_{uv}j)\mu_t,$$

откуда $(\mu_t - \overline{\mu_t})y_{uv} = 0$. Следовательно, для $\mu_t \neq \overline{\mu_t}$ $\quad y_{uv} = 0$ и A_t — комплексная симметрическая матрица. Поэтому на (6) можно смотреть как на разложение Такаги для комплексных симметрических матриц, и матрица S_t здесь также комплексная. Таким образом, в любом случае и для $\mu_t \in \mathbb{R}$, и для $\mu_t \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$

$$B_t = \mu_t(S_t \Sigma_t S^a_t) = S_t(\mu_t \Sigma_t) S^a_t, \quad t = \overline{1,p}.$$

Положим

$$S = \begin{bmatrix} S_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & S_k \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Sigma_k \end{bmatrix},$$

где $S_t = [1]$ при $n_t = 1$. Полученная матрица S также унитарная, и справедливы разложения

$$R^a B R = S(\Sigma\Lambda)S^a, \quad R^a A R = S\Sigma S^a,$$

откуда

$$A = [(R^{-1})^a S]\Sigma[(R^{-1})^a S]^a,$$
$$B = [(R^{-1})^a S]\Sigma\Lambda[(R^{-1})^a S]^a.$$

Следовательно, матрицы A, B диагонализуемы при помощи унитарной матрицы $U = (R^{-1})^a S$. □

Аналогичными рассуждениями можно установить следующий результат.

Теорема 3. *Пусть матрицы $A, B \in M_n(\mathbb{H})$. Матрица A является a–самосопряженной и невырожденной, матрица B — a–самосопряженной, $C = A^{-1}B$. Матрицы SAS^a и SBS^a диагональны для некоторой невырожденной матрицы $S \in M_n(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда C — диагонализуема.*

Лемма 2. *Пусть задана матрица вида $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_n(\mathbb{H})$, где $B \in M_k(\mathbb{H})$, $\quad 1 \le k \le n$. Матрица A — нормальная тогда и только тогда, когда матрица B является нормальной и $C = 0$.*

Доказательство. Как показывают непосредственные вычисления,

$$AA^* = \begin{bmatrix} BB^* + CC^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^*A = \begin{bmatrix} B^*B & B^*C \\ C^*B & C^*C \end{bmatrix}.$$

Так как A — нормальная матрица, то из равенства $AA^* = A^*A$ получаем условия

$$BB^* + CC^* = B^*B, \quad B^*C = 0, \quad C^*C = 0.$$

Следовательно, $C = 0$ и $BB^* = B^*B$. □

Теорема 4. *Если матрицы A и B a–самосопряженные, то необходимым и достаточным условием существования унитарной матрицы $U \in M_n(\mathbb{H})$ такой, что обе матрицы UAU^a и UBU^a диагональны, является нормальность матрицы AB^*.*

Доказательство. Пусть $UAU^a = \Lambda$, $UBU^a = M$, где матрицы Λ, M — диагональные. Тогда $A = U^*\Lambda$, $(U^a)^*B = U^*M(U^a)^*$, и

$$AB^* = U^*\Lambda(U^a)^*U^aM^*U = U^*(\Lambda M^*)U.$$

Заметим, что здесь мы использовали тот факт, что U^a — унитарная матрица в силу Леммы 1(ii). Следовательно, матрица AB^* унитарно диагонализуема, т.е. нормальная.

Обратно, пусть A невырожденная матрица, и матрица $AB^* = (A^{-1})^{-1}B^*$ нормальная. Тогда по теореме 2 две a–самосопряженные матрицы A^{-1} и B^* одновременно унитарно диагонализуемы. Это означает существование унитарной матрицы $U \in M_n(\mathbb{H})$ и диагональных матриц $M, \Lambda \in M_n(\mathbb{H})$ таких, что

$$A^{-1} = U\Lambda U^a, \quad B^* = UMU^a.$$

Тогда $\quad A = (U^a)^*\Lambda^{-1}U^*, \quad B = (U^a)^*M^*U^*$, то есть A и B одновременно приводятся к диагональному виду унитарным преобразованием.

В случае вырожденности матрицы A требуются дополнительные аргументы. В силу теоремы Такаги, найдется унитарная матрица $U \in M_n(\mathbb{H})$, при которой матрица UAU^a диагональна. Переставляя при необходимости столбцы матрицы U, приходим к представлению:

$$UAU^a = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где $\Sigma \in M_k(\mathbb{H}), \quad 1 \le k < n$, в котором матрица Σ диагональная и невырожденная. Матрицу UBU^a разобьем на блоки того же размера:

$$UBU^a = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12}^a & B_{22} \end{bmatrix}, \quad B_{11} \in M_k(\mathbb{H}), \quad B_{22} \in M_{n-k}(\mathbb{H}).$$

При этом подматрицы B_{11} и B_{22} также a-самосопряженные, и справедливы равенства:

$$(UAU^a)(UBU^a)^* = UAB^*U^* = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{11}^* & B_{12}^* \\ (B_{12}^a)^* & B_{22}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma B_{11}^* & \Sigma B_{12}^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь матрица UAB^*U^* нормальная, поэтому в силу Леммы 2 имеем $\Sigma B_{12}^* = 0$. Матрица Σ невырожденная, поэтому $B_{12} = 0$. Следовательно,

$$UAU^a = \begin{bmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad UBU^a = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

и

$$(UAU^a)(UBU^a)^* = \begin{bmatrix} \Sigma B_{11}^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Обращаясь к предыдущим рассуждениям для невырожденного случая, заключаем, что существует унитарная матрица $V_1 \in M_k(\mathbb{H})$ и диагональные матрицы $\Lambda_1, \Lambda_2 \in M_n(\mathbb{H})$ такие, что

$$\Sigma = V_1\Lambda_1V_1^a, \quad B_{11} = V_1\Lambda_2V_1^a.$$

Для a-самосопряженной матрицы B_{22} также существуют, как известно, унитарная матрица $V_2 \in M_{n-k}(\mathbb{H})$ и диагональная матрица $\Lambda_3 \in M_{n-k}(\mathbb{H})$ такие, что

$B_{22} = V_2\Lambda_3V_2^a$. Положим $\Lambda = \Lambda_1 \oplus 0 \in M_n(\mathbb{H})$, $\quad M = \Lambda_2 \oplus \Lambda_3$ и $V = V_1 \oplus V_2$. Тогда $UAU^a = V\Lambda V^a$, $\quad UBU^a = VMV^a$. Таким образом, матрицы

$$A = (U^*V)\Lambda(U^*V)^a, \quad B = (U^*V)M(U^*V)^a$$

одновременно диагонализуются одним унитарным преобразованием. □

Подобное обоснование позволяет получить и более общий результат для невырожденной конгруэнтности.

Теорема 5. *Если матрицы A и B a–самосопряженные, то необходимым и достаточным условием существования невырожденной матрицы $S \in M_n(\mathbb{H})$ такой, что обе матрицы SAS^a и SBS^a диагональны, является диагонализуемость матрицы AB^*.*

Выводы

В работе получено четыре критерия одновременной диагонализации двух неэрмитово самосопряженных матриц над телом кватернионов.

Список литературы

[1] Карпенко И.И. *Неэрмитово самосопряженные матрицы над телом кватернионов* //Ученые записки ТНУ, серия "Физ.-мат.науки Т.23(62).2. – Симферополь, 2010. – С.78–91.

[2] Хорн З., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – Москва: Мир, 1989. – 655 С.

[3] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* – Москва: Наука, 1967. – 576 С.

[4] Farenick Douglas R., Pidkowich Barbara A.F. *The spectral theorem in quternions.* // Linear Algebra and its Applications. - 371 (2003). - P.75-102.

[5] De Leo S., Scolarici G., Solombino L. *Quaternionic eigenvalue problem* // J.Math. Phys. Bd.43. - 2002. - Vol.11. - P.5815-5829.

У роботі розглядаються задачі одночасної диагонализации пари кватерніонних матриць, самоспряжених щодо операції неэрмитовой інволюції в дійсній алгебрі кватерніонів.

Ключові слова: алгебра кватерніонів, алгебри із інволюцією, матричная диагонализация.

In this paper it's considered problems of simultaneous diagonalization for quaternionic matrixes which are a self-adjoint concerning the non-Hermitian involution in the real algebra of quaternions. Some criterions of unitary and nonsingular diagonalizations for such matrixes are received.

Keywords: algebra of real quaternions, involution algebra, matrix diagonalization.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 32–38.

УДК 517. 432

Ю. Л. Кудряшов

ИЗОМОРФИЗМ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИЛАТАЦИИ ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА

В работе рассматривается спектральное представление самосопряженной дилатации диссипативного оператора и представление только для ограниченного диссипативного оператора. В случае ограниченного оператора непосредственно построен изоморфизм указанных представлений дилатации.

Введение

В [1] было построено спектральное представление самосопряженной дилатации произвольного диссипативного оператора с непустым множеством регулярных точек, а в [2] получена самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера. Последнее представление дилатации можно обобщить [3] только на случай произвольного ограниченного оператора, т. к. при построении дилатации используется дефектный оператор $\dfrac{A-A^*}{2i}$, который в случае неограниченных операторов применять, вообще говоря, нельзя в связи с тем, что области определений операторов A и A^* могут не совпадать.

Пусть оператор A действует в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$.

Определение 1. Дилатации S_1 и S_2 оператора A, действующие соответственно в гильбертовых пространствах H_1 и H_2 называются изоморфными, если существует унитарное отображение U пространства H_1 на H_2 такое, что

1) $Uh = h \quad (\forall\, h \in \mathcal{G})$;
2) $S_2 = US_1U^{-1}$.

1. Предварительные сведения

Пусть A, вообще говоря, неограниченный диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$, плотно заданный и $-i \in \rho(A)$.

Будем использовать дефектные операторы

$$B = i\,R_{-i} + i\,R^*_{-i} - 2\,R^*_{-i} R_{-i},$$

$$\widetilde{B} = i\,R_{-i} + i\,R^*_{-i} - 2\,R_{-i} R^*_{-i},\ \text{где}\ R_{-i} = (A + i\,I)^{-1}.$$

Так как $B \geq 0$ и $\widetilde{B} \geq 0$ [1], то существуют операторы $Q = \sqrt{B}$, $\widetilde{Q} = \sqrt{\widetilde{B}}$.

Рассмотрим пространства вектор — функций $H_+ = L_2\,(0,\ \infty;\ \mathcal{G}_1)$ и $H_- = L_2\,(-\infty,\ 0;\ \mathcal{G}_2)$, где $\mathcal{G}_1 = \overline{Q\,\mathcal{G}}$, $\mathcal{G}_2 = \overline{\widetilde{Q}\,\mathcal{G}}$.

Образуем гильбертово пространство $H = H_- \oplus \mathcal{G} \oplus H_+$ и построим в нем оператор S следующим образом.

Вектор $h = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}$, где $h_\pm \in H_\pm$, $h_0 \in \mathcal{G}$ принадлежит $\mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{h_-,\ \dfrac{dh_-}{dt}\right\} \subset L_2(-\infty,\ 0;\ \mathcal{G}_1)$, $\left\{h_+,\ \dfrac{dh_+}{dt}\right\} \subset L_2(0,\ \infty;\ \mathcal{G}_2)$;

2) $\varphi = h_0 + \widetilde{Q}\,h_-(0) \in \mathfrak{D}(A)$;

3) $h_+(0) = T^* h_-(0) + i\,\mathcal{D}\,\varphi$, где $T^* = I + 2\,i\,R^*_{-i}$, $\mathcal{D} = Q\,(A + i\,I)$.

Если $h \in \mathfrak{D}(S)$, то

$$Sh = S \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_-\,h_- \\ -i\,h_0 + (A + i\,I)\,\varphi \\ \mathcal{P}_+\,h_+ \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{P}_+\,h_+ = i\,\dfrac{dh_+}{dt}$, $\mathcal{P}_-\,h_- = i\,\dfrac{dh_-}{dt}$.

Оператор S является спектральным представлением самосопряженной дилатации оператора A [1].

Теперь пусть A — ограниченный диссипативный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{G}$, $\mathfrak{D}(A) = \mathcal{G}$.

Рассмотрим дефектный оператор $V = \dfrac{A - A^*}{2i} \geq 0$.

Образуем гильбертово пространство $\widetilde{H} = H'_+ \oplus \mathcal{G} \oplus H'_-$, где $H'_- = L_2(-\infty,\ 0;\ E)$, $H'_+ = L_2(0,\ \infty;\ E)$, $E = \overline{\sqrt{V}\,E}$.

Построим в $\widetilde{H}$ оператор S_V следующим образом: вектор $\widetilde{V} = \begin{pmatrix} V_- \\ h_0 \\ V_+ \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(S_V)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{V_+,\ \dfrac{dV_+}{dt}\right\} \subset L_2(0,\ \infty;\ E)$, $\left\{V_-,\ \dfrac{dV_-}{dt}\right\} \subset L_2(-\infty,\ 0;\ E)$;

2) $h_0 \in \mathfrak{D}(A)$;

3) $V_+(0) = i\sqrt{2\,V}\,h_0 + V_-(0)$.

Если $\widetilde{V} \in \mathfrak{D}(S_V)$, то

$$S_V\widetilde{V} = S_V \begin{pmatrix} V_- \\ h_0 \\ V_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_-\,V_- \\ A\,h_0 + \sqrt{2\,V}\,V_-(0) \\ \mathcal{P}_+\,V_+ \end{pmatrix}$$

Оператор S_V является самосопряженной дилатацией оператора A [3].

2. Основной результат

Теорема 1. *Самосопряженные дилатации S и S_V диссипативного ограниченного оператора A, $-i \in \rho(A)$ изоморфны.*

Доказательство. Учитывая, что $\mathfrak{D}(A) = \mathcal{G}$, дилатацию S можно преобразовать к виду

$$Sh = S \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_-\,h_- \\ A\,h_0 + (A + i\,I)\,\widetilde{Q}\,h_-(0) \\ \mathcal{P}_+\,h_+ \end{pmatrix},$$

где $h \in \mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{h_-,\ \dfrac{dh_-}{dt}\right\} \subset L_2(-\infty,\ 0;\ \mathcal{G}_2)$, $\left\{h_+,\ \dfrac{dh_+}{dt}\right\} \subset L_2(0,\ \infty;\ \mathcal{G}_1)$;

2) $h_0 \in \mathcal{G}$;

3) $h_+(0) = i\,Q\,(A + i\,I)\,h_0 + \left(i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q} + T^*\right)\,h_-(0)$.

Построим унитарное отображение пространства $H_+^{'} = L_2(0,\ \infty;\ E)$ на $H_+ = L_2(0,\ \infty;\ \mathcal{G}_1)$. Для этого достаточно построить унитарное отображение пространства E на пространство $\mathcal{G}_1$.

Будем использовать легко проверяемое равенство

$$2\,V\,h_0 = (A^* - i\,I)\,B\,(A + i\,I)\,h_0 \quad (\forall\,h_0 \in \mathcal{G}),$$

из которого следует равенство:

$$\left\| \sqrt{2\,V}\, h_0 \right\| = \left\| Q\,(A + i\,I)\, h_0 \right\| \tag{1}$$

Тогда отображение U_1, определяемое равенством

$$U_1(\sqrt{2\,V}\, h_0) = Q\,(A + i\,I)\, h_0,$$

определено на плотном в E множестве и сохраняет норму ввиду (1). Расширяя U_1 по непрерывности на все пространство E, получим унитарное отображение U_1 пространства E на $\mathcal{G}_1$.

Теперь построим унитарное отображение U_2 пространства $H_+^{'}$ на пространство H_+ по правилу:

$$U_2\, h_+^{'} = U_1\, h_+^{'}(t) = h_+$$

(оператор U_1 действует на векторы $h_+^{'}(t)$ при каждом фиксированном t).

Аналогично, используя равенство

$$2\,V\, h_0 = (A + i\,I)\, \widetilde{B}\, (A^* - i\,I)\, h_0,$$

из которого следует, что $\left\| \sqrt{2\,V}\, h_0 \right\| = \left\| \widetilde{Q}\, (A^* - i\,I)\, h_0 \right\|$, построим унитарное отображение $U_2^{'}$ пространства $H_-^{'}$ на H_-.

И, наконец, построим унитарный оператор U, отображающий пространство $\widetilde{\mathcal{H}}$ на H по формуле:

$$U \begin{pmatrix} V_- \\ h_0 \\ V_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_2^{'}\, V_- \\ h_0 \\ U_2\, V_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_- \\ h_0 \\ h_+ \end{pmatrix}.$$

Докажем, что $S_V = U^{-1} S\, U$. Для этого достаточно показать:

а) если $\widetilde{V} \in \mathfrak{D}(S_V)$, то $U\,\widetilde{V} \in \mathfrak{D}(S)$ и, что

$$U\, S_V\, \widetilde{V} = S\, U\, \widetilde{V};$$

б) если $h \in \mathfrak{D}(S)$, то $U^{-1}\, h \in \mathfrak{D}(S_V)$ и, что

$$S_V\, U^{-1}\, h = U^{-1} S\, h.$$

В силу унитарной эквивалентности пространств $H_+^{'}$, $H_-^{'}$ и H_+, H_- соответственно, оператору дифференцирования при отображении U будет соответствовать этот же оператор.

а) Пусть $\widetilde{V} \in \mathfrak{D}(S_V)$, докажем, что $U\,\widetilde{V} \in \mathfrak{D}(S)$. Для этого достаточно проверить только выполнение условия 3) на $\mathfrak{D}(S)$.

Так как $V_+(0) = U_1^{-1}\, h_+(0)$, $V_-(0) = U_1^{'^{-1}}\, h_-(0)$ и $V_+(0) = i\,\sqrt{2\,V}\, h_0 + V_-(0)$, то

$$U_1^{-1}\, h_+(0) = i\,\sqrt{2\,V}\, h_0 + U_1^{'^{-1}}\, h_-(0)$$

или

$$h_+(0) = i\, Q\, (A + i\, I)\, h_0 + U_1\, U_1^{'^{-1}}\, h_-(0).$$

Так как $h_-(0) \in \overline{\widetilde{Q}\,\mathcal{G}}$ и $\mathcal{G} = (A^* - i\,I)\,\mathcal{G}$, то преобразуем вектор $U_1\,U_1^{'-1}\,h_-(0)$, когда $h_-(0) = \widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}$

$$U_1\,U_1^{'-1}\,h_-(0) = U_1\,U_1^{'-1}\,\widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'} =$$

$$= Q\,(A + i\,I)\,h_0^{'} = Q\,(A + i\,I)\,R^*_{-i}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}.$$

Ввиду равенства $(A + i\,I)\,R^*_{-i} = i\,(A + i\,I)\,\widetilde{B} + T^*$, имеем:

$$U_1\,U_1^{'-1}\,h_-(0) = Q\,\left(i\,(A + i\,I)\,\widetilde{B} + T^*\right)\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'} =$$

$$= i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q}\,\left[\widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}\right] + T^*\,\left[\widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}\right] =$$

$$= i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q}\,h_-(0) + T^*\,h_-(0).$$

Мы использовали равенство $Q\,T^* = T^*\,\widetilde{Q}$ [1].

Таким образом,

$$h_+(0) = i\,Q\,(A + i\,I)\,h_0 + \left(T^* + i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q}\right)\,h_-(0).$$

Это равенство выполняется для любого вектора $h_-(0)$, т. к. операторы $U_1\,U_1^{'-1}$, T^* и $Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q}$ — ограниченные.

Условие 3) на $\mathfrak{D}(S)$ доказано.

Теперь проверим равенство $U\,S_V\,\widetilde{V} = S\,U\,\widetilde{V}$. Так как

$$A\,h_0 + \sqrt{2\,V}\,V_-(0) = A\,h_0 + \sqrt{2\,V}\,U_1^{'-1}\,h_-(0),$$

то полагая, как и выше, $h_-(0) = \widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}$, где $h_0^{'} \in \mathfrak{D}(A) = \mathcal{G}$, получаем

$$A\,h_0 + \sqrt{2\,V}\,V_-(0) =$$

$$= A\,h_0 + 2\,V\,h_0^{'} = A\,h_0 + (A + i\,I)\,\widetilde{Q}\left[\widetilde{Q}\,(A^* - i\,I)\,h_0^{'}\right] = (A + i\,I)\,\widetilde{Q}\,h_-(0).$$

А так как $2\,V = (A + i\,I)\,\widetilde{B}\,(A^* - i\,I)$, то первая часть утверждения доказана.

б) Пусть теперь $h \in \mathfrak{D}(S)$, и докажем, что $U^{-1}\,h \in \mathfrak{D}(S_V)$. Проверим выполнение условия 3) на $\mathfrak{D}(S_V)$.

Так как $h \in \mathfrak{D}(S)$, то

$$h_+(0) = i\,Q\,(A + i\,I)\,h_0 + \left(i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q} + T^*\right)\,h_-(0),$$

$$h_+(0) = U_1\,V_+(0), \quad h_-(0) = U_1^{'}\,V_-(0).$$

Из этих равенств получаем:

$$U_1\,V_+(0) = i\,Q\,(A + i\,I)\,h_0 + \left(i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q} + T^*\right)\,U_1^{'}\,V_-(0),$$

$$V_+(0) = i\,\sqrt{2\,V}\,h_0 + U_1^{-1}\,\left(i\,Q\,(A + i\,I)\,\widetilde{Q} + T^*\right)\,U_1^{'}\,V_-(0).$$

Преобразуем вектор $\Psi = U_1^{-1}\left(i\,Q\,(A+i\,I)\,\widetilde{Q}+T^*\right)U_1'\,V_-(0)$, считая, что $V_-(0) = \sqrt{2\,V}\,h$, где $h \in \mathcal{G}$

$$\Psi = U_1^{-1}\left(i\,Q\,(A+i\,I)\,\widetilde{Q}+T^*\right)U_1'\,V_-(0) =$$

$$= i\sqrt{2\,V}\,\widetilde{Q}\,U_1'\,V_-(0) + U_1^{-1}\,T^*\,U_1'\,V_-(0) =$$

$$= i\sqrt{2\,V}\,\widetilde{Q}\,\widetilde{Q}\,(A^*-i\,I)\,h + U_1^{-1}\,T^*\,\widetilde{Q}\,(A^*-i\,I)\,h.$$

Так как $\widetilde{B}\,(A^*-i\,I)\,h = i\,R_{-i}\,(A^*-i\,I)\,h - i\,h - 2\,R_{-i}\,h$, то

$$\Psi = i\sqrt{2\,V}\;(i\,R_{-i}\,(A^*-i\,I) - i\,I - 2\,R_{-i})\;h + U_1^{-1}\,Q\,(I+2\,i\,R_{-i})\,(A^*-i\,I)\,h =$$

$$= \sqrt{2\,V}\,h - \sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,(A^*-i\,I)\,h - 2\,i\sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,h + U_1^{-1}\;[Q\,(A+i\,I)]\;R_{-i}\,((A^*-i\,I)+2\,i\,I)\,h =$$

$$= V_-(0) - i\sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,(A^*-i\,I)\,h - 2\,i\sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,h + \sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,(A^*-i\,I)\,h + 2\,i\sqrt{2\,V}\,R_{-i}\,h = V_-(0).$$

Таким образом, $V_+(0) = i\sqrt{2\,V}\,h_0 + V_-(0)$ и условие 3) на $\mathfrak{D}(S_V)$ выполнено.

Теперь преобразуем выражение

$$A\,h_0 + (A+i\,I)\,\widetilde{Q}\,h_-(0) = A\,h_0 + (A+i\,I)\,\widetilde{Q}\,U_1'\,V_-(0) =$$

$$= A\,h_0 + (A+i\,I)\,\widetilde{Q}\,U_1'\sqrt{2\,V}\,h = A\,h_0 + (A+i\,I)\,\widetilde{B}\,(A^*-i\,I)\,h =$$

$$= A\,h_0 + 2\,V\,h_0 = A\,h_0 + \sqrt{2\,V}\,V_-(0).$$

Таким образом, S_V — дилатация оператора A, изоморфная дилатации S. □

Выводы

В случае ограниченности диссипативного оператора A для построения его самосопряженной дилатации можно использовать методы работ [1] или [3], что приводит к одинаковым результатам. В частности, при построении функциональной модели оператора A.

Список литературы

[1] Кудряшов Ю.Л. *Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов.* - Теория функций, функциональный анализ и их приложения. 1982, вып. 37, с. 51–54.

[2] Павлов Б.С. *Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям.* – Мат. сб., 1977, 102(144) №4, с. 511–536.

[3] Золотарев В.А. *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов.* – Харьков: ХНУ, 2003. – 342 с.

Ізоморфізм двох представлень самосопряженної дилатації дисипативного оператора

У роботі розглядається спектральне представлення самоспряжної дилатації дисипативного оператора і представлення лише для обмеженого дисипативного оператора. В разі обмеженого оператора безпосередньо побудован ізоморфізм вказаних представлень дилатації.

Ключові слова: необмежений оператор, вузол, дилатація.

Isomorphism of two presentations of self-conjugate dilatation of dissipative operator

Spectral presentation of self-conjugate dilatation of dissipative operator and presentation is in-process examined only for the limited dissipative operator. In the case of the limited operator the isomorphism of the indicated presentations of dilatation is directly built.

Keywords: unbounded operator, knot, dilation.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 39–60.

УДК 517.972

Е. М. Кузьменко

УСЛОВИЯ К-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ И ПОВТОРНОЙ К-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА $\mathbf{W^{1,p}}$ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Для интегрантов $f(x, y, z)$ вариационных функционалов $\int_D f(x, y, y')dx$, действующих в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$, $p \geq 1$, над компактной областью $D \subset \mathbb{R}^n$, вводятся классы Вейерштрасса $W^1K_p(z)$ и $W^2K_p(z)$, изучавшиеся ранее в случае пространства Соболева $W^{1,2}$ над отрезком. Показано, что попадание интегранта в подходящий класс Вейерштрасса гарантирует компактную дифференцирумость соответствующего порядка для вариационного функционала.

Ключевые слова: вариационный функционал, пространства Соболева,компактная дифференцируемость, классы Вейерштрасса, доминантная смешанная гладкость .

Введение.

Хорошо известно (см.например [1]), что вариационные функционалы в пространствах Соболева, как правило, не обладают обычными аналитическими свойствами. В работах И.В.Орлова и Е.В.Божонок [2], [3] для интегранта $f(x, y, z)$ одномерного вариационного функционала $\int_a^b f(x, y, y')dx$, действующего в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a, b]$, были введены так называемые классы Вейерштрасса $W^1K_p(z)$ и $W^2K_p(z)$. Эти классы содержат псевдоквадратичные по x, y интегранты ($f \in K_2(z)$), коэффициенты которых обладают доминантной по z смешанной гладкостью нужного порядка (см.общее определение доминантной смешанной гладкости в [4]).

Оказалось, что попадание интегранта f в подходящий класс Вейерштрасса гарантирует компактную дифференцируемость (K-дифференцируемость) соответствующего порядка для вариационного функционала. Заметим, что хотя K-дифференцируемость и слабее сильной дифференцируемости (она занимает промежуточное место между дифференцируемостью по Фреше и дифференцируемостью по Гато), но позволяет решать вариационные экстремальные задачи в пространствах Соболева [2], [3].

Естественной поэтому представляется постановка задачи о получении сходных условий компактной дифференцируемости в общих пространствах Соболева $W^{1,p}$, $p \geq 1$, над многомерной областью путем введения соответствующих классов Вейерштрасса $W^1K_p(z)$ и $W^2K_p(z)$. Решению этой задачи и посвящена данная работа.

Отметим, что в нашей работе [5] недавно был введен в многомерном случае нулевой класс Вейерштрасса $WK_p(z)$ и показано, что при $f \in WK_p(z)$ вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, y')dx \qquad \big(D \subset \mathbb{R}^n,\, y(\cdot) \in W^{1,p}(D),\, p \geq 1\big)$$

является K-непрерывным.

1. Предварительные сведения.

Приведем общее определение компактной непрерывности, компактной дифференцируемости и кратной компактной дифференцируемости функционала в полном локально выпуклом пространстве (ЛВП).

Определение 1. Пусть E–полное вещественное ЛВП, $\Phi : E \to \mathbb{R}$. Скажем, что функционал Φ *компактно непрерывен, компактно дифференцируем (дважды K–дифференцируем и т.д.)* [2] в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + spanC)$, дифференцируемо по Фреше(дважды дифференцируемо по Фреше и т.д.) в точке y относительно нормы $\|\cdot\|_C$ в пространстве $E_C = spanC$, порожденной C.

Обозначим далее через $\mathfrak{C}(E)$- систему всех абсолютно выпуклых компактов в E и через $L_k(E)$- пространства k-линейных непрерывных форм на E. Выпишем в явной форме важные для нас в дальнейшем определения первой, второй и n–ной $K-$ производных:

$$\Phi(y + h_1) - \Phi(y) = \Phi'_K(y) \cdot h_1 + o(\|h_1\|_{C_1}) \ , \tag{1}$$

$$(\Phi'_K(y + h_1) - \Phi'_K(y)) \cdot h_2 = \Phi''_K(y) \cdot (h_1, h_2) + o(\|h_1\|_{C_1} \cdot \|h_2\|_{C_2}) \ , \tag{2}$$

. . . .

$$(\Phi^{(n-1)}(y+h_1)-\Phi^{(n-1)}(y))\cdot(h_2,\dots h_n) = \Phi_K^{(n)}(y)\cdot(h_1,h_2,\dots,h_n)+o(\|h_1\|_{C_1}\cdot\ldots\cdot\|h_n\|_{C_n}) \tag{3}$$

(для любых абсолютно выпуклых компактов $C_1\dots,C_n\in\mathfrak{C}(E)$).

2. Условия компактной дифференцируемости вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$.

В работах Орлова И.В. и Божонок Е.В. [2], [3] был исследован вопрос об условиях K-непрерывности вариационного функционала Эйлера-Лагранжа

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,y')dx$$

в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a,b]=H^1[a,b]$. Оказалось, что достаточным условием K-непрерывности $\Phi(y)$ служит принадлежность интегранта f к введенному в этих работах, классу Вейерштрасса $WK_2(z)$. В нашей работе [5] этот результат был обобщен на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(D)$, где $p\in\mathbb{N}$, над многомерной компактной областью $D\subset\mathbb{R}^n$. Было показано, что принадлежность интегранта f варишионного функционала

$$\Phi(y)=\int\limits_D f(x,y,\nabla y)dx \qquad (y(\cdot)\in W^{1,p}(D),\, p\in\mathbb{N}) \tag{4}$$

к классу Вейерштрасса $WK_p(z)$ является достаточным условием K-непрерывности функционала (4). Приведем определение класса $WK_p(z)$.

Определение 2. Пусть функция $u=f(x,y,z)$, $f:\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^n\to\mathbb{R}$ непрерывна. Скажем, что f *принадлежит вейерштрассовскому классу* $WK_p(z)$, $p\in\mathbb{N}$, если f допускает *псевдополиномиальное представление порядка* p:

$$f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{p}R_k(x,y,z)(z)^k, \tag{5}$$

коэффициенты $R_k:\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^n\to L_k(\mathbb{R}_z^n)$ которого удовлетворяют условию *доминантной (по x, y) смешанной непрерывности (C-гладкости)* (см. общее определение пространств с доминантной смешанной гладкостью [4]): при любом выборе компактов $C_x\subset\mathbb{R}_x^n$, $C_y\subset\mathbb{R}_y$ и без каких-либо ограничений на $z\in\mathbb{R}_z$, отображения R_k $(0\le k\le p)$ равномерно непрерывны и ограничены в $C_x\times C_y\times\mathbb{R}_z^n$.

Выражение вида (5) с приведенными выше условиями на коэффициенты R_k мы назовем K-псевдополиномом порядка p.

Напомним также, что более слабое условие *доминантной (по x, y) смешанной ограниченности* коэффициентов R_k в представлении (5), т.е. их ограниченности в областях $C_x \times C_y \times \mathbb{R}_z^n$, является достаточным условием корректной определенности функционала (4) в пространстве Соболева $W^{1,p}(D)$. Для получения достаточного условия компактной дифференцируемости функционала (4) введем более узкий класс Вейерштрасса $W^1K_p(z)$. Здесь мы также обобщаем определение класса $W^1K_2(z)$ введенное в работах Орлова И.В. и Божонок Е.В. в случае одномерной области [2].

Определение 3. Пусть функция $u = f(x,y,z)$, $f : \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема. Скажем, что отображение f *принадлежит вейерштрассовскому классу* $W^1K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, если f допускает представление (5), коэффициенты R_k которого удовлетворяют *условию доминантной (по x, y) смешанной C^1-гладкости*: при любом выборе компактов $C_x \subset \mathbb{R}_x^n$, $C_y \subset \mathbb{R}_y$ и без каких-либо ограничений на $z \in \mathbb{R}_z^n$, отображения $R_k(x,y,z)$ вместе с градиентами $\nabla R_k = \nabla_{yz} R_k$, $k = \overline{0,p}$, равномерно непрерывны и ограничены в $C_x \times C_y \times \mathbb{R}_z^n$, независимо от выбора z.

Замечание 2. Отметим, что представление (5) функции $f \in W^1K_p(z)$ можно, не меняя общности рассуждений, заменить представлением

$$f(x,y,z) = \widetilde{R_0} + \widetilde{R_p} \cdot (z)^p \tag{6}$$

при сохранении требований определения 3.

Доказательство. Рассмотрим разложение единицы в $\mathbb{R}_z^n$ класса C^1: $1 = \varphi_1(z) + \varphi_2(z)$, где, при некотором $M_z > 0$, малом $\varepsilon > 0$, $supp\,\varphi_1(z) \subset (|z| \le M_z)$, $supp\,\varphi_2(z) \subset (|z| \ge M_z - \varepsilon)$; $0 \le \varphi_1(z) \le 1$, $0 \le \varphi_2(z) \le 1$; $\varphi_1(z), \varphi_1'(z), \varphi_2(z), \varphi_2'(z)$ равномерно непрерывны и ограничены. Положим

$$\widetilde{R_0} = \left(\sum_{k=0}^{p} R_k \cdot (z)^k \right) \cdot \varphi_1(z),$$

$$\widetilde{R_p} = \left(\sum_{k=0}^{p} R_k \cdot (z)^{p-k} \right) \cdot \varphi_2(z).$$

Прямые вычисления показывают, что $\widetilde{R_k}$, $\nabla \widetilde{R_k}$, $k = \overline{0,p}$, равномерно непрерывны и ограничены в $T = \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n$.

. $\square$

Теорема 1. *Пусть $u = f(x,y,z)$ есть отображение $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \to \mathbb{R}$; $x \in D$, $y \in \mathbb{R}_y$, $z \in \mathbb{R}_z^n$, где D — компактная область в $\mathbb{R}_x^n$. Если f принадлежит классу $W^1K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int_D f(x,y,\nabla y)dx, \quad (y(\cdot) \in W^{1,p}(D))$$

K–дифференцируем всюду в пространстве $W^{1,p}(D)$; при этом

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_D \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h\right] dx \ \left(h \in W^{1,p}(D)\right) \ . \tag{7}$$

Доказательство. Проведем доказательство при $p > 1$.

1) Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт $C_\Delta \subset \mathfrak{C}(W^{1,p}(D))$. Воспользуемся каноническим представлением (5) для функции f:

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z)(z)^k,$$

где коэффициенты $R_k : T_D = D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \to L_k(T_D;\mathbb{R})$, согласно условию $f \in W^1K_p(z)$, таковы, что R_k и $\nabla_{yz}R_k = \nabla R_k$ равномерно непрерывны и ограничены в T_D локально по x,y и глобально по z.

Как уже отмечалось (в аналогичной ситуации) в доказательстве теоремы 7 в [5], в силу компактности множества $(y + C_\Delta)$ в $W^{1,p}(D)$, числовое множество

$$K^{y,\Delta} := \bigcup_{h \in C_\Delta} (y+h)(D)$$

есть компакт. Следовательно, на множестве $T_D^{y,\Delta} = D \times K^{y,\Delta} \times \mathbb{R}_z^n$ все коэффициенты R_k вместе с матричными градиентами ∇R_k ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки:

$$\left|R_k(x,y,z)\cdot(\zeta)^k\right| \le M_{k0}\cdot\|\zeta\|^k, \ \left(M_{k0} < \infty, \quad k = \overline{0,p}; \quad (x,y,z) \in T_D^{y,\Delta}, \, \zeta \in \mathbb{R}_z^n\right)$$

$$\left\|\nabla R_k(x,y,z)\cdot(\zeta)^k\right\| \le M_{k1}\cdot\|\zeta\|^k, \ \left(M_{k1} < \infty, \quad k = \overline{0,p}; \quad (x,y,z) \in T_D^{y,\Delta}, \, \zeta \in \mathbb{R}_z^n\right). \tag{8}$$

Воспользуемся представлениями (25)–(26) из нашего доказательства теоремы о K-непрерывности $\Phi(y)$ в $W^{1,p}(D)$ ([5], теор.7):

$$\Phi(y+h) - \Phi(y) = \int\limits_D f(x,y+h,\nabla y + \nabla h)dx - \int\limits_D f(x,y,\nabla y)dx = \sum_{k=0}^{p}\int\limits_D \Delta_k dx \ , \tag{9}$$

где

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l R_k(x,y+h,\nabla y + \nabla h)(\nabla y)^l(\nabla h)^{k-l} +$$

$$+[R_k(x,y+h,\nabla y+\nabla h) - R_k(x,y,\nabla y)](\nabla y)^k \ . \tag{10}$$

Преобразуем последнее выражение, учитывая, что

$$R_k(x,y+h,z+k) - R_k(x,y,z) = \nabla R_k(x,y,z)\cdot(h,k) + r_k(x,y,z;h,k)\cdot(h,k), \tag{11}$$

где $\|r_k(x,y,z;h,k)\| \to 0$ при $\|(h,k)\| \to 0$. Таким образом, подставляя (11) в (10) и выделяя в (10) последний член суммы (при $k \geq 2$) получаем:

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-2} \underbrace{C_k^l R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l}}_{A_{kl}} +$$

$$+ \underbrace{k[R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h) - R_k(x, y, \nabla y)](\nabla y)^{k-1} \nabla h}_{B_k} +$$

$$+ \underbrace{\nabla R_k(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h)(\nabla y)^k}_{C_k} + \underbrace{r_k(x, y, \nabla y; h, \nabla h) \cdot (h, \nabla h)(\nabla y)^k}_{D_k} +$$

$$+ \underbrace{k R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \nabla h}_{E_k} \ . \tag{12}$$

Теперь дадим оценку для интегралов от каждого из слагаемых в этом выражении.
2) Используем оценку (31) для интегралов от A_{kl} $(l = \overline{0, k-2})$ полученную в нашем доказательстве теоремы о K-непрерывности $\Phi(y)$ в $W^{1,p}(D)$ ([5], теор.7):

$$\left| \int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-2} A_{kl} \right) dx \right| \leq \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k0} \cdot (N_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l} \ , \tag{13}$$

где N_{kl} — константы, связывающие соболевские нормы:

$$\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l}}} \leq N_{kl} \cdot \|y\|_{W^{1,p}}.$$

Поскольку, ввиду компактности C_Δ в $W^{1,p}(D)$, $\|h\|_{W^{1,p}} \leq P \cdot \|h\|_{C_\Delta}$ при некоторой константе $P > 0$, то из (13) следует, с учетом ограниченности $\|h\|_{C_\Delta}$: $\left| \int\limits_D \left(\sum\limits_{l=0}^{k-2} A_{kl} \right) dx \right| \leq$

$$\leq \left(\sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k0} \cdot (N_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot P^{k-l} \cdot \|h\|_{C_\Delta}^{k-l-2} \right) \cdot \|h\|_{C_\Delta}^2 = o(\|h\|_{C_\Delta}) \ . \tag{14}$$

3) Проведем оценку интеграла $\int\limits_D B_k dx$ в (12) с помощью ε–процедуры, примененной в доказательстве теоремы 7 о K-непрерывности $\Phi(y)$ в $W^{1,p}(D)$ [5]. Был получен следующий результат:
Для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$(\|h\|_{C_\Delta} \leq \delta) \Rightarrow \left(\int\limits_D \|\nabla y\|^k dx \leq M_k \cdot \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^k dx + \varepsilon \cdot \int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^k dx \right), \tag{15}$$

где

$$D = e_\delta \cup e^\delta, \quad \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx < \varepsilon^{\frac{p}{k}} \ . \tag{16}$$

Замена в этой оценке $(\nabla y)^k \longrightarrow (\nabla y)^{k-1} \cdot \nabla h$ оставляет результат в силе с переходом $\|\nabla y\|^k \longrightarrow \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla h\|$ в неравенстве (15). Таким образом, в нашем случае получаем при $\|h\|_{C_\Delta} \le \delta(\varepsilon)$:

$$\left|\int\limits_D B_k dx\right| = \left|k\int\limits_D \Delta R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h)dx\right| \le$$

$$\le k\cdot M_{k0}\cdot \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^{k-1}\cdot\|\nabla h\|dx + k\cdot\varepsilon\cdot\int\limits_{e^\delta}\|\nabla y\|^{k-1}\cdot\|\nabla h\|dx\ . \tag{17}$$

Отсюда, применяя к каждому из интервалов справа в (17) при $k>1$ неравенство Гёльдера-Минковского при $p'=\frac{p}{k-1}$, $q'=\frac{p}{p-k+1}$, получаем, с учетом оценки (16):

$$\left|\int\limits_D B_k dx\right| \le k\cdot M_{k0}\cdot\left(\int\limits_{e_\delta}\|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k-1}{p}}\cdot\left(\int\limits_{e_\delta}\|\nabla h\|^{\frac{p}{p-k+1}}dx\right)^{\frac{p-k+1}{p}} +$$

$$+k\cdot\varepsilon\cdot\left(\int\limits_{e^\delta}\|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k-1}{p}}\cdot\left(\int\limits_{e^\delta}\|\nabla h\|^{\frac{p}{p-k+1}}dx\right)^{\frac{p-k+1}{p}} \le$$

$$\le k\cdot M_{k0}\cdot\left(\varepsilon^{\frac{p}{k}}\right)^{\frac{k-1}{p}}\cdot\|\nabla h\|_{W^{1,\frac{p}{p-k+1}}} + k\cdot\varepsilon\cdot\|y\|^{k-1}_{W^{1,p}}\cdot\|h\|_{W^{1,\frac{p}{p-k+1}}} \le$$

$$\le k\cdot\left[M_{k0}\cdot\varepsilon^{\frac{k-1}{k}}+\varepsilon\cdot\|y\|^{k-1}_{W^{1,p}}\right]\cdot N_{k1}\|h\|_{W^{1,p}} \le$$

$$\le\left(k\cdot\left[M_{k0}\cdot\varepsilon^{\frac{k-1}{k}}+\varepsilon\cdot\|y\|^{k-1}_{W^{1,p}}\right]\cdot N_{k1}\cdot P\right)\|h\|_{C_\Delta} = o(\|h\|_{C_\Delta}) \tag{18}$$

при $\|h\|_{C_\Delta} < \delta(\varepsilon)$. Отметим, наконец, что при $k=1$ оценка правой части (17), ввиду отсутствия $\|\nabla y\|$, проводится очевидным образом, с учетом малости меры множества e_δ.

4) Теперь проведем оценку интеграла от C_k в (12). Заметим сначала, что оператор

$$\int\limits_D C_k dx = \int\limits_D\left[\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^k\right]dx$$

— линейный относительно h. Проверим его непрерывность. Заметим, что ввиду эквивалентности обычной нормы $\|(h,\nabla h)\|$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ и нормы $\|(h,\nabla h)\|_p = (|h|^p + \|\nabla h\|^p)^{\frac{1}{p}}$, выполнено неравенство

$$\|(h,\nabla h)\| \le F\cdot\|(h,\nabla h)\|_p,$$

где F–некоторая константа.

Имеем:

$$\left|\int\limits_D C_k dx\right| \le \int\limits_D |\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^k|dx \le$$

$$\leq \int\limits_D \|\nabla R_k(x,y,\nabla y)\| \cdot \|(h,\nabla h)\| \|(\nabla y)\|^k dx \leq F \cdot M_{k1} \int\limits_D (|h|^p + \|\nabla h\|^p)^{\frac{1}{p}} \|(\nabla y)\|^k dx. \tag{19}$$

Применяя к интегралу справа в (19) неравенство Гёльдера-Минковского при $p' = p, q' = \frac{p}{p-1}$, получаем:

$$\left|\int\limits_D C_k dx\right| \leq F \cdot M_{k1} \left[\int\limits_D (|h|^p + \|\nabla h\|^p))\, dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_D (\|\nabla y\|^k)^{\frac{p}{p-1}} dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \leq$$

$$\leq F \cdot M_{k1} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|y\|^k_{W^{1,\frac{kp}{p-1}}} \leq \left(F \cdot M_{k1} \cdot (S_k)^k \cdot \|y\|^k_{W^{1,p}}\right) \cdot \|h\|_{W^{1,p}}, \tag{20}$$

где S_k –константы, связывающие соболевские нормы:

$$\|y\|_{W^{1,\frac{kp}{p-1}}} \leq S_k \cdot \|y\|_{W^{1,p}}$$

. Оценка (20) означает ограниченность линейного оператора $\int\limits_D C_k dx$ в $W^{1,p}(D)$.

5) Аналогично проводится оценка интеграла от E_k, который также является линейным оператором относительно h:

$$\left|\int\limits_D E_k dx\right| \leq k \int\limits_D |R_k(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} (\nabla h)| dx \leq k \cdot M_{k0} \cdot \int\limits_D \|\nabla y\|^{k-1} \|\nabla h\| dx \leq$$

$$\leq k \cdot M_{k0} \cdot \left(\int\limits_D \|\nabla h\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\|\nabla y\|^{\frac{(k-1)p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq$$

$$\leq k \cdot M_{k0} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,\frac{(k-1)p}{p-1}}} \leq \left[k \cdot M_{k0} \cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,p}} \cdot (S_{k-1})^{k-1}\right] \cdot \|h\|_{W^{1,p}}, \tag{21}$$

что означает ограниченность оператора $\int\limits_D E_k dx$ в $W^{1,p}(D)$.

6) Наконец, оценку интеграла от D_k в (12), мы можем провести совершенно аналогично оценке интеграла от B_k (в пункте 3 доказательства), поскольку для "ε–процедуры"существенен лишь факт стремления к нулю $r_k(x,y,z;h,\nabla h) \to 0$ при $\|(h,\nabla h)\| \to 0$. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$(\|h\|_{C_\Delta} < \delta) \Rightarrow \Bigg(\left|\int\limits_D \left[r_k(x,y,\nabla y; h, \nabla h) \cdot (h,\nabla h)(\nabla y)^k\right] dx\right| \leq$$

$$\leq \mu_k \cdot \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^k \cdot \|(h,\nabla h)\| dx + \varepsilon \cdot \int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^k \cdot \|(h,\nabla h)\| dx\Bigg)\,, \tag{22}$$

где

$$D = e_\delta \cup e^\delta, \quad \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx < \varepsilon^{\frac{p}{k}}, \tag{23}$$

μ_k — некоторая постоянная. Отсюда, применяя к каждому из интервалов справа в (22) неравенство Гёльдера-Минковского при $p' = \frac{p}{k}$, $q' = \frac{p}{p-k}$, получаем, с учетом оценки (41):

$$\left|\int\limits_D D_k dx\right| \leq \mu_k \cdot \left(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e_\delta} \|(h, \nabla h)\|^{\frac{p}{p-k}} dx\right)^{\frac{p-k}{p}} +$$

$$+\varepsilon \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|(h, \nabla h)\|^{\frac{p}{p-k}} dx\right)^{\frac{p-k}{p}} \leq (\mu_k \cdot \varepsilon + \varepsilon \cdot \|y\|^k_{W^{1,p}})\|h\|_{W^{1,\frac{p}{p-k}}} \leq$$

$$\leq (\mu_k + \|y\|^k_{W^{1,p}}) \cdot \varepsilon \cdot T_k \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \leq [(\mu_k + \|y\|^k_{W^{1,p}}) \cdot T_k \cdot P] \cdot \varepsilon \cdot \|h\|_{C_\Delta} \qquad (24)$$

при $\|h\|_{C_\Delta} < \delta(\varepsilon)$. Здесь T_k — константы, связывающие соболевские нормы:

$$\|y\|_{W^{1,\frac{p}{p-k}}} \leq T_k \cdot \|y\|_{W^{1,p}}.$$

Отсюда получаем

$$\left|\int\limits_D D_k dx\right| = o(\|h\|_{C_\Delta}).$$

7) Резюмируя оценки, полученные выше в пунктах 2)–6), имеем:

$$\Phi(y+h) - \Phi(y) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_D \Delta_k dx =$$

$$= \int\limits_D \left(\sum_{k=0}^{p} \left[\nabla R_k(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k dx + k \cdot R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot \nabla h\right]\right) dx +$$

$$+ o(\|h\|_{C_\Delta}) \ , \qquad (25)$$

причем, интеграл справа в (25) является линейным непрерывным оператором от $h(\cdot) \in W^{1,p}(D)$. Таким образом, функционал $\Phi(y)$ K-дифференцируем в $W^{1,p}(D)$, и его K-дифференциал вычисляется по формуле:

$$\Phi'_K(y)h =$$

$$= \int\limits_D \left(\sum_{k=0}^{p} \left[\nabla R_k(x, y, \nabla y) \cdot (h, \nabla h) \cdot (\nabla y)^k dx + k \cdot R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^{k-1} \cdot \nabla h\right]\right) dx \ . \qquad (26)$$

8) Покажем наконец, что равенство (26) можно преобразовать к стандартному виду (7). Из K-псевдополиномиального представления (5) получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, \nabla y)h = \frac{\partial R_0}{\partial y}(x, y, \nabla y)h + \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial R_k}{\partial y}(x, y, \nabla y) \cdot h \cdot (\nabla y)^k \ ;$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h=\frac{\partial R_0}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h+$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\left[\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^k+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\right];$$

отсюда:

$$\nabla f(x,y,\nabla y)(h,\nabla h)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)h+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h=$$
$$=\left[\frac{\partial R_0}{\partial y}(x,y,\nabla y)h+\frac{\partial R_0}{\partial z}(x,y,\nabla y)\nabla h\right]+\sum_{k=1}^{p}\Big[\Big(\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot h\cdot(\nabla y)^k+$$
$$+\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^k\Big)+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\Big]=$$
$$=\nabla R_0(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)+$$
$$+\sum_{k=1}^{p}\left[\nabla R_k(x,y,\nabla y)(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\right]=$$
$$=\sum_{k=0}^{p}\left[\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)\cdot(\nabla y)^k+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)\cdot\nabla h\cdot(\nabla y)^{k-1}\right],$$

что совпадает с подинтегральным выражением в (26).
Итак, формула (26) принимает вид

$$\Phi'_K(y)h=\int\limits_D\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)h+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla h)\right]dx.$$

Теорема доказана. Случай $p=1$ может быть рассмотрен аналогичным образом.
. □.

3. Условия повторной компактной дифференцируемости вариационных функционалов в $W^{1,p}(D)$.

Для получения достаточного условия повторной компактной дифференцируемости введем следующий класс Вейерштрасса $W^2K_p(z)$, более узкий, чем класс $W^1K_p(z)$, рассматриваемый в п.2. Здесь мы также обобщаем определение класса $W^2K_p(z)$, введенное в работах Орлова И.В. и Божонок Е.В. в случае одномерной области [2].

Определение 4. Пусть функция $u=f(x,y,z)$, $f:\mathbb{R}_x^n\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^n\to\mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема. Скажем, что f *принадлежит вейерштрассовскому классу* $W^2K_p(z)$, $p\in\mathbb{N}$, если f допускает представление (5), коэффициенты $R_k:\mathbb{R}_x\times\mathbb{R}_y\times\mathbb{R}_z^n\to L_k(\mathbb{R}_z^n)$ которого удовлетворяют *условию доминантной (по x, y) смешанной* C^2*–гладкости*: при любом выборе компактов $C_x\subset\mathbb{R}_x$ $C_y\subset\mathbb{R}_y$ и без каких-либо ограничений на $z\in\mathbb{R}_z^n$, отображения $R_k(x,y,\nabla y)$ вместе с градиентами $\nabla R_k=\nabla_{yz}R_k$ и гессианами $H(R_k)=H_{yz}(R_k)$, $k=\overline{0,p}$, равномерно непрерывны и ограничены в $C_x\times C_y\times\mathbb{R}_z^n$, независимо от выбора z.

Теорема 2. *Пусть* $u = f(x, y, z)$ *есть отображение* $f : D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \to \mathbb{R}$; $x \in D$, $y \in \mathbb{R}_y$, $z \in \mathbb{R}_z^n$, *где* D *— компактная область в* $\mathbb{R}_x^n$. *Если* f *принадлежит классу* $W^2K_p(z)$, $p \in \mathbb{N}$, *то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_D f(x, y, \nabla y)dx, \quad (y(\cdot) \in W^{1,p}(D))$$

дважды K*–дифференцируем всюду в пространстве* $W^{1,p}(D)$*; при этом*

$$\Phi''_K(y)(h,k) = \int\limits_D \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, \nabla y)(h, k) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, \nabla y)[(h, \nabla k) + (\nabla h, k)]+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, \nabla y)(\nabla h, \nabla k)\Big]dx \qquad \big(h \in W^{1,p}(D)\big)\,. \tag{27}$$

Доказательство.

1) Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(D)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}(D)$. Воспользуемся, как и в теореме 1, K-псевдополиномиальным представлением для функции f:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x, y, z)(z)^k,$$

где коэффициенты $R_k : T_D = D \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \to L_k(T_D; \mathbb{R})$, согласно условию $f \in W^2K_p(z)$, таковы, что R_k, $\nabla_{yz} R_k$ и $H_{yz}(R_k)$ равномерно непрерывны и ограничены локально по x,y и глобально по z на T_D.

Как уже отмечалось в доказательстве теоремы 1 и теоремы 7 в [5], в силу компактности множества $(y + C_\Delta)$ в $W^{1,p}(D)$, числовые множества

$$K_h^{y,\Delta} := \bigcup_{h \in C_\Delta} (y + h)(D)\ ,$$

$$K_k^{y,\Delta} := \bigcup_{k \in C_{\Delta_1}} (y + k)(D)$$

также компактны. Следовательно, на множествах $T_{D,h}^{y,\Delta} = D \times K_h^{y,\Delta} \times \mathbb{R}_z^n$ и $T_{D,k}^{y,\Delta} = D \times K_k^{y,\Delta} \times \mathbb{R}_z^n$ все коэффициенты R_k вместе с матричными градиентами ∇R_k и блок-матричными гессианами $H(R_k)$ ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки

$$\Big|R_k(x, y, z) \cdot (\zeta)^k\Big| \le M_{k0} \cdot \|\zeta\|^k, \qquad \Big(M_{k0} < \infty,\ k = \overline{0,p}; \quad (x, y, z) \in T_D^{y,\Delta}, \quad \zeta \in \mathbb{R}_z^n\Big)$$

$$\Big\|\nabla R_k(x, y, z) \cdot (\zeta)^k\Big\| \le M_{k1} \cdot \|\zeta\|^k, \qquad \Big(M_{k1} < \infty,\ k = \overline{0,p};\ (x, y, z) \in T_D^{y,\Delta},\ \zeta \in \mathbb{R}_z^n\Big)$$

$$\Big\|H(R_k(x, y, z)) \cdot (\zeta)^k\Big\| \le M_{k2} \cdot \|\zeta\|^k, \quad \Big(M_{k2} < \infty,\ k = \overline{0,p};\ (x, y, z) \in T_D^{y,\Delta},\ \zeta \in \mathbb{R}_z^n\Big). \tag{28}$$

Вычислим приращение вариационного функционала Φ'_K в точке $y(\cdot)$ при $h \in C_\Delta$, $k \in C_{\Delta_1}$, используя равенство (26):

$$(\Phi'_K(y+s) - \Phi'_K(y))h = \sum_{k=0}^{p}\Big[\int_D \nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y + \nabla s)^k dx +$$

$$+k \cdot \int_D R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y + \nabla s)^{k-1} dx\Big] -$$

$$-\sum_{k=0}^{p}\left[\int_D \nabla R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)(\nabla y)^k dx + k \cdot \int_D R_k(x, y, \nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1} dx\right] =$$

$$= \int_D \sum_{k=0}^{p}\Big[\nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)\left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l (\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l}\right) +$$

$$+k \cdot R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)\left(\sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l (\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1}\right) -$$

$$-\nabla R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)(\nabla y)^k - k \cdot R_k(x, y, \nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}\Big] dx =: \int_D \sum_{k=0}^{p} \Delta_k, \quad (29)$$

где Δ_k — выражения в квадратных скобках в предпоследнем выражении в (29). Фиксируем k и преобразуем выражение Δ_k:

$$\Delta_k = \Bigg(\nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)\left(\sum_{l=0}^{k} C_k^l (\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l}\right) -$$

$$-\nabla R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)(\nabla y)^k\Bigg) +$$

$$+k \cdot \Bigg(R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)\left(\sum_{l=0}^{k-1} C_{k-1}^l (\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1}\right) -$$

$$-R_k(x, y, \nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}\Bigg) =$$

(из каждой суммы выделяем последний элементы, k-й и $(k-1)$-й соответственно)

$$= \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l} +$$

$$+\nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^k - \nabla R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)(\nabla y)^k +$$

$$+k \sum_{l=0}^{k-2} C_{k-1}^l R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1} +$$

$$+k\Big(R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1} - kR_k(x, y, \nabla y)()^{k-1}(\nabla h)\Big) =$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \underbrace{C_k^l \nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l}}_{A_{kl}} +$$

$$+ \underbrace{\left[\nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s) - \nabla R_k(x, y, \nabla y)\right](h, \nabla h)(\nabla y)^k}_{B_k} +$$

$$+k \cdot \sum_{l=0}^{k-2} \underbrace{C_{k-1}^l R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1}}_{A_{k-1,l}} +$$

$$+ \underbrace{k\left[R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s) - R_k(x, y, \nabla y)\right](\nabla h)(\nabla y)^{k-1}}_{C_k} .$$

Преобразуем B_k и C_k, учитывая, что

$$R_k(x, y+h, z+s) - R_k(x, y, z) = \nabla R_k(x, y, z) \cdot (h, s) + r_k(x, y, z; h, s) \cdot (h, s),$$

где $\|r_k(x, y, z; h, s)\| \to 0$ при $\|(h, s)\| \to 0$. Таким образом,

$$B_k = H(R_k(x, y, \nabla y))(s, \nabla s) + r_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s),$$

$$C_k = \nabla R_k(x, y, \nabla y) \cdot (s, \nabla s) + q_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s).$$

Выделяя из $\left(\sum\limits_{l=0}^{k-1} A_{kl}\right)$ последний $(k-1)$-й член, а из $\left(\sum\limits_{l=0}^{k-2} A_{k-1,l}\right)$ последний $(k-2)$-й член, получаем:

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l} +$$

$$+k \cdot \nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla s) +$$

$$+k \cdot \sum_{l=0}^{k-3} C_{k-1}^l R_k(x, y+k_1, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1} +$$

$$+k \cdot (k-1) R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla s) +$$

$$+\left[H(R_k(x, y, \nabla y))(s, \nabla s) + r_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s)\right](h, \nabla h)(\nabla y)^k +$$

$$+k\left[\nabla R_k(x, y, \nabla y) \cdot (s, \nabla s) + q_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s)\right](\nabla h)(\nabla y)^{k-1}. \qquad (30)$$

Вычитая и добавляя слагаемые:

$$k \cdot \nabla R_k(x, y, \nabla y)(h, \nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla s) \quad \text{и} \quad k \cdot (k-1) R_k(x, y, \nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla s),$$

получим:

$$\Delta_k = \sum_{l=0}^{k-2} \underbrace{C_k^l \nabla R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l}}_{A_{kl}} +$$

$$+k \cdot \sum_{l=0}^{k-3} \underbrace{C_{k-1}^l R_k(x, y+s, \nabla y + \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1}}_{A_{k-1,l}} +$$

$$+k\underbrace{[R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)-\nabla R_k(x,y,\nabla y)](h,\nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla s)}_{V_k}+$$

$$+k(k-1)\underbrace{[R_k(x,y+s,\nabla y+\nabla s)-\nabla R_k(x,y,\nabla y)](\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla s)}_{W_k}+$$

$$+\underbrace{H(R_k(x,y,\nabla y))(s,\nabla s)(h,\nabla h)(\nabla y)^k}_{F_k}+$$

$$+\underbrace{[r_k(x,y,\nabla y;s,\nabla s)\cdot(s,\nabla s)]\,(h,\nabla h)(\nabla y)^k}_{E_k}+$$

$$+k\cdot\underbrace{\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(s,\nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}}_{S_k}+$$

$$+k\cdot\underbrace{q_k(x,y,\nabla y;s,\nabla s)\cdot(s,\nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}}_{H_k}+$$

$$+k\underbrace{\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla s)}_{D_k}+k(k-1)\underbrace{R_k(x,y,\nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla k)}_{G_k}\ . \tag{31}$$

Теперь дадим оценку для интегралов от каждого слагаемого в этом выражении.
2) Проведем вначале оценку для интегралов от $A_{kl}\quad (l=\overline{0,k-2})$. Поскольку, ввиду (28),

$$|A_{kl}|\le C_k^l\cdot M_{k1}\cdot\|(h,\nabla h)(\nabla y)^l(\nabla s)^{k-l}\|\le C_k^l\cdot M_{k1}\cdot\|(h,\nabla h)\|\|\nabla y\|^l\|\nabla s\|^{k-l},$$

то

$$\left|\int\limits_D\left(\sum_{l=0}^{k-2}A_{kl}\right)dx\right|\le\sum_{l=0}^{k-2}C_k^l\cdot M_{k1}\cdot\int\limits_D\|(h,\nabla h)\|\|\nabla y\|^l\|\nabla s\|^{k-l}dx. \tag{32}$$

Применяя к интегралам справа в (32) неравенство Гельдера–Минковского, получаем:

$$\left|\int\limits_D\|(h,\nabla h)\|\|\nabla y\|^l\|\nabla s\|^{k-l}dx\right|\le$$

. . . .

$$\le F\cdot\left(\int\limits_D(\|h\|^p+\|\nabla h\|^p)dx\right)^{\frac1p}\left(\int\limits_D\|\nabla s\|^pdx\right)^{\frac{k-l}{p}}\cdot\left(\int\limits_D\|\nabla y\|^{\frac{pl}{p-k+l-1}}dx\right)^{\frac{p-k+l-1}{p}}\le$$

(условие $\frac1p+\frac{p-k-l-1}{p}+\frac{k-l}{p}=1$ выполняется)

$$\le F\cdot(\|s\|_{W^{1,p}})^{k-l}\cdot\left(\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l-1}}}\right)^l\cdot\|h\|_{W^{1,p}}\ , \tag{33}$$

где F — некоторая константа. Далее, элементарно проверяется неравенство $\frac{pl}{p-k+l-1} \le p$, откуда следует неравенство для соответствующих соболевских норм:

$$\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l-1}}} \le S_{kl} \cdot \|y\|_{W^{1,p}} \,, \tag{34}$$

где S_{kl} — постоянные. Отсюда получаем:

$$\left|\int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-2} A_{kl}\right) dx\right| \le \sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k1} \cdot F \cdot (S_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot (\|s\|_{W^{1,p}})^{k-l}. \tag{35}$$

Поскольку

$$\|h\|_{W^{1,p}} \le P_h \|h\|_{C_\Delta}, \qquad \|s\|_{W^{1,p}} \le P_{k1} \|s\|_{C_\Delta},$$

то из (35) следует:

$$\left|\int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-2} A_{kl}\right) dx\right| \le$$

$$\le \left(\sum_{l=0}^{k-2} C_k^l \cdot M_{k1} \cdot F \cdot (S_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot P_h \cdot P_{k1}^{k-l} \cdot \|s\|_{C_\Delta}^{k-l-2}\right) \cdot \|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|^2_{C_\Delta} =$$

$$= o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|^2_{C_\Delta}). \tag{36}$$

3) Аналогично пункту 2) доказательства теоремы о K-дифференцируемости оценим интегралы от $A_{k-1,l} \quad (l = \overline{0, k-3})$:

$$|A_{k-1,l}| \le C_{k-1}^l \cdot M_{k0} \cdot \|(\nabla h)(\nabla y)^l (\nabla s)^{k-l-1}\| \le C_{k-1}^l \cdot M_{k0} \cdot \|(\nabla h)\| \|\nabla y\|^l \|\nabla s\|^{k-l-1},$$

откуда

$$\left|\int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-3} A_{k-1,l}\right) dx\right| \le \sum_{l=0}^{k-3} C_{k-1}^l \cdot M_{k0} \cdot \int\limits_D \|(\nabla h)\| \|\nabla y\|^l \|\nabla\|^{k-l-1} dx. \tag{37}$$

Применяя к интегралам справа в (37) неравенство Гельдера–Минковского, получаем:

$$\left|\int\limits_D \|(\nabla h)\| \|\nabla y\|^l \|\nabla s\|^{k-l-1} dx\right| \le \left(\int\limits_D (\|\nabla h\|)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int\limits_D \|\nabla s\|^p dx\right)^{\frac{k-l-1}{p}} \cdot$$

$$\cdot \left(\int\limits_D \|\nabla y\|^{\frac{pl}{p-k+l}} dx\right)^{\frac{p-k+l}{p}} \le (\|s\|_{W^{1,p}})^{k-l-1} \cdot (S_{k-1,l})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \,. \tag{38}$$

Отсюда:

$$\left|\int\limits_D \left(\sum_{l=0}^{k-3} A_{k-1,l}\right) dx\right| \le \sum_{l=0}^{k-3} C_{k-1}^l \cdot M_{k0} \cdot (S_{k-1,l})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot (\|s\|_{W^{1,p}})^{k-l-1} \ . \tag{39}$$

Поскольку

$$\|h\|_{W^{1,p}} \le P_h \cdot \|h\|_{C_\Delta}, \quad \|s\|_{W^{1,p}} \le P_{k1} \cdot \|s\|_{C_\Delta} \ ,$$

то из (35) следует: $\left|\int\limits_D \left(\sum\limits_{l=0}^{k-3} A_{k-1,l}\right) dx\right| \le$

$$\le \left(\sum_{l=0}^{k-3} C_{k-1}^l \cdot M_{k0} \cdot (S_{k-1,l})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot P_h \cdot P_{k1}^{k-l-1} \cdot \|s\|_{C_\Delta}^{k-l-3}\right) \cdot \|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}^2 =$$

$$= o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}^2) \ . \tag{40}$$

4) Оценку $\int\limits_D V_k dx$ проведем с помощью ε–процедуры уже применявшейся нами в доказательстве теоремы о K-дифференцируемости, пункт 3. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$(\|h\|_{C_\Delta} < \delta, \|s\|_{C_\Delta} < \delta) \Rightarrow \Bigg(\left|\int\limits_D V_k dx\right| \le$$

$$\le M_{k1} \cdot \int\limits_{e_\delta} \|(h,\nabla h)\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla s\| dx + \varepsilon \cdot \int\limits_{e^\delta} \|(h,\nabla h)\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1} \cdot \|\nabla s\| dx\Bigg)$$

где

$$D = e_\delta \cup e^\delta, \quad \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx < \varepsilon^{\frac{p}{k}} \ . \tag{41}$$

Применяем неравенство Гельдера–Минковского и учитывая, что $\|(h,\nabla h)\|_p = (|h|^p + \|\nabla h\|^p)^{\frac{1}{p}}$ и $\|(s,\nabla s)\|_p = (|s|^p + \|\nabla s\|^p)^{\frac{1}{p}}$, получаем:

$$\left|\int\limits_D V_k dx\right| \le M_{k1} \cdot \Big(\int\limits_{e_\delta} (\|h\|^p + \|\nabla h\|^p) dx\Big)^{\frac{1}{p}} \cdot \Big(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx\Big)^{\frac{k-1}{p}} \cdot \Big(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla k_1\|^{\frac{p}{p-k}} dx\Big)^{\frac{p-k}{p}} +$$

$$+\varepsilon \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} (\|h\|^p + \|\nabla h\|^p) dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k-1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla s\|^{\frac{p}{p-k}} dx\right)^{\frac{p-k}{p}} \le$$

$$\le M_{k1} \cdot \left(\varepsilon^{\frac{p}{k}}\right)^{\frac{k-1}{p}} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,\frac{p}{p-k}}} + \varepsilon \cdot \|y\|_{W^{1,p}}^{k-1} \cdot \|s\|_{W^{1,\frac{p}{p-k}}} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \le$$

$$\le M_{k1} \cdot \varepsilon^{\frac{k-1}{p}} \cdot T_{k1} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} + \varepsilon \cdot \|y\|_{W^{1,p}}^{k-1} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot T_{k1} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \le$$

$$\le [M_{k1} \cdot \varepsilon^{\frac{k-1}{p}} \cdot T_{k1} \cdot P_h \cdot P_{k1}] \cdot (\|h\|_{C\Delta} \|s\|_{C_\Delta}) + [\varepsilon \cdot \|y\|_{W^{1,p}}^{k-1} \cdot T_{k1} \cdot P_h \cdot P_{k1}] \cdot (\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta})$$

$$= o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) \ ,$$

где T_{k1} — константы связывающие соболевские нормы: $\|s\|_{W^{1,\frac{p}{p-k}}} \leq T_{k1} \cdot \|s\|_{W^{1,p}}$.
5) Аналогично рассуждая, с помощью ε–процедуры получаем оценку $\int\limits_D W_k dx$:

$$\left|\int\limits_D W_k dx\right| \leq M_{k0} \cdot \left(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla h\|^{\frac{p}{p-k+1}} dx\right)^{\frac{p-k+1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k-2}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla s\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+\varepsilon \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla h\|^{\frac{p}{p-k+1}} dx\right)^{\frac{p-k+1}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k-2}{p}} \cdot \left(\int\limits_{e^\delta} \|\nabla s\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$\leq \ldots \leq [M_{k0} \cdot F \cdot \varepsilon^{\frac{k-2}{p}} \cdot P_h \cdot P_{k1}] \cdot (\|h\|_{C\Delta} \|s\|_{C_\Delta}) + [\varepsilon \cdot F \cdot \|y\|^{k-2}_{W^{1,p}} \cdot P_h \cdot P_{k1}] \cdot (\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) =$
$= o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta})$,
где F — некоторая константа.
6) С помощью этой же процедуры проведем оценку $\int\limits_D E_k dx$. Итак, для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$(\|h\|_{C_\Delta} < \delta) \Rightarrow \Bigg(\left|\int\limits_D \left[r_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s)(h, \nabla h)(\nabla y)^k\right] dx\right| \leq$$

$$\leq \mu_k \cdot \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^k \cdot \|(h, \nabla h)\| \cdot \|(s, \nabla s)\| dx + \varepsilon \cdot \int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^k \cdot \|(h, \nabla h)\| \cdot \|(s, \nabla s)\| dx\Bigg), \quad (42)$$

где

$$D = e_\delta \cup e^\delta, \quad \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx < \varepsilon^{\frac{p}{k}} \ , \quad (43)$$

μ_k — некоторая постоянная. Применяя неравенство Гельдера–Минковского и учитывая, что

$$\|(h, \nabla h)\|_p = (|h|^p + \|\nabla h\|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{и} \quad \|(s, \nabla s)\|_p = (|s|^p + \|\nabla s\|^p)^{\frac{1}{p}},$$

получаем:

$$\int\limits_D E_k dx \leq$$

$$\leq \mu_k \cdot \left[\int\limits_{e_\delta} ((\|h\| + \|\nabla h\|)) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_{e_\delta} ((\|s\| + \|\nabla s\|)) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^{\frac{pk}{p-2}} dx\right]^{\frac{p-2}{p}} +$$

$$+\varepsilon \cdot \left[\int\limits_{e^\delta} ((\|h\| + \|\nabla h\|)) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_{e^\delta} ((\|s\| + \|\nabla s\|)) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^{\frac{pk}{p-2}} dx\right]^{\frac{p-2}{p}} \leq$$

$$\leq \mu_k \cdot \varepsilon \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} + \varepsilon \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot \|y\|^k_{W^{1,p}} \leq$$
$$\leq \left[(\mu_k + \|y\|^k_{W^{1,p}}) \cdot \varepsilon \cdot P_h \cdot P_{k1}\right] (\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) = o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) \ .$$

7) Аналогично получим оценку $\int\limits_D H_k dx$:

$$\left| \int\limits_D \left[q_k(x, y, \nabla y; s, \nabla s) \cdot (s, \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1} \right] dx \right| \leq$$
$$\leq \nu_k \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot \varepsilon^{\frac{k-1}{k}} + \varepsilon \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot F_k \cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,p}} \leq$$
$$\leq \left[(\nu_k + F_k \cdot \|y\|^{k-1}_{W^{1,p}})\varepsilon \cdot P_h \cdot P_{k1}\right] (\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) = o(\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}) \ .$$

8) Теперь проведем оценку интеграла от F_k. Докажем непрерывность билинейного оператора

$$\int\limits_D F_k dx = \int\limits_D \left[H(R_k(x, y, \nabla y)) \cdot (h, \nabla h) \cdot (s, \nabla s)(\nabla y)^k \right] dx.$$

Имеем:

$$\left| \int\limits_D F_k dx \right| \leq \int\limits_D |F_k| \, dx \leq \int\limits_D \left| H(R_k(x, y, \nabla y)) \cdot (h, \nabla h) \cdot (s, \nabla s)(\nabla y)^k \right| dx \leq$$
$$\leq \int\limits_D \|H(R_k(x, y, \nabla y))\| \cdot \|(h, \nabla h)\| \cdot \|(s, \nabla s)\| \cdot \|\nabla y\|^k dx \leq$$
$$\leq M_{k2} \cdot \int\limits_D \|(h, \nabla h)\| \cdot \|(s, \nabla s)\| \cdot \|\nabla y\|^k dx \leq$$

(применим неравество Гельдера–Минковского)

$$\leq M_{k2} \cdot \left[\int\limits_D (\|h\|^p + \|\nabla h\|^p) dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_D (\|s\|^p + \|\nabla s\|^p) dx \right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_D \|\nabla y\|^{\frac{pk}{p-2}} dx \right]^{\frac{p-2}{p}} \leq$$
$$\leq M_{k2} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot \|y\|^k_{W^{1,\frac{pk}{p-k-2}}} \leq M_{k2} \cdot \|h\|_{W^{1,p}} \cdot \|s\|_{W^{1,p}} \cdot \|y\|^k_{W^{1,p}} \leq$$
$$\leq \left[M_{k2} \cdot \|y\|^k_{W^{1,p}} \cdot P_h \cdot P_{k1} \right] (\|h\|_{C_\Delta} \cdot \|s\|_{C_\Delta}).$$

Отсюда следует,что оператор $\int\limits_D F_k dx$ непрерывен. Аналогично рассуждая, дадим оценку интегралов $\int\limits_D S_k dx, \quad \int\limits_D D_k dx, \quad \int\limits_D G_k dx$.

9) Оператор

$$\int\limits_D S_k dx = \int\limits_D \nabla R_k(x, y, \nabla y) \cdot (s, \nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1} dx$$

— билинейный. Имеем:

$$\left|\int\limits_D S_k dx\right| \leq \int\limits_D |S_k|\, dx \leq \int\limits_D \left|\nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(s,\nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}\right| dx \leq$$

$$\leq \int\limits_D \left\|\nabla R_k(x,y,\nabla y)\| \cdot \|(s,\nabla s)\| \cdot \|\nabla h\| \cdot \|\nabla y\|^{k-1}\right| dx \leq$$

$$\leq M_{k1}\cdot\left[\int\limits_D \|\nabla h\|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_D (\|s\|^p + \|\nabla s\|^p) dx\right]^{\frac{1}{p}} \cdot \left[\int\limits_D \|\nabla y\|^{\frac{p(k-1)}{p-2}} dx\right]^{\frac{p-2}{p}} \leq$$

$$\leq \left[M_{k1}\cdot\|y\|^{k-1}_{W^{1,p}}\cdot P_h\cdot P_{k1}\right](\|h\|_{C_\Delta}\cdot\|s\|_{C_\Delta})\,.$$

Отсюда следует, что билинейный оператор $\int\limits_D S_k dx$ непрерывен.

10) Оператор

$$\int\limits_D D_k dx = \int\limits_D \nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla k_1) dx$$

также билинейный. Имеем:

$$\left|\int\limits_D D_k dx\right| \leq \int\limits_D \|\nabla R_k(x,y,\nabla y)\|\cdot\|(h,\nabla h)\|\|\nabla y\|^{k-1}\|\nabla s\| dx \leq$$

$$\leq \ldots \leq \left[M_{k1}\cdot\|y\|^{k-1}_{W^{1,p}}\cdot P_h\cdot P_{k1}\right](\|h\|_{C_\Delta}\cdot\|s\|_{C_\Delta})\,.$$

Отсюда следует, что билинейный оператор $\int\limits_D D_k dx$ непрерывен.

11) Оператор

$$\int\limits_D G_k dx = \int\limits_D R_k(x,y,\nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla k) dx$$

также билинейный. Имеем:

$$\left|\int\limits_D G_k dx\right| \leq \int\limits_D \|R_k(x,y,\nabla y)\|\|\nabla h\|\|\nabla y\|^{k-2}\|\nabla s\| dx \leq$$

$$\leq \ldots \leq \left[M_{k0}\cdot\|y\|^{k-2}_{W^{1,p}}\cdot P_h\cdot P_{k1}\right](\|h\|_{C_\Delta}\cdot\|s\|_{C_\Delta})\,.$$

Отсюда следует, что билинейный оператор $\int\limits_D G_k dx$ непрерывен.

12) В итоге получаем:

$$\Phi''_K(y)(h,s) = \sum_{k=0}^{p}\int\limits_D \Delta_k dx =$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\Big[\int\limits_D \left[H(R_k(x,y,\nabla y))\cdot(h,\nabla h)\cdot(s,\nabla s)(\nabla y)^k\right] dx +$$

$$+k\cdot\int\limits_D \nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(s,\nabla s)(\nabla h)(\nabla y)^{k-1}dx+$$

$$+k\cdot\int\limits_D \nabla R_k(x,y,\nabla y)\cdot(h,\nabla h)(\nabla y)^{k-1}(\nabla s)dx+$$

$$+k\cdot(k-1)\cdot\int\limits_D R_k(x,y,\nabla y)(\nabla h)(\nabla y)^{k-2}(\nabla s)dx\Big]+o(\|h\|_{C_\Delta}\|s\|_{C_\Delta}) \qquad (44)$$

Покажем, что данное равенство можно преобразовать к стандартному виду:

$$\Phi''_K(y)(h,s)=\int\limits_D\Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)(h,s)+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,\nabla y)[(h,\nabla s)+(\nabla h,s)]+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h,\nabla s)\Big]dx\ . \qquad (45)$$

Из K-псевдополиномиального представления

$$f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{p}R_k(x,y,z)z^k$$

находим:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\nabla y)=\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\nabla y)=\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k+k\cdot R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)(h,s)=\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial^2 R_k}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(h,s),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h,\nabla s)=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\Big[\frac{\partial^2 R_k}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h,\nabla s)+k\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s)+$$

$$+k\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s)+k(k-1)\cdot R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-2}(\nabla h,\nabla s)\Big]\ ,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,\nabla y)(h,\nabla s)=$$

$$=\sum_{k=0}^{p}\frac{\partial^2 R_k}{\partial y\cdot\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k(h,\nabla s)+k\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(h,\nabla s).$$

Отсюда находим гессиан:

$$H(f(x,y,\nabla y))(h,\nabla h)(k_1,\nabla k_1)=$$

$$=\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)(h,s)+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,\nabla y)[(h,\nabla s)+(\nabla h,s)]+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)(\nabla h,\nabla s)\right]=$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\Big[\frac{\partial^2 R_k}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(h,s)+\frac{\partial^2 R_k}{\partial y\cdot\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(h,\nabla s)+$$

$$+k\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(h,\nabla s)+\frac{\partial^2 R_k}{\partial y\cdot\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h,s)+$$

$$+k\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,s)+$$

$$+\frac{\partial^2 R_k}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h,\nabla s)+k\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s)+$$

$$+k\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s)+k(k-1)\cdot R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-2}(\nabla h,\nabla s)\Big]=$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\underbrace{\Big[\frac{\partial^2 R_k}{\partial y^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(h,s)+\frac{\partial^2 R_k}{\partial y\cdot\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(h,\nabla s)+}_{F_k}$$

$$\underbrace{+\frac{\partial^2 R_k}{\partial y\cdot\partial z}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h,s)+\frac{\partial^2 R_k}{\partial z^2}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k(\nabla h,\nabla s)\Big]}_{F_k}+$$

$$+k\underbrace{\left[\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(h,\nabla s)+\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s)\right]}_{D_k}+$$

$$+k\underbrace{\left[\frac{\partial R_k}{\partial y}(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,s)+\frac{\partial R_k}{\partial z}(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-1}(\nabla h,\nabla s)\right]}_{S_k}+$$

$$+k\cdot(k-1)\underbrace{\left[R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^{k-2}(\nabla h,\nabla s)\right]}_{G_k}.$$

Теорема доказана.

$\square$.

Автор выражает благодарность И.В.Орлову и Е.В.Божонок за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] Скрыпник И.В. *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка* / [И.В.Скрыпник]. — К.: Наукова думка, 1973. — 219 с.

[2] Орлов И.В. *Дополнительные главы современного естествознания.Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1: учебное пособие* / [И.В. Орлов, Е.В. Божонок]. — Симферополь:ДИАЙПИ, 2010. — 156 с.

[3] Орлов И.В. *Условия существования, K–непререрывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1* / [И.В. Орлов, Е.В. Божонок] // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". — 2006. — Т. 19(58), № 2. — С. 63–78.

[4] Schmeisser Hans-Jurgen. *Recent developments in the theory of function spaces with dominating mixed smoothness.* / [Hans-Jurgen Schmeisser]. — Mathematical Institute, Praha, 2007. — PP.145–204.

[5] Кузьменко Е.М. *Условия корректной определенности и компактной непрерывности вариационных функционалов в пространствах Соболева* $W^{1,p}(D)$ / [Е.М. Кузьменко] // Ученые записки ТНУ, серия "Физико-математические науки". — 2010. — Т. 23(62), № 1. — С. 1-15.

[6] *Оптимальное управление* / [Э.М. Галеев, М.И. Зеликин, С.В. Конягин, Г.Г. Магарил-Ильяев и др.]; под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.

[7] Березанский Ю.М. *Функциональный анализ.* / [Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель]. — К.: Вища школа, 1990. — 600 с.

[8] Гельфанд И.М. *Вариационное исчисление* / [И.М. Гельфанд, С.В. Фомин]. — М.: ФМ, 1961. — 230 с.

[9] Картан А. *Дифференциальное исчисление* / [А. Картан]. — М.: Мир, 1971. — 383 с.

Умови K-диференційовності та повторной K-диференційовності варіаційних функционалів в просторі Соболєва $W^{1,p}$ функцій багатьох змінних.

Для інтегрантів $f(x,y,z)$ варіаційних функционалів $\int_D f(x,y,y')dx$, що діють в просторі Соболєва $W^{1,p}(D)$, $p \geq 1$, над компактною областю $D \subset \mathbb{R}^n$, вводяться класи Вейєрштрасса $W^1K_p(z)$ та $W^2K_p(z)$, які досліджувалися раніше у випадку простору Соболєва $W^{1,2}$ над відрізком. Визначено, що попадання інтегранту до відповідного класу Вейєрштрасса гарантує компактну диференційовність відповідного порядку для варіаційних функционалів.

Ключові слова: варіаційний функціонал, простір Соболєва, компактна диференційовність, класи Вейєрштрасса, домінантна мішана гладкість.

Conditions of compact differentiability and repeated compact differentiability of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}$ of functions of several variables.

Weierstrass classes $W^1K_p(z)$ and $W^2K_p(z)$ which have been previously researched for the occasion of Sobolev space $W^{1,2}$ over segment are introduced for the integrands $f(x,y,z)$ of variational functionals $\int_D f(x,y,y')dx$, acting within of Sobolev space $W^{1,p}(D)$, $p \geq 1$ over the compact area $D \subset \mathbb{R}^n$. Belonging the integrant to the correspondent Weierstrass class is shown to guarantee compact differentiability of correspondent order for the variational functional.

Keywords: variational functional, Sobolev space, compact differentiability, Weierstrass classes, dominating mixed smoothness.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 61–74.

УДК 517.928

А. М. Погребицкая, С. И. Смирнова

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ДВОЙНОГО ГИБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЕРКИН РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В работе приведена аналитическая оценка двойного гибридного ВКБ-Галеркин решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, возникающего в ряде задач математической физики. Доказан асимптотический характер полученного гибридного решения.

Ключевые слова: нелинейное уравнение второго порядка, гибридное ВКБ-Галеркин решение, асимптотичность приближенного решения.

Введение

Методы возмущений или асимптотические методы малого параметра для решения дифференциальных уравнений представляют собой один из наиболее мощных способов современной прикладной математики. Они позволяют получать приближенные аналитические представления решений достаточно сложных линейных и нелинейных краевых задач, как для обыкновенных дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных.

Как показано в работах у роботах [1],[2], одним из эффективных асимптотических подходов является гибридный метод, идея которого состоит в применении любого асимптотического метода (метода возмущений, ВКБ и других) и метода Галеркина. Использование гибридного асимптотико–численного метода на базе двойного асимптотического разложения в нелинейных уравнениях является одним из новых направлений исследования задач математической физики. Основная идея этого подхода приведена в работе [3].

Рассматривается нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами общего вида:

$$\varepsilon^2 T''(x) + a(x,\varepsilon)T'(x) - \beta b(x,\varepsilon)Q(T) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{T(d)}{dx} = D^*, \qquad T(f) = F^*, \tag{2}$$

где ε, β — малые параметры, $a(x,\varepsilon)$, $b(x,\varepsilon)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, причем $a(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, $b(x,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$.

Функция $Q(T)$ может быть целой рациональной, при условии, что наивысший показатель степени $m \geq 2$ — целое число, или раскладываться в ряд Маклорена.

Для получения замкнутого аналитического решения уравнения (1) используется метод двойного гибридного асимптотического разложения (см. [6]). Впервые гибридный ВКБ-Галеркин метод был предложен Грищаком В.З. (см. [2]). На первом этапе применения данного подхода, представляя функцию $T(x)$ в виде ряда по степеням параметра β:

$$T(x,\beta) = T_0(x) + \beta T_1(x) + \beta^2 T_2(x) + \ldots, \tag{3}$$

получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\varepsilon^2 T_0'' + a(x)T_0' = 0, \tag{4}$$

$$\varepsilon^2 T_1'' + a(x)T_1' = b(r)Q(T_0). \tag{5}$$

1. Построение аналитического решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

Согласно [3] гибридное ВКБ–Галеркин решение уравнения (4) имеет вид:

$$T_0^H(x) = C_1 \frac{G_1(x)}{E(x)} + C_2 \frac{G_2(x)}{E(x)}, \tag{6}$$

где

$$G_1(x) = \exp\left(\int\limits_d^x \delta_{0_1} g^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\right), \quad G_2(x) = \exp\left(\int\limits_d^x \delta_{0_2} g^{\frac{1}{2}}(\tau)\,d\tau\right), \tag{7}$$

$$\delta_{0_{1,2}} = G \pm \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}, \qquad G = \frac{g(d) - g(f)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx},$$

$$E(x) = \exp\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_d^x a(\tau)\,d\tau\right).$$

Рассмотрим дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка (5). Построим гибридное ВКБ-Галеркин решение этого уравнения для случая, когда функция $a(x)$ дифференцируема на отрезке $[d, f]$ и не обращается в нуль на этом отрезке. Пусть на концах отрезка выполняются условия

$$T_1'(d) = 0, \qquad T_1(f) = 0. \tag{8}$$

Для получения решения неоднородного уравнения (5) используем метод вариации произвольных постоянных (см. аналогично [7]), т.е. решение $T_1(x)$ уравнения (5) будем искать в виде:

$$T_1^H(x) = k_1(x)\frac{G_1(x)}{E(x)} + k_2(x)\frac{G_2(x)}{E(x)}. \tag{9}$$

Тогда решение уравнения (5) принимает вид:

$$T_1^H(x) = -\frac{G_1(x)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})E(x)}\left(\int_d^x \frac{E(\tau)b(\tau)Q(T_0)}{\sqrt{g(\tau)}G_1(\tau)}\,d\tau + s_1\right) + \\ + \frac{G_2(x)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})E(x)}\left(\int_d^x \frac{E(\tau)b(\tau)Q(T_0)}{\sqrt{g(\tau)}G_2(\tau)}\,d\tau + s_2\right). \tag{10}$$

Определив функции $T_0^H(x)$, $T_1^H(x)$ и подставив их в ряд (3), получим приближенное аналитическое решение уравнения (1) в виде:

$$T^H(x) = C_1\frac{G_1(x)}{E(x)} + C_2\frac{G_2(x)}{E(x)} + \\ + \beta\left[-\frac{G_1(x)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})E(x)}\left(\int_d^x \frac{E(\tau)b(\tau)Q(T_0)}{\sqrt{g(\tau)}G_1(\tau)}\,d\tau + s_1\right) + \right. \\ \left. + \frac{G_2(x)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})E(x)}\left(\int_d^x \frac{E(\tau)b(\tau)Q(T_0)}{\sqrt{g(\tau)}G_2(\tau)}\,d\tau + s_2\right)\right]. \tag{11}$$

2. Асимптотический характер гибридного ВКБ-Галеркин решения

Двойное гибридное решение уравнения (1) строится на базе комбинации метода фазовых интегралов и метода Галеркина, поэтому можно ожидать, что при малых значениях параметра решение имеет асимптотический характер.

Используя определение ε^r–асимптотического решения (см. [10], с. 291), докажем асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения (6) уравнения (4) на отрезке $[d, f]$ с краевыми условиями

$$T_0'(d) = D^*, \quad T_0(f) = F^*. \tag{12}$$

Теорема 1. *Если существует единственное решение $T_0(x, \varepsilon)$ краевой задачи (4),(12), а функция $a(x) = a(x, \varepsilon)$ дифференцируема по x на отрезке $[d, f]$, не обращается в нуль на этом отрезке и удовлетворяет условиям $a(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$,*

$\alpha \leqslant \sqrt{g(x)} \leqslant \beta$ на $[d, f]$, а $b(x) = b(x, \varepsilon)$ дифференцируема по x на отрезке $[d, f]$ и $b(x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, тогда для любого $x \in [d, f]$ функция (6) *является ε–асимптотическим решением уравнения* (4).

Доказательство. Вычисляя первую и вторую производные гибридного ВКБ-Галеркин решения (6) и подставляя их в уравнение (4), получаем, что T_0^H является общим решением уравнения

$$\varepsilon^2 (T_0^H)'' + \left(a(x) - \varepsilon^2 \left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right)\right)(T_0^H) - \\ - \frac{a(x)}{2}\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right) T_0^H = 0, \quad (13)$$

Используя способ, основанный в [10], обозначим

$$D_0 = T_0 - T_0^H \quad (14)$$

и запишем уравнение (4) в виде

$$\varepsilon^2 T_0'' + \left(a(x) - \varepsilon^2 \left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right)\right) T_0' - \frac{a(x)}{2}\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right) T_0 = \\ = -\varepsilon^2 \left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right) T_0' - \frac{a(x)}{2}\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right) T_0. \quad (15)$$

Обозначим

$$F = -\left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G\right). \quad (16)$$

Находя разность уравнений (15) и (13), используя (16), получим уравнение, которому удовлетворяет функция D_0:

$$\varepsilon^2 D_0'' + (a(x) + \varepsilon^2 F) D_0' + \frac{a(x)}{2} F D_0 = \left(\varepsilon^2 T_0' + \frac{a(x)}{2} T_0\right) F. \quad (17)$$

На концах отрезка $[d, f]$ функция D_0 удовлетворяет краевым условиям

$$D_0'(d) = 0, \qquad D_0(f) = 0. \quad (18)$$

Уравнение (17) можно рассматривать как неоднородное уравнение относительно D_0. Тогда, согласно [11], в случае, когда соответствующая линейная однородная задача (17)–(18) имеет только тривиальное решение (это выполняется кроме случая $\exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2} = 1$), интегральное представление решения линейной неоднородной задачи (17)–(18) имеет единственное решение

$$D_0 = \int\limits_d^f Gr(x, s)\left(\varepsilon^2 T_0' + \frac{a(s)}{2} T_0\right) F\, ds, \quad (19)$$

где $Gr(x, s)$ — функция Грина задачи (17)–(18).

Функция $Gr(x,s)$ определена при $x \in [d,f]$, $s \in (d,f)$ и при каждом $s \in (d,f)$ обладает следующими свойствами:

1) при $x \neq s$ функция $Gr(x,s)$ удовлетворяет соответствующему линейному однородному уравнению

$$\varepsilon^2 D_0'' + (a(x) + \varepsilon^2 F)D_0' + \frac{a(x)}{2} F D_0 = 0; \tag{20}$$

2) при $x = d$ и $x = f$ функция $Gr(x,s)$ удовлетворяет краевым условиям (18);

3) при $x = s$ функция $Gr(x,s)$ непрерывна по x, а ее производная по x имеет разрыв первого рода со скачком, равным $1/\varepsilon^2$, т.е.

$$Gr(s+0,s) = Gr(s-0,s), \qquad Gr_x'(s+0,s) - Gr_x'(s-0,s) = 1/\varepsilon^2.$$

Чтобы найти функцию Грина задачи (17)–(18), нужно построить решение $D_{0_1}(x) \neq 0$ уравнения (17), удовлетворяющее только первому ($x = d$) условию (18), и решение $D_{0_2}(x) \neq 0$, удовлетворяющее второму краевому условию.

Обозначим два линейно независимых решения уравнения (13) $T_0^{H_1}$ и $T_0^{H_2}$:

$$T_0^{H_1} = \frac{G_1(x)}{E(x)} = \frac{1}{E(x)} \exp\left((G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) \int\limits_d^x \sqrt{g(\tau)}\, d\tau \right), \tag{21}$$

$$T_0^{H_2} = \frac{G_2(x)}{E(x)} = \frac{1}{E(x)} \exp\left((G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) \int\limits_d^x \sqrt{g(\tau)}\, d\tau \right). \tag{22}$$

Тогда функции D_{0_1} и D_{0_2} могут быть определены как

$$D_{0_1} = T_0^{H_1} - T_0^{H_2}, \tag{23}$$

$$D_{0_2} = T_0^{H_1} -$$

$$- \exp\left(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2} \int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\, dx \right) \frac{\sqrt{g(f)}(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2} T_0^{H_2}. \tag{24}$$

Функцию $Gr(x,s)$ будем искать в виде

$$Gr(x,s) = \begin{cases} \varphi(s) D_{0_1}(x), & d \leqslant x \leqslant s, \\ \psi(s) D_{0_2}(x), & s \leqslant x \leqslant f. \end{cases}$$

Функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ выбираются так, чтобы выполнялись условия, накладываемые на функцию Грина, т.е., чтобы

$$\begin{cases} \psi(s) D_{0_2}(x) = \varphi(s) D_{0_1}(x), \\ \psi(s) D_{0_2}'(x) - \varphi(s) D_{0_1}'(x) = 1/\varepsilon^2. \end{cases}$$

Отсюда

$$\varphi(s) = \frac{D_{0_2}(s)}{\varepsilon^2(D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s) - D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s))},$$

$$\psi(s) = \frac{D_{0_1}(s)}{\varepsilon^2(D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s) - D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s))}.$$

Обозначив

$$P^* = D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s) - D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s),$$

$$e^* = \exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2} \neq 1,$$

и учитывая (23)–(24), получим

$$P^* = (T_0^{H_1} - T_0^{H_2})\left((T_0^{H_1})' - e^*(T_0^{H_2})'\right) - \left((T_0^{H_1})' - (T_0^{H_2})'\right)(T_0^{H_1} - e^*T_0^{H_2}) =$$

$$= \left(T_0^{H_1}(T_0^{H_2})' - (T_0^{H_1})'T_0^{H_2}\right)(1-e^*).$$

Учитывая (21)–(22), и то, что

$$(T_0^{H_1})' = T_0^{H_1}\left(-\frac{a(x)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(x)}\left(G + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\right)\right),$$

$$(T_0^{H_2})' = T_0^{H_2}\left(-\frac{a(x)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(x)}\left(G - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\right)\right),$$

имеем

$$P^* = -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\sqrt{g(x)}T_0^{H_1}T_0^{H_2}(1-e^*) =$$

$$= -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\sqrt{g(x)}(1-e^*)\frac{1}{E^2(x)}\exp\left(2G\int\limits_d^x \sqrt{g(t)}\,dt\right).$$

Тогда функция Грина примет вид

$$Gr(x,s) = \begin{cases} \dfrac{D_{0_1}(x)D_{0_2}(s)}{\varepsilon^2 P^*}, & d \leqslant x \leqslant s,\\ \dfrac{D_{0_1}(s)D_{0_2}(x)}{\varepsilon^2 P^*}, & s \leqslant x \leqslant f. \end{cases}$$

Запишем решение задачи (17)–(18) с помощью функции Грина

$$D_0 = \int\limits_d^f Gr(x,s)\left(\varepsilon^2 T_0' + \frac{a(s)}{2}T_0\right)F\,ds =$$

$$= -(T_0^{H_1}(x) - T_0^{H_2}(x))\int\limits_d^x \frac{(T_0^{H_1}(s) - e^*T_0^{H_2}(s))E^2(s)\left(\varepsilon^2 T_0' + \frac{a(s)}{2}T_0\right)F\,ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)} -$$

$$-(T_0^{H_1}(x)-e^*T_0^{H_2}(x))\int\limits_x^f \frac{(T_0^{H_1}(s)-T_0^{H_2}(s))e^2(s)\left(\varepsilon^2T_0'+\frac{a(s)}{2}T_0\right)F\,ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}.$$

Сделаем некоторые оценки

$$|G_1|\leqslant\max\{G_1,G_2\}=L,\quad |G_2|\leqslant\max\{G_1,G_2\}=L, \tag{25}$$

$$\left|\frac{F}{\sqrt{g(s)}}\right|=\left|2G+\frac{g'(s)}{2g(s)\sqrt{g(s)}}\right|\leqslant 2|G|+\frac{|g'(s)|}{2\min|g^{3/2}(s)|}=K, \tag{26}$$

$$\left|\frac{b(x,\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right|\leqslant B\quad \exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)\geqslant\exp(2G\alpha(s-d))\geqslant N, \tag{27}$$

где

$$N=\begin{cases}1,\ \ \alpha>0,\\ \exp(2G\alpha(f-d)),\ \ \alpha<0.\end{cases} \tag{28}$$

Учитывая (25)–(28), можно записать

$$|D_0|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}|1-e^*|}\left|\left(T_0^{H_1}(x)-T_0^{H_2}(x)\right)\cdot\right.$$

$$\cdot\int\limits_d^x\frac{(T_0^{H_1}(s)-e^*T_0^{H_2}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F}{\sqrt{g(s)}}E^2(s)\left(T_0'+\frac{a(s)}{2\varepsilon^2}T_0\right)\,ds+$$

$$\left.+(T_0^{H_1}(x)-e^*T_0^{H_2}(x))\int\limits_x^f\frac{(T_0^{H_1}(s)-T_0^{H_2}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F}{\sqrt{g(s)}}E^2(s)\left(T_0'+\frac{a(s)}{2\varepsilon^2}T_0\right)\,ds\ \right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(|G_1|+|G_2|)(|G_1|+e^*|G_2|)}{2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}|1-e^*|E^2(x)}\left|\int\limits_d^f\frac{F}{\sqrt{g(s)}}\frac{E(s)(E(s)T_0)'\,ds}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{L^2\varepsilon}{N\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|\frac{K}{E(r)}\left|\int\limits_d^f(E(s)T_0)'\,ds\right|.$$

Обозначив

$$C=\frac{L^2K}{N}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|,$$

получим

$$|D_0|\leqslant\frac{C\varepsilon}{E(x)\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left|E(f)T_0(f)-E(d)T_0(d)\right|,$$

или

$$|D_0|\leqslant\frac{C\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}|T_0(f)-T_0(d)/E(f)|.$$

Функция
$$\mu(x)=\frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}|T_0(f)-T_0(d)/E(f)|$$
ограничена при $\varepsilon\to 0$.

Таким образом, обозначив
$$M=\frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}|T_0(f)-T_0(d)/E(f)|,$$
имеем оценку
$$|T_0-T_0^H|\leqslant\varepsilon\cdot M, \tag{29}$$
что и доказывает ε–асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения (6), (9) уравнения (4).

Теорема доказана. □

Оценим точности аналитического решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (5), что даст возможность оценить в целом точность приближенного гибридного асимптотического решения задачи (1), полученного в работе [6].

Теорема 2. *Если существует единственное решение $T_1(x,\varepsilon)$ краевой задачи (5),(8), а функция $a(x)=a(x,\varepsilon)$ дифференцируема по x на отрезке $[d,f]$, не обращается в нуль на этом отрезке и удовлетворяет условиям $a(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$, $\alpha\leqslant\sqrt{g(x)}\leqslant\beta$ на $[d,f]$, а $b(x)=b(x,\varepsilon)$ дифференцируема по x на отрезке $[d,f]$ и $b(x,\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$, тогда оценка отклонения гибридного ВКБ-Галеркин приближения решения (9) от точного решения имеет вид:*
$$\left|T_1(x)-T_1^H(x)\right|\leqslant\varepsilon\cdot Q.$$

Доказательство. Подставляя первую и вторую производные гибридного ВКБ-Галеркин решения (10) в уравнение (5), получаем, что T_1^H является общим решением уравнения:
$$\varepsilon^2(T_1^H)''+\left(a(x)-\varepsilon^2\left(\frac{g'(x)}{2g(x)}+2\sqrt{g(x)}G\right)\right)(T_1^H)'-$$
$$-\frac{a(x)}{2}\left(\frac{g'(x)}{2g(x)}+2\sqrt{g(x)}G\right)T_1^H=b(x)Q(T_0^H). \tag{30}$$

Как и при доказательстве асимптотичности гибридного решения T_0^H в теореме 1, обозначим
$$D_1=T_1-T_1^H \tag{31}$$
и запишем уравнение (5) в виде
$$\varepsilon^2T_1''+\left(a(x)-\varepsilon^2\left(\frac{g'(x)}{2g(x)}+2\sqrt{g(x)}G\right)\right)T_1'-\frac{a(x)}{2}\left(\frac{g'(x)}{2g(x)}+2\sqrt{g(x)}G\right)T_1=$$

$$= -\varepsilon^2 \left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G \right) T_1' - \frac{a(x)}{2} \left(\frac{g'(x)}{2g(x)} + 2\sqrt{g(x)}G \right) T_1 + b(x)Q(T_0). \quad (32)$$

Находя разность уравнений (32) и (30), используя (31) и (16), получим уравнение, которому удовлетворяет функция D_1:

$$\varepsilon^2 D_1'' + (a(x) + \varepsilon^2 F) D_1' + \frac{a(x)}{2} F D_1 = \left(\varepsilon^2 T_1' + \frac{a(x)}{2} T_1 \right) F + b(x)(Q(T_0) - Q(T_0^H)). \quad (33)$$

На концах отрезка $[d, f]$ функция D_1 удовлетворяет краевым условиям

$$D_1(d) = 0, \qquad D_1'(f) = 0. \quad (34)$$

Уравнение (33) будем рассматривать как неоднородное уравнение относительно D_1. Тогда интегральное представление решения линейной неоднородной задачи (33)–(34) имеет единственное решение:

$$D_1 = \int\limits_d^f \tilde{G}r(x,s) \left(\left(\varepsilon^2 T_1' + \frac{a(s)}{2} T Y_1 \right) F + b(s)(Q(T_0) - Q(T_0^H) \right) ds, \quad (35)$$

где $\tilde{G}r(x,s)$ — функция Грина задачи (33)–(34).

Функция $\tilde{G}r(x,s)$ определена при $x \in [d,f]$, $s \in (d,f)$ и при каждом $s \in (d,f)$ обладает следующими свойствами:

1) при $x \neq s$ функция $\tilde{G}r(x,s)$ удовлетворяет соответствующему линейному однородному уравнению

$$\varepsilon^2 D_1'' + (a(x) + \varepsilon^2 F) D_1' + \frac{a(x)}{2} F D_1 = 0; \quad (36)$$

2) при $x = d$ и $x = f$ функция $\tilde{G}r(x,s)$ удовлетворяет краевым условиям (34);

3) при $x = s$ функция $\tilde{G}r(x,s)$ непрерывна по x, а ее производная по x имеет разрыв первого рода со скачком, равным $1/\varepsilon^2$, т.е.

$$\tilde{G}r(s+0,s) = \tilde{G}r(s-0,s), \qquad \tilde{G}r_x'(s+0,s) - \tilde{G}r_x'(s-0,s) = 1/\varepsilon^2.$$

Для нахождения функции Грина задачи (33)–(34), нужно построить решение $D_{1_1}(x) \neq 0$ уравнения (36), удовлетворяющее условию $D_{1_1}(d) = 0$, и решение $D_{1_2}(x) \neq 0$, удовлетворяющее условию $D_{1_2}'(f) = 0$.

Обозначим два линейно независимых решения уравнения (30) $T_1^{H_1}$ и $T_1^{H_2}$:

$$T_1^{H_1} = \frac{G_1(x)}{E(x)} = \frac{1}{E(x)} \exp\left((G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) \int\limits_d^x \sqrt{g(t)}\, dt \right), \quad (37)$$

$$T_1^{H_2} = \frac{G_2(x)}{E(x)} = \frac{1}{E(x)} \exp\left((G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) \int\limits_d^x \sqrt{g(t)}\, dt \right). \quad (38)$$

Тогда функции D_{1_1} и D_{1_2} могут быть определены как

$$D_{1_1} = T_1^{H_1} - T_1^{H_2}, \tag{39}$$

$$D_{1_2} = T_1^{H_1} - \\ - \exp\left(2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx\right)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}T_1^{H_2}. \tag{40}$$

Функцию $\tilde{G}r(x,s)$ будем искать в виде

$$\tilde{G}r(x,s) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(s)D_{1_1}(x), & d \leqslant x \leqslant s, \\ \tilde{\psi}(s)D_{1_2}(x), & s \leqslant x \leqslant f. \end{cases} \tag{41}$$

Функции $\tilde{\varphi}(s)$ и $\tilde{\psi}(s)$ выбираются так, чтобы выполнялись условия, накладываемые на функцию Грина, т.е., чтобы

$$\begin{cases} \tilde{\psi}(s)D_{1_2}(x) = \tilde{\varphi}(s)D_{1_1}(x), \\ \tilde{\psi}(s)D'_{1_2}(x) - \tilde{\varphi}(s)D'_{1_1}(x) = 1/\varepsilon^2. \end{cases} \tag{42}$$

Отсюда

$$\tilde{\varphi}(s) = \frac{D_{1_2}(s)}{\varepsilon^2(D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s))}, \tag{43}$$

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{D_{1_1}(s)}{\varepsilon^2(D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s))}. \tag{44}$$

Обозначив

$$\tilde{P}^* = D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s),$$

$$e^* = \exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2} \neq 1,$$

и учитывая (39)–(40), получим

$$P^* = (T_1^{H_1} - T_1^{H_2})((T_1^{H_1})' - e^*(T_1^{H_2})') - ((T_1^{H_1})' - ((T_1^{H_2})')(T_1^{H_1} - e^*T_1^{H_2}) = \\ = (T_1^{H_1}(T_1^{H_2})' - (T_1^{H_1})'T_1^{H_2})(1-e^*).$$

Учитывая (37)–(38), и то, что

$$(T_1^{H_1})' = T_1^{H_1}\left(-\frac{a(x)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(x)}\left(G + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\right)\right),$$

$$(T_1^{H_2})' = T_1^{H_2}\left(-\frac{a(x)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(x)}\left(G - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\right)\right),$$

имеем

$$\tilde{P}^* = -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\sqrt{g(s)}T_1^{H_1}T_1^{H_2}(1-e^*) =$$

$$= -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\frac{1}{E^2(s)}\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right). \tag{45}$$

Тогда функция Грина примет вид

$$\tilde{G}r(x,s)=\begin{cases}\dfrac{D_{1_1}(x)D_{1_2}(s)}{\varepsilon^2\tilde{P}^*}, & d\leqslant x\leqslant s,\\ \dfrac{D_{1_1}(s)D_{1_2}(x)}{\varepsilon^2\tilde{P}^*}, & s\leqslant x\leqslant f.\end{cases} \tag{46}$$

Запишем решение задачи (33)–(34) с помощью функции Грина

$$D_1=\int\limits_d^f\tilde{G}r(x,s)\left(\left(\varepsilon^2T_1'+\frac{a(s)}{2}T_1\right)F+b(s)(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds=$$

$$=-(T_1^{H_1}(x)-T_1^{H_2}(x))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_d^x\frac{(T_1^{H_1}(s)-e^*T_1^{H_2}(s))E^2(s)\left(\left(\varepsilon^2T_1'+\frac{a(s)}{2}T_1\right)F+b(s)(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}-$$

$$-(T_1^{H_1}(x)-e^*T_1^{H_2}(x))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_x^f\frac{(T_1^{H_1}(s)-T_1^{H_2}(s))E^2(s)\left(\left(\varepsilon^2T_1'+\frac{a(s)}{2}T_1\right)F+b(s)(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}. \tag{47}$$

Учитывая (25)–(28), можно записать

$$|D_1|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}|1-e^*|}\Big|(T_1^{H_1}(x)-T_1^{H_2}(x))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_d^x\frac{(T_1^{H_1}(s)-e^*T_1^{H_2}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}}E^2(s)\left(\left(T_1'+\frac{a(s)}{2\varepsilon^2}T_1\right)+\frac{b(s)}{\varepsilon^2F(s)}(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds+$$

$$+(T_1^{H_1}(x)-e^*T_1^{H_2}(x))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_x^f\frac{(T_1^{H_1}(s)-T_1^{H_2}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}}E^2(s)\left(\left(T_1'+\frac{a(s)}{2\varepsilon^2}T_1\right)+\frac{b(s)}{\varepsilon^2F(s)}(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds\ \Big|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(|G_1|+|G_2|)(|G_1|+e^*|G_2|)}{2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}|1-e^*|E^2(x)}\left|\int\limits_d^f\frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}}\frac{E(s)\left((E(s)T_1)'+\frac{E(s)b(s)}{\varepsilon^2F(s)}(Q(T_0)-Q(T_0^H))\right)ds}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^2K}{N\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|\left(\frac{1}{E(x)}\left|\int\limits_d^f (E(s)T_1)'\,ds\right|+\frac{B}{E^2(x)}\left|\int\limits_d^f \frac{E^2(s)}{F(s)}(Q(T_0)-Q(T_0^H))\,ds\right|\right).$$

Обозначив, как и ранее,

$$C=\frac{L^2K}{N}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|,$$

а также учитывая оценку (29), получим

$$|D_1|\leqslant\frac{C\varepsilon}{E(x)\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(\frac{|E(f)T_1(f)-E(d)T_1(d)|}{E(x)}+\right.$$

$$\left.+\frac{BM\varepsilon}{E^2(x)}\left|\int\limits_d^f\frac{E^2(s)}{F(s)}((Q(T_0)-Q(T_0^H))/(T_0=T_0^H))\,ds\right|\right),$$

или, учитывая оценку

$$\frac{1}{E^2(x)}\left|\int\limits_d^f\frac{E^2(s)}{F(s)}((Q(T_0)-Q(T_0^H))/(T_0=T_0^H))\,ds\right|\leqslant T,$$

$$|D_1|\leqslant\frac{C\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(|T_1(f)-T_1(d)/E(f)|+\varepsilon BMT\right).$$

Функция

$$\tilde{\mu}(x)=\frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(|T_1(f)-T_1(d)/E(f)|+\varepsilon BMT\right)$$

ограничена при $\varepsilon\to 0$.

Таким образом, обозначив

$$Q=\frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(|T_1(f)-T_1(d)/E(f)|+\varepsilon BMT\right),$$

имеем оценку

$$|T_1-T_1^H|\leqslant\varepsilon\cdot Q, \tag{48}$$

что и доказывает ε–асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения (9)– (8) уравнения (5).

Теорема доказана. □

Оценки (29) и (48), полученные в теоремах 1 и 2, дают возможность оценить в целом точность приближенного гибридного асимптотического решения (11) задачи (1).

Действительно, так как

$$T^H=T_0^H+\beta T_1^H$$

и при этом доказано, что

$$|T_0(x)-T_0^H(x)|\leqslant\varepsilon\cdot M,\qquad |T_1(x)-T_1^H(x)|\leqslant\cdot Q,$$

тогда $T^H(x)$ можем оценить следующим образом:

$$|T(x) - T^H(x)| \leqslant \varepsilon \cdot (M + \beta Q).$$

Это доказывает ε–асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения уравнения (1).

Таким образом, доказано, что решение (10) имеет асимптотический характер, то есть сделана оценка влияния параметров и коэффициентов на гибридное решение (10) уравнения (1).

В заключение заметим, что рассматриваемое в работе уравнение (1) возникает в задачах математической физики и описывает процессы теплообмена в конструкциях с переменной геометрией. Так, например, если положить в (1) $a(x) = 1/x$, $b(x) = -\varepsilon^2$, $Q(T) = e^T$, то уравнение (1) описывает процесс распространения температуры в цилиндре при $\varepsilon = 1$ и в сфере при $\varepsilon = \sqrt{2}/2$ (см. [4]). А также, при определенных значениях переменных коэффициентах [5], данное уравнение описывает сложный теплообмен излучением кольцевых ребер трапецеидального сечения. Ребра различного сечения (трапеция, прямоугольник и треугольник) используются в аэрокосмических установках. Гибридный подход к каждому конкретному случаю был рассмотрен в работах [3], [6], а асимптотичность гибридного решения задачи сложного теплообмена в кольцевых ребрах доказана в работах [8],[9].

Список литературы

[1] Geer J.F. *A hybrid perturbation–Galerkin technique with combines multiple expansions* /J.F. Geer, C.M. Andersen // Rep. NASA, Hempton, Virginia, USA. – 1989. – P. 1–36.

[2] Грищак В.З. *Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування* /Грищак В.З. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2009. – 226 с.

[3] Погребицкая А.М. *Приближенное аналитическое решение задачи о распространении тепла, сводящейся к нелинейному сингулярному дифференциальному уравнению с переменными коэффициентами* / А.М. Погребицкая // Вестник, Казахский национальный педагогический университет имени Абая. Серия: фиизико–математические науки. – 2008. – Т.22,№2. – С.130–134.

[4] Na T.Y. *A method for the solution of conduction heat transfer with non–linear heat generation* /T.Y. Na, S.G. Tang // ZAMM. – 1969. – № 49. – P. 45–52.

[5] Келлер Х. *Лучистый теплообмен кольцевых ребер трапецеидальной формы* /Х. Келлер // Труды Амер. об-ва инженеров-механиков, сер.С, Теплопередача. – 1970. – № 2. – С. 118–121.

[6] Gristchak V.Z. *On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems* /V.Z. Gristchak, A.M. Pogrebitskaya // Technische mechanik. – 2011. – V.31, № 2. – P. 112–120.

[7] Грищак В.З. *Подвійний асимптотичний розклад у проблемі променевого теплообміну кільцевих ребер трапецеідальної форми* /В.З. Грищак, Г.М. Погребицька // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – № 52. – Вип.3. – С. 217–223.

[8] Погребицкая А.М. *К вопросу о точности приближенного аналитического решения нелинейной задачи теплоизлучения* /А.М. Погребицкая, С.И. Смирнова // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2009. – Т.22(61). – № 1. – С. 93–102.

[9] Погребицкая А.М. *Об оценке точности аналитического гибридного решения задачи теплопереноса* /А.М. Погребицкая, С.И. Смирнова // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия "Физико–математические науки". – 2010. – Т.23(62). – № 2. – С. 113–123.

[10] Моисеев Н.Н. *Асимптотические методы нелинейной механики.* /Н.Н. Моисеев – Москва: Наука, 1982. – 400 с.

[11] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. *Диференціальні рівняння в задачах: Навчальний посібник.* /А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк – К.: Либідь, 2003. – 504 с.

Аналітичного оцінка подвійного гібридного ВКБ–Гальоркін розв'язку нелінійного однорідного диференціального рівняння зі змінними коефіцієнтами

В роботі наведено аналітичну оцінку подвійного гібридного ВКБ-Гальоркін розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що виникає у ряді задач математичної фізики. ДОведено асимптотичний характер отриманого гібридного розв'язку. нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що описує математичну модель процесу теплоперенесення.

Ключові слова: нелінійне рівняння другого порядку, гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок, асимптотичність наближеного розв'язку.

An analytical estimate of the double hybrid VKB-Galerkin solution for the nonlinear homogeneous differential equation with the variable coefficients

In this paper the analytical estimate of an double hybrid WKB-Galerkin solution for the nonlinear second order differential equation, arising in some mathematical physics problems, is presented. Asymptotic character of corresponding hybrid solution is proved.

Keywords: second order nonlinear equation, hybrid WKB-Galerkin solution, approximate solution's asymptotic property.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 75–88.

УДК 517.98

И. А. Романенко

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КОМПАКТОВ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Дается описание подходящих фундаментальных систем компактов в общих интегральных пространствах L_p и пространствах Соболева $W^{n,p}$ функций одной переменной. Исследованы свойства шкал подпространств, порожденных фундаментальными системами компактов.

Ключевые слова: фундаментальные системы компактов, критерий компактности, компактные вложения, интегральные пространства, пространства Соболева, интегральный модуль непрерывности, индуктивная шкала пространств, индуктивный предел.

Введение

Начиная с классического критерия компактности Арцела - Асколи в пространстве непрерывных функций [1], в анализе уделялось много внимания получению критериев компактности в различных функциональных пространствах. Одним из наиболее известных является критерий М. Рисса в пространствах L_p (см. [2]), который обобщался затем в различных направлениях (см., например, [3]).

Однако, в ряде экстремальных задач удобнее не применять индивидуальный критерий компактности (или предкомпактности) множества, а описать подходящую, по возможности минимальную, фундаментальную систему компактных множеств, которые поглощают все остальные компакты в данном пространстве.

Так, в работах Орлова И.В. [4, 5] было показано, что удобную фундаментальную систему компактов в пространствах l_p образуют *компактные эллипсоиды*. Эти результаты были, в частности, применены к решению экстремальных вариационных задач в пространстве Соболева $H^1[a;b]$ (см. [6]), а также к исследованию проблемы Радона - Никодима для интеграла Бохнера (см. [7]).

Нашей задачей является описание подходящих фундаментальных систем компактов в общих интегральных пространствах L_p и пространствах Соболева $W^{n,p}$

функций одной переменной на отрезке, которые по своим свойствам сходны с системами компактных эллипсоидов в l_p.

С этой целью в работе введены так называемые *ω-компакты*, определяемые с помощью интегрального модуля непрерывности в $L_p[a;b]$ (соответственно, в $W^{n,p}[a;b]$).

В первом разделе работы введено понятие *ω-эллипсоида* в L_p и рассмотрены основные свойства ω-эллипсоидов. Во втором разделе показано, что компактные ω-эллипсоиды (ω-компакты) образуют фундаментальную систему компактов, то есть поглощают все остальные компакты в L_p. В разделах 3 и 4 показано, что подпространства, порожденные ω-компактами, образуют σ-индуктивную шкалу банаховых пространств с компактными вложениями, индуктивный предел которой совпадает с исходным пространством, а также показана плотность вложений таких подпространств в исходное пространство и эквивалентность непрерывного и векторного вложений. Наконец, предыдущие результаты перенесены на случай пространств Соболева $W^{n,p}$.

1. ω-эллипсоиды в $L_p[a;b]$ и их элементарные свойства.

Пусть $L_p[a;b],\ (1 \le p < \infty)$ — пространство абсолютно интегрируемых по Лебегу в p-ой степени функций на $[a;b]$ с нормой

$$\|x\|_{L_p} = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Зададим произвольную положительную функцию $\varepsilon = \varepsilon(\delta),\ 0 < \delta \le b-a$, убывающую при $\delta \searrow +0$, и число $R > 0$.

Определение 1.1. Назовем *ω-эллипсоидом* в $L_p[a;b]$ множество вида

$$\Omega_\varepsilon^R = \left\{ x \in L_p[a;b] \;\middle|\; \|x\|_{L_p} \le R\,;\ \sup_{\delta>0} \frac{\omega_x^p(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 1 \right\},$$

где $\omega_x^p(\delta) = \sup\limits_{|h|\le\delta} \|x(t+h) - x(t)\|_{L_p}$ — интегральный модуль непрерывности в $L_p[a;b]$ (см. [8]).

Рассмотрим ряд свойств ω-эллипсоидов.

Предложение 1.1. *Любой ω-эллипсоид — абсолютно выпуклое множество.*

Доказательство. 1). Пусть $x_1,\ x_2 \in \Omega_\varepsilon^R$. Тогда

$$\|x_i\|_{L_p} \le R\,; \quad \sup_{\delta>0} \frac{\omega_{x_i}^p(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 1 \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда при любом $0 \le \lambda \le 1$ имеем:

$a)$ $\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|_{L_p} \le |\lambda| \cdot \|x_1\|_{L_p} + |1-\lambda| \cdot \|x_2\|_{L_p} \le \lambda \cdot R + (1-\lambda) \cdot R = R$;

$$b)\ \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} =$$
$$= \sup_{\delta>0} \frac{\sup\limits_{|h|\le\delta} \|\lambda x_1(t+h) + (1-\lambda)x_2(t+h) - (\lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t))\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} \le$$
$$\le \sup_{\delta>0} \frac{\lambda \sup\limits_{|h|\le\delta} \|x_1(t+h) - x_1(t)\|_{L_p} + (1-\lambda) \sup\limits_{|h|\le\delta} \|x_2(t+h) - x_2(t)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} \le$$
$$\le \lambda \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_1}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} + (1-\lambda) \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_2}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Таким образом, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Omega^R_\varepsilon$, то есть множество Ω^R_ε выпукло.

2). Пусть $x \in \Omega^R_\varepsilon$. Тогда

$$a)\ \|-x\|_{L_p} = \|x\|_{L_p} \le R; \quad b)\ \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{-x}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} = \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_x(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 1.$$

Значит, $(-x) \in \Omega^R_\varepsilon$.

Таким образом, множество Ω^R_ε выпукло и симметрично, то есть абсолютно выпукло.

□

Предложение 1.2. *Любой ω-эллипсоид — замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность точек из ω-эллипсоида Ω^R_ε, сходящаяся по норме L_p к некоторому $x_0 \in L_p[a;b]$. Тогда

$$\|x_n\|_{L_p} \le R\,; \quad \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_n}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N});$$
$$\|x_n - x_0\|_{L_p} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда:

$a)$ $\|x_0\|_{L_p} = \|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\|_{L_p} = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_{L_p} \le \lim\limits_{n\to\infty} R = R$;

$$b)\ \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_0}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} = \sup_{\delta>0} \frac{\sup\limits_{|h|\le\delta} \|x_0(t+h) - x_0(t)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} =$$
$$= \sup_{\delta>0} \frac{\sup\limits_{|h|\le\delta} \|x_0(t+h) - x_n(t+h) + x_n(t+h) - x_n(t) + x_n(t) - x_0(t)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} \le$$

$$\le \sup_{\delta>0} \frac{\sup\limits_{|h|\le\delta} \|x_n(t+h) - x_0(t+h)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} + \sup_{\delta>0} \frac{\sup\limits_{|h|\le\delta} \|x_n(t+h) - x_n(t)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} +$$

$$+ \sup_{\delta>0} \frac{\|x_n(t) - x_0(t)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} \le 2\sup_{\delta>0} \frac{\|x_n - x_0\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} + \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_n}(\delta)}{\varepsilon(\delta)}. \tag{1}$$

Зафиксируем $\eta > 0$, $\delta > 0$ и подберем номер $N = N(\eta,\, \delta)$ такой, чтобы

$$(n > N) \Rightarrow \|x_n - x_0\|_{L_p} < \eta \cdot \varepsilon(\delta). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует при $n > N$:

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_0}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 2\sup_{\delta>0} \frac{\eta\cdot\varepsilon(\delta)}{\varepsilon(\delta)} + 1 \le 2\eta + 1. \tag{3}$$

Отсюда, переходя к пределу справа в (3) при $\eta \to 0$, получаем

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_0}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 1 \text{ и, следовательно, } x_0 \in \Omega^R_\varepsilon.$$

Таким образом, ω-эллипсоид Ω^R_ε замкнут.

□

Предложение 1.3. *Для любого ω-эллипсоида Ω^R_ε и любого $\lambda > 0$ верно:*

$$\lambda \cdot \Omega^R_\varepsilon = \Omega^{\lambda R}_{\lambda\,\varepsilon}.$$

Доказательство. 1). Пусть $x \in \Omega^R_\varepsilon,\ \lambda > 0$. Тогда

a) $\|\lambda\, x\|_{L_p} = \lambda \|x\|_{L_p} \le \lambda R$;

b) $\omega^p_{\lambda\, x}(\delta) = \sup\limits_{|h|\le\delta} \|\lambda\, x(t+h) - \lambda\, x(t)\|_{L_p} = \lambda \sup\limits_{|h|\le\delta} \|x(t+h) - x(t)\|_{L_p} = \lambda\, \omega^p_x(\delta)$,

откуда

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{\lambda\, x}(\delta)}{\lambda\, \varepsilon(\delta)} = \sup_{\delta>0} \frac{\lambda\omega^p_x(\delta)}{\lambda\, \varepsilon(\delta)} = \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_x(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 1.$$

Значит, $\lambda\, x \in \Omega^{\lambda R}_{\lambda\,\varepsilon}$ и, следовательно, $\lambda \cdot \Omega^R_\varepsilon \subset \Omega^{\lambda R}_{\lambda\,\varepsilon}$.

2). Обратно, пусть $x \in \Omega^{\lambda R}_{\lambda\,\varepsilon}$. Тогда

$$a)\ \left\| \frac{1}{\lambda}\, x \right\|_{L_p} = \frac{1}{\lambda} \|x\|_{L_p} \le \frac{1}{\lambda}\, \lambda\, R = R;$$

$$b)\ \omega^p_{\frac{1}{\lambda}\, x}(\delta) = \sup_{|h|\le\delta} \left\| \frac{1}{\lambda}\, x(t+h) - \frac{1}{\lambda}\, x(t) \right\|_{L_p} = \frac{1}{\lambda}\, \omega^p_x(\delta).$$

Отсюда

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{\frac{1}{\lambda}\, x}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} = \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_x(\delta)}{\lambda\, \varepsilon(\delta)} \le 1.$$

Следовательно, $\frac{1}{\lambda}\, x \in \Omega^R_\varepsilon$, откуда $\frac{1}{\lambda} \cdot \Omega^{\lambda R}_{\lambda\,\varepsilon} \subset \Omega^R_\varepsilon$, т. е. $\Omega^{\lambda R}_{\lambda\,\varepsilon} \subset \lambda \cdot \Omega^R_\varepsilon$.

Таким образом, $\lambda \cdot \Omega_{\varepsilon}^{R} = \Omega_{\lambda\varepsilon}^{\lambda R}$.

$\square$

Предложение 1.4. *Для любых двух ω-эллипсоидов $\Omega_{\varepsilon_1}^{R}$ и $\Omega_{\varepsilon_2}^{R}$ верно:*

$$\left(\sup_{\delta>0} \frac{\varepsilon_1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} \le 1\right) \Rightarrow \left(\Omega_{\varepsilon_1}^{R} \subset \Omega_{\varepsilon_2}^{R}\right). \tag{4}$$

Если $\varepsilon_1(+0) = 0$, то верно и обратное:

$$\left(\Omega_{\varepsilon_1}^{R} \subset \Omega_{\varepsilon_2}^{R}\right) \Rightarrow \left(\sup_{\delta>0} \frac{\varepsilon_1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} \le 1\right).$$

Доказательство. Пусть условие (4) выполнено, $x \in \Omega_{\varepsilon_1}^{R}$. Тогда

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega_x^p(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} = \sup_{\delta>0} \left(\frac{\omega_x^p(\delta)}{\varepsilon_1(\delta)} \cdot \frac{\varepsilon_1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)}\right) \le \sup_{\delta>0} \frac{\omega_x^p(\delta)}{\varepsilon_1(\delta)} \cdot \sup_{\delta>0} \frac{\varepsilon_1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} \le 1.$$

Отсюда $x \in \Omega_{\varepsilon_2}^{R}$ и, следовательно, $\Omega_{\varepsilon_1}^{R} \subset \Omega_{\varepsilon_2}^{R}$.

Обратно, пусть $\Omega_{\varepsilon_1}^{R} \subset \Omega_{\varepsilon_2}^{R}$, $\varepsilon_1(+0) = 0$. Допустим, что условие (4) не выполнено, т. е.

$$\sup_{\delta>0} \frac{\varepsilon_1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} > 1. \tag{5}$$

Покажем, что найдется такая функция $x \in \Omega_{\varepsilon_1}^{R}$, для которой $\omega_x^p(\delta) = \varepsilon_1(\delta)$.

Для простоты предположим, что $p = 1$, $[a; b] = [0; 1]$, $\varepsilon_1 \in C^1[0; 1]$. Положим $x(t) = \varepsilon_1'(1-t)$, $0 \le t \le 1$. Тогда при $h > 0$:

$$\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|dt = \int_{1-h}^1 x(t)dt = \int_{1-h}^1 \varepsilon_1'(1-t)dt = -\int_h^0 \varepsilon_1'(u)du =$$
$$= \varepsilon_1(h) - \varepsilon_1(+0) = \varepsilon_1(h). \tag{6}$$

При $h < 0$ выкладка аналогична. Отсюда, переходя в (6) к супремуму по $|h| \le \delta$, получаем

$$\omega_x^1(\delta) = \varepsilon_1(\delta). \tag{7}$$

Из (5) и (7) следует:

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega_x^1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} > 1,$$

откуда $x \notin \Omega_{\varepsilon_2}^{R}$, что ведет к противоречию. К общему случаю ($\varepsilon_1 \notin C^1$) легко перейти, аппроксимируя $\varepsilon_1(\delta)$ функциями класса C^1.

$\square$

2. Компактные ω-эллипсоиды, как фундаментальная система компактов в $L_p[a;b]$.

Получим вначале критерий компактности ω-эллипсоида Ω_ε^R, используя известный критерий М. Рисса [2] компактности в $L_p[a;b]$, сформулированный в виде леммы.

Лемма 2.1. *Ограниченное замкнутое множество $C \subset L_p[a,b]$ компактно тогда и только тогда, когда*

$$\omega_x^p(\delta) \rightrightarrows 0 \text{ при } \delta \to +0 \ \text{ по } x \in C.$$

Теорема 2.1. *ω-эллипсоид Ω_ε^R в $L_p[a;b]$, $1 \le p < \infty$ компактен тогда и только тогда, когда $\varepsilon(\delta) \searrow 0$ при $\delta \searrow +0$.*

Доказательство. Пусть Ω_ε^R компактен. Тогда, по лемме 2.1 $\omega_x^p(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$ равномерно по $x \in \Omega_\varepsilon^R$. Следовательно, по sup-критерию равномерной сходимости, $\widetilde{\varepsilon}(\delta) = \sup\limits_{x \in \Omega_\varepsilon^R} \omega_x^p(\delta) \searrow 0$ при $\delta \searrow +0$. При этом из неравенства $\omega_x^p \le \varepsilon(\delta)$ переходом к супремуму по $x \in \Omega_\varepsilon^R$ получаем $\widetilde{\varepsilon}(\delta) \le \varepsilon(\delta)$, откуда $\Omega_{\widetilde{\varepsilon}}^R \subset \Omega_\varepsilon^R$. С другой стороны, для любого $\delta > 0$ и любого $x \in \Omega_\varepsilon^R$ получаем $\dfrac{\omega_x^p(\delta)}{\widetilde{\varepsilon}(\delta)} \le 1$, откуда $\sup\limits_{\delta > 0} \dfrac{\omega_x^p(\delta)}{\widetilde{\varepsilon}(\delta)} \le 1$. Отсюда $x \in \Omega_{\widetilde{\varepsilon}}^R$, а значит, $\Omega_\varepsilon^R \subset \Omega_{\widetilde{\varepsilon}}^R$. Таким образом, $\Omega_{\widetilde{\varepsilon}}^R = \Omega_\varepsilon^R$, а т. к. $\widetilde{\varepsilon}(\delta) \searrow 0$, то и $\varepsilon(\delta) \searrow 0$ при $\delta \searrow +0$.

Обратно, пусть $\varepsilon(\delta) \searrow 0$ при $\delta \searrow +0$. Эллипсоид Ω_ε^R замкнут по предложению 1.2. При этом

$$\forall\, x \in \Omega_\varepsilon^R \quad \omega_x^p(\delta) \le \varepsilon(\delta) \searrow 0 \text{ при } \delta \searrow +0, \text{ откуда } \sup_{x \in \Omega_\varepsilon^R} \omega_x^p \le \varepsilon(\delta).$$

Следовательно, по критерию М. Рисса (**лемма 2.1**), Ω_ε^R компактен.

□

Определение 2.1. Назовем *ω-компактом* любой компактный ω-эллипсоид Ω_ε^R в $L_p[a;b]$.

Как и в [5], под термином *"фундаментальная система компактов"* мы будем понимать систему абсолютно выпуклых компактных множеств, поглощающих все остальные компакты в данном пространстве. Покажем, что ω-компакты образуют фундаментальную систему компактов в $L_p[a;b]$.

Теорема 2.2. *Замкнутое ограниченное множество $C \subset L_p[a;b]$ компактно тогда и только тогда, когда C содержится в некотором ω-компакте Ω_ε^R.*

Доказательство. Пусть C содержится в некотором ω-компакте Ω_ε^R. Тогда C — компакт, как замкнутое подмножество компакта.

Обратно, пусть C — компакт в $L_p[a;b]$. Тогда, по критерию М. Рисса, $\omega_x^p(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$ равномерно по $x \in C$. Пусть $\varepsilon(\delta) = \sup\limits_{x\in C} \omega_x^p(\delta)$. Следовательно, $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$. Кроме того, т. к. C ограничено, то $\sup\limits_{x\in C} \|x\| =: R < \infty$.

Рассмотрим эллипсоид Ω_ε^R. Тогда он компактен, т. к. $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$. При этом $C \subset \Omega_\varepsilon^R$, т. к.

$$x \in C \Rightarrow \|x\| \le R, \quad \omega_x^p(\delta) \le \varepsilon(\delta) \Rightarrow x \in \Omega_\varepsilon^R.$$

□

3. Разложение банаховых пространств в K-шкалу с компактными вложениями.

В работе [7] было показано, что любое пространство Фреше является индуктивным пределом шкалы банаховых подпространств, порожденных всеми абсолютно выпуклыми компактами (K-шкалы). При этом индуктивную шкалу таких подпространств можно рассматривать как шкалу с компактными (и даже с σ-компактными) вложениями. В данном разделе предложена более простая схема доказательства этих фактов в случае, когда E — банахово пространство.

Пусть E — банахово пространство, $\mathcal{C}(E)$ — система всех абсолютно выпуклых компактов в E.

Для каждого $C \in \mathcal{C}(E)$ обозначим $E_C = (spanC, \|\cdot\|_C)$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_C$, порожденной множеством C.

Индуктивную шкалу банаховых пространств $\{E_C\}_{C\in\mathcal{C}(E)}$ обозначим $\overrightarrow{E}_{\mathcal{C}}$, а ее индуктивный предел — $E_{\mathcal{C}}$, т. е.

$$\overrightarrow{E}_{\mathcal{C}} = \{E_C\}_{C\in\mathcal{C}(E)}; \quad E_{\mathcal{C}} = \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} E_C = \varinjlim \overrightarrow{E}_{\mathcal{C}}.$$

Как показано в [5], для любого банахова пространства E верно: $E_{\mathcal{C}} \cong E$.

Определение 3.1. Будем говорить, что банахово пространство E *обладает свойством компактной аппроксимации* ($E \in K_{ap}$), если $\forall\, C \in \mathcal{C}(E)\ \exists\, C' \in \mathcal{C}(E)$ такой, что имеет место компактное вложение $E_C \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow E_{C'}$.

Теорема 3.1. *Любое банахово пространство E обладает свойством компактной аппроксимации ($E \in K_{ap}$). Более того, положим*

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{\|x\|}},\ x \ne 0; \quad \varphi(0) = 0.$$

Тогда:

(i) $\forall\, C \in \mathcal{C}(E)$ *вложение* $E_C \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow E_{C_\varphi}$ *компактно, где* $C_\varphi = \overline{co}\,\varphi(C)$;
(ii)
$$(x \in C) \Rightarrow \left(\|x\|_{C_\varphi} \le \sqrt{\|x\|}\right). \tag{8}$$

Доказательство. Функция $\varphi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{\|x\|}}$ непрерывна при $x \ne 0$. Проверим непрерывность при $x = 0:$
$$\|\varphi(x)\| = \left\|\frac{x}{\sqrt{\|x\|}}\right\| = \frac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|}} = \sqrt{\|x\|} \to 0 = \varphi(0) \text{ при } x \to 0.$$
Следовательно, $\varphi(C)$ — компакт по теореме Вейерштрасса. Легко видеть при этом, что $\varphi(C)$, а значит, и $\overline{co}\,\varphi(C)$ — абсолютно выпуклое множество, вместе с C. Поскольку $C_\varphi = \overline{co}\,\varphi(C)$ — также компакт (см. [9]), то $C_\varphi \in \mathcal{C}(E)$. Докажем, что вложение E_C в E_{C_φ} компактно.

Пусть $\widetilde{x} \in \partial^{co} C$ ($\partial^{co} C$ — выпуклая граница C). Тогда, при некотором $\lambda \ge \dfrac{1}{\sqrt{\|\widetilde{x}\|}}$, верно $\lambda\,\widetilde{x} \in \partial^{co} C_\varphi$. Отсюда
$$\|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \le \sqrt{\|\widetilde{x}\|}. \tag{9}$$
Если же $x \in C$, $\widetilde{x} = \mu\, x$ (при некотором $\mu \ge 1$), то подставляя $\widetilde{x} = \mu\, x$ в (9), получаем:
$$\|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} = \|\mu\, x\|_{C_\varphi} = \mu \|x\|_{C_\varphi} \le \sqrt{\|\widetilde{x}\|} = \sqrt{\|\mu\, x\|}.$$
Отсюда
$$\|x\|_{C_\varphi} \le \frac{1}{\mu}\sqrt{\|\mu\, x\|} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\|x\|} \le \sqrt{\|x\|}, \tag{10}$$
т. е. (8) верно. Заметим также, что из (10) следует при $\mu \ge 1$:
$$\sqrt{\|x\|} \ge \sqrt{\|\mu\, x\|} \ge \mu\sqrt{\|x\|}.$$

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subset C$. Тогда, существует подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящаяся к некоторому $x_0 \in C$, т. е. $x_{k_n} - x_0 \overset{E_C}{\to} 0$. При этом
$$x_{k_n} - x_0 \in C - C = 2\,C, \text{ т. е. } \frac{x_{k_n} - x_0}{2} \in C \ (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$
Применяя (8) к $x = \dfrac{x_{k_n} - x_0}{2}$, получаем:
$$\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|_{C_\varphi} \le \sqrt{\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|}, \text{ откуда } \|x_{k_n} - x_0\|_{C_\varphi} \le 2\sqrt{\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|} \to 0$$
при $n \to \infty$, ввиду непрерывности φ. Таким образом, $x_{k_n} - x_0 \overset{E_{C_\varphi}}{\to} 0$, т. е. C предкомпактно в E_{C_φ} и, следовательно, вложение E_C в E_{C_φ} компактно.

$\square$

Следствие 3.1. *Для любого ω-компакта $\Omega_\varepsilon^R \subset E = L_p[a;b]$ существует ω-компакт $\Omega_{\varepsilon'}^{R'} \subset E$ такой, что вложение $E_{\Omega_\varepsilon^R} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\Omega_{\varepsilon'}^{R'}}$ компактно, т.е. индуктивная шкала пространств $\left\{E_{\Omega_\varepsilon^R}\right\}_{\Omega_\varepsilon^R \in \mathcal{C}(E)}$ — шкала с компактными вложениями.*

Доказательство. По теореме 3.1 вложение $E_{\Omega_\varepsilon^R} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{(\Omega_\varepsilon^R)_\varphi} =: E_{C_\varphi}$ компактно. Так как ω-компакты Ω_ε^R образуют фундаментальную систему компактов, то C_φ содержиться в некотором ω-компакте $\Omega_{\varepsilon'}^{R'}$, а значит, вложение $E_{C_\varphi} \hookrightarrow E_{\Omega_{\varepsilon'}^{R'}}$ непрерывно. Следовательно, вложение $E_{\Omega_\varepsilon^R} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\Omega_{\varepsilon'}^{R'}}$ компактно.

□

Доказанный результат можно усилить.

Определение 3.2. Будем говорить, что банахово пространство E *обладает свойством σ-компактной аппроксимации* $\left(E \in K_{ap}^\sigma\right)$, если $\forall \{C_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}(E)\ \exists C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что все вложения $E_{C_n} \hookrightarrow\hookrightarrow E_C$ компактны ($n \in \mathbb{N}$).

Далее нам потребуется следующее утверждение, доказанное в [7].

Лемма 3.1. *Пусть E — пространство Фреше с определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_m\}_{m=1}^\infty$. Если $\{C_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}(E)$ и $\forall m \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = o\left(\frac{1}{diam_m(C_n)}\right)$, то*

$$C = \overline{co}\left(\bigcup_{n=1}^\infty \alpha_n C_n\right) \in \mathcal{C}(E). \tag{11}$$

В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} diam_m(C_n) = 0\ \forall m \in \mathbb{N}$ (т.е. $\alpha_n = 1$ в (11)), то $C \in \mathcal{C}(E)$.

Теорема 3.2. *Любое банахово пространство E обладает свойством σ-компактной аппроксимации $\left(E \in K_{ap}^\sigma\right)$.*

Доказательство. Пусть $C_n \in \mathcal{C}(E)$. Обозначим

$$r_n = \sup_{x,\, y \in C_n} \|x - y\| = diam(C_n) \quad (r_n < \infty,\ n \in \mathbb{N}).$$

Пусть $\alpha_n = \dfrac{1}{n\, r_n}$. Тогда

$$\frac{\alpha_n}{\frac{1}{r_n}} = \frac{1}{n} \to 0, \text{ то есть } \alpha_n = o\left(\frac{1}{r_n}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Положим

$$C = \overline{co}\left(\bigcup_{n=1}^\infty \frac{1}{n\, r_n}\, C_n\right).$$

Тогда $C \in \mathcal{C}(E)$ по лемме 3.1. Применяя следствие 3.1, найдем такое $C_\varphi \in \mathcal{C}(E)$, что вложение $E_C \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C_\varphi}$ компактно. Тем более, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$E_{C_n} = E_{\alpha_n C_n} \hookrightarrow E_C \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C_\varphi}.$$

Таким образом, шкала пространств $\overrightarrow{E}_{\mathcal{C}}$ — σ-индуктивная шкала с компактными вложениями [7].

□

Следствие 3.2. *Для любой последовательности ω-компактов $\{\Omega_{\varepsilon_n}^{R_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset E =$ $= L_p[a;b]$ существует ω-компакт $\Omega_{\varepsilon'}^{R'} \subset E$ такой, что вложения $E_{\Omega_{\varepsilon_n}^{R_n}} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\Omega_{\varepsilon'}^{R'}}$ компактны $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. По теореме 3.2, существует $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что вложения $E_{\Omega_{\varepsilon_n}^{R_n}} \hookrightarrow\hookrightarrow E_C$ компактны $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Так как ω-компакты Ω_ε^R образуют фундаментальную систему компактов, то C содержится в некотором ω-компакте $\Omega_{\varepsilon'}^{R'}$. Тогда, вложение $E_C \hookrightarrow E_{\Omega_{\varepsilon'}^{R'}}$ непрерывно. Следовательно, все вложения $E_{\Omega_{\varepsilon_n}^{R_n}} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\Omega_{\varepsilon'}^{R'}}$ компактны.

Таким образом, шкала пространств $\{E_{\Omega_\varepsilon^R}\}_{\Omega_\varepsilon^R \in \mathcal{C}(E)}$ — σ-индуктивная шкала с компактными вложениями.

□

4. Дополнительные свойства вложений в K-шкале интегральных пространств и пространств Соболева.

Вначале отметим, что предложение 1.3 позволяет включать в фундаментальную систему только ω-компакты Ω_ε^R с фиксированным $R = R_0 > 0$ (например, $R_0 = 1$). Далее, поскольку множество многочленов плотно в любом $E = L_p[a;b]$, то мы докажем, что вложение $E_{\Omega_\varepsilon^1} \hookrightarrow E$ плотно, доказав следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Существует такой ω-компакт $\Omega_{\varepsilon_0}^1$, что множество всех многочленов на $[a;b]$* плотно в $E_{\Omega_{\varepsilon_0}^1}$.

Доказательство. Пусть $P_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$. Оценим модуль непрерывности многочлена P_n в $L_p[a;b]$:

$$\omega_{P_n}^p(\delta) = \sup_{|h|\le\delta} \|P_n(t+h) - P_n(t)\|_{L_p} = \sup_{|h|\le\delta} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k (t+h)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \right\|_{L_p} =$$

$$= \sup_{|h|\le\delta} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \left((t+h)^k - t^k\right) \right\|_{L_p} = \sup_{|h|\le\delta} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{m=1}^{k} C_k^m\, t^{k-m} h^m \right\|_{L_p} =$$

$$= \sup_{|h|\le\delta}\left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k} a_k\, C_k^m\, t^{k-m} h^m\right\|_{L_p} \le \sup_{|h|\le\delta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k} C_k^m |a_k\, h^m| \|t^{k-m}\|_{L_p} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} c_k \delta^k \le M\cdot\delta \text{ при некотором } M>0,$$

где c_k $(k=\overline{1,n})$ — некоторые положительные константы.

Пусть $\varepsilon_0(\delta) = M\cdot\delta$. Тогда

$$\sup_{\delta>0}\frac{\omega^p_{P_n}(\delta)}{\varepsilon_0(\delta)} \le 1.$$

Следовательно, $P_n \in E_{\Omega^1_{\varepsilon_0}}$.

□

Следствие 4.1. *Для любого ω-компакта Ω^R_ε при $\sup\limits_{\delta>0}\dfrac{\delta}{\varepsilon_0(\delta)} < \infty$ в $E = L_p[a;b]$ вложение $E_{\Omega^R_\varepsilon} \hookrightarrow E$ плотно. Тем более, если $\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}$ поглощает $\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}$, то вложение $E_{\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}} \hookrightarrow E_{\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}}$ плотно.*

Таким образом, К-шкалу $\{E_{\Omega^R_\varepsilon}\}$ можно рассматривать как шкалу с плотными вложениями.

Следующая теорема доказывает эквивалентность векторного и непрерывного вложений $E_{\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}}$ в $E_{\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}}$.

Теорема 4.2. *Для любых ω-компактов $\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}$ и $\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}$ в $E = L_p[a;b]$ имеем:*

$$\left(E_{\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}} \subset E_{\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}}\right) \Leftrightarrow \left(\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1} \subset \lambda\cdot\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}\right)$$

при некотором $\lambda > 0$. Следовательно, векторное вложение и непрерывное вложение для пространств $E_{\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}}$ и $E_{\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}}$ эквивалентны.

Доказательство. В силу сделанного выше замечания, доказательство достаточно провести для случая $R_1 = R_2 = 1$. Кроме всего, отметим, что условие $\Omega^1_{\varepsilon_1} \subset \lambda\cdot\Omega^1_{\varepsilon_2}$ равносильно непрерывному вложению $E_{\Omega^1_{\varepsilon_1}} \hookrightarrow E_{\Omega^1_{\varepsilon_2}}$, из которого, очевидно, следует векторное вложение $E_{\Omega^1_{\varepsilon_1}} \hookrightarrow E_{\Omega^1_{\varepsilon_2}}$. Допустим теперь, что векторное вложение $E_{\Omega^1_{\varepsilon_1}}$ в $E_{\Omega^1_{\varepsilon_2}}$ разрывно, т. е.

$$\Omega^1_{\varepsilon_1} \not\subset \lambda\Omega^1_{\varepsilon_2} \quad (\forall\,\lambda>0).$$

Следовательно,

$$\forall\,\lambda>0 \quad \exists\, x_\lambda \in \Omega^1_{\varepsilon_1} :\; x_\lambda \notin \lambda\Omega^1_{\varepsilon_2} \Leftrightarrow \frac{x_\lambda}{\lambda} \notin \Omega^1_{\varepsilon_2}.$$

Выберем последовательность $\lambda_n \to \infty$ $(n\to\infty)$ и, соответственно,

$$x_n := x_{\lambda_n} \in \Omega^1_{\varepsilon_1} : \frac{x_n}{\lambda_n} \notin \Omega^1_{\varepsilon_2}.$$

Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержится в ω-компакте $\Omega^1_{\varepsilon_1}$, то существует подпоследовательность $x_{n_k} \xrightarrow{E} x_0 \in \Omega^1_{\varepsilon_1}$ при $k \to \infty$. При этом

$$\frac{x_{n_k}}{\lambda_{n_k}} \notin \Omega^1_{\varepsilon_2} \Rightarrow \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{\frac{x_{n_k}}{\lambda_{n_k}}}(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} > 1 \Leftrightarrow \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_{n_k}}(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} > \lambda_{n_k} \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}\omega^p_{x_{n_k}}(\delta) &= \sup_{|h|\le\delta} \|x_{n_k}(t+h) - x_{n_k}(t)\|_{L_p} = \\ &= \sup_{|h|\le\delta} \|x_{n_k}(t+h) - x_0(t+h) + x_0(t+h) - x_0(t) + x_0(t) - x_{n_k}(t)\|_{L_p} \le \\ &\le \sup_{|h|\le\delta} \|x_{n_k}(t+h) - x_0(t+h)\|_{L_p} + \sup_{|h|\le\delta} \|x_0(t+h) - x_0(t)\|_{L_p} + \\ &+ \|x_{n_k}(t) - x_0(t)\|_{L_p} \le 2\|x_{n_k} - x_0\|_{L_p} + \omega^p_{x_0}(\delta).\end{aligned}$$

Итак,

$$\omega^p_{x_{n_k}}(\delta) - \omega^p_{x_0}(\delta) \le 2\|x_{n_k} - x_0\|_{L_p}.$$

Меняя местами x_{n_k} и x_0 в предыдущей выкладке, получим:

$$\omega^p_{x_0}(\delta) - \omega^p_{x_{n_k}}(\delta) \le 2\|x_{n_k} - x_0\|_{L_p},$$

откуда

$$|\omega^p_{x_{n_k}}(\delta) - \omega^p_{x_0}(\delta)| \le 2\|x_{n_k} - x_0\|_{L_p}.$$

Следовательно,

$$\|x_{n_k}(t+h) - x_0(t)\|_{L_p} \to 0 \Rightarrow |\omega^p_{x_{n_k}}(\delta) - \omega^p_{x_0}(\delta)| \rightrightarrows 0$$

при $k \to \infty$ (равномерно по δ).

Переходя теперь в последнем неравенстве в (12) к пределу при $k \to \infty$, получаем:

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_0}(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} = \infty \Rightarrow x_0 \notin E_{\Omega^1_{\varepsilon_2}},$$

что противоречит условию.

□

Очевидно, все предыдущие результаты работы остаются в силе для пространств $L_p\left([a;b], \mathbb{R}^s\right)$, $s \in \mathbb{N}$, векторнозначных функций. Теперь несложно перенести полученные результаты на случай пространств Соболева векторнозначных функций $W^{n,p}\left([a;b], \mathbb{R}^m\right)$, $1 \le p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.3. *Для любого пространства Соболева $W^{n,p}\left([a;b], \mathbb{R}^m\right)$ в соответствующем пространстве $L_p\left([a;b], \mathbb{R}^{m(n+1)}\right)$ можно задать такую норму, эквивалентную стандартной, в которой справедливо изометричное вложение*

$$W^{n,p}\left([a;b], \mathbb{R}^m\right) \overset{\sim}{\hookrightarrow} L_p\left([a;b], \mathbb{R}^{m(n+1)}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим пространство Соболева $W^{n,p}\left([a;b],\,\mathbb{R}^m\right),\ (n\in\mathbb{N}_0,$ $p\geq 1,\, m\in\mathbb{N})$ со стандартной нормой:

$$\|x\|_{W^{n,p}} = \left(\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{a}^{b}\left(\|x^{(k)}(t)\|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поставим в соответствие каждому элементу $x\in W^{n,p}$ векторнозначную функцию $y:[a;b]\to\mathbb{R}^{m(n+1)}$ вида $y=(x,x',x'',\ldots,x^{(n)})$. При этом $y\in L_p\left([a;b],\,\mathbb{R}^{m(n+1)}\right)$.

Зададим в $L_p\left([a;b],\,\mathbb{R}^{m(n+1)}\right)$ следующую норму, эквивалентную стандартной:

$$\|y\|_{L_p} = \left(\sum_{k=0}^{n}\int\limits_{a}^{b}\left(\|(y_{km+1},\ldots,y_{(k+1)m})\|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В этой норме, при соответствии $x\leftrightarrow y=(x,x',x'',\ldots,x^{(n)})$ имеем:

$$\|x\|_{W^{n,p}} = \|y\|_{L_p},$$

откуда следует изометричное вложение

$$W^{n,p}\left([a;b],\,\mathbb{R}^m\right)\overset{\sim}{\hookrightarrow}L_p\left([a;b],\,\mathbb{R}^{m(n+1)}\right).$$

$\square$

Поскольку все доказанные ранее результаты автоматически переносятся на замкнутые подпространства пространств L_p, то из теоремы немедленно вытекает

Следствие 4.2. *Все предыдущие результаты* §§ 2−4 *справедливы, с соответствующими изменениями, для ω-эллипсоидов, ω-компактов и разложений в K-шкалы пространств Соболева $W^{n,p}\left([a;b],\,\mathbb{R}^m\right)$.*

Автор выражает благодарность И.В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Зорич В.А. *Математический анализ. Учебник Ч.II.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 640 С.

[2] Богачев В.И. *Основы теории меры Т.1.* – Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2003. – 544 С.

[3] Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения.* – Москва: Мир, 1969. – 1072 С.

[4] Орлов И.В. *Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы.* // Современная математика. Фундаментальные направления. – Т.29(2008). – С. 165–175.

[5] Орлов И.В. *Универсальные компакты в l_p.* // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – №5. – С. 112–121.

[6] Орлов И.В., Божонок Е.В. *Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1.* Учебное пособие / – Симферополь: ДИАЙПИ, 2010. – 156 С.

[7] Орлов И.В., Стонякин Ф.С. *Предельная форма свойства Радона-Никодима справедлива в любом пространстве Фреше.* // Современная математика. Фундаментальные направления. – Т.37(2010). – С. 55–69.

[8] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. –344 С.

[9] Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* – Москва: Мир, 1971. – 359 С.

Фундаментальні системи компактів в інтегральних просторах.

Дається опис відповідних фундаментальних систем компактів в загальних інтегральних просторах L_p і просторах Соболєва $W^{n,p}$ функцій однієї змінної. Досліджено властивості шкал підпросторів, породжених фундаментальними системами компактів.

Ключові слова: фундаментальні системи компактів, критерій компактності, компактні вкладення, інтегральні простори, простори Соболєва, інтегральний модуль неперервності, індуктивна шкала просторів, індуктивна границя.

Fundamental systems of compacta in integral spaces.

Description of appropriate fundamental systems of compacta in general integral spaces L_p and Sobolev spaces $W^{n,p}$ of functions of one variable is given. The properties of scales of subspaces generated by the fundamental systems of compacta were researched.

Keywords: fundamental systems of compacta, compactness criterion, compact embeddings, integral spaces, Sobolev spaces, integral modulus of continuity, inductive scale of spaces, inductive limit.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 89–97.

УДК 517.98

В. М. Статкевич

АНАЛОГИ ФОРМУЛ КРАМЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕРЕГУЛЯРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Предложена система линейных дифференциальных уравнений для функций на бесконечномерном гильбертовом пространстве, когда в качестве операторных коэффициентов выступают многочлены от нерегулярного эллиптического оператора $(Lu)(x) = j(u''(x))$. *Для такой системы доказаны аналоги формул Крамера.*

Ключевые слова: бесконечномерное пространство, оператор Лапласа-Леви, нерегулярный (существенно бесконечномерный) эллиптический оператор, формулы Крамера.

Введение

Оператор Лапласа для функций бесконечномерного аргумента ввёл П. Леви [1]. Предложенный им оператор Лапласа-Леви имеет необычные свойства с точки зрения конечномерной теории для оператора второго порядка– удовлетворяет правилу Лейбница $L(uv) = Lu \cdot v + u \cdot Lv$ и обращается в нуль на цилиндрических функциях. Последнее дало основание Г.Е. Шилову, редактору перевода [1], назвать такой оператор "существенно бесконечномерным". Различные версии оператора Лапласа-Леви изучались Е.М. Полищуком, М.Н. Феллером, Г.Е. Шиловым, А.С. Немировским, И.Я. Дорфман, В.Я. Сикирявым (подробная библиография и современное состояние теории изложено в [2]). Существенно бесконечномерный эллиптический оператор (СБЭО), введённый Ю.В. Богданским [3] (см. также [4, 5]), обобщает оператор Лапласа-Леви и наследует его основные свойства. Другой подход к построению дифференциальных операторов в бесконечномерном пространстве, основанный на представлении $(Lu)(x) = \mathrm{tr}\, Au''(x)$, где A – неотрицательный ядерный оператор,

$\operatorname{tr} A$ – его след, был предложен независимо Ю.Л. Далецким и Л. Гроссом (подробную библиографию см., например, в [6]).

Линейные уравнения порядка n с оператором Лапласа-Леви изучались в [7, 8], с оператором квазидифференцирования (одним из обобщений оператора Лапласа-Леви) – в [9, 10], с СБЭО – в [11]. В [11, теорема 1] для СБЭО и в данной работе для нерегулярного эллиптического оператора (см. п. 2) доказана единственность решений, а явные формулы решений совпадают: выясняется, что результат обусловлен функциональным классом и, как следствие, нильпотентностью полугруппы, порождаемой оператором. В [7, 10] в иных функциональных классах доказано существование фундаментальной системы решений, содержащей n элементов, построен аналог вронскиана. Полученные в п. 2 результаты используются в п. 3, но имеют также самостоятельное значение.

Системы $(Lu_k)(x) = \Phi_k(x, u_1, \ldots, u_n)$, $k = 1, \ldots, n$ с оператором Лапласа-Леви исследовались в [8], с оператором квазидифференцирования – в [9], с СБЭО – в [12]: получены условия существования и единственности решения, а для линейных систем $(Lu_k)(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{ik}(x)u_i(x) + \psi_k(x)$ (в [8] $\psi_k \equiv 0$) найдены явные формулы. Предлагаемая в п. 3 настоящей работы система линейных уравнений с нерегулярным эллиптическим оператором рассматривается, по-видимому, впервые; аналогичный результат с СБЭО был доложен автором на конференции "КРОМШ-2011" [13].

1. Нерегулярные эллиптические операторы

Пусть H – бесконечномерное сепарабельное вещественное гильбертово пространство; $B_C(H)$ – банахово (относительно операторной нормы) пространство самосопряжённых ограниченных линейных операторов в H; $B_R = \{x \in H \mid \|x\| \leqslant R\}$ – фиксированный шар радиуса R; J – конус неотрицательных линейных функционалов на $B_C(H)$.

Пусть $j \in J$ – ненулевой функционал, ядру которого принадлежат все операторы конечного ранга. В работе [3] такой функционал предложено называть существенно бесконечномерным, такие функционалы образуют конус $J_+ \subset J$. Каждый функционал $j \in J$ допускает разложение $j = j_1 + j_2$, где $j_1(C) = \operatorname{tr} AC$, A – неотрицательный ядерный оператор, $j_2 \in J_+$, причём такое разложение единственно (см., например, [4, 5]).

Назовём множество $D \subset B_C(H)$ почти компактным, если любого $\varepsilon > 0$ существуют компактное множество $K \subset B_C(H)$ и числа $n \in \mathbb{N}$, $d > 0$ такие, что $K + Q_{n,d}$ является ε-сетью для D (тут $Q_{n,d} \subset B_C(H)$ – множество операторов, ранг которых не превышает n, а норма не превышает d).

Пусть Z – множество функций класса $C^2(H)$ по Фреше, носители которых лежат в шаре B_R, u'' равномерно непрерывна на H, а множество $\{u''(x) \mid x \in B_R\}$ является почти компактным. X – замыкание Z по норме $\sup_{x\in B_R}|u(x)|$ – вещественная коммутативная банахова алгебра без единицы относительно поточечных операций.

Оператор $L\colon X \supset Z \ni u(x) \mapsto \frac{1}{2}j(u''(x)) \in X$ является дифференциальным оператором второго порядка. Если он представим в виде $\frac{1}{2}\operatorname{tr} Au''(x)$, то согласно [14] назовём его регулярным эллиптическим, если же непредставим – нерегулярным. Согласно [3] под СБЭО понимается оператор L в случае $j \in J_+$, такой оператор удовлетворяет правилу Лейбница.

Нерегулярный оператор L корректно определён и допускает замыкание $\bar{L}$, порождающее в X (C_0)-полугруппу сжатий $T(t)$ [4, 5]. Полугруппа нильпотентна $(\exists t_0 > 0 : \ T(t_0) = 0)$, позитивна $(\forall u \geqslant 0,\ \forall t \geqslant 0 : \ T(t)u \geqslant 0)$, кроме того, $(u \in Z) \Rightarrow (T(t)u \in Z)$. Для СБЭО результат усиливается – полугруппа приобретает свойство мультипликативности $(\forall u, v \in X,\ \forall t \geqslant 0 :\ T(t)(uv) = T(t)u \cdot T(t)v)$.

2. Линейные уравнения высшего порядка

Пусть Q – произвольное множество; $\mathcal{F}(Q)$ – банахова алгебра всех вещественных ограниченных функций на Q (относительно поточечных операций и sup-нормы); $\mathcal{X}$ – замкнутая подалгебра в $\mathcal{F}(Q)$ (потому $(u \in X) \Rightarrow (|u| \in X)$); $S(s)$ – нильпотентная (C_0)-полугруппа в $\mathcal{X}$ $(\exists s_0 > 0 :\ S(s_0) = 0)$. Генератор полугруппы $A = S'(0)$ определён на плотном в $\mathcal{X}$ множестве $D(A)$, более того, множество $D(A^\infty) = \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$ также плотно в $\mathcal{X}$ [15, теорема 2.3, с. 60].

В данном пункте рассматривается линейное уравнение порядка n

$$(A^n u)(x) + a_1(A^{n-1}u)(x) + \ldots + a_{n-1}(Au)(x) + a_n u(x) = f(x) \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{X}$. Область определения u – множество $D(A^n)$, которое плотно в $\mathcal{X}$, так как содержит $D(A^\infty)$. Пусть многочлен $P_n(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1}t + a_n$ имеет различные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратности $p_1, \ldots, p_k$ соответственно.

Лемма 1. *Пусть $P_n(t)$ имеет единственный корень $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Тогда уравнение* (1) *имеет и притом единственное решение $u(x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 s} s^{n-1}(S(s)f)(x)ds$.*

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по n.

База индукции $n = 1$. Уравнение (1) принимает вид $Au - \lambda_1 u = f$. Резольвента $R_{\lambda_1}u = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 s}S(s)uds = \int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 s}S(s)uds$ существует для всех λ_1, потому $u = -\int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 s}S(s)fds$.

Шаг индукции $P_{n+1}(t) = (t - \lambda_1)^{n+1} = (t - \lambda_1)P_n(t)$. Уравнение (1) записывается следующим образом: $(A - \lambda_1)P_n(A)u = f$, $P_n(A)u = -\int_0^{s_0} e^{-\lambda_1\tau}S(\tau)fd\tau$, $u = \frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 s}s^{n-1}S(s)\left(-\int_0^{s_0} e^{-\lambda_1\tau}S(\tau)fd\tau\right)ds$. Полугрупповое свойство $S(s)$, замена $t = s + \tau$ и изменение порядка интегрирования приводят к формуле $u = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 t} S(t) f dt \int\limits_0^t s^{n-1} ds$, которая и доказывает лемму.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет и притом единственное решение* $u(x) = -\int_0^{s_0} \sum_{m=1}^k \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_m} \frac{e^{-\lambda s}}{P_n(\lambda)} (S(s)f)(x) ds$, *где* Res *обозначает вычет функции в точке.*

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по k.

Базу индукции $k = 1$ (единственный корень λ_1 кратности n) доказывает лемма 1, поскольку вычет $\mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_1} \frac{e^{-\lambda s}}{P_n(\lambda)} = \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_1} \frac{e^{-\lambda s}}{(\lambda-\lambda_1)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{\lambda\to\lambda_1} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \left((\lambda-\lambda_1)^n \frac{e^{-\lambda s}}{(\lambda-\lambda_1)^n} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_1 s} s^{n-1}$.

Шаг индукции. Рассмотрим новый многочлен $G(t) = P_n(t)(t - \lambda_{k+1})^p$. Уравнение (1) принимает вид $G(A)u = P_n(A)(A - \lambda_{k+1} I)^p u = f$, $u = -\int_0^{s_0} \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_{k+1}} \frac{e^{-\lambda s}}{(\lambda-\lambda_{k+1})^p} S(s) \left(-\int_0^{s_0} \sum_{m=1}^k \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_m} \frac{e^{-\lambda\tau}}{P_n(\lambda)} S(\tau) f d\tau \right) ds$. Здесь и далее I – единичный оператор. Поскольку все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ различны, то можно выбрать охватывающие их контура $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k+1}$ попарно непересекающимися. Меняем порядок интегрирования, делаем замену $t = s + \tau$:

$$u = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{s_0} ds \int\limits_0^{s_0 - s} S(s+\tau) f d\tau \sum_{m=1}^k \oint\limits_{\Gamma_{k+1}} \frac{dz_1}{(z_1 - \lambda_{k+1})^p} \oint\limits_{\Gamma_m} \frac{e^{-z_1 s - z_2 \tau}}{P_n(z_2)} dz_2 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{s_0} S(t) f dt \sum_{m=1}^k \oint\limits_{\Gamma_{k+1}} \frac{dz_1}{(z_1 - \lambda_{k+1})^p} \oint\limits_{\Gamma_m} \frac{dz_2}{P_n(z_2)} \int\limits_0^t e^{(z_2 - z_1)s - z_2 t} ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{s_0} S(t) f dt \oint\limits_{\Gamma_{k+1}} \frac{e^{-z_1 t}}{(z_1 - \lambda_{k+1})^p} dz_1 \sum_{m=1}^k \oint\limits_{\Gamma_m} \frac{dz_2}{(z_1 - z_2) P_n(z_2)} -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{s_0} S(t) f dt \sum_{m=1}^k \oint\limits_{\Gamma_m} \frac{e^{-z_2 t}}{P_n(z_2)} dz_2 \oint\limits_{\Gamma_{k+1}} \frac{dz_1}{(z_1 - \lambda_{k+1})^p (z_1 - z_2)} = I_1 - I_2. \quad (2)$$

Применив к функции $w(z_2) = \frac{1}{(z_1 - z_2) P_n(z_2)}$ теорему о полной сумме вычетов, получим, что $\sum_{m=1}^k \oint_{\Gamma_m} \frac{dz_2}{(z_1-z_2)P_n(z_2)} = \frac{2\pi i}{P_n(z_1)}$, $I_1 = -\int_0^{s_0} \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_{k+1}} \frac{e^{-\lambda t}}{G(\lambda)} S(t) f dt$. Внутренний интеграл I_2 имеет вид $\oint_{\Gamma_{k+1}} \frac{dz_1}{(z_1-\lambda_{k+1})^p (z_1 - z_2)} = 2\pi i \, \mathrm{Res}_{z_1=\lambda_{k+1}} \frac{1}{(z_1-\lambda_{k+1})^p(z_1-z_2)} = \frac{2\pi i}{(p-1)!} \lim_{z_1\to\lambda_{k+1}} \frac{d^{p-1}}{dz_1^{p-1}} \left((z_1 - \lambda_{k+1})^p \frac{1}{(z_1-\lambda_{k+1})^p (z_1-z_2)} \right) = -\frac{2\pi i}{(z_2-\lambda_{k+1})^p}$. Подстановка этих результатов в формулу (2) доказывает теорему по индукции. Единственность решения уравнения (1) следует из существования резольвенты оператора A.

Следствие 1 (о непрерывной зависимости решения уравнения (1) от функции f)**.** *Пусть $u(x) = u(x, f)$, $u_0(x) = u_0(x, f_0)$ – решения уравнения* (1) *с функциями f, f_0 соответственно. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ (\|f - f_0\| < \delta) \Rightarrow (\|u - u_0\| < \varepsilon)$.*

Доказательство. Факт следует из того, что $u - u_0 = (-1)^n R_{\lambda_1}^{p_1} \ldots R_{\lambda_k}^{p_k}(f - f_0)$, $\|u - u_0\| \leqslant \|R_{\lambda_1}\|^{p_1} \cdot \ldots \cdot \|R_{\lambda_k}\|^{p_k} \cdot \|f - f_0\|$.

Следствие 2. *Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Тогда решение уравнения* (1) *есть вещественная функция.*

Доказательство. Уравнение (1) запишем в виде $(A-\lambda_1 I)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (A-\lambda_k I)^{p_k} u = f$. В условиях следствия корни $P_n(t)$ или вещественные, или комплексно-сопряжённые, потому следствие достаточно доказать для уравнения $(A - \mu I)(A - \mu^* I)u = f$, где $\mu = \alpha + \beta i$, $\mu^* = \alpha - \beta i$. А решение данного уравнения (согласно формуле Эйлера) – $u = -\int_0^{s_0} \left(\lim_{\lambda \to \mu} \left((\lambda - \mu)\frac{e^{-\lambda s}}{(\lambda-\mu)(\lambda-\mu^*)}\right) + \lim_{\lambda \to \mu^*} \left((\lambda - \mu^*)\frac{e^{-\lambda s}}{(\lambda-\mu)(\lambda-\mu^*)}\right)\right) S(s) f ds = \frac{1}{\beta}\int_0^{s_0} e^{-\alpha s} \sin(\beta s) S(s) f ds$. Заметим, что решение уравнения (1) в общем случае расписывается с учётом формулы Эйлера подобным образом.

Следствие 3. *Резольвентные множества операторов A^n и $P_n(A)$ таковы: $\rho(A^n) = \mathbb{C}$, $\rho(P_n(A)) = \mathbb{C}$.*

Следствие 4. *Оператор $P_n(A)$ замкнут (см.* [16, теорема 7, с. 642]*).*

Следствие 5. $R_{\lambda_1}^{p_1} \ldots R_{\lambda_k}^{p_k} f = (-1)^{n-1} \int_0^{s_0} \sum_{m=1}^{k} \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_m} \frac{e^{-\lambda s}}{P_n(\lambda)} S(s) f ds.$

Положим $Q = H$, $\mathcal{X} = X$, $A = \bar{L}$ (см. п. 1). Тогда результаты данного пункта справедливы для уравнения (1) с нерегулярным эллиптическим оператором, в частности, с СБЭО. Кроме того, возможно повысить гладкость решения:

Следствие 6 (о повышении гладкости решения)**.** *Для уравнения* (1) *с нерегулярным эллиптическим оператором из $f \in Z$ следует $u \in Z$.*

Доказательство. Согласно п. 1 в условиях следствия $T(t)f \in Z$, откуда $u \in Z$.

3. Система линейных уравнений с операторными коэффициентами (многочленами от оператора A)

Рассмотрим систему линейных уравнений с операторными коэффициентами (многочленами от оператора A, см. п. 2):

$$\sum_{k=1}^{n} P_{i,k}(A) u_k = f_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Тут $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{X}$; $P_{i,k}(t) = t^{d_{i,k}} + a_1^{i,k} t^{d_{i,k}-1} + \ldots + a_{d_{i,k}-1}^{i,k} t + a_{d_{i,k}}^{i,k}$ – многочлен степени $d_{i,k} \geqslant 0$ с коэффициентами $a_1^{i,k}, \ldots, a_{d_{i,k}}^{i,k} \in \mathbb{R}$. Степень многочлена $P_{i,k}$ будем также обозначать $\deg P_{i,k}$. Оператор $P_{i,k}(A)$ при $d_{i,k} > 0$ определён на плотном в $\mathcal{X}$ множестве $D(A^{d_{i,k}})$ и, в силу следствия 4, замкнут; при $d_{i,k}=0$ он кратен I и определён на всём $\mathcal{X}$. Потому областью определения u_k является множество $D(A^{\hat{d}_k})$, где $\hat{d}_k=\max(d_{1,k},\ldots,d_{n,k})$; при $\hat{d}_k=0$ областью определения u_k является всё $\mathcal{X}$. В дальнейшем будут приведены достаточные условия существования и единственности решения системы (3).

Пусть многочлен $Q(t)$ степени $d>0$ с вещественными коэффициентами имеет различные корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{C}$. Оператор $Q(A)\colon D(A^d)\to\mathcal{X}$ согласно п. 2 имеет обратный $(Q(A))^{-1}=-\int_0^{s_0}\sum_{m=1}^k \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_m}\frac{e^{-\lambda s}}{Q(\lambda)}S(s)ds\colon \mathcal{X}\to D(A^d)$, в силу следствия 2 сумма в данной формуле вещественна. Соответствующий многочлену нулевой степени оператор $Q(A)=aI$ при $a\neq 0$ также имеет обратный $(Q(A))^{-1}=\frac{1}{a}I$. $D(A^\infty)$ – собственное линейное многообразие (незамкнутое) операторов $Q(A)$ и $(Q(A))^{-1}$, т.е. $Q(A)(D(A^\infty))\subset D(A^\infty)$, $(Q(A))^{-1}(D(A^\infty))\subset D(A^\infty)$.

Пусть $\mathcal{F}=\{\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}\}$ – поле рациональных функций (оно является полем частных кольца многочленов). Каждой функции $\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}\in\mathcal{F}$ сопоставим некий замкнутый оператор $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})$. При этом для отображения ϕ должны выполняться условия: а) $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}+\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)})=\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})+\phi(\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)})$; б) $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}\cdot\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)})=\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})\cdot\phi(\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)})$, поскольку функции $\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}$, $\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)}$ коммутируют, то и операторы $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})$, $\phi(\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)})$ должны коммутировать; в) $\phi(1)=I$; г) $\phi((\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})^{-1})=(\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}))^{-1}$. Проверку условий а)-г) необходимо проводить с учётом областей определения замкнутых операторов. Тогда можно считать, что $\phi(\mathcal{F})$ является полем замкнутых операторов, и применять аппарат линейной алгебры.

Отображение $\phi\colon \frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}\mapsto (Q_2(A))^{-1}|_{D(A^\infty)}Q_1(A)|_{D(A^\infty)}$ удовлетворяет условиям а)-г), перечисленным выше, в частности, имеет место коммутация $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})$ и $\phi(\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)})$. Операторы $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})$ записываются в явном виде согласно п. 2. Заметим, что для отображений $\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}\mapsto (Q_2(A))^{-1}Q_1(A)$ и $\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}\mapsto Q_1(A)(Q_2(A))^{-1}$ – более простых и "очевидных" – в условиях а)-б) возникают трудности, связанные с областями определения соответствующих операторов. Действительно, оператор $(Q_2(A))^{-1}Q_1(A)$ переводит $D(A^{d_1})$ в $D(A^{d_2})$, где $d_1=\deg Q_1>0$, $d_2=\deg Q_2>0$. Оператор $Q_1(A)(Q_2(A))^{-1}$ имеет бо́льшую область определения: при $d_1=d_2$ он переводит $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$; при $d_1>d_2$ – $D(A^{d_1-d_2})$ в $\mathcal{X}$; при $d_1<d_2$ – $\mathcal{X}$ в $D(A^{d_2-d_1})$.

Положим $\mathbb{P}=(P_{i,k}(A)|_{D(A^\infty)})_{i,k=1}^n$. Пусть $\det\mathbb{P}=\det\big|P_{i,k}(A)|_{D(A^\infty)}\big|_{i,k=1}^n=\sum_\sigma(-1)^{l(\sigma)}P_{k_1,1}(A)|_{D(A^\infty)}\ldots P_{k_n,n}(A)|_{D(A^\infty)}$ – определитель матрицы $\mathbb{P}$, где $\sigma=\left(\begin{smallmatrix}1 & \ldots & n\\ k_1 & \ldots & k_n\end{smallmatrix}\right)$ – перестановка длины n, $l(\sigma)$ – чётность перестановки σ. Нестандартной индексации $P_{k_m,m}$ (вместо привычной P_{m,k_m}) объяснение будет дано далее. $\det\mathbb{P}$ является многочленом от оператора A степени $\deg\det\mathbb{P}$ не выше $\max_\sigma(d_{k_1,1}+\ldots+d_{k_n,n})$, все формулы классического определителя сохраняются. Если $\det\mathbb{P}\neq 0$ (т.е. нулевому оператору), то матрица $\mathbb{P}$ имеет обратную $\mathbb{P}^{-1}=(\det\mathbb{P})^{-1}(\tilde{P}_{i,k})^T$. Тут

$\tilde{P}_{i,k}$ – алгебраическое дополнение элемента (i,k) матрицы $\mathbb{P}$ – многочлен от оператора A степени $\deg \tilde{P}_{i,k}$. Заметим, что необязательно $\deg \det \mathbb{P} > \deg \tilde{P}_{i,k}$, может выполняться и обратное неравенство, и равенство.

Предположим, что $\det \mathbb{P} \neq 0$ и выполнены условия $f_1, \ldots, f_n \in D(A^\infty)$. Тогда существует $\mathbb{P}^{-1}$, $u_i = \sum_{k=1}^n (\mathbb{P}^{-1})_{i,k} f_k = (\det \mathbb{P})^{-1} \sum_{k=1}^n \tilde{P}_{k,i} f_k$, $i = 1, \ldots, n$.

Рассмотрим сумму, стоящую в правой части последней формулы. Для системы линейных алгебраических уравнений это результат раскрытия по i-му столбцу определителя, полученного заменой i-го столбца на столбец правой части. Но, если в определении $\det \mathbb{P}$, механически заменить $P_{i,n}$ на f_i, то соответствующие слагаемые превратятся в элементы $\mathcal{X}$; замена же $P_{i,k}$ на f_i для $k \neq n$ приведёт к тому, что соответствующие слагаемые вообще не определены. Пусть $\det_s \mathbb{P} = \det \left| P_{i,1}(A)|_{D(A^\infty)} \; \ldots \; P_{i,s-1}(A)|_{D(A^\infty)} \; f_i \; P_{i,s+1}(A)|_{D(A^\infty)} \; \ldots \; P_{i,n}(A)|_{D(A^\infty)} \right|_{i=1}^n = \sum_\sigma (-1)^{l(\sigma)} P_{k_1,1}(A)|_{D(A^\infty)} \ldots P_{k_{s-1},s-1}(A)|_{D(A^\infty)} P_{k_{s+1},s+1}(A)|_{D(A^\infty)} P_{k_n,n}(A)|_{D(A^\infty)} f_{k_s}$; такой аналог определителя, в отличие от оператора $\det \mathbb{P}$, является элементом $\mathcal{X}$. Нестандартная индексация в определении $\det \mathbb{P}$ теперь объясняется тем, что в противном случае определение $\det_s \mathbb{P}$ пришлось бы чрезмерно усложнять.

Таким образом доказана теорема:

Теорема 2. *Пусть* $\det \mathbb{P} \neq 0$; $f_1, \ldots, f_n \in D(A^\infty)$. *Тогда единственное решение системы* (3) *имеет вид* $u_i = (\det \mathbb{P})^{-1} \det_i \mathbb{P}$, $i = 1, \ldots, n$. *Эти формулы естественно назвать аналогами формул Крамера.*

Положив $Q = H$, $\mathcal{X} = X$, $A = \bar{L}$ (см. п. 1), получим аналоги формул Крамера для системы (3) с нерегулярным эллиптическим оператором, в частности, с СБЭО.

Пример. Рассмотрим систему $\bar{L}u_1 + u_1 + u_2 = f_1$, $\bar{L}^2 u_1 + \bar{L}u_2 = f_2$ с нерегулярным эллиптическим оператором. Сначала предположим, что $f_1, f_2 \in D(\bar{L}^\infty)$. Здесь $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} (\bar{L}+I)|_{D(\bar{L}^\infty)} & I|_{D(\bar{L}^\infty)} \\ \bar{L}^2|_{D(\bar{L}^\infty)} & \bar{L}|_{D(\bar{L}^\infty)} \end{pmatrix}$; оператор $\det \mathbb{P} = \det \begin{vmatrix} (\bar{L}+I)|_{D(\bar{L}^\infty)} & I|_{D(\bar{L}^\infty)} \\ \bar{L}^2|_{D(\bar{L}^\infty)} & \bar{L}|_{D(\bar{L}^\infty)} \end{vmatrix} = (\bar{L}+I)|_{D(\bar{L}^\infty)} \bar{L}|_{D(\bar{L}^\infty)} - \bar{L}^2|_{D(\bar{L}^\infty)} I|_{D(\bar{L}^\infty)} = \bar{L}|_{D(\bar{L}^\infty)}$ ненулевой. $D(\bar{L}^\infty)$ – собственное линейное многообразие соответствующих операторов, потому искомое решение $u_1 = (\det \mathbb{P})^{-1} \det \begin{vmatrix} f_1 & I|_{D(\bar{L}^\infty)} \\ f_2 & \bar{L}|_{D(\bar{L}^\infty)} \end{vmatrix} = \bar{L}^{-1}(\bar{L}f_1 - f_2) = f_1 + \int_0^{t_0} T(t) f_2 dt$, $u_2 = (\det \mathbb{P})^{-1} \det \begin{vmatrix} \overline{(L+I)}|_{D(\bar{L}^\infty)} & f_1 \\ \bar{L}^2|_{D(\bar{L}^\infty)} & f_2 \end{vmatrix} = \bar{L}^{-1}(\bar{L}f_2 + f_2 - \bar{L}^2 f_1) = -\bar{L}f_1 + f_2 - \int_0^{t_0} T(t) f_2 dt$. Здесь $u_1, u_2 \in D(\bar{L}^\infty)$.

Теперь откажемся от условий $f_1, f_2 \in D(\bar{L}^\infty)$. Область определения u_1 – множество $D(\bar{L}^2)$, u_2 – $D(\bar{L})$. Оператор $\bar{L}$ замкнут, потому можно показать, что решение находится по формулам, приведенным выше, при $f_1 \in D(\bar{L}^2)$, $f_2 \in D(\bar{L})$. Кроме того, при дополнительных условиях $\bar{L}f_1 \in Z$, $f_2 \in Z$ решение имеет повышенную гладкость $u_1, u_2 \in Z$.

Выводы

В работе предложена система линейных уравнений с операторными коэффициентами – многочленами от нерегулярного эллиптического оператора. Приведены достаточные условия существования и единственности решения, а само решение представлено в виде явных формул – аналогов формул Крамера. Также исследовано линейное уравнение высшего порядка с нерегулярным эллиптическим оператором для случая постоянных коэффициентов.

Автор благодарит Ю.В. Богданского за ценные замечания и внимание к работе.

Список литературы

[1] Леви П. *Конкретные проблемы функционального анализа.* – М.: Наука, 1967. – 512с.

[2] Feller M.N. *The Lévy Laplacian.* – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. – 153p.

[3] Богданский Ю.В. *Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами* // Укр. мат. журнал. – 1977. – **29**, №6. – С. 781-784.

[4] Богданский Ю.В. *Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярными эллиптическими операторами* // Укр. мат. журнал. – 1989. – **41**, №5. – С. 584-590.

[5] Bogdansky Yu.V., Dalecky Yu.L. *Cauchy problem for the simpliest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator* // Suppl. to chapters IV, V in book: Dalecky Yu.L., Fomin S.V. *Measures and differential equations in infinite-dimensional space.* – Amsterdam – New York: Kluwer Acad. Publ., 1991. – pp. 309-322.

[6] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.* – М.: Наука, 1983. – 384с.

[7] Полищук Е.М. *Линейные уравнения в функциональных лапласианах* // УМН. – 1964. – т. 19, вып. 2(116). – С. 163-170.

[8] Шилов Г.Е. *О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. III* // Мат. сборник. – 1967. – т. 74(116), №1. – С. 161-168.

[9] Сикирявый В.Я. *Оператор квазидифференцирования и связанные с ним краевые задачи* // Труды Моск. матем. об-ва. – 1972. – т. 27. – С. 195-246.

[10] Сикирявый В.Я. *Линейные квазидифференциальные уравнения* // Укр. мат. журнал. – 1975. – **27**, №1. – С. 121-127.

[11] Богданський Ю.В., Статкевич В.М. *Лінійні диференціальні рівняння з суттєво нескінченновимірними операторами* // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – №2. – С. 144-147.

[12] Статкевич В.М. *Системи суттєво нескінченновимірних диференціальних рівнянь* // Укр. мат. журнал. – 2011. – **63**, №9. – С. 1257-1262.

[13] Статкевич В.М. *Об одной системе линейных существенно бесконечномерных уравнений* // КРОМШ-2011. Тезисы докладов. – Симферополь, 2011. – С. 51.

[14] Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. *Обобщённые функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье* // Труды Моск. матем. об-ва. – 1972. – т. 27. – С. 247-282.

[15] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464с.

[16] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы. Т. 1 Общая теория. Пер. с англ.* – М.: ИЛ, 1962. – 896с.

Аналоги формул Крамера для системи лінійних диференціальних рівнянь з нерегулярним еліптичним оператором

Запропонована система лінійних диференціальних рівнянь для функцій на нескінченновимірному гільбертовому просторі, коли в якості операторних коефіцієнтів виступають многочлени від нерегулярного еліптичного оператора $(Lu)(x) = j(u''(x))$*. Для такої системи доведені аналоги формул Крамера.*

Ключові слова: нескінченновимірний простір, оператор Лапласа-Леві, нерегулярний (суттєво нескінченновимірний) еліптичний оператор, формули Крамера.

Cramer's rule analog for simultaneous linear differential equations with nonregular elliptic operator

Simultaneous linear differential equations for functions on an infinite-dimensional Hilbert space with nonregular elliptic operator $(Lu)(x) = j(u''(x))$ *polynomial coefficients are proposed. Cramer's rule for such simultaneous equations is proved.*

Keywords: infinite-dimensional space, Laplace-Levý operator, nonregular (essentially infinite-dimensional) elliptic operator, Cramer's rule.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 98–109.

УДК 517.98

Ф. С. Стонякин

О дифференцируемости по верхнему пределу неопределённого интеграла Петтиса

В данной работе исследуются две новые характеристики интегрируемых по Петтису отображений вещественного отрезка в пространства Фреше: почти всюду слабая интегральная ограниченность и σ-компактная измеримость. Получено достаточное условие дифференцируемости неопределённых интегралов Петтиса в терминах почти всюду слабой интегральной ограниченности, а также необходимое условие — в терминах σ-компактной измеримости.

Ключевые слова: интеграл Петтиса, сильно измеримое отображение, пространство Фреше, почти всюду слабая интегральная ограниченность, σ-компактная измеримость, компактная субдифференцируемость.

Введение

Существует множество аналогов классического интеграла Лебега для отображений в бесконечномерные пространства Фреше. Наиболее известным и широко употребляемым является интеграл Бохнера, поскольку он сохраняет практически все свойства интеграла Лебега [1, 2, 3]. Однако класс интегрируемых по Бохнеру отображений не является достаточно широким для многих задачах функционального анализа и его приложений [2, 3, 4].

В связи с этим наряду с интегралом Бохнера активно изучаются и используются другие понятия интеграла для отображений в бесконечномерные пространства Фреше [2, 3, 4]. В частности, хорошо известна теория интеграла Петтиса [1] — [4], которая активно развивается и в современных исследованиях [5] — [8].

Класс интегрируемых по Петтису отображений существенно шире класса отображений, интегрируемых по Бохнеру. Но при этом интеграл Петтиса теряет множество существенных свойств интеграла Бохнера.

Так, например, всякий неопределённый интеграл Бохнера $F : I = [a; b] \to X$ (X — пространство Фреше) $F(x) = (B)\int\limits_a^x f(t)dt$ ($a \leqslant x \leqslant b$) сохраняет свойство дифференцируемости почти всюду на $[a; b]$. Рассмотрим неопределённые интегралы Петтиса, то есть отображения $F : I = [a; b] \to X$ (X — пространство Фреше) вида

$$F(x) = (P)\int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

причём f предполагается сильно измеримым, а также интегрируемым по Петтису на любом измеримом подмножестве $e \subset I$. Как показано в ([9], замечание к теореме 1), для произвольного бесконечномерного банахова пространства X существует такое сильно измеримое и интегрируемое по Петтису отображение $f : I \to X$, что

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(P)\int\limits_x^{x+h} f(t)dt\right\| = \infty \quad (\forall t \in I).$$

откуда вытекает отсутствие дифференцируемости отображения F из (1) всюду на I. Это означает, что естественной и актуальной является задача поиска условий, при которых F из (1) будет дифференцируемым почти всюду на I.

С этой целью в первых двух пунктах настоящей работы мы вводим две новые характеристики интегрируемых по Петтису отображений — *почти всюду слабую интегральную ограниченность* (B^w_{int}) и *σ-компактную измеримость* (C^σ_{mes}). На базе предложенных понятий в пункте 3 нами получено достаточное условие дифференцируемости отображений из (1) в терминах почти всюду слабой интегральной ограниченности (теорема 1), а также необходимое условие — в терминах σ-компактной измеримости (теорема 3).

Будем обозначать через mes классическую меру Лебега на вещественной прямой, Σ — набор измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$; X^* — пространство линейных непрерывных функционалов над X, а через $L(X; Y)$ — линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

1. Интегральная ограниченность интегрируемых по Петтису отображений

В данном пункте мы вводим одно новое свойство интегрируемых по Петтису отображений — почти всюду слабую интегральную ограниченность.

Определение 1. Будем называть отображение $f : I = [a; b] \to X$ из (1) *слабо интегрально ограниченным в точке* $x \in I$ ($f \in B^w_{int}(x)$), если для любой системы интервалов $I_n = (\alpha_n; \beta_n)$, стягивающихся к x при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(I_n \bigcap E_n)}{mes(I_n)} = 0, \quad \text{где } F \text{ имеет вид (1)}, \tag{2}$$

где $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \frac{mes(I_n \bigcap E_n)}{mes(I_n)} = 0. \qquad (3)$$

Если $A \subset I$ и $f \in B_{int}^{w}(x)$ для почти всех $x \in A$, то будем называть отображение f *почти всюду слабо интегрально ограниченным на* A. Примем обозначение: $f \in B_{int}^{w}(A)$.

Непосредственно проверяются простейшие свойства класса $B_{int}^{w}(I)$.

Предложение 1. (i) *Класс* $B_{int}^{w}(A)$ *является линейным;*
(ii) $f \in B_{int}^{w}(A) \iff f \in B_{int}^{w}(C)\ \forall C \subset A$*;*
(iii) *Пусть* $f : I \to X$ $f \in B_{int}^{w}(I)$, $A \in L(X;Y)$. *Тогда отображение* $Af : I \to X$ *принадлежит классу* $B_{int}^{w}(I)$.

Доказательство. Данное утверждение легко вытекает из соответствующих свойств интеграла Петтиса (см., например [1], стр. 91 – 92). Отметим лишь, что утверждение (ii) справедливо в силу предположения об интегрируемости по Петтису всякого отображения f из (1) на произвольном измеримом подмножестве $A \subset I$. □

Проверим два достаточных условия интегральной ограниченности. Будем говорить, что f локально ограничено в точке $x \in I$, т.е.

$$\sup_{A:\ mes(A)=0} \|f((\alpha;\beta)\backslash A)\| = \operatorname{ess\,sup} \|f((\alpha;\beta))\| = C < \infty \text{ для нек. } (\alpha;\beta) \supset x. \qquad (4)$$

Предложение 2. (i) *если* f *локально ограничено в т.* $x \in I$, *то* $f \in B_{int}^{w}(x)$*;*
(ii) *если* f *локально ограничено* $\forall\ x \in A \subset I$, *то* $f \in B_{int}^{w}(A)$.

Доказательство. Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств, удовлетворяющих (3). В силу (4) имеем

$$\left\| \frac{F(I_n \bigcap E_n)}{mes(I_n)} \right\| = \left\| \frac{(P) \int\limits_{I_n \bigcap E_n} f(t)dt}{mes(I_n)} \right\| \leqslant C \cdot \frac{mes(I_n \bigcap E_n)}{mes(I_n)} \longrightarrow 0 \ \text{ при } n \to \infty,$$

откуда и вытекают доказываемые утверждения. □

Предложение 3. *Пусть* X *— банахово пространство. Тогда всякое интегрируемое по Бохнеру отображение* $f : I = [a;b] \to X$ *удовлетворяет условию* $f \in B_{int}^{w}(I)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : I = [a;b] \to X$:

$$F(x) = (B) \int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Пусть x — точка Лебега отображения F. Тогда по следствию 2 из теоремы 3.8.5 [1], для произвольной системы интервалов $I_n = (\alpha_n;\beta_n)$, стягивающихся к x при $n\to\infty$ верно

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{mes(I_n)}\cdot\int\limits_{I_n}\|f(t)-f(x)\|dt=0,$$

откуда вытекает, что для произвольной системы измеримых множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих (3), верно (2). Действительно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{F(I_n\bigcap E_n)}{mes(I_n)}\right\| = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{F(I_n\bigcap E_n)}{mes(I_n)} - f(x)\cdot\frac{mes(I_n\bigcap E_n)}{mes(I_n)}\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\left\|\frac{1}{mes(I_n)}\cdot\int\limits_{I_n\bigcap E_n}(f(t)-f(x))\,dt\right\| \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{mes(I_n)}\cdot\int\limits_{I_n\bigcap E_n}\|f(t)-f(x)\|dt \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{1}{mes(I_n)}\cdot\int\limits_{I_n}\|f(t)-f(x)\|dt = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{mes(I_n)}\cdot\int\limits_{I_n}\|f(t)-f(x)\|dt = 0.$$

Остаётся лишь заметить то, что почти все точки I являются точками Лебега интегрируемого по Бохнеру отображения f (см. [1], теорема 3.8.5). $\square$

Замечание 3. Из доказательства предыдущего утверждения следует, что если x — точка Лебега интегрируемого по Бохнеру отображения f, то $f\in B_{int}^{w}(x)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В качестве примера можно привести функцию $F:[-1;1]\to\mathbb{R}$

$$F(x)=\int\limits_{-1}^{x} sign(t)dt,\quad -1\leqslant x\leqslant 1, \tag{5}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега (для вещественных функций интеграл Бохнера совпадает с интегралом Лебега), а $sign(x)=1$ при $x>0$, $sign(x)=-1$ при $x<0$, $sign(x)=0$ при $x=0$.

Легко проверить, что $x=0$ не является точкой Лебега отображения (5). Тем не менее, согласно предложению 2 $f\in B_{int}^{w}(0)$ ввиду ограниченности f.

Замечание 4. Отметим, что отображения $f\in B_{int}^{w}(I)$ могут быть не интегрируемыми по Бохнеру. Это подтверждает пример 1 ниже.

Замечание 5. Неопределённый интеграл Петтиса отображения $f\in B_{int}^{w}(I)$ может быть нигде не дифференцируемым на I, если f не является сильно измеримым. В качестве примера рассмотрим отображение $f: I=[0;1]\to L_{\infty}[0;1]$: $f(t)=\chi_{[t;1]}(\cdot)$. В [5] (см. пример после теоремы 3.4, а также теорему 4.4) показано, что f интегрируемо по Петтису, причём $\left((P)\int\limits_{A} f(t)dt\right)(x) = mes\left(A\bigcap[0;x]\right)$ $\forall x\in I$, $\forall A\in\Sigma$, откуда вытекает $f \in B^w_{int}(I)$ (множества I_n и E_n удовлетворяют (3), $x \in [0;1]$):

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\|\frac{(P)\int\limits_{I_n\bigcap E_n} f(t)dt}{mes(I_n)}\right\| = \varlimsup_{n\to\infty} \operatorname{ess\,sup}\left|\frac{mes(I_n\bigcap E_n\bigcap[0;x])}{mes(I_n)}\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{mes(I_n\bigcap E_n)}{mes(I_n)} = 0.$$

При этом, в ([5], пример после теоремы 3.4) доказано, что неопределённый интеграл Петтиса отображения f нигде не имеет обычной производной.

2. σ-компактная измеримость интегрируемых по Петтису отображений

Введём ещё одно новое свойство интегрируемых по Петтису отображений — σ-компактную измеримость.

Определение 2. Будем говорить, что отображение $f : I = [a;b] \to X$ из (1) *σ-компактно измеримо* ($f \in C^\sigma_{mes}(I)$), если существует такое разбиение I на измеримые по Лебегу подмножества $\{e_N\}_{N=0}^\infty$, что

$$f(e_N) \subset U_N,\ U_N \text{ — компакт в } E \quad \forall N \in \mathbb{N} \tag{6}$$

где $I = \bigcup\limits_{N=0}^{\infty} e_N$, $mes(e_0) = 0$, $e_{N_1} \subseteq e_{N_2}$ $\forall N_1,\ N_2 \in \mathbb{N}$.

Непосредственно проверяются простейшие свойства класса $C^\sigma_{mes}(I)$.

Предложение 4. (i) *Класс $C^\sigma_{mes}(I)$ является линейным;*

(ii) $f \in C^\sigma_{mes}(I) \Longleftrightarrow f \in C^\sigma_{mes}(I')\ \forall I' \subset I$;

(iii) *Пусть $f : I \to X$, $f \in C^\sigma_{mes}(I)$, $A \in L(X;Y)$. Тогда отображение $Af : I \to X$ принадлежит классу $C^\sigma_{mes}(I)$.*

Предложение 5. *Всякое интегрируемое по Бохнеру отображение $f : I = [a;b] \to$ $\to X$ удовлетворяет условию $f \in C^\sigma_{mes}(I)$.*

Доказательство. По теореме 2 из [10], для всякого интегрируемого по Бохнеру отображения $f : I \to E$ существует такой абсолютно выпуклый компакт $C \subset E$, что $\int\limits_I \|f(t)\|_C dt < \infty$, где $\|\cdot\|_C$ — функционал Минковского, порождённый множеством C. Если положить

$$e_N := \{t \in [a;b] \mid \|f(t)\|_C \leqslant N\}, \quad U_N = N\cdot C \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

то f будет удовлетворять условию (6). □

Возникает естественный вопрос: не является ли всякое интегрируемое по Петтису отображение $f : I \to X$, удовлетворяющее условию $f \in C^\sigma_{mes}(I)$, интегрируемым по Бохнера? На этот вопрос можно дать отрицательный ответ даже в случае гильбертова пространства X. В качестве примера мы рассмотрим следующее отображение из работы ([11], пример 2.1).

Пример 1. Пусть $X = \ell_2$ — вещественное сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в E. Рассмотрим отображение $F : [0;1] \to X$:

$$\begin{cases} F(0) = 0 \ ; \quad F(\frac{n}{n+1}) = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_k}{k} \quad (n \in \mathbb{N}) \ ; \quad F(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k} \ ; \\ F \text{ линейно на сегментах } \left[\frac{n-1}{n};\ \frac{n}{n+1}\right] \quad (n \in \mathbb{N}) \ . \end{cases}$$

1). Ясно, что F дифференцируемо п.в. на I. Покажем, что оно слабо абсолютно непрерывно. Для этого рассмотрим произвольный функционал $\ell \in \ell_2^* \cong \ell_2$, а также функцию $f = \ell[F]$, $f : [0;1] \to \mathbb{R}$. Поскольку $\ell \in \ell_2$, то $\exists\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ...) \in \ell_2$:

$$\ell(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \quad \forall\ \beta = (\beta_1, \beta_2, ...) \in \ell_2$$

Нужно показать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$\left(\forall N \in \mathbb{N},\ mes\left(\bigcup_{k=1}^{N} [a_k; b_k]\right) < \delta\right) \Longrightarrow \sum_{k=1}^{N} \mid f(b_k) - f(a_k) \mid < \varepsilon. \tag{7}$$

Заметим, что $f(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k}$. Этот ряд сходится, так как

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\alpha_k}{k}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} < \infty$$

по неравенству Коши-Буняковского.

Выберем такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $\forall \bigcup\limits_{k=1}^{m} [a_k; b_k] \subseteq \left[\frac{N_0}{N_0+1};\ 1\right]$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{8}$$

Отрезок же $\left[0; \frac{N_0}{N_0+1}\right]$ разбивается на N_0 отрезков, на каждом из которых функция f линейна. Следовательно, f абсолютно непрерывна на $[0; \frac{N_0}{N_0+1}]$, т.е. $\exists\ \delta > 0$: $\forall \bigcup\limits_{k=1}^{m} [a_k; b_k] \subseteq \left[0;\ \frac{N_0}{N_0+1}\right]$,

$$mes\left(\bigcup_{k=1}^{m} [a_k; b_k]\right) < \delta \ \Rightarrow\ \sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Из неравенств (8) и (9) вытекает неравенство (7).

2). Итак, отображение F слабо абсолютно непрерывно и почти всюду дифференцируемо. Следовательно, F — неопределённый интеграл Петтиса. Действительно,

$$\ell(F(x)-F(0)) = \ell(F(x))-\ell(F(0)) = \left(\int_0^x (\ell(F(t)))'dt\right) = \int_0^x \ell(F'(t))dt\,\forall x \in [0;1] \quad \forall \ell \in X^*,$$

откуда и вытекает, что $F(x) = F(0) + (P)\int_0^x F'(t)dt \quad \forall x \in [0;1]$.

Если положить $e_N := [0; \frac{N}{N+1}]$, то F' будет удовлетворять условию (6) с компактами $U_N := \bigcup_{n=1}^{N} \{\frac{x_n}{n}\}$, т.е. $F' \in C^{\sigma}_{mes}(I)$. Однако, как показано в ([11], пример 2.1), F не имеет сильной ограниченной вариации и поэтому не является неопределённым интегралом Бохнера.

3) Отметим также, что по предложению 2, $F' \in B^w_{int}(I)$, так как F' непрерывно (и, следовательно, локально ограничено) п.в. на I в силу кусочной линейности F.

3. Дифференцируемость неопределённого интеграла Петтиса для отображений в пространства Фреше

В данном пункте работы мы докажем основные результаты работы — условия дифференцируемости почти всюду сильного интеграла Петтиса отображений в пространства Фреше (1):

$$F(x) = (P)\int_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b \tag{10}$$

в терминах предложенных в первых двух пунктах характеристик. Если интегральная ограниченность f приводит к достаточному условию дифференцируемости неопределённого интеграла Петтиса по верхнему пределу (теорема 1), то σ-компактная измеримость приводит к необходимому условию (теорема 3).

В доказательстве теоремы 1 существенно используется нами ранее понятие компактного субдифференциала (см. [11] — [13]), которое мы вначале напомним. Обозначим через $U(0)$ произвольную замкнутую абсолютно выпуклую окрестность нуля в вещественном отделимом локально выпуклом пространстве (ЛВП) X.

Определение 3. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложениям при $\delta \to +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств отделимого вещественного ЛВП X, $B \subset X$. Множество $B = \bigcap_{\delta\to+0} B_\delta$ называется *K-пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \to +0$: $B = K - \lim_{\delta\to+0} B_\delta$, если: $\forall U = U(0) \subset X\ \exists \delta_U > 0 :\ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U(0))$.

Из предыдущего определения вытекает замкнутость и выпуклость множества B. Далее будем обозначать через $I \subset \mathbb{R}$ — некоторый отрезок, $\overline{co}A$ — выпуклую замкнутую оболочку множества A и рассматривать отображения $F : I \to E$.

Определение 4. Пусть $x \in I,\ \delta > 0$. *Частный K-субдифференциал* отображения F в точке x_0, отвечающий данному $\delta > 0$, есть замкнутое выпуклое множество

$$\partial_K F(x_0, \delta) = \overline{co}\left\{ \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \quad \middle| \quad 0 <\mid h \mid< \delta \right\} .$$

Определение 5. Отображение $F : I \to X$ называется *компактно субдифференцируемым* или *K-субдифференцируемым* в точке $x_0 \in I$, если существует K-предел частных K-субдифференциалов $\partial_K F(x_0) = K - \lim\limits_{\delta \to +0} \partial_K F(x_0, \delta)$. Полученное множество $\partial_K F(x_0)$ называется *компактным субдифференциалом*, или *K-субдифференциалом* отображения F в точке x_0.

Если отображение F дифференцируемо в точке x_0 в обычном смысле, то оно является компактно субдифференцируемым, причём $\partial_K F(x_0) = F'(x_0)$. В то же время, как показано в [11] — [13], существуют компактно субдифференцируемые отображения, не имеющие обычной производной.

Следующая теорема является первым основным результатом работы.

Теорема 1. *Если в* (10) $f \in B^w_{int}(I)$, *то F дифференцируемо почти всюду на I, причём справедливо равенство*

$$F'(x) = f(x) \text{ п.в. на } I. \tag{11}$$

Для доказательства нам потребуется следующий вспомогательный результат, полученный ранее в ([14], Theorem 1(ii)).

Теорема 2. *Пусть отображение f из* (10) *сильно измеримо. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ такое, что $mes(I \backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$ и множество*

$$X^\varepsilon_F := \left\{ \frac{F(E)}{mes(E)} \,\middle|\, E \subset E_\varepsilon,\ mes(E) > 0,\ E \in \Sigma \right\} \tag{12}$$

относительно компактно в X.

Переходим к доказательству теоремы 1.

Доказательство. 1) Покажем K-субдифференцируемость отображения F. Положим $\varepsilon_n = \frac{1}{n}\ \forall n \in \mathbb{N}$ и для каждого n выберем соответствующее множество из (12) (мы считаем, что $E_{\varepsilon_n} \subset [a;\ b]$). Легко видеть, что множество $E_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (I \backslash E_{\varepsilon_n})$ имеет нулевую меру Лебега. Поэтому почти все точки $x \in [a; b]$ принадлежат множеству E_{ε_n} при каком-либо $n \in \mathbb{N}$. Более того, согласно теореме о точках внешней плотности (см. [15], теорема 2, стр. 68), почти все точки каждого из множеств E_{ε_n} будут точками внешней плотности E_{ε_n}. Следовательно, для некоторого множества $e \subset [a; b]$ нулевой меры всякая точка $x \in [a; b] \backslash e$ является точкой внешней плотности какого-либо множества E_{ε_n}, т.е. для произвольной системы интервалов $\{I_m = (\alpha_m;\ \beta_m)\}_{m=1}^{\infty}$, стягивающейся к точке x $\exists\, n \in \mathbb{N}$ и E_{ε_n} из (12) такие, что:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{mes(I_m \backslash E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)} = 0 \qquad (\alpha_m \leqslant x \leqslant \beta_m, \quad \alpha_m \neq \beta_m)\,. \tag{13}$$

Далее,

$$\frac{(P)\int\limits_{I_m} f(t)dt}{mes(I_m)} = \frac{F(I_m)}{mes(I_m)} = \frac{F(I_m \bigcap E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m \bigcap E_{\varepsilon_n})} \cdot \frac{F(I_m \bigcap E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)} + \frac{F(I_m \backslash E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)}. \tag{14}$$

Отношение $\frac{F(I_m \backslash E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m \backslash E_{\varepsilon_n})} \longrightarrow 0$ при $m \longrightarrow \infty$ в силу $f \in B^w_{int}(I)$. Поэтому второе слагаемое в равенстве (14) стремится к нулю при $m \to \infty$ в силу (13). Из (13) также вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{mes(I_m \bigcap E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)} = 1. \tag{15}$$

В силу (13) — (15), а также относительной компактности множеств $X_F^{1/n} \subset X$ (см. теорему 2) вытекает существование частичного предела любой последовательности

$$\frac{F(I_m)}{mes(I_m)} \quad \text{при } m \to \infty,$$

а также относительная компактность множества всех таких частичных пределов. Следовательно, F K-субдифференцируемо в точке x по теореме 3 из [13].

2) Далее, сильная измеримость f влечёт сепарабельнозначность отображений f и F. А для сепарабельнозначных отображений в пространства Фреше из компактной субдифференцируемости почти всюду вытекает дифференцируемость F почти всюду ([16], теорема 4).

Равенство (11) в банаховом сучае мы покажем, опираясь на сепарабельнозначность F, а также известный результат ([3], п. 17.2.4, следствие 2) о существовании у каждого сепарабельного банахова пространства счётного множества линейных непрерывных функционалов, разделяющих точки: если X — сепарабельное банахово пространство, то существует множество функционалов $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ такое, что $\forall x, y \in X \quad x = y \iff \ell_n(x) = \ell_n(y) \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Для всякого $n \in \mathbb{N}$ $\exists\, e_n:\ mes(e_n) = 0$ и $\ell_n(F'(x)) = (\ell_n(F(x)))' = \ell_n(f(x))$ $\forall x \in I \backslash e_n$, т.к.

$$\ell_n(F(x)) = \ell_n\left((P)\int\limits_a^x f(t)dt\right) = \int\limits_a^x \ell_n(f(t))dt.$$

Ясно, что множество $e = \bigcup\limits_{n=1}^{n} e_n$ имеет нулевую меру. При этом $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\ell_n(F'(x)) = \ell_n(f(x)) \quad \forall x \in I \backslash e,$$

откуда и вытекает равенство (11) для банаховых пространств X.

3) Пусть теперь X — пространство Фреше. Обозначим через $\{\|\cdot\|_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — некоторую счётную определяющую систему полунорм в X. Обозначим через $\widehat{X}_j$ пополнения фактор-пространств $X_j = X/ker\|\cdot\|_j$ относительно фактор-норм $\|\cdot\|\widehat{}_j = \|\cdot\|_j$. Для банаховых пространств $\widehat{X}_j$ $\forall\ j \in \mathbb{N}$ мы имеем

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(P)\int\limits_x^{x+h} f(t)dt - f(x)\right\|_j = 0 \quad \forall x \in [a;b]\backslash e_j\ , \tag{16}$$

откуда $mes(e_j) = 0$. Тогда для всех $x \in [a;b]\backslash \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} e_j$. Это означает, что почти всюду на $[a;b]$ равенство (16) справедливо при всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, $F'(x) = f(x)$ почти всюду на I. □

Опираясь на некоторые рассуждения предыдущего доказательства, покажем второй основной результат работы.

Теорема 3. *Если в* (10) *отображение* F *дифференцируемо почти всюду на* I, *то* $f \in C^{\sigma}_{mes}(I)$.

Доказательство. Рассуждая, как и в пунктах 2 – 3 предыдущего доказательства, легко проверить, что

$$F'(x) = f(x) \ \text{ для п.в. } \ x \in I. \tag{17}$$

Пусть $\ell \in X^*$ — произвольный линейный непрерывный функционал на X. Тогда из (17) следует, что почти все точки $x \in I$ являются точками Лебега функции $\widetilde{f} = \ell(f)$, т.е. для произвольной системы интервалов $\{I_m = (\alpha_m;\ \beta_m)\}_{m=1}^{\infty}$, стягивающейся к точке x

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{mes(I_m)}\int\limits_{I_m}|\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x)|dt = 0 \ \text{ почти всюду на } I,$$

откуда $\widetilde{f} \in B^{w}_{int}(I)$ (в пространстве $\mathbb{R}$) в силу предложения 3:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\widetilde{f}(I_m\bigcap e_m)}{mes(I_m)} = 0, \tag{18}$$

где $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств, для которой

$$\lim_{m\to\infty}\frac{mes(I_m\bigcap e_m)}{mes(I_m)} = 0.$$

Из (18) вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty}\ell\left(\frac{F(I_m\bigcap e_m)}{mes(I_m)}\right) = 0. \tag{19}$$

Рассуждая также, как и в пункте 1) доказательства предыдущей теоремы, можно получить равенства (14) $\forall x \in I\backslash e$, $mes(e) = 0$. При этом

$$\ell\left(\frac{F(I_m)}{mes(I_m)}\right) = \ell\left(\frac{F(I_m\bigcap E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)}\right) + \ell\left(\frac{F(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}{mes(I_m)}\right),$$

откуда, переходя к пределу при $m \to \infty$, в силу (15), (17) и (19) мы имеем

$$\ell\left(F'(x)\right) \in \ell\left(\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}\right),$$

так как $\frac{F(I_m \bigcap E_{\varepsilon n})}{mes(I_m \bigcap E_{\varepsilon n})} \in X_F^{1/n} \subset X\ \forall n \in \mathbb{N}$ (под $\overline{abs.co}A$ мы понимаем замкнутую абсолютно выпуклую оболочку множества $A \subset X$).

Итак, $\ell\left(F'(x)\right) \leqslant \sup \ell\left(\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}\right)\ \forall \ell \in X^*$. По известному следствию из теоремы Хана-Банаха о строгой функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества $\forall x \in E_{1/n} \backslash e$:

$$F'(x) \in \overline{abs.co}\ X_F^{1/n}, \quad \text{или}, \quad F'(E_{1/n} \backslash e)\ \subset \overline{abs.co}\ X_F^{1/n},$$

причём все множества $\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}$ компактны как абсолютно выпуклые замыкания компактов (множества $\overline{X}_F^{1/n}$ компактны по теореме 2). Для завершения доказательства остаётся лишь заметить измеримость всех множеств $E_{1/n} \backslash e$. $\square$

Список литературы

[1] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле , Р. Филлипс. — М: ИЛ, 1962. — 829 с.

[2] Эдвардс Э. Функциональный анализ. Теория и приложения / Э. Эдвардс. — М.: Мир, 1969. — 1069 с.

[3] Кадец В. М. Курс функционального анализа. Учебное пособие / В. М. Кадец. — Х.: ХНУ им. В.Н. Каразина, 2006. — 600 с.

[4] Вахания Н. Н. Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян. — М.: Наука, 1985. — 368 с.

[5] Kadets V.M. Some remarks on vector-valued integration / V.M. Kadets, B. Shumyatskiy, R. Shvidkoy, L.Tseytlin and K. Zheltukhin // Math. Phys. Anal. Geom. Vol. 9. — 2002. — P. 48 -– 65.

[6] Cascales B. Measurable selectors and set-valued Pettis integral in non-separable Banach spaces / B. Cascales, V. Kadets, J. Rodriguez // Journal of Functional Analysis. — 2009. — Vol. 256, № 3. — P. 673 – 699.

[7] Naralenkov K. On Denjoy type extensions of the Pettis integral / K. M. Naralenkov // Czechoslovak Math. Journal. — Vol. 60, № 3.— 2010. — P. 737 – 750.

[8] Yoon J. H. The AP-Henstok extension of the Dunford and Pettis integral / J. H. Yoon, J. M. Park, Y. K. Kim, B. M. Kim // Journal of the Chungcheong Mathhematical Society. — Vol. 23, № 4. — 2010. — P. 879 – 884.

[9] Dilworth S. J. Nowhere weak differentiability of the Pettis integral / S. J. Dilworth, M. Girardi // Ouaest. Math. — Vol. 18, № 4. — 1995. — P. 365 – 380.

[10] Стонякин Ф. С. К-свойство Радона-Никодима для пространств Фреше / Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия « Математика. Механика. Информатика и кибернетика. » — 2009. — т. 22(61), № 1. — С. 102 – 113.

[11] Orlov I. V., Stonyakin F. S. Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral.// Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15, № 1. — P. 74 – 90.

[12] Стонякин Ф. С. Компактный субдифференциал вещественных функций / Ф. С. Стонякин //Динамические системы. — 2007.— Вып. 23. — С. 99 – 112.

[13] Стонякин Ф. С. Секвенциальный подход к понятию компактного субдифференциала для отображений в метризуемые ЛВП / Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика.» — 2008. — т. 21(60), № 1. — С. 41 – 53.

[14] Moedomo S. Radon – Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals / S. Moedomo, J.J. Uhl // Pacific J. of Math. — 1971. — Vol. 38, № 2. — P. 531 — 536.

[15] Брудно А. Л. Теория функций действительного переменного. Избранные главы / А. Л. Брудно. — М.: Наука, 1971. — 119 с.

[16] Стонякин Ф. С. Аналог теоремы Данжуа-Юнг-Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрирования / Ф. С. Стонякин // Труды ИПММ НАНУ. — 2010. — Т. 20. — С. 168 – 176.

Про диференційовність за верхньою границею невизначеного інтегралу Петтіса. *У цій роботі досліджено дві нові характеристики інтегровних за Петтісом відображень дійсного відрізка у простори Фреше: майже скрізь слабку інтегральну обмеженість та σ-компактну вимірність. Одержано достатню умову диференційовності невизначених інтегралів Петтіса у термінах майже скрізь слабкої інтегральної обмеженості, а також необхідну умову — у термінах σ-компактної вимірності.*

Ключові слова: інтеграл Петтіса, сильно вимірне відображення, простір Фреше, майже скрізь слабка інтегральна обмеженість, σ-компактна вимірність, компактна субдиференційовність.

About differentiability of indefinite Pettis integral by upper limit. *In this paper two new properties for Pettis integrable mappings acting from a real segment into Frechet spaces are investigated: almost everywhere weak integral boundedness and σ-compact measurability. The sufficient condition for differentiability of indefinite Pettis integral in terms of almost everywhere weak integral boundedness is obtained. The necessary condition for differentiability of indefinite Pettis integral in terms of σ-compact measurability is proved.*

Keywords: Pettis integral, strongly measurable mapping, Frechet space, almost everywhere weak integral boundedness, σ-compact measurability.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 110–122.

УДК 517.981 : 514.172

З. И. Халилова

K-СУБЛИНЕЙНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

В работе изучаются сублинейные многозначные операторы с компактными выпуклыми значениями. Показано, что в случае банаховых пространств такие операторы образуют упорядоченный банахов конус.

Ключевые слова: многозначный оператор, компакт, сублинейность, нормированный конус, квазиполнота.

Введение. Предварительные сведения

В современном выпуклом анализе и в задачах оптимального управления широко используются многозначные операторы (см., например,[1], [3], [9]), действующие из одного линейного пространства во множество подмножеств другого пространства: $A : X \to exp(Y)$.

Ещё одним важным объектом анализа являются сублинейные операторы (см., например, [2], [4], [6], [7],[8]), действующие из одного линейного пространства в некоторый частично упорядоченный конус элементов другого линейного пространства. Они обладают следующими свойствами:

(i) $A(x + y) \leq Ax + Ay$;
(ii) $A(\lambda x) \leq \lambda Ax$, при $\lambda \geq 0$.

В некоторых современных проблемах бесконечномерного анализа возникает необходимость объединить эти понятия. К этому приводит, например, задача обобщения понятия компактного субдифференциала (K-субдифференциала) на случай векторного аргумента.

K-субдифференциал, введенный в работе [5] для отображений вещественного аргумента, в фиксированной точке является компактным выпуклым множеством. При переходе к векторному аргументу естественным образом возникает оператор с компактными выпуклыми значениями, обладающий свойством сублинейности.

Таким образом, мы приходим к новой задаче выпуклого анализа: исследовать операторы описанного выше типа, которые далее в работе названы K-операторами. При этом возникают принципиально новые моменты: как система компактных выпуклых подмножеств исходного нормированного пространства, так и система K-операторов с конечной нормой образуют абстрактный нормированный конус, который не может быть вложен ни в одно линейное пространство. Заметим, что общая теория абстрактных локально выпуклых конусов возникла сравнительно недавно ([4], [8]), и такой её существенный раздел, как теория абстрактных нормированных конусов, почти не разработан. Это привело к постановке следующих основных вопросов.

1) Ввести общие понятия нормированного и банахового конусов.
2) Для заданного нормированного пространства F изучить нормированный частично упорядоченный конус F_K всех его компактных выпуклых подмножеств. Доказать полноту F_K в случае, когда пространство F банахово.
3) Для заданных нормированных пространств E и F ввести понятие K-сублинейного оператора $A : E \to F_K$. Ввести понятие нормы K-сублинейного оператора и исследовать вопрос о непрерывности ограниченных по норме K-операторов.
4) Исследовать нормированный конус $L_K(E;F)$ всех ограниченных K-операторов, действующих из E в F_K. Доказать квазиполноту конуса $L_K(E;F)$ в случае, когда F - банахово пространство.
5) Исследовать вопрос о композиции K-операторов.

Ответы на перечисленные вопросы составляют основное содержание работы.

1. Абстрактный нормированный конус.

Напомним вначале общее определение конуса.

Определение 1. *Конусом* X будем называть множество, снабженное сложением и скалярным умножением на положительные вещественные числа. Скалярное умножение ассоциативно и дистрибутивно, а сложение ассоциативно и коммутативно.

Замечание 1. Напомним, что по известному критерию (так называемый "закон сокращения"(cancellation law) [8]) векторный конус X может быть изоморфно вложен в некоторое линейное пространство Y тогда и только тогда, когда для любых элементов $x, y, z \in X$, для которых $x + z = y + z$, выполняется равенство $x = y$. Например, конус $exp(F)$ всех подмножеств векторного пространства $F \neq \{0\}$ не может быть изоморфно вложен ни в одно векторное пространство. Заметим также, что в конусе может быть определено умножение и на отрицательные, либо комплексные скаляры, но при этом, вообще говоря, $(-1) \cdot x$ не есть противоположный элемент к x.

Дадим теперь определение нормированного конуса.

Определение 2. Конус X назовём *нормированным*, если для каждого его элемента $x \in X$ определена неотрицательная $\|x\|$, обладающая следующими свойствами:
(i) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
(iii) $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$, для любого $\lambda \geq 0$.

Замечание 2. Отметим, что норма позволяет создать на конусе X соответствующую *нормированную топологию* с помощью ε - окрестностей:

$$U_\varepsilon(x) = \{x + h | h \in X, \|h\| < \varepsilon\}, (\varepsilon > 0).$$

Эта топология соответствует общему определению локально выпуклой топологии в конусе (см. ,например, [10], [11]).

Таким образом, *сходимость* $x_k \to x$ в нормированном конусе $(X, \|\cdot\|)$ означает, что

$$x_k = x + h_k \ (k = 1, 2, ...), \ \|h_k\| \to 0.$$

Пример 1. Приведем простой пример. Пусть $\mathbb{R}^+$ - положительная полуось с топологией правостороней сходимости. Эта топология не согласована с линейной структурой $\mathbb{R}^+$, однако согласована со структурой конуса, так как здесь

$$U_\varepsilon(x) = [x; x + \varepsilon) = \{x + h | \, h \in \mathbb{R}^+, \|h\| < \varepsilon\}.$$

Далее, как отмечалось в [4], топология конуса не порождает равномерность (в отличие от топологии линейного пространства). Однако можно ввести *квазиравномерность*, не обладающую свойством симметрии, в которой "направленные"окружения диагонали $\Delta \subset X \times X$ имеют вид:

$$\vartheta_\varepsilon^+(\Delta) = \{\langle x; x + h\rangle | \|h\| < \varepsilon, x \in X\}.$$

Это позволяет ввести соответствующие понятия фундаментальности и полноты.

Определение 3. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ - нормированный конус, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ называется *квазифундаментальной*, если

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists N (n > N, p \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow (x_n = x_{n+p} + h_{np}, \|h_{np}\| < \varepsilon).$$

Иначе говоря, $x_n \in U_\varepsilon(x_{n+p})$ при всех $p = 0, 1, 2...$ для $n > N(\varepsilon)$. Нормированный конус X назовём *квазиполным*, если любая фундаментальная последовательность в X сходится. Наконец, квазиполный нормированный конус X назовём *банаховым конусом.*

2. Нормированный конус F_K и его свойства.

Определение 4. Пусть F - нормированное пространство, которое мы далее для определенности будем считать вещественным. Через F_K обозначим множество всех компактных выпуклых подмножеств F. Нетрудно проверить, что F_K образует конус, относительно поэлементного сложения и умножения на скаляры из заданного поля (не только положительные). При этом нулём в конусе является множество $\{0\}$.

Замечание 3. Конус F_K индуктивно упорядочен отношением вложения:
$(C_1 \leq C_2) \iff C_1 \subset C_2$.

Действительно, для любых $C_1, C_2 \in F_K$ множество

$$C_3 = \overline{co}(C_1 \bigcup C_2),$$

компактно (см. [10]). При этом

$$C_1 \subset C_3,\ C_2 \subset C_3,$$

т.е. введенный частичный порядок является индуктивным.

Замечание 4. Конус F_K не содержится ни в каком линейном пространстве.

Доказательство. Действительно, согласно известному критерию [8], конус может быть вложен в некоторое векторное пространство тогда и только тогда, когда в конусе выполнен "закон сокращения". Однако в нашем случае "закон сокращения"не выполняется, так как, например, $C - C \neq \{0\}$, при $C \in F_K$ и $C \neq \{0\}$. □

Введем норму в конусе F_K.

Определение 5. *Нормой* множества $C \in F_K$ назовём величину

$$\|C\| = \sup_{y \in C} \|y\|.$$

Теорема 1. $\|C\|-$ норма в конусе F_K. Точнее говоря:
(i) $\|C\| = 0$ тогда и только тогда, когда $C = 0$;
(ii) $\|C_1 + C_2\| \leq \|C_1\| + \|C_2\|$;
(iii) $\|\lambda C\| = |\lambda| \cdot \|C\|$, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
(i) Пусть $C \in F_K$. Тогда $\|C| = 0 \iff \|y\| = 0\ \forall y \in C \iff C = \{0\}$.
(ii) Пусть $C_1, C_2 \in F_K$. Тогда:

$$\|C_1 + C_2\| = \sup_{\substack{y_1 \in C_1 \\ y_2 \in C_2}} \|y_1 + y_2\| \leq \sup_{\substack{y_1 \in C_1 \\ y_2 \in C_2}} (\|y_1\| + \|y_2\|) \leq$$

$$\leq \sup_{y_1 \in C_1} \|y_1\| + \sup_{y_2 \in C_2} \|y_2\| = \|C_1\| + \|C_2\|.$$

(iii) Пусть $C \in F_K, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\|\lambda C\| = \sup_{y \in C}\{\|\lambda y\| | \, y \in C\} = \sup_{y \in C}\{|\lambda| \cdot \|y\| | \, y \in C\} = |\lambda| \cdot \sup_{y \in C}\{\|y\| | \, y \in C\| = |\lambda| \cdot \|C\|.$$

□

Таким образом, F_K – нормированный конус. При этом норма согласована с отношением порядка: $(C_1 \subset C_2) \Rightarrow (\|C_1\| \leq \|C_2\|)$.

Замечание 5. Отметим, что норма в конусе F_K обладает тем же свойством оценки нормы снизу, что и обычная норма в линейном пространстве:

$$\|C_1 + C_2\| \geq |\|C_1\| + \|C_2\||. \tag{1}$$

Доказательство. Действительно, поскольку $0 \in C_2 - C_2$, то $C_1 + C_2 - C_2 \supset C_1$, а значит,

$$\|C_1\| \leq \|(C_1 + C_2) - C_2\| \leq \|C_1 + C_2\| + \|C_2\|,$$

откуда

$$\|C_1 + C_2\| \geq \|C_1\| - \|C_2\|.$$

Меняя теперь местами C_1 и C_2 в предыдущей выкладке, мы приходим к неравенству (1). □

В соответствии с замечанием 2, опишем нормированную топологию в конусе F_K.

Определение 6. Пусть $F-$ нормированное пространство. В нормированном конусе F_K, введём следующие понятия:

a) $\varepsilon-$ *окрестность точки* $C \in F_K$:

$$O_\varepsilon(C) = \{C + H | \, H \in F_K, \, \|H\| < \varepsilon\};$$

b) *сходящаяся последовательность*: $C_n \longrightarrow C_0$, в F_K при $n \to \infty$, если

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists N \; (n \geq N) \implies C_n = C_0 + H_n, \; \|H_n\| < \varepsilon;$$

c) *квазифундаментальная последовательность* $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\forall \, \varepsilon > 0 \, \exists N (n \geq N, p \geq 0) \implies C_n = C_{n+p} + H_{np}, \|H_{np}\| < \varepsilon;$$

d) *квазиполнота:* конус F_K- *квазиполный*, если любая квазифундаментальная последовательность в нем сходится;

e) *ограниченность*: множество $\mathcal{C} = \{C\} \subset F_K$ *ограниченно*, если

$$\sup_{C \in \mathcal{C}} \|C\| < \infty;$$

f) если нормированный конус F_K квазиполный, то назовём F_K *банаховым конусом.*

Покажем, что полнота F влечёт квазиполноту конуса F_K.

Лемма 1. Если последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ в нормированном конусе F_K квазифундаментальна, то она ограничена.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$ и найдем также N_0, что для всех $p \geq 0$:

$$C_N = C_{N_0+p} + H_{N_0p}, \text{ где } \|H_{N_0p}\| < \varepsilon_0.$$

Отсюда, в силу замечания 5, получаем:

$$\|C_{N_0+p}\| \leq \|C_{N_0}\| + \|H_{N_0p}\| < \|C_{N_0}\| + \varepsilon_0.$$

Следовательно, при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\|C_n\| \leq \max(\|C_1\|, ..., \|C_{N_0-1}\|, \|C_{N_0}\| + \varepsilon_0) < \infty,$$

т.е. последовательность $\{\|_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в F_K. □

Лемма 2. Если $C_2 \in O_{\varepsilon_1}(C_1), C_3 \in O_{\varepsilon_2}(C_2)$, то $C_3 \in O_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(C_1)$.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна в F_K. Если некоторая подпоследовательность $\{C_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в F_K к C_0, то и последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к C_0.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем K такое, что
$(k \geq K) \Rightarrow (C_{n_k} \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(C_0))$ и $(n \geq n_k, p > 0) \Rightarrow (C_n \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(C_{n+p}))$. Тогда при $k \geq K$ и $n_k \leq n \leq n_{k+1}$: получаем, в силу леммы 2:

$$(C_n \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(C_{n_{k+1}}),\, C_{n_{k+1}} \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(C_0)), \Longrightarrow (C_n \in O_{\varepsilon}(C_0)),$$

откуда по определению 6, $C_n \to C_0$ в F_K. □

Докажем теперь основной результат.

Теорема 3. Если F – банахово пространство,то F_K – банахов конус.

Доказательство. Покажем,что любая квазифундаментальная последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ в F_K содержит сходящуюся подпоследовательность. По условию фундаментальности, $C_n = C_{n+p} + H_{np}$, где $\|H_{np}\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по p. Выберем некоторую последовательность номеров $n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$ так, чтобы

$$\|H^k := H_{n_k, n_{k+1}-n_k}\| \leq \varepsilon_k, \text{ где} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty.$$

Покажем, что соответствующая подпоследовательность $\{C_{n_k} = C_{n_{k+1}} + H^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в F_K.

Положим, что

$$\widetilde{H}^k = \{\sum_{i=k}^{\infty} h_i |\, h_i \in H^i\},\ (k = 1, 2, ...).$$

Заметим сначала, что любой ряд $\sum\limits_{i=k}^{\infty} h_i$ абсолютно сходится, так как

$$\sum_{i=k}^{\infty} \|h_i\| \le \sum_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i < \infty.$$

Отсюда также следует, что

$$\|\widetilde{H}^k\| \le \sum_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty.$$

Покажем, что $\widetilde{H}^k \in F_K$. Сначала докажем вполне ограниченность $\widetilde{H}^k$. Так как

$$\left\{\sum_{i=k}^{\infty} h_i\right\} = \left\{\sum_{i=k}^{k+p-1} h_i + \sum_{i=k+p}^{\infty} h_i\right\},$$

то

$$\widetilde{H}^k = \sum_{i=k}^{k+p-1} H^i + \widetilde{H}^{k+p}.$$

Выберем $p > 0$ так, чтобы $\|\widetilde{H}^{k+p}\| < \frac{\varepsilon}{2}$, и затем выберем конечную $\frac{\varepsilon}{2}-$ сеть $\{O_{\frac{\varepsilon}{2}}(Z_j)\}_{j=1}^{J}$ для $\sum\limits_{i=k}^{k+p-1} H^i$. Следовательно, $\{O_{\varepsilon}(Z_j)\}_{j=1}^{J}-$ конечная $\varepsilon-$сеть для $\widetilde{H}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Из определения множества $\widetilde{H}^k$ следует его выпуклость и замкнутость. Следовательно, $\widetilde{H}^k \in F_K$. Положим

$$C_0 := C_{n_1} + H^1 = C_{n_1} + (H^1 + \widetilde{H}^2) = C_{n_2} + \widetilde{H}^2 = ... = C_{n_k} + \widetilde{H}^k = ...$$

Из $\|\widetilde{H}^k\| \to 0$ следует $C_{n_k} \to C_0$ в F_K. Тогда, по теореме 2, также и $C_n \to C_0$, т.е. F_K- квазиполный конус. □

3. K-сублинейные операторы (K-операторы). Связь ограниченности и непрерывности K-операторов.

Вначале дадим определение K-сублинейного оператора.

Определение 7. Пусть $E-$ линейное пространство, $F-$ нормированое пространство.

Отображение $A : E \longrightarrow F_K$ назовём *K-сублинейным оператором* (или *K-оператором*), если для любых $h_1, h_2, h \in E$ верно:
(i) $A(h_1 + h_2) \subset Ah_1 + Ah_2$;
(ii) $A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Заметим, что, ввиду упорядоченности конуса F_K отношением вложения, свойства оператора A можно записать в виде:

(i)$'$ $A(h_1 + h_2) \le Ah_1 + Ah_2$;
(ii)$'$ $A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим случай,когда E также нормированное пространство. Пусть A – K-оператор, действующий из E в F_K.

Определение 8. Будем говорить, что K-оператор A *ограничен (по норме)*, если

$$\sup_{\|h\|\le 1} \|Ah\| < \infty \tag{2}$$

Если A ограничен, то величину (2) назовём *нормой* оператора A и обозначим обычным символом $\|A\|$.

Замечание 6. Нетрудно убедиться, что норма K-оператора обладает обычными свойствами нормы:

(a) $\|A\| \ge 0\,,\ (\|A\| = 0) \Longleftrightarrow A = 0$;
(b) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$;
(c) $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Кроме того, введем операцию разности K-операторов: $A - B \;=\; A + (-1)\cdot B$. Заметим, что из определения 7 следует, что $(A - B)$ – также K-оператор. Из неравенства (1) немедленно следует соответствующее неравенство для норм K-операторов:

d) $\|A \pm B\| \ge |\|A\| - \|B\||$.

Покажем также, что для K-операторов сохраняется основное свойство нормы линейного оператора:

e) $\|Ah\| \ge |\|A\| \cdot \|h\||$.

Доказательство. Имеем согласно определению нормы K-оператора:

$$\|A\| = \sup_{\|h\|\le 1} \|Ah\| \ge \sup_{\|h\|=1} \|Ah\| = \sup_{h\ne 0} \left\| A\left(\frac{h}{\|h\|}\right)\right\| = \sup_{h\ne 0} \frac{\|Ah\|}{\|h\|},$$

откуда

$$\left(\frac{\|Ah\|}{\|h\|} \le \|A\|\right) \Longrightarrow (\|Ah\| \le \|A\| \cdot \|h\|).$$

□

Изучим теперь связь непрерывности и ограниченности по норме K-оператора.

Вначале приведём определение полунепрерывности сверху для произвольного отображения $\Phi : E \to F_K$.

Определение 9. Назовём отображение Φ *полунепрерывным сверху* в точке $x \in E$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ \ (\|h\| \le\, \delta) \Longrightarrow (\Phi(x + h) \subset \Phi(x) + C_\varepsilon(h),\ \text{где}\ \|C_\varepsilon(h)\| \le \varepsilon).$$

Теорема 4. K-оператор $A : E \to F_K$ ограничен по норме тогда и только тогда, когда A непрерывен в 0 или, что равносильно, тогда и только тогда, когда A равномерно полунепрерывен сверху всюду на E.

Доказательство.

1) Если A ограничен по норме, то из неравенства $\|Ah\| \leq \|A\| \cdot \|h\|$ немедленно следует непрерывность A в нуле, т.к. $(\|h\| \to 0) \Longrightarrow (\|Ah\| \to 0)$.

2) Пусть A непрерывен в нуле. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\|h\| \leq \delta) \Longrightarrow (\|Ah\| \leq \varepsilon). \tag{3}$$

При этом, ввиду субаддитивности A, для любого $x \in E$:

$$A(x+h) \subset Ax + C_\delta, \ \text{ где } \|C_\delta\| \leq \varepsilon,$$

т.е A равномерно полунепрерывен всюду на E.

3) Пусть A равномерно полунепрерывен всюду на E. В частности, это означает, что A непрерывен в нуле, т.е. выполнено условие (3). Отсюда

$$\|A\| = \sup_{\|h\|\leq 1} \|Ah\| = \sup_{\|h\|\leq 1} \left\| A\left(\frac{\delta h}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\delta}\right)\right\| = \sup_{\|h\|\leq 1} \left(\frac{\|h\|}{\delta} \cdot A\left(\frac{\delta h}{\|h\|}\right)\right) \leq \frac{\varepsilon}{\delta} < \infty,$$

т.е. A ограничен по норме. □

4. Нормированный конус ограниченных K-операторов и его свойства

Обозначим множество всех ограниченных K-операторов $A : E \to F_K$ через $L_K(E;F)$.

Покажем, что $L_K(E;F)$ – нормированный конус.

Теорема 5. Для любых нормированных пространств E и F множество $L_K(E;F)$ образует нормированный конус. При этом конус $L_K(E;F)$ индуктивно упорядочен отношением

$$(A_1 \leq A_2) :\Longleftrightarrow (A_1 h \subset A_2 h),\ h \in E,$$

и норма в $L_K(E;F)$, согласована с отношением порядка:

$$(A_1 \leq A_2) \Longrightarrow (\|A_1\| \leq \|A_2\|).$$

(a) $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$, то есть $Ah = \{0\}$;
(b) $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$;
(c) $\|\lambda A\| \leq \lambda \cdot \|A\|$, где $(\lambda \geq 0)$;
(d) $(A_1 \leq A_2)$, следовательно, $\|A_1\| \leq \|A_2\|$;
(e) $\|Ah\| \leq \|A\| \cdot \|h\|$.

Доказательство. Из свойств нормы K-оператора (см. замечание 6) вытекает, что $L_K(E;F)-$ нормированный конус; при этом, в силу свойства d), норма в $L_K(E;F)$ согласована с отношением индуктивного порядка в $L_K(E;F)$. □

Теорема 6. Если пространство $F-$ банахово, то $L_K(E;F)-$ банахов конус.

Доказательство. Пусть последовательность K-операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна в $L_K(E;F)$. Следовательно, согласно определению 6,

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N\; (n \geq N,\, p > 0) \Longrightarrow (A_n = A_{n+p} + B_{np}, \quad \text{где } \|B_{np}\| < \varepsilon). \tag{4}$$

1) Зафиксируем $h \in E$, $\|h\| \leq 1$ и покажем, что последовательность $\{A_n h\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна в F_K. Действительно, в силу (4),

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N\; (n \geq N,\, p > 0) \Longrightarrow (A_n h = A_{n+p} + B_{np} h), \tag{5}$$

причём из неравенства $\|B_{np}\| < \varepsilon$ следует $\|B_{np} h\| \leq \|B_{np}\| \cdot \|h\| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{A_n h\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна при любом $h \in E$, $\|h\| \leq 1$. Но тогда для любого $h \in E$, $h \neq 0$, имеем

$$\{A_n h\}_{n=1}^{\infty} \;=\; \|h\| \cdot \left\{ A_n \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right\}_{n=1}^{\infty},$$

откуда вытекает квазифундаментальность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ при любом $h \in E$. В силу квазиполноты F_K, для всякого $h \in E$ в F_K существует предел

$$Ah := \lim_{n\to\infty} A_n h.$$

2) Проверим сублинейность оператора $A : E \longrightarrow F_K$:

a) $A(h_1 + h_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(h_1 + h_2) \subset \lim\limits_{n\to\infty} (A_n h_1 + A_n h_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n h_1 + \lim\limits_{n\to\infty} A_n h_2 = = Ah_1 + Ah_2$;

b) $A(\lambda h) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\lambda \cdot h) = \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda \cdot A_n h) = = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} A_n h = \lambda \cdot Ah.$

Таким образом, $A-$ K-оператор.

3) Проверим ограниченность по норме оператора A. В силу лемму 1, последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена: $\|A_n\| \leq C$ $(n = 1, 2, ...)$. Отсюда следует,

$$\|A_n h\| \leq C \cdot \|h\| \; (\forall\, h \in E \; \forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\|Ah\| \leq C \cdot \|h\|,$$

откуда $\|A\| \leq C < \infty$. Таким образом, $A \in L_K(E;F)$.

4) Проверим, что $A_n \to A$ в $L_K(E;F)$. Из условия (5) получаем (при заданном $\varepsilon > 0,\ n \geq N(\varepsilon),\ p > 0$):

$$B_{np} h = A_n h - A_{n+p} h.$$

Переходя к пределу при $p \to \infty$, отсюда получаем:

$$B_n h := \lim_{p\to\infty} B_{np} h = A_n h - Ah.$$

При этом из неравенства $\|B_{np}\| < \varepsilon$ в пределе следует $\|B_n\| \leq \varepsilon$, при $n \geq N(\varepsilon)$, откуда $B_n \to 0$ в $L_K(E;F)$. Следовательно, $A_n = A + B_n \longrightarrow A$ в $L_K(E;F)$ при $n \to \infty$.

Таким образом, нормированный конус $L_K(E;F)$ – квазиполный, т.е. $L_K(E;F)$ – банахов конус. $\square$

5. Композиция K-операторов.

Введем понятие композиции K-сублинейных операторов. Пусть $A : E \to F_K$ и $B : F \to G_K$ – K-сублинейные ограниченные операторы.

Определение 10. *Композицией* $[B \cdot A]$ операторов A и B будем называть следующее многозначное отображение:

$$[B \cdot A]h = \overline{co}B(Ah) = \overline{co}(\bigcup_{y \in Ah} By).$$

Теорема 7. Если $A \in L_K(E,F)$, $B \in L_K(F,G)$, то $[B \cdot A] \in L_K(E,G)$.

Доказательство. Пусть $D = \bigcup\limits_{y \in Ah} By$. Для произвольной последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$, возможны два случая:

1) вся последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ или хотя бы некоторая её подпоследовательность содержится в одном By, при некотором $y \in Ah$. Так как множество By компактно, то из $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2) Никакая подпоследовательность из $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ не содержится в каком - либо одном By, где $y \in Ah$, то есть в каждом By может содержаться только конечное число z_n. Следовательно,существует некоторая последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Ah$, такая,что каждое By_k содержит некоторую точку z_{n_k}.

a) Так как $Ah-$ компакт, то из $\{y_k\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить некоторую сходящуюся подпоследовательность $y_{k_i} \to y_0 \in Ah$.

Поскольку $B-$ полунепрерывный сверху сублинейный оператор, то

$$By_{k_i} \subset By_0 + E_{k_i}, \quad \text{где } \|E_{k_i}\| = \sup_{z \in E_{k_i}} \|z\| \to 0.$$

b) Следовательно, для любого $i = 1, 2, ...$ найдётся такой элемент $\widetilde{z_i} \in By_0$, что

$$z_{n_{k_i}} = \widetilde{z_i} + e_i, \quad \text{где } e_i \in E_{k_i},\ \|e_i\| \to 0, \quad \text{при } i \to \infty.$$

Так как последовательность $\{\widetilde{z_i}\}_{i=1}^{\infty}$ содержится в компакте By_0, то из нее можно выделить некоторую сходящуюся подпоследовательность $\widetilde{z_{i_j}} \to z_0 \in By_0$. При этом:

$$\|\widetilde{z_{i_j}} - z_{n_{k_{i_j}}}\| = \|e_{i_j}\| \to 0 \ \text{ при } j \to \infty,$$

откуда следует,что $z_{n_{k_{i_j}}} \to z_0$, где $z_0 \in \overline{D}$. Следовательно, множество $\overline{D}$ компактно, откуда множество $\overline{co}(D) = \overline{co}(\overline{D})$ также компактно.

Проверим теперь сублинейность отображения $[B \cdot A] : E \longrightarrow G_K$:

$$[B \cdot A](\lambda h) = \overline{co}B(A(\lambda h)) = \overline{co}B(\lambda Ah) = \overline{co}(\lambda B(Ah)) = \lambda\overline{co}B(Ah) = \lambda[B \cdot A]h;$$

$$[B \cdot A](h_1 + h_2) = \overline{coB(A(h_1 + h_2))} \subset \overline{co}B(Ah_1 + Ah_2) \subset \overline{co}(B(Ah_1) + B(Ah_2)) \subset$$
$$\subset \overline{co}B(Ah_1) + \overline{co}B(Ah_2) = [B \cdot A]h_1 + [B \cdot A]h_2.$$

□

Следствие 1. $\|[B \cdot A]\| \le \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство. Имеем:

$$\|[B \cdot A]\| = \sup_{\|h\| \le 1} \|\overline{co}B(Ah)\| = \sup_{\|h\| \le 1} \|B(Ah)\| \le \sup_{\|h\| \le 1} (\|B\| \cdot \|Ah\|) =$$
$$= \|B\| \cdot \sup_{\|h\| \le 1} \|Ah\| = \|B\| \cdot \|A\|.$$

□

Автор выражает признательность И.В.Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Алексеев В. М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление.* – Москва: Наука, 1979.

[2] Вулих Б.З. *Введение в функциональный анализ.* – Москва: Наука, 1967.

[3] Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* – Москва: Мир, 1971.

[4] Keimel K., Roth W. *Ordered Cones and Approximation, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1517* – Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin-New York, 1992.

[5] Орлов И. В., Стонякин Ф. С. *Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты* // Современная математика.Фундаментальные направления. 2009. – Том 34. – С. 121–138.

[6] Люстерник Л. А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа* – Москва: Наука, 1965.

[7] Линке Ю.Э. *Универсальные пространства субдифференциалов сублинейных операторов со значениями в конусе ограниченных полунепрерывных снизу функций* // Математические заметки. 2011. – Том 89. Выпуск 4. – С. 547–557.

[8] Ranjbari A., Saiflu H. *Some results on the uniform boundedness theorem in locally convex cones* // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2009. – Vol. 15 , no. 4. – P. 361-368.

[9] Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ* – Москва: Мир, 1973.

[10] Шефер Х. *Топологические векторные пространства* – Москва: Мир, 1971.

[11] Энгелькинг Р. *Общая топология* – Москва: Мир, 1986.

K - сублінійні багатозначні оператори та їх властивості

У роботі вивчаються сублінійні багатозначні оператори з компактними опуклими значеннями. Показано, що в разі банахових просторів такі оператори утворюють впорядкований банахов конус.

Ключові слова: багатозначний оператор, компакт, сублінійність, нормований конус, квазіповнота

K - sublinear multivalued operators and their properties

The sublinear multivalued operators with compact convex values are studied in the work . It's shown that in the case of Banach spaces such operators form a ordered Banach cone.

Keywords: multivalued operator, compact set, sublinearity, normed cone, quasicompleteness.

Содержание

Т. Н. Астахова, А. Л. Зуев
СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯМИ . . . 1

С. Ю. Артамонов
О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ МОДУЛЯ НЕПРЕРЫВНОСТИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ПРОИЗВОДНОЙ РИССА . . . 10

И. И. Карпенко, А.М. Гончаренко
ОДНОВРЕМЕННАЯ ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ КВАТЕРНИОННЫХ НЕЭРМИТОВО САМОСОПРЯЖЕННЫХ МАТРИЦ . . . 23

Ю. Л. Кудряшов
ИЗОМОРФИЗМ ДВУХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ САМОСОПРЯЖЕННОЙ ДИЛАТАЦИИ ДИССИПАТИВНОГО ОПЕРАТОРА 32

Е. М. Кузьменко
УСЛОВИЯ K-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ И ПОВТОРНОЙ K-ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА $W^{1,p}$ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ . . . 39

А. М. Погребицкая, С. И. Смирнова
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ДВОЙНОГО ГИБРИДНОГО ВКБ-ГАЛЕРКИН РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ . . . 61

И. А. Романенко
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КОМПАКТОВ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ . . . 75

В. М. Статкевич
АНАЛОГИ ФОРМУЛ КРАМЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕРЕГУЛЯРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ . . . 89

Ф. С. Стонякин
О дифференцируемости по верхнему пределу неопределённого интеграла Петтиса 98

З. И. Халилова
K-СУБЛИНЕЙНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА 110

Адрес редакции dmath@list.ru