

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 1–6.

УДК 519.4

М. В. АХРАМОВИЧ

ПОДОБИЕ ПАР q – КОММУТИРУЮЩИХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МАТРИЦ

В работе доказано, что задача классификации, с точностью до преобразования подобия, пары матриц (A, B) , удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} A^2 = B^3 = AB^2 = 0 \\ AB = qBA, \quad q \in \mathbb{C}, \quad q \neq 0 \end{cases},$$

является "дикой" задачей.

Ключевые слова: подобие матриц, невырожденная матрица, "дикая" задача.

ВВЕДЕНИЕ

Классификация произвольных наборов матриц $(A_1, A_2, \dots, A_k)$ с точностью до преобразования подобия – одна из самых старых задач линейной алгебры. Эта задача является сложной ("дикой") уже для двух матриц (A, B) общего вида. Поэтому на рассматриваемые матрицы накладываются различные условия, такие, как коммутруемость, нильпотентность и т.п. При выполнении некоторых условий задача классификации поддается решению (становится "ручной"). Другие условия, тем не менее, оставляют задачу "дикой" (см., напр., [3]).

В работе [1] была доказана "дикость" задачи классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных матриц (A, B) , $A^3 = B^3 = 0$, связанных соотношением q -коммутируемости: $BA = qAB$, где $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$, а в работе [2] — что "дикой" является и задача классификации пары коммутирующих нильпотентных матриц (A, B) , $A^2 = B^3 = 0$, связанных соотношением $AB^2 = 0$. В данной работе доказывается "дикость" задачи классификации, с точностью до преобразования подобия, пары нильпотентных матриц (A, B) , $A^2 = B^3 = 0$, связанных соотношениями: $AB^2 = 0$, $AB = qBA$, где $q \in \mathbb{C}$, $q \neq 0$.

q -КОММУТИРУЮЩИЕ ПАРЫ МАТРИЦ

Пусть K — алгебраически замкнутое поле. Для произвольной пары матриц (A, B) из $\mathbf{M}_n(K)$ построим матрицы

$$C = \begin{pmatrix} I & 0 & I & I & I \\ 0 & I & I & A & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_1 I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 I \end{pmatrix},$$

где все клетки из $\mathbf{M}_n(K)$ и $d_1, \dots, d_5$ — ненулевые попарно различные комплексные числа. Рассмотрим следующие матрицы:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \mathcal{B}_1 & 0 & \mathcal{B}_2 \\ 0 & 0 & \mathcal{B}_3 \\ 0 & 0 & q\mathcal{B}_1 \end{pmatrix}, \quad q \in \mathbb{C}, \quad q \neq 0,$$

где

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{B}_3 = (0 \ C \ 0).$$

Непосредственно проверяется следующее утверждение.

Предложение 1. Матрицы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ удовлетворяют соотношениям:

1. $\mathcal{A}^2 = \mathcal{B}^3 = 0$.
2. $\mathcal{A}\mathcal{B}^2 = 0$.
3. $\mathcal{A}\mathcal{B} = q\mathcal{B}\mathcal{A}$.

Пусть $(\tilde{A}, \tilde{B})$ — другая пара матриц из $\mathbf{M}_n(K)$. Тогда, аналогичным образом, по паре $(\tilde{A}, \tilde{B})$ построим матрицы $\tilde{\mathcal{A}}$ и $\tilde{\mathcal{B}}$ с таким же разбиением на блоки.

Теорема 1. Пары матриц $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$ подобны тогда и только тогда, когда подобны пары матриц (A, B) и $(\tilde{A}, \tilde{B})$.

Доказательство. Необходимость Пусть матрица $\mathcal{S}$ определяет подобие $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ и $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}})$. Тогда

$$\begin{cases} \mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S} \\ \mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S} \end{cases}.$$

Найдем вид матрицы $\mathcal{S}$. Пусть

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} & \mathcal{S}_{13} \\ \mathcal{S}_{21} & \mathcal{S}_{22} & \mathcal{S}_{23} \\ \mathcal{S}_{31} & \mathcal{S}_{32} & \mathcal{S}_{33} \end{pmatrix}.$$

Вычислим

$$\mathcal{S}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{S}_{11} \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{21} \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{31} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{31} & \mathcal{S}_{32} & \mathcal{S}_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда из условия $\mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S}$ следует система равенств: $\mathcal{S}_{31} = \mathcal{S}_{32} = \mathcal{S}_{21} = 0$, $\mathcal{S}_{11} = \mathcal{S}_{33}$, откуда получаем, что

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11} & \mathcal{S}_{12} & \mathcal{S}_{13} \\ 0 & \mathcal{S}_{22} & \mathcal{S}_{23} \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 & \mathcal{S}_2 & \mathcal{S}_3 \\ 0 & \mathcal{S}_4 & \mathcal{S}_5 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_1 \end{pmatrix}.$$

Подставляя матрицу $\mathcal{S}$ в равенство $\mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S}$, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \mathcal{S}_1\mathcal{B}_1 = \tilde{\mathcal{B}}_1\mathcal{S}_1 \\ \tilde{\mathcal{B}}_1\mathcal{S}_2 = 0 \\ \mathcal{S}_1\mathcal{B}_2 + \mathcal{S}_2\mathcal{B}_3 + q\mathcal{S}_3\mathcal{B}_1 = \tilde{\mathcal{B}}_1\mathcal{S}_3 + \tilde{\mathcal{B}}_2\mathcal{S}_1 \\ \mathcal{S}_4\mathcal{B}_3 + q\mathcal{S}_5\mathcal{B}_1 = \tilde{\mathcal{B}}_3\mathcal{S}_1 \end{cases}. \quad (1)$$

Из первого равенства системы (1) имеем

$$\mathcal{S}_1\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \mathcal{S}_{11}^{(1)} \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{21}^{(1)} \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{31}^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{B}}_1\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{31}^{(1)} & \mathcal{S}_{32}^{(1)} & \mathcal{S}_{33}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

откуда получаем: $\mathcal{S}_{31}^{(1)} = 0$, $\mathcal{S}_{32}^{(1)} = 0$, $\mathcal{S}_{21}^{(1)} = 0$, $\mathcal{S}_{11}^{(1)} = \mathcal{S}_{33}^{(1)}$. Следовательно,

$$\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_{11}^{(1)} & \mathcal{S}_{12}^{(1)} & \mathcal{S}_{13}^{(1)} \\ 0 & \mathcal{S}_{22}^{(1)} & \mathcal{S}_{23}^{(1)} \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_{11}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 0 & U_4 & U_5 \\ 0 & 0 & U_1 \end{pmatrix}.$$

Рассматривая второе равенство, получаем:

$$\tilde{\mathcal{B}}_2\mathcal{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_3^{(2)} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \quad \text{откуда, } \mathcal{S}_2 = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1^{(2)} & \mathcal{S}_2^{(2)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из четвертого равенства следует:

$$\mathcal{S}_4\mathcal{B}_3 = (0 \ \mathcal{S}_4C \ 0), \quad \mathcal{S}_5\mathcal{B}_1 = (0 \ 0 \ \mathcal{S}_1^{(5)}), \quad \tilde{\mathcal{B}}_3\mathcal{S}_1 = (0 \ \tilde{C}U_4 \ \tilde{C}U_5).$$

Отсюда, подставляя полученные данные в равенство $\mathcal{S}_4\mathcal{B}_3 + q\mathcal{S}_5\mathcal{B}_1 = \tilde{\mathcal{B}}_3\mathcal{S}_1$, имеем

$$\begin{cases} \mathcal{S}_4C = \tilde{C}U_4 \\ q\mathcal{S}_1^{(5)} = \tilde{C}U_5 \end{cases}. \quad (2)$$

Наконец из третьего равенства получим

$$\begin{pmatrix} U_2 & U_3D + S_1^{(2)}C & qS_{11}^{(3)} \\ U_4 & U_5D + S_2^{(2)} & qS_{21}^{(3)} \\ 0 & U_1D & qS_{31}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{31}^{(3)} & S_{32}^{(3)} & S_{33}^{(3)} \\ U_1 & U_2 & U_3 \\ 0 & \tilde{D}U_4 & \tilde{D}U_5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $U_1 = U_4$, $\tilde{D}U_4 = U_1D$, или, в силу (2),

$$\begin{cases} \mathcal{S}_4C = \tilde{C}U_1 \\ U_1D = \tilde{D}U_1. \end{cases} \quad (3)$$

Рассмотрим последнее равенство системы (3). Пусть

$$U_1 = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} & U_{45} \\ U_{51} & U_{52} & U_{53} & U_{54} & U_{55} \end{pmatrix}.$$

Так как $U_1D = \tilde{D}U_1$ и в силу $d_i \in \mathbb{C}$, $d_i \neq 0$, $d_i \neq d_j$, $i \neq j$ ($i = 1, \dots, 5$), то

$$U_1 = \begin{pmatrix} U_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_5 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим первое равенство системы (3).

$$\tilde{C}U_1 = \begin{pmatrix} T_1 & 0 & T_3 & T_4 & T_5 \\ 0 & T_2 & T_3 & \tilde{A}T_4 & \tilde{B}T_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{S}_4C = \begin{pmatrix} S_{11}^{(4)} & S_{12}^{(4)} & \begin{pmatrix} S_{11}^{(4)} + S_{12}^{(4)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_{11}^{(4)} + S_{12}^{(4)} A \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_{11}^{(4)} + S_{12}^{(4)} B \end{pmatrix} \\ S_{21}^{(4)} & S_{22}^{(4)} & \begin{pmatrix} S_{21}^{(4)} + S_{22}^{(4)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_{21}^{(4)} + S_{22}^{(4)} A \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_{21}^{(4)} + S_{22}^{(4)} B \end{pmatrix} \\ S_{31}^{(4)} & S_{32}^{(4)} & \begin{pmatrix} S_{31}^{(4)} + S_{32}^{(4)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_{31}^{(4)} + S_{32}^{(4)} A \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_{31}^{(4)} + S_{32}^{(4)} B \end{pmatrix} \\ S_{41}^{(4)} & S_{42}^{(4)} & \begin{pmatrix} S_{41}^{(4)} + S_{42}^{(4)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_{41}^{(4)} + S_{42}^{(4)} A \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_{41}^{(4)} + S_{42}^{(4)} B \end{pmatrix} \\ S_{51}^{(4)} & S_{52}^{(4)} & \begin{pmatrix} S_{51}^{(4)} + S_{52}^{(4)} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_{51}^{(4)} + S_{52}^{(4)} A \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} S_{51}^{(4)} + S_{52}^{(4)} B \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Из равенства $\mathcal{S}_4 C = \tilde{C} U_1$ получаем следующую систему:

$$\begin{cases} S_{21}^{(4)} = S_{31}^{(4)} = S_{41}^{(4)} = S_{51}^{(4)} = S_{32}^{(4)} = S_{42}^{(4)} = S_{52}^{(4)} = S_{12}^{(4)} = 0 \\ S_{11}^{(4)} = T_1, S_{11}^{(4)} = T_3, S_{11}^{(4)} = T_4, S_{11}^{(4)} = T_5 \\ S_{22}^{(4)} = T_2, S_{22}^{(4)} = T_3, S_{22}^{(4)} A = \tilde{A} T_4, S_{22}^{(4)} B = \tilde{B} T_5 \end{cases}.$$

Отсюда следует, что

$$T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T,$$

откуда, из последних двух равенств,

$$\begin{cases} TA = \tilde{A}T \\ TB = \tilde{B}T \end{cases}. \quad (4)$$

Допустим, что T — вырожденная матрица, тогда, очевидно, U_1 — вырожденная, откуда $\mathcal{S}_1$ — вырожденная. Но тогда $\tilde{\mathcal{S}}$ — тоже вырожденная матрица, что противоречит допущению о невырожденности $\tilde{\mathcal{S}}$. Таким образом, T — невырожденная матрица. Тогда, с учетом системы (4), получаем, что

$$(A, B) \sim (\tilde{A}, \tilde{B}).$$

Достаточность. Пусть $(A, B) \sim (\tilde{A}, \tilde{B})$. Отсюда следует, что существует невырожденная матрица T такая, что

$$TA = \tilde{A}T, TB = \tilde{B}T.$$

Рассмотрим матрицу

$$U_1 = \begin{pmatrix} T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T \end{pmatrix}.$$

По матрице U_1 построим матрицы

$$\mathcal{S}_1 = \begin{pmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ 0 & U_1 & U_5 \\ 0 & 0 & U_1 \end{pmatrix}, \mathcal{S} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_1 & \mathcal{S}_2 & \mathcal{S}_3 \\ 0 & U_1 & \mathcal{S}_5 \\ 0 & 0 & \mathcal{S}_1 \end{pmatrix},$$

где матрица $\mathcal{S}$ (точнее, ее элементы) удовлетворяет системе (1), а матрицы $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{\mathcal{B}}$ построены по матрицам A , B , $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, как было показано выше.

Так как матрица T — невырожденная, то, очевидно, U_1 — невырожденная, откуда, $\mathcal{S}$ — невырожденная матрица. Кроме того, поскольку матрица $\mathcal{S}$ удовлетворяет системе (1), то

$$\begin{cases} \mathcal{S}\mathcal{A} = \tilde{\mathcal{A}}\mathcal{S} \\ \mathcal{S}\mathcal{B} = \tilde{\mathcal{B}}\mathcal{S} \end{cases},$$

то есть

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \sim (\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}),$$

что и требовалось доказать. □

Выводы

Задача описания пар матриц $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, удовлетворяющих условию

$$\mathcal{A}^2 = 0, \mathcal{B}^3 = 0, \mathcal{A}\mathcal{B}^2 = 0, \mathcal{A}\mathcal{B} = q\mathcal{B}\mathcal{A},$$

содержит в себе задачу описания произвольной пары матриц (A, B) , а, следовательно, является "дикой" задачей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ахрамович М. В., Муратов М. А. *О классификации пары q -коммутирующих операторов в конечномерном линейном пространстве.* // Таврический Вестник Информатики и Математики, № 2. – 2010. – С. 17–26.
- [2] Дрозд Ю. А. *Представления коммутативных алгебр.* // Функциональный анализ и его приложения, т. 6, вып. 4. – 1972. – С. 41–43.
- [3] Дрозд Ю. А. *Ручные и дикie матричные задачи.* // Представления и квадратичные формы. Сборник научных трудов Института математики НАН Украины. – Киев. – 1979. – С. 39–74.

Подібність пар q -комутуючих нільпотентних матриць

В роботі доведено, що задача класифікації, з точністю до перетворення подібності, пари матриць (A, B) , які задовільняють умовам:

$$\begin{cases} A^2 = B^3 = AB^2 = 0 \\ AB = qBA, \quad q \in \mathbb{C}, \quad q \neq 0 \end{cases},$$

є "диною" задачею.

Ключові слова: подібність матриць, невироджена матриця, "дика" задача.

A similarity of pairs of q -commuting nilpotent matrices

We prove that the problem of classification (up to a similarity transformation) the pair of matrixes (A, B) satisfying next conditions:

$$\begin{cases} A^2 = B^3 = AB^2 = 0 \\ AB = qBA, \quad q \in \mathbb{C}, \quad q \neq 0 \end{cases},$$

is a "wild" problem.

Keywords: matrix similarity, nonsingular matrix, "wild" problem.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 7–22.

УДК 517.9+530.1

Е. П. БЕЛАН, О. В. ШИЯН

УСТОЙЧИВЫЕ РЕЖИМЫ ГОРЕНИЯ ВДОЛЬ ПОЛОСЫ

Для распределенной автоколебательной системы, состоящей из диффузионно-связанных осцилляторов Ван-дер-Поля и описывающей движение фронта горения, построены и исследованы на устойчивость периодические по времени пространственно неоднородные решения на отрезке с изолированными краями. Эти решения описывают режим распространения автоколебаний вдоль полосы и возникают при потере устойчивости пространственно однородного режима автоколебаний. Рассмотрены также вопросы о форме и устойчивости этих решений при углублении в область надкритичности.

Ключевые слова: горение, параболические уравнения, квазинормальная форма, бифуркация, стационарные решения, периодические решения, автомодельные циклы, орбитальная устойчивость, аттракторы

ВВЕДЕНИЕ

Эволюцию фронта безгазового горения феноменологически описывает уравнение [1, 2] :

$$\ddot{\xi} + \xi = 2\delta \left(\dot{\xi} - \frac{4}{3}(\dot{\xi})^3 + \frac{\lambda^2}{4\pi^2}\Delta\xi + \frac{\lambda\beta}{2\pi}\sqrt{-\Delta}\dot{\xi} \right). \quad (1)$$

Здесь ξ — отклонение положения фронта от невозмущенного, соответствующего стационарному режиму, точка означает дифференцирование по времени t , $\lambda > 0$ — корреляционная длина теплопроводностной связи соседних участков фронта, $\beta > 0$ — коэффициент нелокальной связи участков фронта, $0 < \delta \ll 1$ — инкремент неустойчивости, Δ - одномерный лапласиан.

В данной работе уравнение (1) рассматривается на отрезке длины l с краевыми условиями:

$$\left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \dot{\xi}}{\partial x} \right|_{x=l} = 0. \quad (2)$$

Задача (1), (2) в случае $\beta = 0$ рассматривалась в работах [3, 2] в связи исследованием горения теплоизолированной полосы ширины l . Согласно [3, 2] задача (1), (2) имеет решения в виде стоячих волн. Все они неустойчивы за исключением пространственно однородного периодического решения $\xi_0 = \cos t + O(\delta)$ — синфазной волны.

В работе авторов [4] было доказано, что при $\beta > 0$ пространственно однородный цикл теряет устойчивость тогда, когда параметр $\rho = 2\pi l/\lambda$ проходит бифуркационное значение $\rho_1 = \frac{1}{\beta}$ возрастая. При этом от цикла ξ_0 ответвляются два пространственно неоднородных (автомодельных) экспоненциально орбитально устойчивых цикла, переходящих друг в друга при преобразовании $x \rightarrow l - x$. Форма этих циклов при малых $\rho - \rho_1 > 0$ вполне определяется двумя параметрами. При увеличении параметра ρ и его отходе от ρ_1 динамика автомодельных циклов зависит от параметра β . Существует β^* такое, что при $\beta \in (0, \beta^*)$ автомодельные циклы сохраняют устойчивость на достаточно большом промежутке изменения бифуркационного параметра ρ . Если же $\beta > \beta^*$, то тогда существует значение $\tilde{\rho}(\beta)$ такое, что при $\rho = \tilde{\rho}(\beta)$ указанные циклы устойчивость теряют. Приведенные выше результаты были получены нами, используя метод Крылова-Боголюбова, метод усреднения [5], метод центральных многообразий.

Отметим теперь, что исследование решений типа бегущих волн уравнения (1) на окружности радиуса R представляет интерес поскольку эти решения соответствуют спиновым волнам горения на поверхности кругового цилиндра радиуса R . В [1] установлено, что число бегущих волн (1) на окружности радиуса R неограниченно увеличивается при увеличении R и фиксированных прочих параметрах. Необходимое условие устойчивости спиновых волн было получено в [1], а критерий их устойчивости установлены в [6, 7] при $\beta = 0$, опираясь на метод квазинормальных форм. В работе [8] критерий устойчивости бегущих волн был получен для случая $\beta \geq 0$.

В данной работе для исследования задачи о бифуркации рождения автомодельных циклов привлекается метод квазинормальных форм. Метод квазинормальных форм был предложен Ю. С. Колесовым [9] для построения автоколебаний параболических уравнений с малой диффузией. Метод квазинормальных форм обоснован в [10]. Применению метода квазинормальных форм, его развитию и обоснованию посвящен ряд работ. Полученные результаты и библиография имеются в монографиях [11, 7]

Подчеркнем теперь, что задача о возникновении пространственно неоднородных периодических режимов из пространственно однородного цикла представляет значительный интерес [7, 12].

Статья организована следующим образом. В первом разделе рассматривается вопрос о локальной разрешимости начально-краевой задачи. Второй раздел посвящен построению квазинормальной формы и исследованию её устойчивых стационарных пространственно неоднородных решений. В третьем разделе исследуется упрощенная двухмодовая модель квазинормальной формы. В четвертом рассматривается четырехмодовая модель. В пятом разделе приведены результаты численного анализа. В Заключении подчеркнуты основные результаты работы.

1. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Задача (1), (2) эквивалентна следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= p, \\ \dot{p} &= -\xi + \delta \left(p \left(1 - \frac{4}{3} p^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta p + \frac{\lambda\beta}{2\pi} \sqrt{-\Delta} p \right), \\ \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0.\end{aligned}\tag{3}$$

Уравнение (1), (2) или (3) рассматривается при начальных условиях:

$$\xi \Big|_{t=0} = \xi_0, \quad \dot{\xi} \Big|_{t=0} = p_0, \quad \text{или} \quad \xi \Big|_{t=0} = \xi_0, \quad p \Big|_{t=0} = p_0,\tag{4}$$

Обозначим, следуя [13, см. I.5], $H^s, s \geq 0$, шкалу пространств, порожденную на $[0, l]$ оператором $-\Delta$ (Δ - одномерный лапласиан) при условии (2). Норма в H^s определяется равенством $\|u\|_s^2 = \langle -\Delta^s u, u \rangle + \langle u, u \rangle$, где $\langle *, * \rangle$ - скалярное произведение в пространстве $H = L_2(0, l)$.

Система (3) является системой спаренных "обыкновенного" и "параболического" уравнений. Следуя [14, см. 3.4], приходим к заключению о существовании и единственности решения задачи (3), (4) при $\xi_0 \in H, p_0 \in H^1$. Итак, система (3) или, что то же самое, (1), (2) в пространстве $E = H \times H^1$ порождает локальную динамическую систему. Далее, в качестве фазового пространства задачи (1), (2) примем пространство E . Подчеркнем теперь, что методы и результаты качественной теории полулинейных параболических уравнений, развитые в монографии [14], применимы для исследования задачи (1), (2).

2. КВАЗИНОРМАЛЬНАЯ ФОРМА И ЕЁ АТТРАКТОРЫ

Следуя [6, 7], автоколебательные режимы задачи (1) - (2) будем искать в виде ряда

$$\xi = u_0(t, \tau, \theta) + \delta u_1(t, \tau, \theta) + \dots, \quad \tau = \delta t, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}, \quad (5)$$

где $u_j(t, \tau, \theta + 2\pi) = u_j(t, \tau, \theta)$, $u_j(t + 2\pi, \tau, \theta) = u_j(t, \tau, \theta)$, $j = 1, 2, \dots$, а

$$u_0(t, \tau, \theta) = \frac{1}{2} \left(v(\tau, \theta) \exp(it) + \bar{v}(\tau, \theta) \exp(-it) \right). \quad (6)$$

Подставляя далее равенства (5), (6) в (1) и приравнивая коэффициенты при δ , для нахождения v приходим к уравнению

$$\ddot{u}_1 + u_1 = 2 \left[\dot{u}_0 \left(1 - \frac{4}{3} \dot{u}_0^2 \right) + \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \dot{u}_0 + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \dot{u}_0 - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau \partial t} \right], \quad (7)$$

где точка — дифференцирование по t , а переменные τ, θ рассматриваются как параметры.

Из условия разрешимости уравнения (7) в классе 2π - периодических по t функций следует, что v — решение краевой задачи

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta v + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} v + v - |v|^2 v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0, l} = 0, \quad (8)$$

которая и является искомой квазинормальной формой.

Уравнение (8) при $\beta = 0$ является нелинейным уравнением с диффузией для комплексного параметра порядка [15]. Это уравнение среди потенциальных уравнений, т.е. имеющих при $\tau \rightarrow \infty$ лишь статистические, стационарные решения является простейшим, каноническим. Задача (8) является S^1 -эквивариантной, т.е. инвариантной относительно группы вращений окружности. Следовательно, её нетривиальное стационарное решение порождает окружность стационарных решений. При этом все её точки имеют один спектр, содержащий, разумеется, нуль. В этой связи будем говорить о спектре устойчивости окружностей стационарных точек, а также, следуя [13], об их индексах неустойчивостей.

Задача (8) имеет окружность $|v| = 1$ стационарных решений. Рассмотрим вопрос об её устойчивости. С этой целью линеаризуем на нём уравнение (8). В результате приходим к задаче

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta v + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} v - v - \bar{v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0, l} = 0.$$

Перейдем теперь к соответствующей ей спектральной задаче

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta v + \frac{\beta\lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} v - v - \bar{v} = \lambda v, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0, l} = 0. \quad (9)$$

Обозначим

$$\alpha_k = \alpha_k(\rho, \beta) = 1 - \frac{k^2}{\rho^2} + \beta \frac{k}{\rho}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \rho = 2\pi l / \lambda. \quad (10)$$

Применяя метод Фурье по полной в пространстве H^1 системе функций $\cos k\theta, k = 0, 1, \dots$, приходим к заключению, что $0, -2, \alpha_1 - 1, \alpha_1 - 3, \alpha_2 - 1, \alpha_2 - 3, \dots$ спектр задачи (9). Следовательно [14, см. 8.2], окружность $|v| = 1$ стационарных решений задачи (8) является экспоненциально орбитально устойчивой, если $\alpha_1 < 1$ и неустойчивой, если $\alpha_1 > 1$. Отметим, что при $\alpha_1 = 1$ $v = i \cos \theta$ — собственная функция спектральной задаче (9), отвечающая нулевому собственному значению.

Привлекая (10), приходим к заключению, что окружность $|v| = 1$ стационарных решений задачи (8) теряет устойчивость тогда, когда параметр ρ проходит бифуркационное значение $\rho_1 = \frac{1}{\beta}$ возрастая. При этом простая точка спектра задачи (9) переходит с отрицательной на положительную полуоси.

Характер потери устойчивости окружность $|v| = 1$ стационарных решений задачи (8) отражает следующая теорема.

Theorem 1. *Существует $\delta_0 > 0$ такое, что задача (8) при $0 < \rho - \rho_1 < \delta_0$ ($\rho_1 = \beta^{-1}$) имеет две окружности пространственно неоднородных стационарных решений:*

$$\left\{ \exp(i\varphi)(\sqrt{3-2\alpha_1} \pm 2i\sqrt{\alpha_1-1} \cos \theta + O(\rho - \rho_1)), \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}. \quad (11)$$

Окружности (11) стационарных решений экспоненциально орбитально устойчивы.

Доказательство теоремы. Для доказательства теоремы воспользуемся методом центральных многообразий [16, 17]. Реализацию метода центральных многообразий осуществим в два этапа. На первом этапе построим решения задачи (8) в виде

$$v = z_0 + z_1 \cos \theta + \sigma_3(z, \bar{z}, \theta) + \sigma_5(z, \bar{z}, \theta) + \dots, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}. \quad (12)$$

Здесь $z = (z_0, z_1)$, $\sigma_{2k+1}(z, \bar{z}, \theta)$, $\sigma_{2k+1}(z, \bar{z}, \theta + 2\pi) = \sigma_{2k+1}(z, \bar{z}, \theta)$, — формы степени $2k + 1$ относительно $z, \bar{z}$, а $z_k = z_k(\tau)$, $k = 0, 1$, удовлетворяет уравнению:

$$z'_k = \alpha_k z_k + b_{k,3}(z, \bar{z}) + b_{k,5}(z, \bar{z}) + \dots, \quad k = 0, 1. \quad (13)$$

Здесь штрих — дифференцирование по τ , $b_{k,2s+1}$, $k = 0, 1$, $s = 1, 2, \dots$, — формы степени $2s + 1$ относительно $z, \bar{z}$, а $\bar{z}_k$, $k = 0, 1$, удовлетворяют комплексно сопряженным уравнениям. Подставим (12), (13) в уравнение (8). Приравняв затем формы третьей степени, относительно σ_3 приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \sum_0^1 \left(\frac{\partial \sigma_3}{\partial z_s} z_s + \frac{\partial \sigma_3}{\partial \bar{z}_s} \bar{z}_s \right) \alpha_s + \sum_0^1 b_{k,3} \cos(k\theta) = \\ & = \frac{\lambda^2}{4\pi^2} \Delta \sigma_3 + \frac{\beta \lambda}{2\pi} \sqrt{-\Delta} \sigma_3 + \sigma_3 - \left| \sum_0^1 z_k \cos(\theta) \right|^2 \sum_0^1 z_k \cos(k\theta) \end{aligned} \quad (14)$$

Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при $\cos k\theta$, $k = 0, 1$ в его неоднородности были нулевыми. Отсюда однозначно определяем $b_{k,3}$, $k = 0, 1$. Уравнению же (14) тогда удовлетворяет функция:

$$\sigma_3 = -\frac{1}{\alpha_0 + 2\alpha_1 - \alpha_2} \left(z_0 |z_1|^2 + \frac{1}{2} \bar{z}_0 z_1^2 \right) \cos 2\theta - \frac{1}{4(3\alpha_1 - \alpha_3)} |z_1|^2 z_1 \cos 3\theta.$$

Подставим $b_{k,3}$, $k = 0, 1$, в (13) и опустим затем слагаемые $b_{k,5}(z, \bar{z}) + \dots$. В результате получим систему уравнений

$$\begin{aligned} z'_0 &= z_0(\alpha_0 - |z_0|^2 - |z_1|^2) - \frac{1}{2} \bar{z}_0 z_1^2, \\ z'_1 &= z_1 \left(\alpha_1 - 2|z_0|^2 - \frac{3}{4} |z_1|^2 \right) - \bar{z}_1 z_0^2. \end{aligned} \quad (15)$$

Здесь штрих – дифференцирование по τ , а $\bar{z}_k$, $k = 0, 1$, удовлетворяют комплексно сопряженным уравнениям. Отметим, что система (15) является S^1 -эквивариантной системой, т.е. инвариантной относительно группы вращений окружности $(z_0, z_1) \mapsto \exp(i\varphi)(z_0, z_1)$, $\varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Легко видеть, что окружность $\{\exp(i\varphi)(1, 0), \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$ стационарных решений системы (15) экспоненциально орбитально устойчива, если $\alpha_1 < 1$ и неустойчива, если $\alpha_1 > 1$. При этом простая точка спектра этой окружности стационарных решений переходит с отрицательной на положительную полуоси тогда, когда параметр α_1 проходит значение 1 возрастая. Учитывая, что указанному собственному значению при $\alpha_1 = 1$ отвечает собственный вектор $\text{colon}(0, 0, i, -i)$ приходим к заключению, что при $\alpha_1 = 1$ для центрального многообразия системы (15), касательного в точке $(1, 1, 0, 0)$ к пространству $\text{Span}\{\text{colon}(0, 0, i, -i)\}$ имеет место разложение:

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 + p_2 s^2 + p_3 s^3 + \dots, \\ z_1 &= i s + q_2 s^2 + q_3 s^3 + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь $p_k, q_k \in \mathbb{R}$, $k = 2, 3, \dots$, а $s = s(\tau)$ – решение уравнения

$$s' = c_1 s^3 + c_3 s^5 + \dots \quad (17)$$

Подставим (16), (17) в систему (15) и затем приравняем коэффициенты при одинаковых степенях s . В результате имеем

$$p_2 = -\frac{1}{4}, \quad q_2 = 0, \quad (18)$$

Далее убеждаемся в справедливости следующих равенств

$$p_3 = 0, \quad i c_1 = -2q_3 - 2ip_2 - \frac{3}{4}i.$$

Следовательно,

$$p_3 = 0, \quad q_3 = 0, \quad c_1 = -\frac{1}{4}. \quad (19)$$

Отметим, что процесс последовательного нахождения тейлоровских разложений (16), (17) неограниченно продолжим. В частности, приравняв коэффициенты при s^4 , получим

$$p_4 = \frac{1}{4}p_2 - p_2^2 - p_2c_1, \quad q_4 = 0.$$

Учитывая (18), (19), отсюда находим, что $p_4 = -\frac{1}{16}$.

Из вышеизложенного следует, что семейство уравнений

$$s' = (\alpha_1 - 1)s - \frac{1}{4}s^3. \quad (20)$$

— нормальная форма семейства уравнений (15) в окрестности $\alpha_1 = 1$, $z_0 = 1$, $z_1 = 0$. Очевидно, что равенством (12), в котором z_0, z_1 удовлетворяют (16), определяется центральное многообразие уравнения (8) в окрестности $\alpha_1 = 1$, $v = 1$.

В семействе уравнений (20) при $\alpha_1 = 1$ имеет место суперкритическая бифуркация типа "вилка". В результате от нулевого решения ответвляется два стационарных экспоненциально устойчивых решения

$$s^\pm = \pm 2\sqrt{\alpha_1 - 1}.$$

Привлекая теперь равенства (12), (16), приходим к заключению, что в задаче (8) от окружности пространственно однородных стационарных решений ответвляются две устойчивые окружности пространственно неоднородных стационарных решений. Отметим, что в бифуркации рождения из окружности стационарных решений системы (8)

$$\{\exp(i\varphi)(1, 0), \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

двух устойчивых окружностей стационарных решений

$$\{\exp(i\varphi)(\sqrt{3 - 2\alpha_1}, \pm 2i\sqrt{\alpha_1 - 1}), \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\},$$

можно убедиться и непосредственно. Отсюда в силу равенства (12) следует и справедливость представления (11) теоремы. Теорема доказана.

3. АНАЛИЗ ДВУХМОДОВОЙ МОДЕЛИ

Перейдем теперь к качественному анализу системы (15), рассматривая её, разумеется, в качестве двухмодовой упрощенной модели задачи (8). Легко видеть, что система (15) является двухмодовой галеркинской аппроксимацией задачи (8).

Предположим вначале, что α_1 является бифуркационным параметром в системе (15). Очевидно, что когда параметр α_1 проходит через нуль возрастая, тогда от нулевого неустойчивого решения системы (15) ответвляется окружность стационарных точек

$$S_{0,1}(\alpha_1) = \left\{ \exp(i\varphi) \left(0, 2\sqrt{\frac{\alpha_1}{3}} \right), \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\}.$$

Так как система (15) является в сущности градиентной (см. [4]), то спектр устойчивости окружности $S_{0,1}(\alpha_1)$ является вещественным. Отметим, что 2 — индекс неустойчивости $S_{0,1}(\alpha_1)$, если $\alpha_1 \in (0, \frac{1}{2})$.

Пусть теперь параметр α_1 возрастая переходит через $\frac{1}{2}$. Тогда индекс неустойчивости окружности $S_{0,1}(\alpha_1)$ уменьшается на порядок. Последнее приводит к бифуркации рождения двух окружностей стационарных точек

$$S_{0,1}^{\pm}(\alpha_1) = \left\{ \exp(i\varphi) \left(\pm \sqrt{\frac{2\alpha_1 - 1}{5}}, 2\sqrt{\frac{3 - \alpha_1}{5}} \right), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \right\},$$

индекс неустойчивости которых равен 2. Подчеркнем теперь, что при $\alpha_1 < 1$ единственным аттрактором в системе (15) является окружность стационарных точек

$$S_{1,1}(\alpha_1) = \{ \exp(i\varphi)(1, 0), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \}.$$

Переход α_1 через 1 приводит к потере устойчивости окружности $S_{1,1}(\alpha_1)$ — одна простая точка её спектра возрастая, проходит через нуль. При этом из $S_{1,1}(\alpha_1)$ бифурцируют две устойчивые окружности стационарных точек

$$S_{1,1}^{\pm}(\alpha_1) = \{ \exp(i\varphi)(\pm\sqrt{3 - 2\alpha_1}, \pm 2i\sqrt{\alpha_1 - 1}), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \},$$

Если $1 < \alpha_1 < 1\frac{1}{2}$, то тогда $S_{1,1}^{\pm}(\alpha_1)$ — единственные аттракторы в системе (15). При $\alpha_1 = 1\frac{1}{2}$ окружности $S_{1,1}^{+}(\alpha_1)$ и $S_{1,1}^{-}(\alpha_1)$ сливаются и умирают на $S_{0,1}(\alpha_1)$. При $\alpha_1 > 1\frac{1}{2}$ $S_{0,1}(\alpha_1)$ — единственный аттрактор. Отметим, наконец, что при $\alpha_1 = 3$ в результате бифуркации типа "вилка" окружности $S_{0,1}^{+}(\alpha_1)$ и $S_{0,1}^{-}(\alpha_1)$ сливаются и умирают на $S_{1,1}(\alpha_1)$. При $\alpha_1 > 3$ индекс неустойчивости $S_{1,1}(\alpha_1)$ равен 2.

Учтем теперь, что бифуркационным в системе (15) является параметр ρ . Так как функция $\alpha_1(\rho)$ — монотонно возрастает на $(0, \frac{2}{\beta})$ и монотонно убывает на $(\frac{2}{\beta}, \infty)$, $\alpha_1(\frac{2}{\beta}) = 1 + \frac{\beta^2}{4}$, то динамика системы (15) при возрастании ρ зависит от величины β . Отметим особенности динамики системы (15) при возрастании ρ на примере динамики её аттракторов. Пусть параметр ρ проходит значение $\frac{1}{\beta}$ возрастая, тогда от окружности $S_{1,1}(\alpha_1(\rho, \beta)) = S_{1,1}(\rho, \beta)$ ответвляются две устойчивые окружности $S_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$. Если $\beta < 2$, то тогда $S_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$ являются единственными аттракторами в (15) при $\rho \in (\frac{1}{\beta}, \infty)$. Отметим, что $S_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$ гладкие функции ρ на $(\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta})$. При возрастании ρ от значения $\frac{2}{\beta}$ окружности $S_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$ проходят в обратном порядке свои значения.

Пусть теперь $\beta > 2$. Если $\rho \in (\frac{1}{\beta}, \frac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2}})$, то тогда $S_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$ — аттракторы в системе (15). В точке $\rho = \frac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2}}$ окружности $S_{1,1}^{\pm}(\rho, \beta)$ умирают. Если же

$\rho \in \left(\frac{2}{\beta + \sqrt{\beta^2 - 2}}, \frac{2}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 2}} \right)$, то тогда $S_{0,1}(\alpha_1(\rho, \beta)) = S_{0,1}(\rho, \beta)$ — единственный аттрактор в системе (20). В точке $\rho = \frac{2}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 2}}$ окружность $S_{0,1}(\alpha_1(\rho, \beta))$ устойчивость теряет и от неё ответвляются две устойчивые окружности $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$. Таким образом, при $\rho > \frac{2}{\beta - \sqrt{\beta^2 - 2}}$ аттракторами в (15) являются $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$.

Для ответа на вопрос о соответствии динамики системы (15) динамике задачи (8) обратимся к её упрощенной 4-х модовой модели.

4. АНАЛИЗ ЧЕТЫРЕХМОДОВОЙ МОДЕЛИ

Построим аппроксимацию Галеркина задачи (8) по системе функций $\cos k\theta$, $k = 0, 1, 2, 3$. С этой целью положим

$$v = \sum_{k=0}^3 z_k \cos k\theta, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}. \quad (21)$$

Подставим (15) в уравнение (8) и опустим затем слагаемые пропорциональные $\cos k\theta$, $k = 4, 5, \dots$. В результате относительно z_k , $k = 0, 1, 2, 3$, приходим к системе

$$\begin{aligned} z_0' &= z_0 (\alpha_0 - |z|^2) - \frac{1}{2} \bar{z}_0 (d^2 - z_0^2) - f_0, \\ z_k' &= z_k (\alpha_k - |z|^2 - |z_0|^2 + \frac{1}{4} |z_k|^2) - \frac{1}{2} \bar{z}_k (d^2 + z_0^2 - z_k^2) - f_k, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь $|z|^2 = |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2$, $d^2 = z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$,

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{1}{4} z_1^2 \bar{z}_2 + \frac{1}{2} |z_1|^2 z_2 + \frac{1}{2} (\bar{z}_1 z_2 z_3 + \bar{z}_2 z_1 z_3 + \bar{z}_3 z_2 z_1), \\ f_1 &= \frac{1}{4} z_1^2 \bar{z}_3 + \frac{1}{2} |z_1|^2 z_3 + \frac{1}{4} z_2^2 \bar{z}_3 + \frac{1}{2} |z_2|^2 z_3 + \\ &\quad + (\bar{z}_0 z_1 z_2 + \bar{z}_1 z_0 z_2 + \bar{z}_2 z_0 z_1) + (\bar{z}_0 z_2 z_3 + \bar{z}_2 z_0 z_3 + \bar{z}_3 z_2 z_0), \\ f_2 &= \frac{1}{2} z_1^2 \bar{z}_0 + |z_1|^2 z_0 + (\bar{z}_0 z_1 z_3 + \bar{z}_1 z_0 z_3 + \bar{z}_3 z_0 z_1) + \frac{1}{2} (\bar{z}_1 z_2 z_3 + \bar{z}_2 z_1 z_3 + \bar{z}_3 z_2 z_1), \\ f_3 &= \frac{1}{4} z_2^2 \bar{z}_1 + \frac{1}{2} |z_2|^2 z_1 + \frac{1}{4} z_1^2 \bar{z}_1 + (\bar{z}_0 z_1 z_2 + \bar{z}_1 z_0 z_2 + \bar{z}_2 z_0 z_1) \end{aligned}$$

Как и выше, при $\rho < \rho_1$ единственным аттрактором в системе (22) является окружность стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,1} = \{\exp(i\varphi)(1, 0, 0, 0), \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Переход ρ через ρ_1 приводит к потере устойчивости окружности $\tilde{S}_{1,1}$ — одна простая точка её спектра проходит через нуль возрастая. При этом из $S_{1,1}$ бифурцируют две устойчивые окружности стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta) = \{\exp(i\varphi)(x_0, ix_1, x_2, ix_3), \quad \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

Здесь $x_k = x_k(\rho, \beta)$, $k = 0, 1, 2, 3$, $x_1(\rho, \beta) > 0$ — непрерывная ветвь решений системы

$$\begin{aligned} x_0(\alpha_0 - x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2) - \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \frac{1}{2}x_1x_2x_3 &= 0, \\ x_1(\alpha_1 - x_0^2 - \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2) - x_0x_1x_2 - x_0x_2x_3 - \frac{3}{4}x_1^2x_3 - \\ - \frac{1}{4}x_2^2x_3 &= 0, \\ x_2(\alpha_2 - 3x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2) - \frac{1}{2}x_0x_1^2 - x_0x_1x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2x_3 &= 0, \\ x_3(\alpha_3 - x_0^2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{4}x_3^2) - x_0x_1x_2 - \frac{1}{4}x_1x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^3 &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

Динамике окружностей стационарных точек $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ системы (22) при возрастании ρ соответствует динамика окружностей стационарных точек $S_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ системы (15). Существует такое $\tilde{\beta}$, $\tilde{\beta} \approx 1.91$, что при $\beta \in (0, \tilde{\beta})$ окружности $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ сохраняют устойчивость на промежутке $(\frac{1}{\beta}, \infty)$ изменения параметра ρ . Пусть теперь $\beta > \tilde{\beta}$. Тогда существует такое $\tilde{\rho}_1(\beta)$, что на промежутке $(\frac{1}{\beta}, \tilde{\rho}_1(\beta))$ окружности $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$ устойчивы. При $\rho = \tilde{\rho}_1(\beta)$ они сливаются и умирают на окружности $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$. Окружность стационарных точек

$$\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta) = \{\exp(i\varphi)(0, x_1(\rho, \beta), 0, x_3(\rho, \beta)), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}$$

рождается из нулевого решения системы в точке ρ , определяемой из уравнения $\alpha_1(\rho, \beta) = 0$. Здесь $(0, x_1(\rho, \beta), 0, x_3(\rho, \beta))$, $x_1(\rho, \beta) > 0$ — непрерывная ветвь решений системы (23). При $\rho = \tilde{\rho}_1(\beta)$ окружность $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$ обретает устойчивость и сохраняет её на промежутке $(\tilde{\rho}_1(\beta), \tilde{\rho}_2(\beta))$. При $\rho = \tilde{\rho}_2(\beta)$ окружность $\tilde{S}_{0,1}(\rho, \beta)$ теряет устойчивость и от неё ответвляются две устойчивые окружности стационарных точек $\tilde{S}_{1,1}^\pm(\rho, \beta)$. Таким образом, динамике аттракторов в системе (22) отвечает соответствующая динамика аттракторов в системе (15).

При отходе ρ от критических значений усиливаются отличия количественных характеристик соответствующих аттракторов в системах (22) и (15). Последнее, в частности, означает, что диапазон применения по параметру ρ формулы (11) является узким. Представление же двух пространственно неоднородных окружностей стационарных решений задачи (8) в виде

$$v_1^\pm(\theta, \rho, \beta) = x_0 \pm ix_1 \cos \theta + x_2 \cos 2\theta \pm ix_3 \cos 3\theta, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}, \quad (24)$$

где $x_k = x_k(\rho, \beta)$, $k = 0, 1, 2, 3$ — указанная выше непрерывная ветвь решений системы (23), можно использовать на достаточно широком промежутке изменения параметра ρ .

Перейдем теперь к вопросу о качественных отличиях систем (22) и (15). Покажем, что в системе (22) при прохождении через критические значения имеет место бифуркация рождения неустойчивых окружностей неподвижных точек, аналогов которых в системе (15) нет.

Легко видеть, что когда параметр ρ возрастая проходит точку $2\rho_1$, индекс неустойчивости окружности $\tilde{S}_{1,1}$ увеличивается на порядок. При этом из $S_{1,1}$ бифурцируют две окружности стационарных точек

$$\tilde{S}_{1,2}^{\pm}(\rho, \beta) = \{\exp(i\varphi)(\frac{1}{2}\sqrt{3-2\alpha_2}, 0, \pm i\sqrt{\alpha_2-1}, 0), \varphi \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\}.$$

с индексом неустойчивости 1. Исследование устойчивости этих окружностей приводит к эрмитовой блочно-диагональной матрице. Один из её блоков имеет спектр, содержащий простой нуль, а остальные точки спектра принадлежат отрицательной полуоси. Второй блок — матрица

$$Q_{1,2}(\rho) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - 2a_0^2 - 4a_2^2 & -a_0^2 + 2a_2^2 & -2a_2^2 & a_2^2 - 2ia_0a_2 \\ -a_0^2 + 2a_2^2 & \alpha_1 - 2a_0^2 - 4a_2^2 & a_2^2 + 2ia_0a_2 & -2a_2^2 \\ -2a_2^2 & a_2^2 - 2ia_0a_2 & \alpha_3 - 2a_0^2 - 4a_2^2 & -a_0^2 + 2a_2^2 \\ a_2^2 + 2ia_0a_2 & -2a_2^2 & -a_0^2 + 2a_2^2 & \alpha_3 - 2a_0^2 - 4a_2^2 \end{pmatrix},$$

где $a_0 = \sqrt{3-2\alpha_2}$, $a_2 = \sqrt{\alpha_2-1}$. При малых $\rho - 2\rho_1 > 0$ одна её простая точка спектра принадлежит положительной полуоси, остальные отрицательной. При отходе параметра ρ от бифуркационного значения $2\rho_1$ характер расположения спектра семейства матриц $Q_{1,2}(\rho)$ сохраняется, т.е. индекс неустойчивости окружностей $\tilde{S}_{1,2}^{\pm}(\rho, \beta)$ не меняется.

Пусть теперь параметр ρ возрастая, проходит точку $3\rho_1$. Тогда индекс неустойчивости окружности $\tilde{S}_{1,1}$ возрастает на порядок. При этом из $S_{1,1}$ бифурцируют две окружности стационарных точек $\tilde{S}_{1,3}^{\pm}(\rho, \beta)$, индекс неустойчивости которых при отходе ρ от $3\rho_1$ остаётся равным 2.

Построенная нами 6-ти модовая аппроксимация задачи (8) и её анализ привели к следующему заключению. Имеет место соответствие между динамикой при изменении ρ аттракторов системы (22) и аттракторов в указанной системе размерности 12. Когда параметр ρ возрастая, проходит точку ρ_1 , тогда, как и в системе (??), от единичной окружности ответвляются две устойчивые окружности стационарных точек. Если $\beta < \hat{\beta}$, $\hat{\beta} \approx 2.04$, то тогда эти окружности сохраняют устойчивость на промежутке (ρ_1, ∞) изменения параметра ρ . Если же $\beta > \hat{\beta}$, то тогда существует бифуркационное значение ρ , при котором эти окружности сливаются и умирают на окружности стационарных точек. При этом существует зависящий от β интервал изменения параметра ρ , на котором эта окружность остаётся единственным аттрактором рассматриваемой системы. Переход параметра через правую точку указанного интервала, приводит к бифуркации рождения двух устойчивых окружностей стационарных точек. Эти окружности остаются единственными аттракторами упрощенной 6-ти модовой модели задачи (8) при дальнейшем возрастании ρ .

5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Согласно равенств (5), (6), (21), (22), (23) функции

$$\xi_1^\pm(\theta, \rho, \beta) = x_0 \cos t \pm x_1 \sin t \cos \theta + x_2 \cos t \cos 2\theta \pm x_3 \sin t \cos 3\theta, \quad \theta = \frac{\pi x}{l}, \quad (25)$$

где $x_k = x_k(\rho, \beta)$, $x_0(\rho_1, \beta) > 0$, $x_1(\rho, \beta) > 0$, $k = 0, 1, 2, 3$, — непрерывная ветвь решений системы (23), являются приближенными автомодельными решениями задачи (1), (2). Вопрос же об устойчивости этих двух семейств периодических решений сводится к вопросу об устойчивости ветви $(x_k = x_k(\rho, \beta), k = 0, 1, 2, 3)$ стационарных решений системы (22).

Приведём далее ряд результатов численного анализа решений системы (23), выполненных посредством программы Wolfram Mathematica 7.0. Здесь же приведём и спектр соответствующих стационарных точек системы (22).

При значительном отходе параметра от бифуркационного значения усиливается влияние старших мод на формы автомодельных решений. Для иллюстрации этого факта приводятся также и результаты численного анализа, полученные при 5-ти и 6-ти модовых аппроксимациях автомодельных решений задачи (1), (2). Отметим, что 6-ти модовая аппроксимация приводит к приближенному равенству

$$\begin{aligned} \xi_1^\pm(\theta, \rho, \beta) = & x_0 \cos t \pm x_1 \sin t \cos \theta + x_2 \cos t \cos 2\theta \\ & \pm x_3 \sin t \cos 3\theta + x_4 \cos t \cos 4\theta \pm x_5 \sin t \cos 5\theta, \end{aligned} \quad (26)$$

где $x_k = x_k(\rho, \beta)$, $x_0(\rho_1, \beta) > 0$, $x_1(\rho, \beta) > 0$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, — непрерывная ветвь решений системы

$$\begin{aligned} & x_0(\alpha_0 - x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{3}{2}x_4^2 - \frac{1}{2}x_5^2) - \frac{1}{4}x_1^2x_2 - \\ & \frac{1}{2}x_1x_2x_3 - \frac{1}{2}x_1x_3x_4 - \frac{1}{2}x_2x_3x_5 - \frac{3}{4}x_2^2x_4 = 0, \\ & x_1(\alpha_1 - x_0^2 - \frac{3}{4}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2 - \frac{3}{2}x_5^2) - x_0x_1x_2 - x_0x_2x_3 - x_0x_3x_4 - \\ & - x_0x_4x_5 - \frac{3}{4}x_1^2x_3 - \frac{1}{2}x_1x_2x_4 - \frac{1}{2}x_1x_3x_5 - \frac{1}{4}x_2^2x_3 - \frac{1}{4}x_2^2x_5 - \frac{1}{2}x_2x_3x_4 - \frac{3}{4}x_3^2x_5 = 0, \\ & x_2(\alpha_2 - 3x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{3}{2}x_4^2 - \frac{1}{2}x_5^2) - \frac{1}{2}x_0x_1^2 - x_0x_1x_3 - x_0x_2x_4 - \\ & - x_0x_3x_5 - \frac{1}{2}x_1x_2x_3 - \frac{1}{2}x_1x_3x_4 - \frac{1}{2}x_1x_4x_5 - \frac{1}{4}x_1^2x_4 - \frac{1}{2}x_3x_4x_5 = 0, \\ & x_3(\alpha_3 - x_0^2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2 - \frac{3}{2}x_5^2) - x_0x_1x_2 - x_0x_2x_5 - \\ & - \frac{1}{4}x_1x_2^2 - \frac{1}{4}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1x_2x_4 - \frac{1}{2}x_2x_3x_4 - \frac{1}{2}x_2x_4x_5 - \frac{3}{4}x_1^2x_5 = 0, \\ & x_4(\alpha_4 - 3x_0^2 - \frac{1}{2}x_1^2 - \frac{3}{4}x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - \frac{3}{2}x_4^2 - \frac{1}{2}x_5^2) - \\ & - \frac{1}{4}x_1^2x_2 - x_0x_1x_3 - x_0x_1x_5 - \frac{1}{4}x_2x_3^2 - \frac{1}{2}x_2x_3x_5 = 0, \\ & x_5(\alpha_5 - x_0^2 - \frac{3}{2}x_1^2 - \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{3}{4}x_3^2 - \frac{1}{2}x_4^2 - \frac{3}{2}x_5^2) - \\ & - x_0x_1x_4 - \frac{3}{4}x_1^2x_3 - \frac{1}{4}x_1x_2^2 - \frac{3}{4}x_1x_3^2 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Пусть $\beta = 1$. Тогда $\rho = 1.01$ отвечает решение $(0.9804, 0.2787, -0.0098, -0.0005)$, а $\{-23.57, -21.61, \dots, -0.009, 0\}$ — её спектр. Здесь и далее приводятся минимальные и максимальные точки спектра.

$$\rho = 2 - (0.3896, 1.2901, -0.5672, -0.1381) - \{-3.11, -2.90, \dots, -0.31, 0\}$$

$$\rho = 10 - (-0.0944, 0.7633, -1.00894, -0.6795) - \{-2.35, -2.31, \dots, -0.15, 0\}.$$

$$\beta = 1.9.$$

$$\rho = 0.527 - (0.9940, 0.1544, -0.0013, -0.00003) - \{-23.57, -21.61, \dots, -0.009, 0\}$$

$$\rho = 1 - (0.3248, 1.6243, -0.4120, -0.1428) - \{-6.97, -5.29, \dots, -0.64, 0\}$$

$$\rho = 7 - (-0.1318, 0.5082, -1.1836, -1.0362) - \{-3.04, -2.93, \dots, -0.31, 0\}$$

$$\rho = 10 - (-0.1329, 0.5490, -1.1490, -0.9476) - \{-2.76, -2.69, \dots, -0.26, 0\}$$

$$\beta = 3.$$

$$\rho = 0.3334 - (0.9980, 0.0894, -0.0002, -0.000003) - \{-55.97, -53.98, \dots, -0.004, 0\}$$

$$\rho = 0.3559 - (0.0401, 1.4373, -0.0027, -0.0155) - \{-47.92, -45.81, \dots, -0.001, 0\};$$

$$\rho = 0.6515 - (0.0406, 2.1598, -0.0571, -0.1875) - \{-14.17, -9.95, \dots, -0.012, 0\};$$

$$\rho = 1 - (0.1746, 1.8286, -1.4747, -0.3910) - \{-8.14, -7.63, \dots, -1.25, 0\},$$

$$(0.1635, 1.8400, -1.4651, -0.3910, 0.0446),$$

$$(0.1648, 1.8307, -1.4785, -0.3866, 0.0409, -0.0193);$$

$$\rho = 7 - (-0.1164, 0.3521, -1.1875, -1.3342) - \{-3.92, -3.52, \dots, -0.41, 0\},$$

$$(-0.1032, 0.2006, -0.4419, -1.3925, -1.4059),$$

$$(-0.0488, 0.1646, -0.2412, -0.3709, -1.205, -1.5458);$$

$$\rho = 10 - (-0.1268, 0.4048, -1.1609, -1.1852) - \{-3.36, -3.11, \dots, -0.35, 0\},$$

$$(-0.1170, 0.2007, -0.4494, -1.2703, -1.2227),$$

$$(-0.0521, 0.1716, -0.2399, -0.3568, -1.1089, 1.4253).$$

Приведенные численные расчеты иллюстрируют сформулированное выше утверждение о зависимости динамики автомодельных решений от параметра β . В частности, видно, что, если $\beta = 1, 1.9$, то тогда автомодельные циклы рождаются и остаются устойчивыми на достаточно большом промежутке изменения ρ . При $\beta = 3$ существует бифуркационное значение параметра ρ , $\rho \approx 0.3559$, при котором два автомодельных цикла сливаются и умирают на пространственно неоднородном цикле, инвариантном относительно преобразования $x \rightarrow l - x$. Указанный цикл сохраняет устойчивость до критического $\rho \approx 0.6515$ значение параметра ρ . Когда параметра ρ проходит через указанное значение возрастая, тогда имеет место бифуркация рождения двух устойчивых автомодельных циклов, сохраняющих устойчивость при дальнейшем росте параметра ρ .

График решения $\xi_1^+(\theta, t, 10, 3)$ согласно формуле (22) отражает рисунок 1. Видно, что решение описывает достаточно сложный колебательный процесс. При этом амплитуда колебаний существенно зависит от пространственной переменной θ .

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Остановимся здесь на основных результатах работы. Для феноменологического уравнения теории горения вдоль полосы построена её квазинормальная форма — обобщенное параболическое уравнение с диффузией для комплексного параметра порядка. Установлено, что имеет место соответствие между автомодельными циклами исходной задачи и окружностями стационарных пространственно неоднородных решений её квазинормальной формы. В частности двум устойчивым автомодельным циклам исходной задачи, которые ответвляются от пространственно однородного цикла, отвечают две устойчивые окружности пространственно неоднородных стационарных решений её квазинормальной формы, ответвляющихся от окружности пространственно однородных стационарных решений. Динамика этих структур при возрастании бифуркационного параметра ρ зависит от величины β . Если $\beta < \beta^*$, $\beta^* \approx 2$, то два автомодельных цикла, переходящие друг в друга при преобразовании отражения отрезка $x \rightarrow l - x$, сохраняют устойчивость на достаточно большом промежутке изменения параметра ρ . На этом же промежутке сохраняют устойчивость и две окружности стационарных точек квазинормальной формы исходной задачи. Если $\beta > \beta^*$, то автомодельные циклы существуют на промежутке $(\beta^{-1}, \rho_1(\beta))$ изменения параметра ρ . При $\rho = \rho_1(\beta)$ они сливаются и умирают на автомодельном цикле, инвариантном относительно отражения отрезка. Этот цикл сохраняет устойчивость на зависящем от β промежутке изменения параметра ρ . При прохождении параметра ρ через правую точку интервала устойчивости от автомодельного цикла ответвляются два устойчивых автомодельных цикла, сохраняющих устойчивость при увеличении ρ . Эта же динамика имеет место и относительно соответствующих окружностей стационарных решений квазинормальной формы исходной задачи. Есть также веские основания утверждать, что указанные выше аттракторы являются единственными аттракторами рассмотренной здесь задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алдушин А. П. *Феноменологическое описание нестационарных неоднородных волн горения.* / А. П. Алдушин, Б. А. Маломед // Физика горения и взрыва, - 1981, - **17**, N 1, - С. 3 - 12.
- [2] Зельдович Я. Б. *Сложные волновые режимы в распределенных динамических системах.* / Я. Б. Зельдович, Б. А. Маломед // Изв. вузов, сер. Радиофизика. - 1982. - **15**. - N 6. - С. 591 - 618.
- [3] Маломед Б. А. *Распространение автоколебательных волн вдоль полосы.* / Б. А. Маломед // Изв. вузов, сер. Радиофизика. - 1981 - **14**. - N 5. - С. 571 - 576.
- [4] Белан Е. П. *Автоколебательные режимы горения вдоль полосы* / Е. П. Белан, О. В. Шиян // Динамические системы. - 2009. - Вып. 27. - С. 3-16.

- [5] Боголюбов Н.Н. *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.* / Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. – М.: Наука. – 1969. – 410 с.
- [6] Колесов А. Ю. *Явление буферности в теории горения.* / А. Ю.Колесов, Н. Х.Розов // ДАН. – 2004. – **396**. – N 2. – С. 170 – 173.
- [7] *Автоволновые процессы в нелинейных средах с диффузией.* / Е. Ф.Мищенко, В. А. Садовничий, А. Ю.Колесов, Н. Х.Розов. – М.: Физматлит. – 2005. – 430 с.
- [8] Самойленко А. М. *Динамика бегущих волн феноменологического уравнения спинового горения.* / А.М.Самойленко, Е.П.Белан // ДАН. – 2006. – **406**. – N 6. – С.738–741.
- [9] Колесов Ю. С. *Метод квазинормальных форм в задаче об установившихся режимах параболических систем с малой диффузией.* / Ю.С. Колесов// УМЖ. – 1987. – Т.39. – №1. – С.27–34.
- [10] Колесов Ю. С. *Бифуркация инвариантных торов параболических систем с малой диффузией.* / Ю.С.Колесов // Мат.сб. – 1993. – **184**. – № 3. – С.121–136.
- [11] Колесов А. Ю. *Инвариантные торы нелинейных волновых уравнений.* / А.Ю.Колесов, Н.Х.Розов. –М.: Физматлит. – 2004. – 406 с.
- [12] *Структуры и хаос в нелинейных средах.* / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. – М.: Наука. – 2007. – 484 с.
- [13] Бабин А.В. *Аттракторы эволюционных уравнений.* / А.В. Бабин, М.И. Вишик – М.: Наука. – 1989.
- [14] Хенри Д. *Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.* / Д. Хенри – М.: Мир. – 1985. – 376 с.
- [15] Гапонов-Грехов А.В. *Рождение и динамика двумерных структур в неравновесных диссипативных системах.* / А.В. Гапонов-Грехов, А.С. Ломов, Г.В. Осипов, М.И. Рабинович // Нелинейные волны. Динамика и эволюция. ИПФ АН СССР. – 1989. – С.61–73.
- [16] Марсден Дж. *Бифуркация рождения цикла и ее приложения.* / Дж.Марсден, М. Мак-Кракен. – М.: Мир. – 1980. – 368 с.
- [17] Хэссард Б. М. *Теория и приложения бифуркации рождения цикла.* / Б.М. Хэссард, Н. Казаринов, И. Вэн. – М.: Мир, – 1985. – 280 с.

Стійкі режими горіння вздовж смуги

Для розподіленої автоколивальної системи дифузійно- зв'язаних осциляторів Ван-дер-Поля, яка описує рух фронту горіння, побудовано та досліджено на стійкість періодичні за часом просторово неоднорідні розв'язки на відрізку з ізольованими краями. Ці розв'язки описують режими розповсюдження автоколивань вздовж полоси та виникають під час втрати стійкості просторово однорідного режиму автоколивань. Розглянуто питання про форму та стійкість цих розв'язків під час заглиблення в область надкритичності.

Ключові слова: горіння, біфуркація, періодичні розв'язки, автотомодельні цикли, орбітальна стійкість, параболическі рівняння, квазинормальна форма, аттрактори.

Stable-oscillating regimes combustion on the strip

We consider the auto-oscillating system of connected diffusionally Van-der-Pole oscillators. This system describe the front movement of the combustion on the segment with isolated edges. We constructed and investigate the stability of periodic spatially inhomogeneous solutions that bifurcate from the losing stability of spatially homogeneous periodic solution. We investigate problems of the form and the stability of this periodic solution in the deeply supercritical domain.

Keywords: combustion, bifurcation, periodic solutions, orbital stability, auto-model circles, parabolic equation, quasi-normal form

СХОДИМОСТЬ С РЕГУЛЯТОРОМ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ

Пусть (Ω, μ) пространство с конечной неатомической мерой μ , $\mu\Omega = 1$. Последовательность измеримых функций $\{f_n\}$ сходится к функции f с регулятором g и скоростью $\{r_n\}$, $r_n \rightarrow 0$, если $|f_n - f| \leq r_n g$ для всех $n = 1, 2, \dots$

Пусть $A_{n,\theta}f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \theta^k$, где θ — эргодическое сохраняющее меру преобразование пространства (Ω, μ) . Из индивидуальной эргодической теоремы следует, что для каждой $f \in \mathbf{L}_1$ последовательность $\{A_{n,\theta}f\}$ сходится к $\bar{f} = \int f d\mu$ с некоторым регулятором g из пространства измеримых функций.

Теорема. Для каждого сохраняющего меру эргодического преобразования θ , любой скорости $r_n \rightarrow 0$ и всякой $f \in \mathbf{L}_1$, $f \neq \text{const}$, существует такая равноизмеримая с f функция $\hat{f}$, что условие $|A_{n,\theta}\hat{f} - \bar{f}| \leq r_n g$, $n = 1, 2, \dots$ влечет $g \notin \mathbf{L}_1$.

Ключевые слова: пространства с мерой, эргодические теоремы, сходимость с регулятором

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с конечной неатомической мерой μ , $\mu\Omega = 1$. Пусть $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\Omega, \mu)$ — пространство всех μ -измеримых почти всюду конечных вещественных функций f на Ω и $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$.

Пусть θ — сохраняющее меру преобразование в (Ω, μ) и для $f \in \mathbf{L}_0$:

$$A_{n,\theta}f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f \circ \theta^k, \quad B_\theta f = \sup_n A_{n,\theta}f.$$

Индивидуальная эргодическая теорема Бирхгофа (см. [2], [4], [13]) утверждает, что для любой функции $f \in \mathbf{L}_1$ последовательность $\{A_{n,\theta}f\}_{n \geq 1}$ сходится почти всюду на (Ω, μ) к некоторой предельной функции $\bar{f} \in \mathbf{L}_1$ такой, что

$$\bar{f} \circ \theta = \bar{f}.$$

При этом, в случае, когда θ — эргодическое, то

$$\bar{f} = \int_{\Omega} f d\mu$$

почти всюду для $f \in \mathbf{L}_1$.

Доминантная эргодическая теорема (см. [2], [4], [13]) утверждает, что $B_{\theta}f \in \mathbf{L}_0$ для любой функции $f \in \mathbf{L}_1$, и $B_{\theta}f \in \mathbf{L}_1$ для любой функции $f \in \mathbf{L} \log \mathbf{L}$ ([1], [8] - [10]). Более того, если преобразование θ — эргодическое, то $B_{\theta}f \in \mathbf{L}_1$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathbf{L} \log \mathbf{L}$ (см. [4]).

Пусть $\mathbf{E}$ — идеальная структура в $\mathbf{L}_0$ и $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$. Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется (o) -сходящейся к $f \in \mathbf{E}$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f$) в $\mathbf{E}$, если

$$|f_n - f| \leq g_n \downarrow 0, \quad n \in \mathbf{N}$$

для некоторой последовательности $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$ [3].

Если существуют $g \in \mathbf{L}_0$, $g \geq 0$ и убывающая к нулю последовательность чисел $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ такие, что

$$|f_n - f| \leq r_n g$$

почти всюду для всех $n \in \mathbf{N}$, то говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $\bar{f}$ с регулятором g в $\mathbf{L}_0$ ($f_n \xrightarrow{(r)} f$) и скоростью $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$. Если $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbf{E}$, $\bar{f} \in \mathbf{E}$ и регулятор g принадлежит $\mathbf{E}$, то говорят, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $\bar{f}$ с регулятором g в $\mathbf{E}$ [3].

Очевидно, (o) -сходимость следует из сходимости с регулятором. Более того, $f_n \xrightarrow{(r)} f$ с регулятором в $\mathbf{L}_0$ в том и только в том случае, когда $f_n \xrightarrow{(o)} f$ в $\mathbf{L}_0$. Это, в свою очередь, равносильно сходимости почти всюду $f_n \xrightarrow{n.g.} f$ в (Ω, μ) .

Если $\mathbf{E}$ — порядково полная идеальная подструктура в $\mathbf{L}_0$, то $f_n \xrightarrow{(o)} f$ в $\mathbf{E}$ тогда и только тогда, когда $f_n \xrightarrow{n.g.} f$ в (Ω, μ) и последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ (o) -ограничена в $\mathbf{E}$. В частности, для любого (банахова) перестановочно инвариантного пространства $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1$:

$$f_n \xrightarrow{(o)} f \iff f_n \xrightarrow{n.g.} f \text{ и } |f_n - f| \leq g \text{ для некоторого } g \in \mathbf{E}.$$

Пусть $f, g \in \mathbf{L}_0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Функции f и g называются *равноизмеримыми* ([7]), если их функции распределения равны:

$$\mathbf{n}_f(t) = \mu\{x \in \Omega: f(x) > t\} = \mu\{x \in \Omega: g(x) > t\} = \mathbf{n}_g(t).$$

для любого $t \in \mathbf{R}$. Ясно, что если функции f и g равноизмеримы, $f, g \in \mathbf{L}_1$, то

$$\bar{f} = \int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} g d\mu = \bar{g}$$

почти всюду.

В работах ([11],[12]) рассматривались условия (o) -сходимости и (o) -ограниченности чезаровских средних $\{A_{n,\tau}f\}$ в различных перестановочно инвариантных пространствах $\mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1$.

Цель данной работы — изучить сходимость с регулятором в перестановочно инвариантных пространствах $\mathbf{E}$. В случае, когда $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$, мы доказываем следующую теорему:

Теорема 1. *Для каждого сохраняющего меру эргодического преобразования θ , любой скорости $r_n \rightarrow 0$ и всякой функции $f \in \mathbf{L}_1$, $f \neq \text{const}$, существует такая равноизмеримая с f функция $\hat{f}$, что условие $|A_{n,\theta}\hat{f} - \bar{f}| \leq r_n g$, $n = 1, 2, \dots$ влечет $g \notin \mathbf{L}_1$.*

Поскольку мера μ предполагается конечной, и значит

$$\mathbf{L}_{\infty} \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1$$

для любого перестановочно инвариантного пространства $\mathbf{E}$, мы имеем аналогичный отрицательный результат и для любого перестановочно инвариантного пространства $\mathbf{E}$.

Мы будем использовать обозначения и терминологию из [1], [4], [5], [6], [7].

2. ОСНОВНАЯ ЛЕММА

Пусть θ — сохраняющее меру эргодическое преобразование в Ω и $A \in \Sigma$ измеримое подмножество в Ω . Обозначим:

$$r_{\theta}^A(x) = \min\{n \geq 1 : \theta^n x \in A\}, \quad x \in A;$$

$$A_n = \{x \in A : r_{\theta}^A(x) = n\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \mu A_n = \mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{n-1} \theta^i A_n \right) \leq \mu \Omega < \infty.$$

Обозначим, далее, через A_{n_k} , $k = 0, 1, 2, \dots$, подмножества в A , имеющие ненулевую меру, полагая:

$$A_{n_0} = A_1 = \{x \in A : \theta x \in A\},$$

$$A_{n_k} = \{x \in A : r_{\theta}^A(x) = n_k\}, \quad n_k > 1, \quad k > 0.$$

Для доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Для любой неограниченной последовательности положительных чисел $\{\beta\}_{n=1}^{\infty}$ и любой последовательности положительных чисел $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует такое измеримое подмножество A в Ω , что

$$n_k \beta_{n_k} \mu A_{n_k} = u_k$$

при $k > 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu\Omega = 1$. Рассмотрим произвольные действительные числа $\varepsilon \in (0, 1)$ и $N > 0$. Так как последовательность $\{\beta\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена, то существует такое натуральное число n , что

$$2N < \frac{\varepsilon n \beta_n}{2n + \varepsilon}.$$

Тогда

$$\frac{2n}{\varepsilon} + 1 < \frac{n \beta_n}{2N}.$$

Рассмотрим такое натуральное число M , что

$$\frac{2n}{\varepsilon} < M < \frac{n \beta_n}{2N}.$$

По лемме Халмоша - Рохлина [13] существует такое измеримое подмножество B в Ω , что множества $B, \theta B, \dots, \theta^{M-1}B$ попарно не пересекаются и

$$0 < \mu \left(\Omega \setminus \bigcup_{i=0}^{M-1} \theta^i B \right) < \frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2M} < \mu B < \frac{1}{M}$$

и, следовательно,

$$2n \mu B < \frac{2n}{M} < \frac{2n}{2\varepsilon} = \varepsilon$$

и

$$n \beta_n \mu B > \frac{n \beta_n}{2M} > \frac{n \beta_n 2N}{2n \beta_n} = N.$$

Кроме того

$$n + 1 \leq n + n = 2n < \frac{2n}{\varepsilon} < M.$$

Поэтому $M \geq n + 2$. Таким образом, для любых $\varepsilon \in (0, 1)$ и $N > 0$ существуют такие натуральное число n и измеримое подмножество B в Ω , что множества

$$B, \theta B, \dots, \theta^n B, \theta^{n+1} B$$

попарно не пересекаются,

$$2n \mu B < \varepsilon$$

и

$$n \beta_n \mu B > N.$$

Перейдем к построению измеримого подмножества A , удовлетворяющего условиям леммы.

Пусть $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}$, $N_1 = 2u_1$, B_1 — такое измеримое подмножество в Ω и n_1 — такое натуральное число, что множества

$$B_1, \theta B_1, \dots, \theta^{n_1} B_1, \theta^{n_1+1} B_1$$

попарно не пересекаются,

$$2n_1 \mu B_1 < \varepsilon_1 = \frac{1}{3}$$

и

$$n_1 \beta_{n_1} \mu B_1 > N_1 = 2u_1.$$

Пусть, далее, $\varepsilon_2 = \frac{\mu B_1}{3}$, $N_2 = 2u_2$, B_2 — такое измеримое подмножество в Ω и n_2 — такое натуральное число, что множества

$$B_2, \theta B_2, \dots, \theta^{n_2} B_2, \theta^{n_2+1} B_2$$

попарно не пересекаются,

$$2n_2 \mu B_2 < \varepsilon_2 = \frac{\mu B_1}{3}$$

и

$$n_2 \beta_{n_2} \mu B_2 > N_2 = 2u_2.$$

продолжая процесс, при построенном B_k полагаем: $\varepsilon_{k+1} = \frac{\mu B_k}{3}$, $N_{k+1} = 2u_{k+1}$, B_{k+1} — такое измеримое подмножество в Ω и n_{k+1} — такое натуральное число, что множества

$$B_{k+1}, \theta B_{k+1}, \dots, \theta^{n_{k+1}} B_{k+1}, \theta^{n_{k+1}+1} B_{k+1}$$

попарно не пересекаются,

$$2n_{k+1} \mu B_{k+1} < \varepsilon_{k+1} = \frac{\mu B_k}{3}$$

и

$$n_{k+1} \beta_{n_{k+1}} \mu B_{k+1} > N_{k+1} = 2u_{k+1}.$$

Пусть

$$B_{12} = \left\{ x \in B_1 : \theta^j x \in \bigcup_{i=0}^{n_2+1} \theta^i B_2 \text{ для некоторого } j \in \{0, 1, \dots, n_1 + 1\} \right\}.$$

Так автоморфизм θ сохраняет меру, то

$$\mu B_{12} \leq \mu \left(\bigcup_{i=0}^{n_2+1} \theta^i B_2 \right) = (n_2 + 2) \mu B_2 \leq 2n_2 \mu B_2 < \frac{\mu B_1}{3}.$$

Аналогично, пусть

$$B_{13} = \left\{ x \in B_1 : \theta^j x \in \bigcup_{i=0}^{n_3+1} \theta^i B_3 \text{ для некоторого } j \in \{0, 1, \dots, n_1 + 1\} \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu B_{13}^{j_2} &\leq \mu \left(\bigcup_{i=0}^{n_3+1} \theta^i B_3 \right) = (n_3 + 2) \mu B_3 \leq 2 n_3 \mu B_3 < \frac{\mu B_2}{3} < \\ &< \frac{2 n_2 \mu B_2}{3} < \frac{\mu B_1}{3^2}. \end{aligned}$$

Продолжая процесс, мы для каждого $k \geq 2$ построим множество

$$B_{1k} = \left\{ x \in B_1 : \theta^j x \in \bigcup_{i=0}^{n_{k+1}+1} \theta^i B_k \text{ для некоторого } j \in \{0, 1, \dots, n_1 + 1\} \right\}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu B_{1k} &\leq \mu \left(\bigcup_{i=0}^{n_{k+1}+1} \theta^i B_k \right) = (n_{k+1} + 2) \mu B_k \leq 2 n_{k+1} \mu B_k < \frac{\mu B_k}{3} < \\ &< \frac{2 n_k \mu B_k}{3} < \frac{\mu B_{k-1}}{3^2} < \dots < \frac{\mu B_1}{3^{k-1}}. \end{aligned}$$

Положим

$$\hat{A}_{n_1} = B_1 \setminus \left(\bigcup_{k=2}^{\infty} B_{1k} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu \hat{A}_{n_1} &\geq \mu B_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \mu B_{1k} > \mu B_1 - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mu B_1}{3^{k-1}} = \mu B_1 - \mu B_1 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{3^{k-1}} = \\ &= \mu B_1 - \frac{\mu B_1}{2} = \frac{\mu B_1}{2}. \end{aligned}$$

Из построения множества $\hat{A}_{n_1}$ следует, что множества

$$\hat{A}_{n_1}, \theta \hat{A}_{n_1}, \theta^2 \hat{A}_{n_1}, \dots, \theta^{n_1+1} \hat{A}_{n_1}$$

попарно не пересекаются и

$$n_1 \beta_{n_1} \mu \hat{A}_{n_1} > n_1 \beta_{n_1} \frac{\mu B_1}{2} > u_1.$$

Положим

$$C_k = \bigcup_{i=0}^{n_k+1} \theta^i B_k, \quad k = 2, 3, \dots$$

Тогда для любого $j \in \{0, 1, \dots, n_1 + 1\}$ и любого $k \geq 2$ множества $\theta^j \hat{A}_{n_1}$ и C_k не пересекаются.

Аналогично, для любого $m \geq 2$ и любого $k > m$ строятся множества

$$B_{mk} = \left\{ x \in B_m : \theta^j x \in \bigcup_{i=0}^{n_k+1} \theta^i B_k \text{ для некоторого } j \in \{0, 1, \dots, n_m + 1\} \right\}.$$

$$\mu B_{mk} < \frac{\mu B_m}{3^{k-m}}.$$
$$\hat{A}_{n_m} = B_m \setminus \left(\bigcup_{k=m+1}^{\infty} B_{m_k} \right),$$
$$\begin{aligned}\mu\hat{A}_{n_m} &\geq \mu B_m - \sum_{k=m+1}^{\infty} \mu B_{mk} > \mu B_m - \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mu B_m}{3^{k-m}} = \mu B_m - \mu B_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{3^{k-m}} = \\ &= \mu B_m - \frac{\mu B_m}{2} = \frac{\mu B_m}{2}.\end{aligned}$$
$$\hat{A}_{n_m}, \theta \hat{A}_{n_m}, \theta^2 \hat{A}_{n_m}, \dots, \theta^{n_m+1} \hat{A}_{n_m}$$
$$n_m \beta_{n_m} \mu \hat{A}_{n_m} > n_m \beta_{n_m} \frac{\mu B_m}{2} > u_m,$$
$$C_k = \bigcup_{i=0}^{n_k+1} \theta^i B_k, \quad k = m+1, m+2, \dots,$$
$$\hat{A}_{n_1}, \theta \hat{A}_{n_1}, \theta^2 \hat{A}_{n_1}, \dots, \theta^{n_1+1} \hat{A}_{n_1},$$

$$\hat{A}_{n_2}, \theta \hat{A}_{n_2}, \theta^2 \hat{A}_{n_2}, \dots, \theta^{n_2+1} \hat{A}_{n_2},$$
$$\hat{A}_{n_m}, \theta \hat{A}_{n_m}, \theta^2 \hat{A}_{n_m}, \dots, \theta^{n_m+1} \hat{A}_{n_m},$$
$$n_k \beta_{n_k} \mu_{\hat{A}_{n_k}} > n_k \beta_{n_k} \frac{\mu_{B_k}}{2} > u_k, \quad k = 1, 2, \dots$$
$$\mu A_{n_k} = \frac{u_k}{n_k \beta_{n_k}}.$$
$$A_{n_1}, \theta A_{n_1}, \theta^2 A_{n_1}, \dots, \theta^{n_1+1} A_{n_1},$$

$$A_{n_2}, \theta A_{n_2}, \theta^2 A_{n_2}, \dots, \theta^{n_2+1} A_{n_2},$$

$$\dots\dots\dots A_{n_m}, \theta A_{n_m}, \theta^2 A_{n_m}, \dots, \theta^{n_m+1} A_{n_m}, \dots\dots\dots$$

что

$$n_k \beta_{n_k} \mu A_{n_k} = n_k \beta_{n_k} \frac{u_k}{n_k \beta_{n_k}} = u_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Обозначим

$$A = \Omega \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{n_k} \theta^i A_{n_k} \right)$$

Покажем, что множество A удовлетворяет условиям леммы. Действительно, для каждого $k = 1, 2, \dots$ множества A_{n_k} и $\theta^{n_k+1} A_{n_k}$ входят в A , а множества $\theta A_{n_k}, \theta^2 A_{n_k}, \dots, \theta^{n_k} A_{n_k}$ — не входят. Поэтому для $x \in A_{n_k}$

$$r_{\theta}^A(x) = \min\{n \geq 1: \theta^n x \in A\} = n_k$$

и

$$n_k \beta_{n_k} \mu A_{n_k} = u_k$$

при $n_k > 1$. Если теперь

$$x \in A \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{n_k},$$

то $\theta x \in A$, так как в противном случае x принадлежал бы некоторому A_{n_k} , и потому было бы

$$r_{\theta}^A(x) = 1,$$

т.е. $x \in A_{n_0}$. □

Следствие 1. Для любой неограниченной последовательности $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ существует такое измеримое подмножество A в Ω , что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n \mu A_n = \infty.$$

Доказательство. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ — такая последовательность положительных чисел, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \infty$$

По лемме 2 существует такое измеримое подмножество A в Ω , что

$$n_k \beta_{n_k} \mu A_{n_k} = u_k$$

при $k > 1$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n \mu A_n = \beta_1 \mu A_1 + \sum_{n=2}^{\infty} n \beta_n \mu A_n = \beta_{n_0} \mu A_{n_0} + \sum_{n=2}^{\infty} n \beta_n \mu A_n \geq \sum_{k=1}^{\infty} u_k = \infty.$$

□

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ

Перейдем к доказательству теоремы. Рассмотрим неограниченную последовательность

$$\beta_n = \begin{cases} \frac{1}{r_n}, & n = 3k, \quad k = 1, 2, \dots, \\ 0, & n \neq 3k, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

В силу следствия 1, существует такое измеримое подмножество A в Ω , что

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \beta_n \mu A_n = \infty.$$

Пусть

$$f \in \mathbf{L}_1, \quad f \neq \text{const.}$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0.$$

В противном случае вместо функции f можно рассматривать функцию $\hat{f}$:

$$\hat{f}(x) = f(x) - \int_{\Omega} f d\mu \cdot 1.$$

В этом случае предельная функция $\bar{f}$ в точности равна нулю.

Пусть $\alpha > 0$ и

$$A_{\alpha} = \{x \in \Omega: f(x) > \alpha\}.$$

Так как $f(x) \not\equiv 0$ и $\int_{\Omega} f d\mu = 0$, то существует такое $\alpha_0 > 0$, что $\mu A_{\alpha_0} > 0$. Пусть

$$n_0 = \min\{n: \sum_{i=n}^{\infty} i \mu A_i \leq \mu A_{\alpha_0}\}.$$

Выберем в множестве A_{α_0} произвольным образом такое подмножество E , что

$$\mu E = \mu \left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{n-1} \theta^i A_n \right) = \sum_{n=n_0}^{\infty} n \mu A_n.$$

Поскольку в пространстве с мерой (Ω, μ) действует эргодическое преобразование θ , то пространство (Ω, μ) обладает следующим свойством однородности: для любых двух подмножеств $A, B \subset \Omega$ одинаковой меры, $\mu A = \mu B$, существует такое сохраняющее меру обратимое преобразование U , что

$$UA = B.$$

Пусть U — такое преобразование, переводящее множество E в $E' = \bigcup_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{i=0}^{n-1} \theta^i A_n$.

Положим

$$\widehat{f}(x) = f(U^{-1}x).$$

Тогда функции f и $\widehat{f}$ равноизмеримы. Покажем, что чезаровские средние $A_{n,\theta}\widehat{f}$ не могут сходиться к нулю со скоростью r_n ни с каким регулятором $g \in \mathbf{L}_1$ (так как $\int_{\Omega} \widehat{f} d\mu = \int_{\Omega} f d\mu = 0$, то предельная функция последовательности $\{A_{n,\theta}\widehat{f}\}_{n=1}^{\infty}$ есть ноль).

Действительно, для любого $x \in E'$ имеем: $U^{-1}x \in A_{\alpha_0}$, и потому

$$\widehat{f}(x) = f(U^{-1}x) > \alpha_0.$$

Обозначим:

$$C_m = \bigcup_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \theta^i A_m, \quad D_m = \bigcup_{i=0}^{m-1} \theta^i A_m.$$

Если $m > 2k + 1$, то $\left[\frac{m}{2}\right] + k \leq m - 1$ и для каждого $x \in C_m$ имеем:

$$\theta^k x \in \theta^k C_m = \bigcup_{i=k}^{\left[\frac{m}{2}\right]+k} \theta^i A_m \subset \bigcup_{i=0}^{m-1} \theta^i A_m = D_m.$$

Поэтому

$$\theta^{-k}(D_m) \cap C_m = C_m$$

и при $m \geq \max\{2k + 1, n_0\}$ имеем:

$$\begin{aligned} T^k(\widehat{f}\chi(D_m))(x)\chi(C_m)(x) &= (\widehat{f}\chi(D_m))(\theta^k x)\chi(C_m)(x) = \\ &= \widehat{f}(\theta^k x)\chi(D_m)(\theta^k x)\chi(C_m)(x) = \widehat{f}(\theta^k x)\chi(C_m)(x) \geq \alpha_0\chi(C_m)(x), \end{aligned}$$

т.е.

$$T^k(\widehat{f}\chi(D_m))(x)\chi(C_m) \geq \alpha_0\chi(C_m).$$

Заметим, что если $j \neq m$ и $m > 2k + 1$, то

$$\begin{aligned} \mu(C_m \cap \theta^{-k} D_j) &= \int_{\Omega} \chi(C_m)\chi(\theta^{-k} D_j) d\mu = \int_{\Omega} \chi(C_m) T^k(\chi(D_j)) d\mu = \\ &= \int_{\Omega} T^{-k}(\chi(C_m))\chi(D_j) d\mu = \int_{\Omega} \chi(\theta^k C_m)\chi(D_j) d\mu \leq \int_{\Omega} \chi(D_m)\chi(D_j) d\mu = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, множества C_m и θ^{-k} не пересекаются, и потому, функции $\chi(C_m)$ и $T^k(\widehat{f}\chi(D_j))$ дизъюнкты. Таким образом, при $m \geq \max\{2n + 1, n_0\}$ имеем:

$$(S_n \widehat{f})\chi(C_m) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \widehat{f} \right) \chi(C_m) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \left(\sum_{j=1}^{\infty} \widehat{f}\chi(D_j) \right) \chi(C_m) =$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k(\widehat{f}\chi(D_m))\chi(C_m) \geq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_0 \chi(C_m) = \alpha_0 \chi(C_m).$$

Предположим, что последовательность $\{A_{n,\theta}\widehat{f}\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к нулю со скоростью r_n с некоторым регулятором $g \in \mathbf{L}_2$. Тогда получим, что при $m \geq \max\{2k+1, n_0\}$

$$\alpha_0 \chi(C_m) \leq (A_{n,\theta}\widehat{f})\chi(C_m) \leq |A_{n,\theta}\widehat{f}| \leq r_n g.$$

Следовательно, для каждого $k = n_0, n_0 + 1, \dots$

$$g(x) \geq \alpha_0 \frac{1}{r_k} \chi(C_{3k})(x).$$

Функции $\chi(C_m)$ и $\chi(C_n)$ дизъюнкты при $n \neq m$. Поэтому

$$g(x) \geq \alpha_0 \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{r_k} \chi(C_{3k})(x)$$

и

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g(x) d\mu &\geq \alpha_0 \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{r_k} \mu(C_{3k}) = \alpha_0 \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{1}{r_k} \sum_{j=0}^{\left[\frac{3k}{2}\right]} \mu(\theta^j A_{3k}) \geq \\ &\geq \frac{\alpha_0}{2} \sum_{k=n_0}^{\infty} 3k \frac{1}{r_k} \mu A_{3k} = \frac{\alpha_0}{2} \sum_{n=3n_0}^{\infty} n \beta_n \mu A_n = \infty. \end{aligned}$$

Таким образом, $g \notin \mathbf{L}_1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces // Studia Mathem. — 1998. — No. 128. — P. 145–157.
- [2] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы: Общая теория — Москва: Изд-во иностр. лит., 1962. — 896 с.
- [3] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ — Москва: Наука, 1977. — 742 с.
- [4] Krengel U. Ergodic Theorems — Berlin: de Gruyter Stud. Math., 1985. — 357 p.
- [5] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I. Sequence Spaces. Springer, 1979.
- [6] Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Function Spaces, Berlin: Springer, 1979. — 327 p.
- [7] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов — Москва: Наука, 1978. — 400 с.
- [8] Муратов М. А., Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003. — Т. 17(56), № 2. — С. 36 – 48.

- [9] Муратов М. А., Рубштейн Б. А. Аналогии доминантной эргодической теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах // Ученые записки ТНУ. — 2004. — Т. 18(57), № 1. — С. 43 – 51.
- [10] Муратов М. А., Пашкова Ю. С. Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича измеримых функций на полуоси // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — № 2. — С. 47–59.
- [11] Муратов М. А., Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Порядковая сходимость в эргодических теоремах в пространствах Орлича // Ученые записки ТНУ. — 2010. — Т. 23(62), № 1. — С. 96 – 111.
- [12] Муратов М. А., Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Порядковая сходимость в эргодических теоремах в пространствах Лоренца // Динамические системы. — Межведомственный научный сборник. — 2010. — Вып. 28. — С. 79 – 86.
- [13] Халмош П. Лекции по эргодической теории —Ижевск:НИИЦ "Регулярная и хаотичная динамика". — 2001. — 132 с.

Збіжність з регулятором в ергодичних теoreмах

У даній роботі вивчається збіжність з регулятором в симетричних просторах $\mathbf{E}$ вимірних функцій на просторі (Ω, μ) з скінченної неперервної мірою μ . Тоді, коли $\mathbf{E} = \mathbf{L}_1$, доведено, що для кожного зберігаючого міру ергодичного відображення θ , кожної послідовності $r_n \rightarrow 0$ та кожної функції $f \in \mathbf{L}_1$, $f \neq \text{const}$ знайдеться функція $\hat{f}$, яка рівномірна з f , що уз $|A_{n,\theta}\hat{f} - \bar{f}| \leq r_n g$, $n = 1, 2, \dots$ слідує $g \notin \mathbf{L}_1$.

Ключові слова: простори з мірою, ергодичні теореми, збіжність з регулятором

Convergence with a regulator in Ergodic Theorems

Let (Ω, μ) be a measure space with the considered measure is finite and continuous, $\mu\Omega = 1$. A sequence of measurable functions $\{f_n\}$ is said to be convergent to f with a regulator g and a rate $\{r_n\}$, $r_n \rightarrow 0$, if $|f_n - f| \leq r_n g$ for all $n = 1, 2, \dots$. Let $A_{n,\theta}f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\theta^k)$, where θ be an ergodic measure preserving transformation on (Ω, μ) . It follows from the pointwise ergodic theorem that for every $f \in \mathbf{L}_1$ the sequence $\{A_{n,\theta}f\}$ converges to $\bar{f} = \int f d\mu$ with a regulator g from the space of measurable functions.

Theorem. For every ergodic measurable preserving transformation θ , each rate $r_n \rightarrow 0$ and every $f \in \mathbf{L}_1$, there exists an equimeasurable to f function $\hat{f}$ such that the condition $|A_{n,\theta}\hat{f} - \bar{f}| \leq r_n g$, $n = 1, 2, \dots$ implies $g \notin \mathbf{L}_1$.

Keywords: measure space, ergodic theorems, convergence with a regulator

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 35–50.

УДК УДК 517.984:517.958

В. И. Войтицкий

О НОРМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОЙ СВЕРХТЕКУЧЕЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ СОСУДЕ

Изучаются спектральные свойства линейной начально-краевой задачи, порожденной процессом малых движений сверхтекучей жидкости в открытом сосуде, без учета влияния капиллярных сил. Доказано, что свойства данной задачи аналогичны свойствам задачи о нормальных движениях вязкой жидкости в открытом сосуде. Найдена локализация спектра, получена асимптотика двух ветвей собственных значений, для соответствующих систем собственных элементов установлено свойство p -базисности в некоторых гильбертовых пространствах.

Ключевые слова: Малые движения, гильбертово пространство, модифицированный операторный пучок С.Г. Крейна, самосопряженный компактный оператор, классы компактности, асимптотика ветвей собственных значений, p -базисность собственных элементов.

1. ВВЕДЕНИЕ. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Сверхтекучей жидкостью называют жидкость, способную протекать через узкие капилляры без сколько-нибудь заметного сопротивления. Явление сверхтекучести впервые было обнаружено для жидкого гелия при температуре ниже $2,17^{\circ}\text{K}$ в экспериментах П. Капицы в 1938 г. До сих пор жидкий гелий является основной сверхтекучей жидкостью. Его свойства изучены достаточно хорошо, наиболее распространена двухскоростная модели Л.Д. Ландау, согласно которой движение сверхтекучего гелия может быть описано двумя полями скоростей, которые соответствуют движениям сверхтекучей (идеальной) компоненты и нормальной (вязкой) компоненты сверхтекучей жидкости. При этом считается, что в каждый момент времени данные компоненты существуют во всем объеме, занимаемой жидкостью

и проникают друг в друга без трения. Данная модель позволила объяснить тот феномен, что сверхтекучий гелий ведет себя в одних опытах как идеальная жидкость, а в других как вязкая жидкость.

В представленной работе на основе модели Л.Д. Ландау сформулирована линейная начально-краевая задача, описывающая малые движения сверхтекучего гелия без учета капиллярных сил. Установлено, что спектральные свойства данной задачи в основном аналогичны свойствам задачи о малых движениях вязкой жидкости в открытом сосуде, что соответствует физическому смыслу задачи.

Будем считать, что сверхтекучий гелий частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, ограниченную твердой стенкой S и открытой свободной поверхностью Γ (границу $\partial\Omega = \Gamma \cup S$ считаем липшицевой). Без учета сил поверхностного натяжения поверхность Γ является в состоянии покоя плоской, расположенной перпендикулярно ускорению достаточно сильного гравитационного поля $\vec{g}$.

Согласно модели Л.Д. Ландау введем поля скоростей сверхтекучей и нормальной компоненты жидкости $\vec{w}(x, t)$ и $\vec{v}(x, t)$ ($x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$) соответственно. Относительное количество их в каждом единичном элементе объема соответственно равно ρ_s/ρ и ρ_n/ρ ($\rho = \rho_s + \rho_n$), где плотности ρ_s и ρ_n считаем заданными положительными константами. Без учета изменения ряда других физических параметров (энтропия, теплопроводность и др.), что не противоречит физическому смыслу задачи, уравнения Ландау могут быть записаны как соответствующие уравнения движения идеальной и вязкой несжимаемой жидкости (см. [1], с. 184). Выберем систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, чтобы начало координат O находилось на Γ и $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, тогда после линеаризации получаем следующие уравнения (см. [1], с. 133):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_n} \nabla p_n + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (\text{в } \Omega), \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_s} \nabla p_s + \vec{f}, \quad \operatorname{div} \vec{w} = 0, \quad (\text{в } \Omega). \quad (2)$$

Здесь, кроме полей скоростей, неизвестными также являются поля динамических давлений p_n и p_s , являющиеся отклонениями давлений нормальной и сверхтекучей компоненты жидкости от соответствующих равновесных давлений p_n^0 и p_s^0 . В состоянии покоя (с учетом выбора системы координат) имеем

$$p_n^0(x_3) = c_n - \rho_n g x_3, \quad p_s^0(x_3) = c_s - \rho_s g x_3, \quad c_n + c_s = p_a,$$

где c_n и c_s — некоторые заданные константы, а p_a — постоянное внешнее (атмосферное) давление. Уравнения (1) и (2) — это линеаризованные уравнения Навье-Стокса и Эйлера, описывающие соответственно малые движения вязкой и идеальной несжимаемых жидкостей под действием заданного поля внешних сил $\vec{f}$.

Перейдем теперь к граничным условиям. Будем предполагать, что на твердой стенке S отсутствует поток тепла (стенка теплоизолирована), тогда имеем $\vec{v} \cdot \vec{n} =$

$\vec{w} \cdot \vec{n} = 0$ (на S), где $\vec{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе области Ω . Поскольку на нормальную компоненту скорости действуют вязкие напряжения, то также следует положить равной нулю тангенциальную составляющую скорости $\vec{v}$, т.е. $\vec{v} \cdot \vec{\tau} = 0$ для любого вектора $\vec{\tau}$ из касательной плоскости к S . Отсюда получаем

$$\vec{v} = \vec{0}, \quad \vec{w} \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S). \quad (3)$$

Считая отклонения движущейся поверхности $\Gamma(t)$ от равновесной поверхности Γ малыми, введем функцию

$$x_3 = \zeta(t, x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in \Gamma,$$

описывающую в момент времени t малые отклонения Γ вдоль внешней нормали $\vec{n} = \vec{e}_3$. С помощью функции ζ от условий на $\Gamma(t)$ можно перейти к линеаризованным условиям на Γ , а уравнения (1), (2) рассматривать в фиксированной области Ω .

Поскольку в любой момент времени каждая молекула жидкости участвует как в сверхтекучем, так и в нормальном типе движения (см. [1], с. 45, а также [2], с. 707), то нормальные составляющие $\vec{v}$ и $\vec{w}$ на Γ должны совпадать. Иначе на свободной границе будут образовываться зоны, заполненные лишь одной компонентой скорости. Учитывая этот факт, получаем, что на Γ должно выполняться кинематическое условие

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{w} \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma). \quad (4)$$

В процессе движения также выполняется условие сохранения объема $\int_{\Gamma} \zeta d\Gamma = 0$ и динамические условия

$$\rho_n \nu \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_3} \right) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{на } \Gamma), \quad (5)$$

$$p_n + p_s - 2\rho_n \nu \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \rho g \zeta \quad (\text{на } \Gamma). \quad (6)$$

Граничные условия (5), (6) обобщают условия на свободной поверхности в задаче о малых колебаниях тяжелой вязкой жидкости в открытом неподвижном сосуде (см. [3], п.7.1, а также [4]). В правой части (6) учтено, что сверхтекучая жидкость является тяжелой, т.е. находится под действием гравитационного поля.

Для полной постановки задачи о малых движениях тяжелой сверхтекучей жидкости в открытом сосуде к уравнениям (1), (2) и граничным условиям (4)–(6) необходимо добавить начальные условия

$$\vec{v}(0, x) = \vec{v}^0(x), \quad \vec{w}(0, x) = \vec{w}^0(x), \quad \zeta(0, x_1, x_2) = \zeta^0(x_1, x_2). \quad (7)$$

Данная постановка предложена автору статьи Н.Д. Копачевским. По-видимому, ранее подобная линейная модель сверхтекучей жидкости не рассматривалась. Сформулированная задача является близкой к задаче о малых движениях частично диссипативной гидросистемы в открытом сосуде (см. [6], а также [7], п. 10.2.).

В статье [5] получены естественные достаточные условия существования сильного решения задачи на произвольном отрезке времени $[0; T]$.

2. ОПЕРАТОРНАЯ ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Перед тем, как перейти к изучению спектральной задачи удобно получить операторную постановку начально-краевой задачи (1)–(7). Оказывается, что в данной постановке можно исключить поле свертхтекущей компоненты скорости, при этом для поля вязкой компоненты возникает задача, обобщающая задачу о малых движениях вязкой жидкости в открытом сосуде. Чтобы получить этот результат повторим здесь построения статьи [5].

Будем считать, что поля $\vec{v}, \vec{w}$ являются функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$:

$$\vec{v}, \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega), \quad \|\vec{v}\|_{\vec{L}_2(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |\vec{v}|^2 d\Omega < \infty. \quad (8)$$

Требование (8) означает, что в любой момент времени жидкость обладает конечной кинетической энергией.

При исследовании малых движений жидкости в открытом сосуде естественно использовать модифицированное разложение Г. Вейля (см. [3], п. 2.1):

$$\vec{L}_2(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega). \quad (9)$$

Здесь

$$\vec{J}_0(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } \partial\Omega)\}, \quad (10)$$

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \text{ (на } S)\} \quad (11)$$

являются подпространствами пространства соленоидальных полей $\vec{J}(\Omega)$, а $\vec{G}(\Omega)$ — пространство потенциальных полей, разлагающееся в прямую сумму (см. [3], с. 106) подпространств

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) := \{\vec{u} = \nabla p : \Delta p = 0 \text{ (в } \Omega), \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ (на } S)\}, \quad (12)$$

$$\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \{\vec{u} = \nabla p : p = 0 \text{ (на } \Gamma)\}. \quad (13)$$

Так как потенциалы p восстанавливаются по полю $\vec{u}$ с точностью до константы, будем предполагать далее, что для них выполнено условие нормировки $\int_{\Gamma} p d\Gamma = 0$. Отсюда потенциалы полей из $\vec{G}(\Omega)$ принадлежат пространству $H_{\Gamma}^1(\Omega) := H^1(\Omega) \ominus \{1_{\Gamma}\}$. При этом разложению $\vec{G}(\Omega) = \vec{G}_{h,S}(\Omega) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}$ соответствует разложение $H_{\Gamma}^1(\Omega) = H_{h,S}^1(\Omega) \oplus H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$ (см. [3], п. 1.3). Здесь и далее, считаем что подпространство $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ снабжено нормой Дирихле $\|p\|_{H_{\Gamma}^1(\Omega)}^2 := \int_{\Omega} |\nabla p|^2 d\Omega$, которая, как известно, на элементах из $H_{\Gamma}^1(\Omega)$ эквивалентна стандартной норме.

Пусть P_0 — ортопроектор из $\vec{L}_2(\Omega)$ на $\vec{J}_0(\Omega)$, тогда $(I - P_0)$ — ортопроектор на $\vec{G}(\Omega)$, и справедливо разложение сверхтекучей компоненты

$$\vec{w} = P_0\vec{w} + (I - P_0)\vec{w} =: P_0\vec{w} + \nabla\Phi. \quad (14)$$

Действуя на обе части (2) проектором P_0 , имеем $\partial/\partial t P_0\vec{w} = P_0\vec{f}$. Отсюда с учетом начального условия получаем, что составляющая $P_0\vec{w}$ однозначно определяется начальным условием и полем внешних сил по формуле

$$P_0\vec{w} = \int_0^t (P_0\vec{f})(\tau) d\tau + P_0\vec{w}^0.$$

Из постановки задачи следует, что $\vec{w} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega)$. Отсюда и из (14) получаем, что $\nabla\Phi \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$. В силу (12) потенциал $\Phi \in H_\Gamma^1(\Omega)$ является решением задачи Неймана для уравнения Лапласа:

$$\Delta\Phi = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = \vec{v} \cdot \vec{n} = \vec{w} \cdot \vec{n} =: \psi \quad (\text{на } \Gamma). \quad (15)$$

Зададим оператор следа $\gamma_\Gamma\Phi := \Phi|_\Gamma$ на пространстве $H_\Gamma^1(\Omega)$. Из теоремы Гальярдо (см. [8]) следует, для области Ω с липшицевой границей такой оператор действует ограниченно из $H_\Gamma^1(\Omega)$ на пространство $H_\Gamma^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Gamma}$, компактно вложенное в $L_{2,\Gamma} := L_2(\Gamma) \ominus \{1_\Gamma\}$. При этом оператор γ_Γ имеет бесконечномерное ядро $H_{0,\Gamma}^1(\Omega) := \{u \in H_\Gamma^1(\Omega) : u = 0 \text{ (на } \Gamma)\}$. Известно (см. [3], с. 45-46), что для любого элемента $\psi \in H_\Gamma^{-1/2} := (H_\Gamma^{1/2})^*$ существует единственное слабое решение $\Phi \in H_{h,S}^1(\Omega) \subset H_\Gamma^1(\Omega)$ задачи (15), которое определяется через ограниченный оператор $T_\Gamma : H_\Gamma^{-1/2} \rightarrow H_{h,S}^1(\Omega)$. При этом оператор T_Γ является сопряженным к оператору следа в смысле тождества

$$(\Phi, T_\Gamma\psi)_{H_\Gamma^1(\Omega)} = \langle \gamma_\Gamma\Phi, \psi \rangle_{L_{2,\Gamma}}, \quad \forall \Phi \in H_\Gamma^1(\Omega), \quad \forall \psi \in H_\Gamma^{-1/2}.$$

Здесь косыми скобками обозначено значение функционала ψ на элементе $\gamma_\Gamma\Phi \in H_\Gamma^{1/2}$.

Таким образом, решение задачи (15) находится по формуле $\Phi = T_\Gamma\psi = T_\Gamma(\vec{v} \cdot \vec{n})$. Отсюда

$$\Phi|_\Gamma = \gamma_\Gamma\Phi = \gamma_\Gamma T_\Gamma\psi = C_\Gamma(\vec{v} \cdot \vec{n}) \quad (\text{на } \Gamma).$$

Оператор $C_\Gamma := \gamma_\Gamma T_\Gamma$ действует непрерывным образом из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $H_\Gamma^{1/2}$, а его сужение на $L_{2,\Gamma}$ является компактным (в силу компактности вложения $H_\Gamma^{1/2}$ в $L_{2,\Gamma}$) самосопряженным положительным оператором в $L_{2,\Gamma}$. При этом обратный положительно определенный оператор C_Γ^{-1} является оператором гильбертовой пары $(H_\Gamma^{1/2}; L_{2,\Gamma})$ (см. [3], с. 41).

Из проделанных построений следует, что поле сверхтекучей компоненты скорости и давление однозначным образом определяются по полю внешних сил $\vec{f} \in \vec{L}_2(\Omega)$, по значению нормальной компоненты поля $\vec{v}$ на границе Γ и по начальным данным

$\vec{w}^0(x) \in \vec{L}_2(\Omega)$, которые в силу постановки должны быть связаны с $\vec{v}^0(x)$ условием согласования $\vec{w}^0 \cdot \vec{n} = \vec{v}^0 \cdot \vec{n}$ (на Γ). Имеем,

$$\vec{w} = P_0 \vec{w} + \nabla \Phi = \int_0^t (P_0 \vec{f})(\tau) d\tau + P_0 \vec{w}^0 + \nabla (T_\Gamma \gamma_n \vec{v}), \quad (16)$$

$$p_s = -\rho_s \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \rho_s f_1 = -\rho_s \frac{\partial}{\partial t} (T_\Gamma \gamma_n \vec{v}) + \rho_s f_1, \quad (17)$$

где

$$\gamma_n \vec{v} := (\vec{v} \cdot \vec{n})|_\Gamma = (v_3)|_\Gamma, \quad (18)$$

$$f_1 := f(t, x_1, x_2, 0) - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma f(t, x_1, x_2, 0) d\Gamma. \quad (19)$$

Будем использовать теперь модифицированное разложение Вейля (9) применительно к нормальной компоненте скорости $\vec{v}$. Введем ортопроекторы $P_{0,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ из $\vec{L}_2(\Omega)$ на подпространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ соответственно. Из постановки задачи следует, что $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Поэтому, действуя проектором $P_{0,\Gamma}$ на обе части уравнения (1), получаем

$$\frac{1}{\rho_n} P_{0,\Gamma} \nabla p_n = \nu P_{0,\Gamma} \Delta \vec{v} + P_{0,\Gamma} \vec{f}. \quad (20)$$

Из этого уравнения поле $P_{0,\Gamma} \nabla p_n$ однозначно определяется по полю $\vec{v}$.

Действуя теперь на обе части уравнения (1) проектором $P_{0,S}$, получаем

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\nabla \tilde{p}_n + \nu P_{0,S} \Delta \vec{v} + P_{0,S} \vec{f},$$

где $\nabla \tilde{p}_n := (1/\rho_n) P_{0,S} \nabla p_n$. Так как потенциал поля $P_{0,\Gamma} \nabla p_n$ обращается в нуль на Γ , то $\tilde{p}_n|_\Gamma = (1/\rho_n) p_n|_\Gamma$. Кроме этого, в силу разложения $\vec{J}_{0,S}(\Omega) = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, имеем $\nabla \tilde{p}_n \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$, поэтому

$$\Delta \tilde{p}_n = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_\Gamma \tilde{p}_n d\Gamma = 0. \quad (21)$$

Таким образом, разрешимость исходной задачи (1)–(7) сводится к разрешимости следующей начально-краевой проблемы:

$$-\nu P_{0,S} \Delta \vec{v} + \nabla \tilde{p}_n = \vec{\Phi} (:= P_{0,S} \vec{f} - \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}) \quad (\text{в } \Omega), \quad (22)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad (23)$$

$$\nu \tau_{i3}(\vec{v}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{на } \Gamma), \quad (24)$$

$$-\tilde{p}_n + \nu \tau_{33}(\vec{v}) = -\psi (:= -\frac{\rho}{\rho_n} g\zeta - \frac{\rho_s}{\rho_n} \frac{\partial}{\partial t} (C_\Gamma \gamma_n \vec{v}) + \frac{\rho_s}{\rho_n} f_1) \quad (\text{на } \Gamma), \quad (25)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \gamma_n \vec{v} \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_\Gamma \zeta d\Gamma = 0, \quad (26)$$

$$\vec{v}(0, x) = \vec{v}^0(x), \quad \zeta(0, x_1, x_2) = \zeta^0(x_1, x_2). \quad (27)$$

Здесь через

$$\tau_{ij}(\vec{v}) := \frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

обозначены компоненты тензора деформации нормальной компоненты жидкости. Краевое условие (25) получено с учетом соотношения (17). Неизвестными в задаче считаем поле $\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и функцию $\zeta \in L_{2,\Gamma}$, определяемые по правым частям $\vec{\Phi} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\psi \in L_{2,\Gamma}$. Поле давлений $\nabla \tilde{p}_n \in \vec{G}_{h,S}(\Omega)$ однозначно определяется через поле $\vec{v}$ из условий (21) и (25).

Будем искать решение задачи (22)–(27) в виде суммы решений вспомогательных краевых задач. Именно, пусть неизвестное поле давлений $\tilde{p}_n$ представимо в виде суммы полей p_1 и p_2 , где $p_1 \in H_{h,S}^1(\Omega)$ удовлетворяет соотношениям

$$\Delta p_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad \int_{\Gamma} p_1 d\Gamma = 0,$$

и является компонентой решения первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна:

$$-\nu P_{0,S} \Delta \vec{v} + \nabla p_1 = \vec{\Phi} - \nabla p_2, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad (28)$$

$$\vec{v} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad (29)$$

$$\nu \tau_{i3}(\vec{v}) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (\text{на } \Gamma), \quad (30)$$

$$-p_1 + \nu \tau_{33}(\vec{v}) = 0 \quad (\text{на } \Gamma), \quad (31)$$

а $p_2 \in H_{h,S}^1(\Omega)$ является решением задачи Зарембы для уравнения Лапласа

$$\Delta p_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial p_2}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S), \quad p_2 = \psi \quad (\text{на } \Gamma). \quad (32)$$

Очевидно, что если задачи (28)–(31) и (32) имеют решения, то тогда поле давлений $\tilde{p}_n = p_1 + p_2$ и поле скорости $\vec{v}$ (решение задачи (28)–(31)) являются решениями задачи (22)–(27).

Предположим, что поле $\vec{v}$ является функцией переменной t со значениями в подпространстве

$$\vec{J}_{0,S}^1(\Omega) := \{\vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S)\}$$

пространства векторных полей $\vec{H}^1(\Omega)$. Наличие вязких сил приводит к диссипации энергии в жидкости, скорость которой вычисляется по формуле

$$\rho_n \nu E(\vec{u}, \vec{u}) := \frac{1}{2} \rho_n \nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 |\tau_{ij}(\vec{u})|^2 d\Omega. \quad (33)$$

С помощью неравенства Корна (см., например, [3], п. 2.2.6) можно доказать, что введенная посредством (33) квадратичная форма $E(\vec{u}, \vec{u})$ на подпространстве $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$

определяет норму, эквивалентную стандартной норме пространства $\vec{H}^1(\Omega)$. При этом пространство $\vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ плотно вложено в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

В статье [5] установлены такие результаты:

Лемма 1. *Задача (28)–(31) имеет единственное решение $\nu\vec{v} = A^{-1}(\vec{\Phi} - \nabla p_2) \in \mathcal{D}(A) \subset \vec{J}_{0,S}^1(\Omega)$ (p_1 определяется через $\vec{v}$) для любой правой части $\vec{\Phi} - \nabla p_2 \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)$. При этом оператор задачи $A : \mathcal{D}(A) \rightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega)$ является самосопряженным положительно определенным оператором гильбертовой пары $(\vec{J}_{0,S}^1(\Omega); \vec{J}_{0,S}(\Omega))$.*

Лемма 2. *Задача (32) имеет единственное решение $p_2 \in H_{h,S}^1(\Omega)$ для любой правой части $\psi \in H_\Gamma^{1/2}$. При этом $\nabla p_2 = G\psi$, где G — оператор, осуществляющий изометрию между $H_\Gamma^{1/2}$ и $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$.*

Отсюда решение задачи (22)–(27) удовлетворяет соотношению $\nu\vec{v} = A^{-1}(\vec{\Phi} - \nabla p_2) = A^{-1}(\vec{\Phi} + G(-\psi))$. Применяя к обеим частям полученного равенства оператор A и вспоминая определения выражений $\vec{\Phi}$ и $(-\psi)$, получаем, что задача (22)–(27) равносильна системе дифференциальных уравнений

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \nu A\vec{v} + \left(\frac{\rho g}{\rho_n}\right) G\zeta + \frac{\rho_s}{\rho_n} G \frac{d}{dt} (C_\Gamma \gamma_n) \vec{v} = \frac{\rho_s}{\rho_n} G f_1 + P_{0,S} \vec{f}, \quad (34)$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \gamma_n \vec{v}, \quad (35)$$

$$\vec{v}(0) = \vec{v}^0(x), \quad \zeta(0) = \zeta^0(x_1, x_2). \quad (36)$$

Здесь уравнение (34) рассматривается в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, а (35) — в пространстве $L_{2,\Gamma}$. При этом, для решений задачи $\vec{v} \in \mathcal{D}(A)$, а $\zeta \in H_\Gamma^{1/2}$.

3. СВЕДЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ К МОДИФИЦИРОВАННОМУ ПУЧКУ С.Г КРЕЙНА

Будем искать решения исходной однородной начально-краевой задачи в виде нормальных движений $\vec{v}(x, t) = e^{-\lambda t} \vec{v}(x)$, $\vec{w}(x, t) = e^{-\lambda t} \vec{w}(x)$, $\zeta(x, t) = e^{-\lambda t} \zeta(x)$. Поскольку задача (1)–(7) сводится к исследованию проблемы (34)–(36), то соответствующая спектральная задача может быть сведена к подобной задаче, где символ d/dt нужно заменить на $-\lambda$. Получаем задачу

$$\begin{aligned} -\lambda \vec{v} + \nu A\vec{v} + \left(\frac{\rho g}{\rho_n}\right) G\zeta - \lambda \frac{\rho_s}{\rho_n} G C_\Gamma \gamma_n \vec{v} &= 0, \\ -\lambda \zeta &= \gamma_n \vec{v} \end{aligned}$$

в пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus L_{2,\Gamma}$.

Осуществим замену

$$\vec{\eta} = A^{1/2} \vec{v} \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \vec{J}_{0,S}^1(\Omega) \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega), \quad \vec{v} = A^{-1/2} \vec{\eta},$$

и воспользуемся обозначением $\alpha := \rho g / \rho_n$, тогда

$$-\lambda A^{-1/2} \vec{\eta} + \nu A^{1/2} \vec{\eta} + \alpha G \zeta - \lambda \frac{\rho_s}{\rho_n} G C_\Gamma \gamma_n A^{-1/2} \vec{\eta} = 0, \quad (37)$$

$$-\lambda \zeta = \gamma_n A^{-1/2} \vec{\eta}. \quad (38)$$

Обозначим

$$Q := \gamma_n A^{-1/2} : \vec{J}_{0,S}(\Omega) \rightarrow L_{2,\Gamma}, \quad Q^+ := A^{-1/2} G : H_\Gamma^{1/2} \rightarrow \vec{J}_{0,S}(\Omega). \quad (39)$$

Справедливо следующее утверждение (см. [5]):

Лемма 3. *Оператор Q является компактным. При этом $Q^+ \subset Q^*$, $Q^+ = Q^*|_{\mathcal{D}(G)}$, $\overline{Q^+} = Q^*$.*

Применим к обеим частям (37) ограниченный в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ оператор $A^{-1/2}$. Тогда с помощью операторов Q и Q^+ получаем

$$-\lambda A^{-1} \vec{\eta} + \nu \vec{\eta} + \alpha Q^+ \zeta - \lambda \frac{\rho_s}{\rho_n} Q^+ C_\Gamma Q \vec{\eta} = 0, \quad (40)$$

$$-\lambda \zeta = Q \vec{\eta}. \quad (41)$$

В случае $\lambda = 0$ имеем

$$Q \vec{\eta} = 0, \quad \nu \vec{\eta} + \alpha Q^+ \zeta = 0. \quad (42)$$

Отсюда в силу того, что $Q = \gamma_n A^{-1/2}$, имеем $A^{-1/2} \vec{\eta} = \vec{v} \in \text{Ker } \gamma_n$. Далее, применяя к обеим частям второго равенства (42) ограниченный оператор Q , получаем $Q Q^+ \zeta = 0$. Отсюда $A^{-1} G \zeta \in \text{Ker } \gamma_n$. Поскольку ядро оператора γ_n является бесконечномерным, то число $\lambda = 0$ является собственным значением бесконечной кратности.

Будем далее предполагать, что $\lambda \neq 0$. Заменяя в (40) оператор Q^+ на его расширение Q^* , выразим ζ из (41) и подставим его в (40). Тогда от задачи (40)–(41) приходим к задаче на собственные значения для пучка

$$L(\lambda) \vec{\eta} := \nu \vec{\eta} - \lambda \left(A^{-1} + \frac{\rho_s}{\rho_n} Q^* C_\Gamma Q \right) \vec{\eta} - \frac{\alpha}{\lambda} Q^* Q \vec{\eta} = 0 \quad (43)$$

в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.

Введем ограниченные в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ операторы

$$\mathcal{A} := A^{-1} + \frac{\rho_s}{\rho_n} Q^* C_\Gamma Q, \quad \mathcal{B} := \alpha Q^* Q. \quad (44)$$

Справедливо утверждение

Лемма 4. *Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ являются самосопряженными компактными в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$. При этом $\mathcal{A}$ является положительным, а $\mathcal{B}$ — неотрицательным оператором, $\text{Ker } \mathcal{B} = \text{Ker } Q = \{ \vec{\eta} \in \vec{J}_{0,S} : A^{-1/2} \vec{\eta} \cdot \vec{n} = 0 \}$ является бесконечномерным подпространством $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$.*

Доказательство. Действительно, оператор $\mathcal{B}$ самосопряжен, поскольку $(Q^*Q)^* = Q^*Q^{**} = Q^*Q$. Он компактен в силу компактности оператора Q . Так как оператор A^{-1} самосопряжен и компактен в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$, а C_Γ самосопряжен и компактен в $L_{2,\Gamma}$, то оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным и компактным.

Положительность оператора $\mathcal{A}$ следует из положительности оператора A^{-1} и неотрицательности $Q^*C_\Gamma Q$. Поскольку также неотрицательным является оператор Q^*Q , то оператор $\mathcal{B}$ неотрицателен. Его ядро, очевидно, совпадает с бесконечномерным ядром оператора $Q = \gamma_n A^{-1/2}$. $\square$

С учетом обозначений (44) получаем задачу

$$L(\lambda)\vec{\eta} := \nu\vec{\eta} - \lambda\mathcal{A}\vec{\eta} - \lambda^{-1}\mathcal{B}\vec{\eta} = 0. \quad (45)$$

Заметим, что при $\rho_s = 0$ мы имеем в точности пучок С.Г. Крейна, возникающий при изучении малых движений вязкой жидкости в открытом сосуде (см. [9], [3]). Поэтому данную оператор-функцию назовем модифицированным пучком С.Г. Крейна.

4. ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА

В силу леммы 4 пучок (45) является пучком С.Г. Крейна. Оказывается, что операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ сохраняют то же асимптотическое поведение собственных значений, что и в задаче о малых движениях вязкой жидкости в открытом сосуде.

Для оператора Q^*Q асимптотика собственных значений известна (см. [3], с. 306). Из нее следует, что

$$\lambda_n(\mathcal{B}) = \alpha \left(\frac{\text{mes}\Gamma}{16\pi} \right)^{1/2} n^{-1/2} [1 + o(1)] \quad (n \rightarrow \infty). \quad (46)$$

Для того чтобы найти асимптотику собственных значений оператора $\mathcal{A}$ нам понадобятся некоторые свойства классов компактных операторов в гильбертовом пространстве. С каждым компактным оператором A связывают невозрастающую последовательность его сингулярных чисел (s -чисел). По определению,

$$s_n(A) := \lambda_n((A^*A)^{1/2}), \quad n = 1, 2, \dots \quad (47)$$

Скорость сходимости сингулярных чисел к нулю выделяет из множества $\mathfrak{S}_\infty$ линейные подклассы операторов $\mathfrak{S}_p$. Именно, оператор $A \in \mathfrak{S}_p$ ($p \geq 1$), если

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A) < \infty.$$

Введем также классы компактных операторов Σ_p , Σ_p^0 ($p \geq 1$). Будем говорить, что $A \in \Sigma_p$, $B \in \Sigma_p^0$, если

$$s_n(A) = O(n^{-1/p}), \quad n \rightarrow \infty, \quad (48)$$

$$s_n(B) = o(n^{-1/p}), \quad n \rightarrow \infty. \quad (49)$$

Из определения следует, что Σ_p и Σ_p^0 являются линейными множествами, причем справедливы такие включения

$$\mathfrak{S}_p \subset \Sigma_p^0 \subset \Sigma_p \subset \mathfrak{S}_{p'}, \quad \forall p' > p \geq 1. \quad (50)$$

На основании данных определений получаем, что

$$\mathcal{B} \in \Sigma_2 \subset \mathfrak{S}_p \quad (\text{при } p > 2). \quad (51)$$

Лемма 5. Для всех $m, n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\lambda_{m+n-1}(Q^*C_\Gamma Q) \leq \lambda_m(Q^*Q) \cdot \lambda_n(C_\Gamma).$$

Доказательство. Известно (см., например, [11], с. 250, а также [12]), что собственные значения компактного оператора находятся как последовательные “минимаксы” соответствующего вариационного отношения. Имеем

$$\lambda_{m+n-1}(Q^*C_\Gamma Q) = \min_{M_{m+n-2}} \max_{u \perp M_{m+n-2}} \frac{(Q^*C_\Gamma Q u, u)}{(u, u)}, \quad (52)$$

где минимум берется по всевозможным $(m+n-2)$ -мерным линеалам $M_{m+n-2} \subset \vec{J}_{0,S}(\Omega)$. Он достигается в случае, если этот линеал является линейной оболочкой собственных элементов, соответствующих первым $m+n-2$ собственным значениям. Максимум достигается на собственном элементе u оператора $Q^*C_\Gamma Q$, отвечающем собственному значению $\lambda_{m+n-1}(Q^*C_\Gamma Q) > 0$. Поскольку собственные элементы самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, то $u \perp \text{Ker } Q^*C_\Gamma Q = \text{Ker } Q$. Поэтому максимумы в вариационном отношении (52) можно искать среди элементов пространства $\mathcal{H} := \vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \text{Ker } Q$.

Пусть $M_\varphi := \text{sp} \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}\}$ — линейная оболочка, натянутая на собственные элементы оператора Q^*Q , соответствующие первым (с учетом кратности) $m-1$ собственным значениям, а $M_{Q^*\psi} := \text{sp} \{Q^*\psi_1, Q^*\psi_2, \dots, Q^*\psi_{n-1}\}$, где $\psi_i \in L_{2,\Gamma}$ ($i = \overline{1, n-1}$) — собственные элементы оператора C_Γ , соответствующие первым $n-1$ собственным значениям. Составим подпространство

$$M := \text{sp} \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{m-1}, Q^*\psi_1, Q^*\psi_2, \dots, Q^*\psi_{n-1}\}.$$

Оно имеет размерность не выше $m+n-2$, поэтому справедливо неравенство

$$\lambda_{m+n-1}(Q^*C_\Gamma Q) \leq \max_{u \perp M} \frac{(Q^*C_\Gamma Q u, u)}{(u, u)} = \max_{u \perp M} \frac{(C_\Gamma Q u, Q u)}{(Q u, Q u)} \cdot \frac{(Q u, Q u)}{(u, u)}.$$

Поскольку максимум произведения функций не превосходит произведения максимумов сомножителей, и $M_{Q^*\psi}^\perp \supset M^\perp$, $M_\varphi^\perp \supset M^\perp$, то

$$\begin{aligned} \lambda_{m+n-1}(Q^*C_\Gamma Q) &\leq \max_{u \perp M} \frac{(C_\Gamma Q u, Q u)}{(Q u, Q u)} \cdot \frac{(Q u, Q u)}{(u, u)} \leq \\ &\leq \max_{u \perp M} \frac{(C_\Gamma Q u, Q u)}{(Q u, Q u)} \cdot \max_{u \perp M} \frac{(Q^*Q u, u)}{(u, u)} \leq \max_{u \perp M_{Q^*\psi}} \frac{(C_\Gamma Q u, Q u)}{(Q u, Q u)} \cdot \max_{u \perp M_\varphi} \frac{(Q^*Q u, u)}{(u, u)}. \end{aligned} \quad (53)$$

Очевидно, что второй сомножитель в правой части (53) равен $\lambda_m(Q^*Q)$. Докажем, что первый сомножитель равен $\lambda_n(C_\Gamma)$.

Обозначим $Q|_{\mathcal{H}} := \tilde{Q}$. Осуществим замену $\eta := Qu \in L_{2,\Gamma}$. Так как $u \in \mathcal{H}$, то $u = \tilde{Q}^{-1}\eta$. Свойство $u \perp M_{Q^*\psi}$ означает, что для всех элементов $Q^*\psi_i$ ($i = \overline{1, n-1}$) выполнено равенство $(u, Q^*\psi_i) = 0$. Отсюда

$$(u, Q^*\psi_i) = (\tilde{Q}^{-1}\eta, Q^*\psi_i) = (Q\tilde{Q}^{-1}\eta, \psi_i)_{L_{2,\Gamma}} = (\eta, \psi_i)_{L_{2,\Gamma}} = 0, \quad \forall i = \overline{1, n-1}.$$

Следовательно, выполнено свойство $\eta \perp M_\psi := \text{sp}\{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{n-1}\}$, значит

$$\max_{u \perp M_{Q^*\psi}} \frac{(C_\Gamma Qu, Qu)}{(Qu, Qu)} = \max_{\eta \perp M_\psi} \frac{(C_\Gamma \eta, \eta)}{(\eta, \eta)} = \lambda_n(C_\Gamma).$$

□

Для дальнейшего нам понадобится следующее важное утверждение (см. [13], с. 52, а также [14]).

Теорема 1 (Фань-Цюй). *Если A и B — компактные операторы, для которых справедливы соотношения*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r s_n(A) = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^r s_n(B) = 0 \quad (r > 0), \quad (54)$$

тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^r s_n(A + B) = a. \quad (55)$$

Очевидно, если операторы A и B являются неотрицательными, то всюду в теореме сингулярные числа можно заменить на равные им собственные значения операторов.

Известно (см. [3], с. 306), что для оператора A^{-1} справедлива асимптотическая формула

$$\lambda_n(A^{-1}) = \left(\frac{\text{mes} \Omega}{3\pi^2} \right)^{2/3} n^{-2/3} [1 + o(1)] =: c_{A^{-1}} n^{-2/3} [1 + o(1)] \quad (n \rightarrow \infty). \quad (56)$$

Отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/3} \lambda_n(A^{-1}) = c_{A^{-1}} > 0. \quad (57)$$

Докажем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/3} \lambda_n(Q^* C_\Gamma Q) = 0. \quad (58)$$

Действительно, пусть $n = 2m + j$, $j = 0, 1$. Тогда согласно лемме 5 имеем $\lambda_n(Q^* C_\Gamma Q) = \lambda_{(m+j)+(m+1)-1}(Q^* C_\Gamma Q) \leq \lambda_{m+j}(Q^* Q) \cdot \lambda_{m+1}(C_\Gamma)$. Известно (см. [3]), что для операторов $Q^* Q$ и C_Γ справедливы асимптотические формулы

$$\lambda_n(Q^* Q) = \left(\frac{\text{mes} \Gamma}{16\pi} \right)^{1/2} n^{-1/2} [1 + o(1)] =: c_{Q^* Q} n^{-1/2} [1 + o(1)] \quad (n \rightarrow \infty), \quad (59)$$

$$\lambda_n(C_\Gamma) = \left(\frac{\text{mes} \Gamma}{4\pi} \right)^{1/2} n^{-1/2} [1 + o(1)] =: c_{C_\Gamma} n^{-1/2} [1 + o(1)] \quad (n \rightarrow \infty). \quad (60)$$

Отсюда получаем

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2/3} \lambda_n(Q^* C_\Gamma Q) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} (2m + j)^{2/3} c_{Q^* Q} (m + j)^{-1/2} c_{C_\Gamma} (m + 1)^{-1/2} \leq \\ \leq c_{Q^* Q} c_{C_\Gamma} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(2m + j)^{2/3}}{m^{1/2} m^{1/2}} = c_{Q^* Q} c_{C_\Gamma} \lim_{m \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{j}{m}\right)^{2/3} \frac{1}{m^{2/3}} = 0. \quad (61)$$

Очевидно, справедливость соотношений (61) не зависит от выбора значения $j = 0, 1$.

Замечание. Справедливость равенства (58), по-видимому, следует также из общих свойств классов компактных операторов в гильбертовом пространстве. Именно, согласно асимптотическим формулам (59), (60) имеем $Q^* Q \in \Sigma_2$, $C_\Gamma \in \Sigma_2$. Тогда произведение этих операторов принадлежит классу Σ_1 . По-видимому, этому же классу принадлежит оператор $Q^* C_\Gamma Q$. Тогда для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ имеем $Q^* C_\Gamma Q \in \Sigma_{1+\varepsilon}^0 \subset \Sigma_{3/2}^0$. Последнее эквивалентно равенству (58).

Таким образом, из справедливости соотношений (57), (58) по теореме Фань-Цюй следует асимптотическое поведение собственных значений оператора $\mathcal{A}$:

$$\lambda_n(\mathcal{A}) = c_{A^{-1}} n^{-2/3} [1 + o(1)] = \left(\frac{\text{mes} \Omega}{3\pi^2} \right)^{2/3} n^{-2/3} [1 + o(1)] \quad (n \rightarrow \infty). \quad (62)$$

Такое же асимптотическое поведение собственных значений наблюдается в задаче о собственных колебаниях тяжелой вязкой жидкости в открытом сосуде. Из установленной асимптотики следует, что

$$\mathcal{A} \in \Sigma_{3/2} \subset \mathfrak{S}_p \quad (\text{при } p > 3/2). \quad (63)$$

На основании полученной степенной асимптотики операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ для модифицированного пучка С.Г. Крейна (45) справедливо утверждение, доказанное Н.Д. Копачевским (см. [16], [17]).

Теорема 2 (о p -базисности собственных элементов пучка С.Г. Крейна). Пусть для пучка С.Г. Крейна $L(\lambda) = I - \lambda A - \lambda^{-1} B$ выполнены условия

$$A = A^* \in \mathfrak{S}_{p_A}(\mathcal{H}), \quad B = B^* \in \mathfrak{S}_{p_B}(\mathcal{H}), \\ \text{Ker } A = \{0\}, \quad \dim \mathcal{H}_0 := \dim \text{Ker } B \geq 0, \quad \dim \mathcal{H}_1 := \dim \{\mathcal{H} \ominus \mathcal{H}_0\} = \infty, \\ 4\|A\| \cdot \|B\| < 1, \quad r_\pm = (1 \pm \sqrt{1 - 4\|A\| \cdot \|B\|}) / (2\|A\|).$$

Тогда система собственных элементов, отвечающая собственным значениям из отрезка $[-r_-, r_-]$, после проектирования на $\mathcal{H}_1$ образует p -базис в $\mathcal{H}_1$ при

$$p \geq p_0, \quad p_0^{-1} = p_A^{-1} + p_B^{-1}.$$

При тех же p система собственных элементов, отвечающая вещественным собственным значениям вне интервала $(-r_+, r_+)$, образует p -базис в $\mathcal{H}$.

Определение 1. Будем говорить, следуя В.А. Пригорскому (см. [15]), что базис Рисса $\{\psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{H}$ является p -базисом ($0 < p \leq \infty$) гильбертова пространства $\mathcal{H}$, если

$$\psi_n = (I + T)\varphi_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

где $T \in \mathfrak{S}_p$, а $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ — ортонормированный базис $\mathcal{H}$.

Таким образом, задача о нормальных движениях тяжелой сверхтекучей жидкости в открытом сосуде сводится к изучению модифицированного пучка С.Г. Крейна (45) с сохранением всех его основных свойств. Применяя теорему 2 к пучку (45) и используя теорему об асимптотике собственных значений пучка С.Г. Крейна (см. [3], п. 7.2, а также [10]), получаем следующее утверждение.

Теорема 3. *Спектр задачи, порожденной проблемой (1)–(7), состоит из бесконечнократного нулевого собственного значения, а также из конечнократных собственных значений (дискретная часть спектра), расположенных в правой комплексной полуплоскости с предельными точками 0 и $+\infty$.*

1. Если $\nu^2 > 4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$, то дискретный спектр состоит из двух ветвей положительных собственных значений:

$$\lambda_k^+ = \nu \lambda_k(\mathcal{A}^{-1})[1 + o(1)] = \nu \left(\frac{\text{mes} \Omega}{3\pi^2} \right)^{-2/3} k^{2/3}[1 + o(1)] \rightarrow +\infty \quad (k \rightarrow \infty), \quad (64)$$

$$\lambda_k^- = \nu^{-1} \lambda_k(\mathcal{B})[1 + o(1)] = \frac{\alpha}{\nu} \left(\frac{\text{mes} \Gamma}{16\pi} \right)^{1/2} k^{-1/2}[1 + o(1)] \rightarrow +0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (65)$$

При этом

$$\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty \subset [r_+, +\infty), \quad \{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty \subset (0, r_-], \quad (66)$$

где

$$r_\pm = (\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|}) / (2\|\mathcal{A}\|).$$

Система собственных элементов $\vec{\eta} = A^{1/2}\vec{v}$, отвечающая ветви $\{\lambda_k^+\}_{k=1}^\infty$, образует p -базис в пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ при $p \geq p_0 = ((3/2)^{-1} + 2^{-1})^{-1} = 6/7$, а система собственных элементов, отвечающая ветви $\{\lambda_k^-\}_{k=1}^\infty$, после проектирования образует p -базис в подпространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \text{Ker } \mathcal{B}$ при тех же p .

2. Если $\nu^2 \leq 4\|\mathcal{A}\| \cdot \|\mathcal{B}\|$, то кроме двух упомянутых выше ветвей положительных собственных значений имеется конечное число не вещественных собственных значений, расположенных зеркально относительно вещественной оси в секторе

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda \geq r_+, |\lambda| \leq r_-\}. \quad (67)$$

В этом случае система собственных элементов, отвечающая двум ветвям положительных собственных значений образует p -базис (при $p > 6/7$) с конечным дефектом в $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\vec{J}_{0,S}(\Omega) \ominus \text{Ker } \mathcal{B}$ соответственно.

Автор выражает благодарность проф. Н.Д. Копачевскому за постановку задачи и руководство работой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Паттерман С. *Гидродинамика сверхтекучей жидкости*. – М.: Мир, 1978. – 520 с.
- [2] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика*. – М.: Наука, 1986. – 734 с.
- [3] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи*. – М.: Наука, 1989. – 416 с.
- [4] Крейн С.Г. *О колебаниях вязкой жидкости в открытом сосуде*. // Докл. АН СССР. – 1964. – 159, № 2. – С. 262-265.
- [5] Войтицкий В.И. Малые движения тяжелой сверхтекучей жидкости в открытом сосуде // Нелинейные граничные задачи. – 2009. – Т. 19. – С. 29–48.
- [6] Загора Д.А. *Малые движения частично диссипативной гидродинамической системы* // Межведомственный научный сборник "Динамические системы". – №15. – 1999. – С. 149-154.
- [7] Kopachevsky, N. D., Krein, S. G. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluid*. – Birkhäuser Verlag. – Basel – Boston – Berlin. 2003. – 444 pp. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146).
- [8] Gagliardo E. *Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili* // Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova. – V.27. – 1957. – P. 284-305.
- [9] Аскеров Н.К. Задача о колебаниях вязкой жидкости и связанные с ней операторные уравнения / Н.К. Аскеров, С.Г. Крейн, Г.И. Лаптев // Функциональный анализ и его приложения. – 1968. – Т. 2, № 2. – С. 21-32.
- [10] Кожевников А.Н. Раздельная асимптотика двух серий собственных значений одной эллиптической краевой задачи / А.Н. Кожевников // Матем. Заметки. – 1977. – Т. 22, № 5. – С. 699-710.
- [11] Рисс Ф. Лекции по функциональному анализу / Ф. Рисс, Б.-С. Надь. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
- [12] Курант Р. Методы математической физики. Том 1. / Р. Курант, Д. Гильберт. – М.: Наука, 1951. – 526 с.
- [13] Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. – 448 с.
- [14] Ky Fan. Maximum Properties and Inequalities for the Eigenvalues of Completely Continuous Operators / Fan Ky // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. – 1951. – Vol. 37. – P. 760-766.
- [15] Пригорский В.А. О некоторых классах базисов гильбертова пространства / В.А. Пригорский // Успехи мат. наук. – 1965. – Т. 20, № 5, вып. 125. – С. 231–236.
- [16] Копачевский Н.Д. О свойствах базисности системы собственных и присоединенных векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$ / Н.Д. Копачевский // Функциональный анализ и его приложения. – Т. 15, вып. 2. – 1981. – С. 77-78.
- [17] Копачевский Н.Д. О p -базисности системы корневых векторов самосопряженного операторного пучка $I - \lambda A - \lambda^{-1}B$ / Н.Д. Копачевский // Сборник научных трудов "Функциональный анализ и прикл. математика". – К: Наукова Думка, 1982. – С. 43-55.

Про нормальні рухи важкої надтекучої рідини у відкритій посудині

Вивчаються властивості спектру лінійної початково-крайової задачі, породженої процесом малих рухів надтекучої рідини у відкритій посудині, без урахування впливу капілярних сил. Доведено, що властивості даної проблеми аналогічні властивостям задачі про нормальні рухи важкої в'язкої рідини у відкритій посудині. Досліджена локалізація спектру, знайдена асимптотика двох гілок власних значень, для відповідних систем власних елементів встановлена p -базисність у деяких гільбертових просторах.

Ключові слова: інтегродиференціальне рівняння.

On the normal motions of a heavy superfluid in an open vessel

We consider the spectral properties of linear initial boundary value problem, generated by process of small motions of a heavy superfluid in an open vessel. In considering model capillary forces are neglected. We proved that properties of this problem is analogous to properties of the problem on normal motions of a viscous fluid in an open vessel. We find localization of the spectrum, asymptotics of two branches of eigenvalues with p -basis property of corresponding eigenfunctions in some Hilbert spaces.

Keywords: Small motions, Hilbert space, modified operator pencil of S.G. Krein, compact self-adjoint operator, compact classes, eigenvalues asymptotics, p -basis property of eigenelements.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 51–58.

УДК 517.955.8

И. В. ГОРОХОВА

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ С НАГРУЖЕННЫМИ КОНЦАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Рассмотрена спектральная задача, связанная с описанием малых поперечных колебаний упругого растянутого стержня под действием вязкого трения. На концах стержня сосредоточены массивные кольца, которые закреплены со стержнем шарнирно. Кольца могут двигаться перпендикулярно равновесному положению стержня с вязким трением. Описано расположение спектра такой задачи и получена асимптотическая формула для собственных значений.

Ключевые слова: краевые условия, собственные значения, операторный пучок, алгебраическая кратность.

ВВЕДЕНИЕ

Начиная с середины XX века в связи с революционным развитием науки и техники, в частности, с появлением космической техники, возникает необходимость в рассмотрении новых начально-краевых спектральных задач математической физики, содержащих спектральный параметр не только в уравнениях, но и в граничных условиях (см. [1] – [5]). Различные виды краевых условий в отсутствие демпфирования рассмотрены в [6]. Также актуальность представляет влияние вязкого трения на изучаемые физические объекты. В предлагаемой работе рассмотрена краевая задача, которая описывает малые поперечные колебания упругого демпфированного стержня с грузами на обоих концах. Исследования подобных задач с несущей массой на одном конце стержня проводились в [7] – [10].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Малые поперечные колебания упругого однородного стержня плотности $\rho = 1$, растянутого распределённой силой, пропорциональной $g(x) \geq 0$, $g \in \mathbb{C}^1[0, l]$, находящегося под действием однородного вязкого трения, коэффициент которого $k > 0$, описываются уравнением

$$\frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + k \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(g(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) = 0, \quad (1)$$

где x – координата, измеряемая от левого конца стержня, t – время, $u(x, t)$ – поперечное смещение точки стержня, находящейся на расстоянии x от левого конца в момент времени t . На левом конце находится массивное кольцо массы $m_1 > 0$, которое может двигаться по вертикали с вязким трением в направлении, перпендикулярном равновесному положению стержня. Кольцо со стержнем закреплено шарнирно. Такого рода закрепление описывается следующими условиями

$$\left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0, \quad (2)$$

$$\left. \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=0} + m_1 \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=0} - g(x) \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} + \alpha \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

На правом конце находится массивное кольцо массы $m_2 > 0$, которое может двигаться по вертикали с вязким трением в направлении, перпендикулярном равновесному положению стержня. Краевые условия на правом конце имеют следующий вид

$$\left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right|_{x=l} = 0, \quad (4)$$

$$- \left. \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^3} \right|_{x=l} + m_2 \left. \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right|_{x=l} + g(x) \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right|_{x=l} + \beta \left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{x=l} = 0, \quad (5)$$

где $l > 0$ – длина стержня, $\alpha > 0$ – коэффициент вязкого трения (демпфирования) левого кольца, $\beta > 0$ – коэффициент вязкого трения правого кольца. Условия (2) и (4) означают, что стержень соединен с кольцами шарнирно, а условия (3) и (5) описывают движения колец на концах стержня под действием вязкого трения.

После стандартного преобразования $u(x, t) = e^{i\lambda t} y(\lambda, x)$ получаем спектральную задачу

$$y^{(4)}(x) - \lambda^2 y(x) - (gy'(x))' + ik\lambda y(x) = 0, \quad (6)$$

$$y'''(0) - m_1 \lambda^2 y(0) - g(0)y'(0) + i\lambda \alpha y(0) = 0, \quad (7)$$

$$y''(\lambda, 0) = 0, \quad (8)$$

$$y''(\lambda, l) = 0, \quad (9)$$

$$-y'''(l) - m_2 \lambda^2 y(l) + g(l)y'(l) + i\lambda \beta y(l) = 0. \quad (10)$$

ТЕОРЕТИКО – ОПЕРАТОРНАЯ ТРАКТОВКА ЗАДАЧИ

Дадим следующие определения.

Определение 1. Множество значений λ для которых обратный оператор $L(\lambda)^{-1}$ существует как ограниченный замкнутый, называется резольвентным множеством, а дополнение к нему – спектром пучка $L(\lambda)$.

Определение 2. Число $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ называется собственным значением ([11], с. 61) пучка $L(\lambda)$, если существует вектор $y_0 \in \mathbb{D}(A)$ (называемый собственным вектором) такой, что $y_0 \neq 0$ и $L(\lambda_0)y_0 = 0$. Векторы $y_1, \dots, y_{p-1}$ называются цепочкой присоединенных к y_0 векторов, если

$$\sum_{s=0}^k \frac{1}{s!} \frac{d^s L(\lambda)}{d\lambda^s} \Big|_{\lambda=\lambda_0} y_{k-s} = 0, \quad k = \overline{1, p-1}.$$

Число p называется длиной цепочки из собственного и присоединенных векторов. Геометрической кратностью собственного значения называется число соответствующих линейно независимых собственных векторов. Алгебраической кратностью собственного значения называется максимальное значение суммы длин цепочек, соответствующих линейно независимым собственным векторам. Собственное значение называется изолированным, если некоторая его проколота окрестность принадлежит резольвентному множеству. Изолированное собственное значение λ_0 конечной алгебраической кратности называется нормальным, если образ $\text{Im}L(\lambda_0)$ замкнут.

Для рассмотрения теоретико - операторной части задачи введем операторы, действующие в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}_2(0, l) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ согласно следующим формулам

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} y(x) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} y(x) \in \mathbb{W}_2^4(0, l), \\ y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0, \\ c_1 = y(0), \quad c_2 = y(l) \end{array} \right\}, \\ A \begin{pmatrix} y(x) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y^{(4)} \\ y'''(0) \\ -y'''(l) \end{pmatrix}, \\ \mathbb{D}(G) &= \left\{ \begin{pmatrix} y(x) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} y(x) \in \mathbb{W}_2^4(0, l), \\ y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0, \\ c_1 = -gy'(0), \quad c_2 = gy'(l) \end{array} \right\}, \\ G \begin{pmatrix} y(x) \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -(gy'(x))' \\ -gy'(0) \\ gy'(l) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$M = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix},$$

где $M \gg 0$, $K \gg 0$. Под строгой положительностью подразумеваем, что существует такое $\varepsilon > 0$, при котором выполняются следующие неравенства $M \geq \varepsilon I$, $K \geq \varepsilon I$.

Рассмотрим операторный пучок

$$L(\lambda) = A - \lambda^2 M + G + i\lambda K$$

с областью определения $\mathbb{D}(L) = \mathbb{D}(A) \cap \mathbb{D}(K) \cap \mathbb{D}(G) = \mathbb{D}(A)$ по определению. Отметим, что эта область определения не зависит от спектрального параметра λ . Спектр пучка $L(\lambda)$ является спектром нашей задачи, поскольку, записав уравнение $L(\lambda)Y = 0$ покомпонентно, получим (6), (7), (7), а (8), (9) входят в описание $\mathbb{D}(A)$. Спектр краевой задачи (6) – (7) и пучка $L(\lambda)$ состоит из нормальных собственных значений, которые сгущаются только к бесконечности ([11], с. 27).

Лемма 1. *Оператор $\mathbb{A}$ самосопряженный, неотрицательный.*

Доказательство. Пусть $Y \begin{pmatrix} y(x) \\ y(0) \\ y(l) \end{pmatrix} \in \mathbb{D}(A)$, а $Z \begin{pmatrix} z(x) \\ z(0) \\ z(l) \end{pmatrix}$, где $z(x) \in \mathbb{W}_2^4(0, l)$, тогда, учитывая, что $y''(0) = 0$, $y''(l) = 0$, получаем

$$\begin{aligned} (AY, Z) &= \int_0^l y^{(4)}(x) \bar{z}(x) dx + y'''(0) \bar{z}(0) - y'''(l) \bar{z}(l) = \\ &= y'''(l) \bar{z}(l) - y'''(0) \bar{z}(0) - \int_0^l y'''(x) \bar{z}'(x) dx + y'''(0) \bar{z}(0) - y'''(l) \bar{z}(l) = \\ &= -y''(l) \bar{z}'(l) - y''(0) \bar{z}'(0) + \int_0^l y''(x) \bar{z}''(x) dx = \\ &= y'(l) \bar{z}''(l) - y'(0) \bar{z}''(0) - \int_0^l y'(x) \bar{z}'''(x) dx = y'(l) \bar{z}''(l) - y'(0) \bar{z}''(0) - \\ &\quad - y(l) \bar{z}'''(l) + y(0) \bar{z}'''(0) + \int_0^l y(x) \bar{z}^{(4)}(x) dx. \end{aligned} \tag{11}$$

Если мы положим

$$z''(0) = z''(l) = 0, \tag{12}$$

то $(AY, Z) = (Y, AZ)$, т.е. оператор A – самосопряженный.

Покажем, что оператор A неотрицателен. Для этого рассмотрим скалярное произведение (AY, Y) . Полагая в (11) $z = y$ и учитывая условия (12), получаем

$$(AY, Y) = \int_0^l |y''(x)|^2 dx \geq 0.$$

Лемма 2. Оператор $\mathbb{G}$ симметричен. $G \geq 0$ ($G \leq 0$) при $g(x) \geq 0$ ($g(x) \leq 0$).

Доказательство. Пусть $Y \in \mathbb{D}(A) = \mathbb{D}(G)$, $Z \in \mathbb{D}(A) = \mathbb{D}(G)$. Рассмотрим скалярное произведение

$$\begin{aligned} (GY, Z) &= - \int_0^l (g(x)y'(x))' \bar{z}(x) dx - g(0)\bar{z}(0)y'(0) + g(l)\bar{z}(l)y'(l) = -g(l)\bar{z}(l)y'(l) + \\ &+ g(0)\bar{z}(0)y'(0) + \int_0^l g(x)y'(x)\bar{z}'(x) dx - g(0)\bar{z}(0)y'(0) + g(l)\bar{z}(l)y'(l) = \\ &= g(l)\bar{z}(l)y(l) - g(0)\bar{z}(0)y(0) - \int_0^l (g(x)\bar{z}'(x))' y(x) dx = (Y, GZ). \end{aligned}$$

Оператор G симметричен. Кроме того,

$$(GY, Y) = \int_0^l g(x)|y'(x)|^2 dx \geq 0$$

при $g(x) \geq 0$ и $(GY, Y) \leq 0$, если $g(x) \leq 0$.

Предложение. Спектр пучка лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Этот результат следует из [12] для пучка ограниченных операторов, но доказательство остается справедливым и для случая пучка неограниченных операторов (см., например, [13]).

АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Рассмотрим асимптотику собственных значений задачи (6) – (7). Будем считать, что $g = \text{const}$. Фундаментальная система решений уравнения (6) $y_k(\lambda, x)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) задается условиями: $y_k^{(n-1)}(\lambda, 0) = \delta_{k,n}$, ($k, n = 1, 2, 3, 4$), $\delta_{k,n} = 1$ при $k = n$ и $\delta_{k,n} = 0$, при $k \neq n$. Прямое вычисление показывает, что

$$S_1(\lambda, x) = \frac{z_1^2 \text{ch}(z_2 x)}{z_1^2 - z_2^2} - \frac{z_2^2 \text{ch}(z_1 x)}{z_1^2 - z_2^2}, \quad (13)$$

$$S_2(\lambda, x) = \frac{z_1^2 \text{sh}(z_2 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{z_2^2 \text{sh}(z_1 x)}{z_1(z_1^2 - z_2^2)}, \quad (14)$$

$$S_4(\lambda, x) = \frac{\text{sh}(z_1 x)}{z_2(z_1^2 - z_2^2)} - \frac{\text{sh}(z_2 x)}{z_1(z_1^2 - z_2^2)}, \quad (15)$$

$$z_1 = \sqrt{\lambda} \left(1 + \frac{g}{4\lambda} - \frac{ik}{4\lambda} \right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (16)$$

$$z_1 = i\sqrt{\lambda} \left(1 - \frac{g}{4\lambda} - \frac{ik}{4\lambda} \right) + o\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (17)$$

Будем искать решение задачи в виде

$$y(\lambda, x) = A_1 S_1(\lambda, x) + A_2 S_2(\lambda, x) + A_3 S_3(\lambda, x) + A_4 S_4(\lambda, x). \quad (18)$$

Подставим (18) в краевые условия (7) – (7) и получим следующую систему уравнений

$$A_1 S_1''(l) + A_2 S_2''(l) + A_4 S_4''(l) = 0, \quad (19)$$

$$A_4 - gA_2 + A_1(i\alpha\lambda - m_1\lambda^2) = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} -A_1 S_1'''(l) - A_2 S_2'''(l) - A_4 S_4'''(l) + g(A_1 S_1'(l) + A_2 S_2'(l) + A_4 S_4'(l)) + \\ + (i\lambda\beta - m_2\lambda^2)(A_1 S_1(l) + A_2 S_2(l) + A_4 S_4(l)) = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Система имеет нетривиальное решение, когда детерминант матрицы равен нулю, т.е., когда

$$\begin{vmatrix} S_1''(l) & S_2''(l) & S_4''(l) \\ i\alpha\lambda - m_1\lambda^2 & -g & 1 \\ -S_1'''(l) + gS_1'(l) + S_1(l)(i\lambda\beta - m_2\lambda^2) & -S_2'''(l) + gS_2'(l) + S_2(l)(i\lambda\beta - m_2\lambda^2) & -S_4'''(l) + gS_4'(l) + S_4(l)(i\lambda\beta - m_2\lambda^2) \end{vmatrix} = 0.$$

Используем (13) – (15), тогда из последнего равенства получим

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^4 m_1 m_2 \text{sh}(z_1 l) \text{sh}(z_2 l)}{z_1 z_2} + \frac{\lambda^2 (m_1 + m_2) z_1 z_2}{z_1^2 - z_2^2} (z_2 \text{sh}(z_1 l) \text{ch}(z_2 l) - \\ - z_1 \text{sh}(z_2 l) \text{ch}(z_1 l)) + \frac{z_1^3 z_2^3 (z_1^2 + z_2^2) \text{sh}(z_1 l) \text{sh}(z_2 l)}{(z_1^2 - z_2^2)^2} + \\ + \frac{2z_1^4 z_2^4 (1 - \text{ch}(z_1 l) \text{ch}(z_2 l))}{(z_1^2 - z_2^2)^2} - \frac{i\lambda^3 (\alpha m_2 + \beta m_1) \text{sh}(z_1 l) \text{sh}(z_2 l)}{z_1 z_2} = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Найдем асимптотику корней уравнения (22). Для этого подставим в него (16) – (17) и формулу

$$\lambda = \frac{\pi n}{l} + A + \frac{B}{n} + \frac{C}{n^2} + \frac{D}{n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Тогда, приравнявая нулю коэффициенты перед степенями $1/n$, в полученном таким образом уравнении, получаем асимптотическую формулу

$$\begin{aligned} \lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} + \frac{ik}{2} + \frac{g}{2} + \frac{1}{l} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \frac{1}{2\pi n} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^2 - \frac{lg}{2\pi^2 n^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) - \\ - \frac{1}{4\pi^2 n^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^2 + \frac{l^2}{16\pi^2 n^2} (k^2 - g^2) + \frac{1}{6\pi^2 n^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)^3 - \\ - \frac{ilk}{\pi^2 n^2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{lg}{8} \right) + \frac{il}{\pi^2 n^2} \left(\frac{\alpha}{m_1^2} + \frac{\alpha + \beta}{m_1 m_2} + \frac{\beta}{m_2^2} \right) + O\left(\frac{1}{n^3}\right). \end{aligned} \quad (23)$$

ВЫВОДЫ

В представленной работе исследована задача, которая описывает малые поперечные колебания упругого стержня с грузами на обоих концах, находящегося под влиянием вязкого трения. Описана теоретико – операторная трактовка этой задачи. Доказано, что оператор $\mathbb{A}$ самосопряженный, неотрицательный и оператор $\mathbb{G}$ симметричен. Показано, что спектр пучка $\mathbb{L}(\lambda)$ лежит в замкнутой верхней полуплоскости. Получена асимптотическая формула (23), с помощью которой по спектру задачи последовательно можно найти параметры $l, k, g, m_1, m_2, \alpha, \beta$, т.е. решить обратную задачу в случае $g = const$.

Автор выражает благодарность В.Н. Пивоварчику за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Miloslavsky A.I. *On instability of linear pipes* . Kharkov. –1980 .– P. 38 – 47. (Dinamika system, nesushikh podvizhnuju raspredelennuju nagruzku: Collected papers, Kharkov aviation institute.)
- [2] Pivovarchik V.N. *Problem Connected with Oscillations of Elastic Beams with Internal and Viscous Damping* // Moscow University Bulletin. –1987. –V. 42. – P. 68 – 71.
- [3] Griniv R.O., Shkalikov A.A. *On Operator Pencils Arising in the Problem of Beam Oscillations with Internal Damping* // Matematicheskii zametki. – 1994 . – V. 56, №2. –P. 114 – 131.
- [4] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д. *Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости.* // Труды СПб. матем. об-ва. – 1998. – С. 3 – 33.
- [5] Adamyan V., Pivovarchik V., Tretter C. *On a class of non-self-adjoint quadratic matrix quadratic operator pencils arising in elasticity theory* // J. Operator Theory. – 2002. – V. 47. – P. 325 – 341.
- [6] Коллатц Л. *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями)* . – М. : Наука. – 1968. – 504 С.
- [7] Amara J.B. *Fourth Order Spectral Problem with Eigenvalue in the Boundary Conditions* // Functional Analysis and its Applications V. Kadets and W. Zelazko. – 2004. – V. 197. – P. 49 – 58. (North-Holland Mathematics Studies.)
- [8] M. Möller, V. Pivovarchik *Spectral Properties of a Fourth Order Differential Equation* // Zeitschrift fur Analysis und ihre Anwendungen Journal for Analysis and its Applications. (2006), 341 – 366 P. (European Mathematical Society. V. 25)
- [9] А.В. Яковлев *Малые поперечные колебания вязкоупругого стержня с грузом на конце* // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. – Т.2, №15 (54) (2006), С. 105 –114.
- [10] Gorokhova I. V. *Small transversal vibrations of elastic rod with point mass at one end subject to viscous friction* // Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry. – 2009. – 5 : 4. – P. 375 – 385.
- [11] М.А. Наймарк *Линейные дифференциальные операторы.* М. : Наука. – 1969. – 512 С.

- [12] M.G. Krein, H. Langer *On some mathematical principles in the linear theory of damped oscillations of continua* – I, II // I bid. – 1 (1978), 364 – 399 P., 539 – 566 P.
- [13] V.N. Pivovarchik *On spectra of a certain class of quadratic operator pencils with one-dimensional linear part* // Укр. матем. ж. – 2007. – Т.59, 702 – 715 P.

Асимптотика власних значень стержня з навантаженими кінцями під дією в'язкого тертя

Розглянуто спектральну задачу, пов'язану з описом малих поперечних коливань пружного розтягнутого стержня під дією в'язкого тертя. На кінцях стержня зосереджені масивні кільця, які закріплені зі стержнем шарнірно. Кільця можуть рухатися перпендикулярно рівноважному положенню стержня з в'язким тертям. Описано розташування спектру такої задачі і отримана асимптотична формула для власних значень.

Ключові слова: краєві умови, власні значення, операторна в'язка, алгебраїчна кратність.

An eigenvalue asymptotic of the rod with the loaded ends under the viscous friction

A spectral problem describing small transversal vibrations of an elastic stretched rod under viscous friction is considered. There are massive rings at the ends of the rod with a hinge joint. The rings can move orthogonally to equilibrium position of the rod with viscous friction. Location of the spectrum of such a problem is described and asymptotic formula for the eigenvalues is provided.

Keywords: eigenvalues, operator pencil, algebraic multiplicity, boundary conditions.

А. И. Криворучко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП ОТРАЖЕНИЙ

Пусть G – бесконечная группа отражений, каждое собственное подмножество множества всех линейных оболочек орбит направлений симметрий которой является независимым. Вычисляются базисные инварианты группы G . Получены условия невырожденности алгебры полиномиальных инвариантов этой группы, а также условия полноты группы G .

Ключевые слова: отражение, группа, инвариант, орбита.

ВВЕДЕНИЕ

Известно, что линейная классификация нецилиндрических алгебраических гиперповерхностей с бесконечным множеством гиперплоскостей симметрии в конечномерном вещественном векторном пространстве V сводится к задаче о строении групп, порожденных объединением поэлементно коммутирующих квадратичных множеств отражений [1], т.е. множеств $M_1, \dots, M_k$, удовлетворяющих следующим условиям:

(А) Каждое M_i определяется некоторой лежащей в V плоскостью A_i и соответствующей квадратичной формой φ_i ; это значит, что отражение относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда P сопряжена d относительно φ_i , а $d \in A_i \setminus P$.

(Б) Если два отражения принадлежат $M_1 \cup \dots \cup M_k$ и не коммутируют между собой, то некоторое M_i содержит оба эти отражения.

Как показано в работах А.Е.Залесского [2] и А.Е.Велеско [3], алгебра полиномиальных инвариантов группы, порожденной множеством $M_1 \cup \dots \cup M_k$, может не быть свободной и не обязательно является конечно порожденной, даже если дополнительно предполагать, что $M_1, \dots, M_k$ удовлетворяют условию

(В) Каждое собственное подмножество множества $\{A_1, \dots, A_k\}$ независимо.

В связи с этим естественно возникает постановка следующей задачи:

Пусть G – группа, порожденная объединением множеств $M_1, \dots, M_k$, которые удовлетворяют условиям (А)–(В). Найти алгебру полиномиальных инвариантов этой группы. Получить условия, при которых G действует на некоторой нецилиндрической алгебраической гиперповерхности и содержит все отражения, сохраняющие каждый инвариант группы G .

Цель работы – решение указанных задач.

Основные результаты работы: В п. 1^о вычисляются образующие поля рациональных инвариантов и описывается алгебра полиномиальных инвариантов группы G . В п. 2^о показывается, что G может действовать на нецилиндрических алгебраических гиперповерхностях, а $M_1 \cup \dots \cup M_k$ совпадать с множеством всех отражений, сохраняющих каждый инвариант группы G .

1^о. Далее V – конечномерное вещественное векторное пространство; $\mathcal{P}$ – алгебра всех полиномиальных функций на пространстве V , $\mathcal{Q}$ – поле всех рациональных функций на V ; $M_1, \dots, M_k$ – квадратичные множества отражений, удовлетворяющие указанным выше условиям (А)–(В), $k > 2$, $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$, G – группа, порожденная множеством M ; $\mathcal{P}^G$ – алгебра всех полиномиальных инвариантов группы G , $\mathcal{Q}^G$ – поле всех рациональных инвариантов G .

Зафиксируем в V базис

$$(a_{i,j}, b_{i,l}, c_q : 1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq m_i; 1 \leq l \leq s_i; 1 \leq q \leq m) \quad (1)$$

с соответствующим двойственным базисом

$$(x_{i,j}, y_{i,l}, z_q : 1 \leq i \leq k; 1 \leq j \leq m_i; 1 \leq l \leq s_i; 1 \leq q \leq m).$$

На основании леммы, доказанной в [4], выбирая соответствующим образом значения параметров m_i , s_i , m и s , мы можем (и будем) считать, что

$$A_1 = \langle a_{1,j}, b_{2,p} + \dots + b_{k,p}, b_{1,l} : 1 \leq j \leq m_1; 1 \leq p \leq s; 1 \leq l \leq s_1 \rangle,$$

$$\varphi_1 = \sum_j \varepsilon_{1,j} x_{1,j}^2 + 2 \sum_l y_{1,l} \xi_{1,s+l} - 2 \sum_{p \leq s} \xi_{1,p} y_{2,p},$$

$$A_r = \langle a_{r,j}, b_{r,l} : 1 \leq j \leq m_r; 1 \leq l \leq s_r \rangle, \quad \varphi_r = \sum_j \varepsilon_{r,j} x_{r,j}^2 + 2 \sum_l y_{r,l} \xi_{r,l}$$

$$(r = 2, \dots, k),$$

где $\xi_{i,l} \in \langle z_1, \dots, z_m \rangle$, $\varepsilon_{i,j} \in \{-1; 1\}$ для всех допустимых значений i, j, l .

Базис, удовлетворяющий всем перечисленным выше условиям, будем называть каноническим базисом множества M (определяющего множества $M_1, \dots, M_k$ однозначно с точностью до изменения их нумерации).

Полагаем

$$h_1 = \sum_j \varepsilon_{1,j} x_{1,j}^2 + 2 \sum_l \xi_{1,s+l} y_{1,l}, \quad h_2 = \varphi_2, \dots, h_k = \varphi_k,$$

а если $s > 0$, то

$$\Delta = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{k,1} & \dots & \xi_{k,s} \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,i} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i,1} & \dots & \xi_{i,i} \end{bmatrix}, \quad H_{i,j} = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,i} & h_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i,1} & \dots & \xi_{i,i} & h_i \\ \xi_{j,1} & \dots & \xi_{j,i} & h_j \end{bmatrix}$$

$$(i = 1, \dots, \min\{k; s\}; j = 1, \dots, k).$$

Пусть ρ – ранг матрицы Δ над полем $\mathcal{Q}$. Этот ранг не изменяется при переходе от одного канонического базиса к другому каноническому базису множества M . Поэтому если $\rho > 0$, то можно считать, что $K_\rho \neq 0$.

Теорема 1. (a) Если $\rho = 0$ или $s = 0$, то

$$\mathcal{Q}^G = \mathbb{R}(h_1, \dots, h_k, z_1, \dots, z_m), \quad \mathcal{P}^G = \mathbb{R}[h_1, \dots, h_k, z_1, \dots, z_m].$$

(b) Если $0 < \rho < k$, и $K_\rho \neq 0$, то

$$\mathcal{Q}^G = \mathbb{R}(H_{\rho, \rho+1}, \dots, H_{\rho, k}, z_1, \dots, z_m),$$

$$\mathcal{P}^G = \mathcal{P} \cap \mathbb{R}[H_{\rho, \rho+1} K_\rho^{-1}, \dots, H_{\rho, k} K_\rho^{-1}, z_1, \dots, z_m].$$

(c) Если $\rho = k$, то $\mathcal{Q}^G = \mathbb{R}(z_1, \dots, z_m)$, $\mathcal{P}^G = \mathbb{R}[z_1, \dots, z_m]$.

Доказательство. Далее $\bar{z}$ обозначает кортеж координатных функций $z_1, \dots, z_m$. Эти функции – инварианты группы G .

Пусть G' – подгруппа группы G , порожденная объединением множеств $M_2, \dots, M_k$ и содержащегося в M_1 квадратичного множества отражений M'_1 , определяемого плоскостью $\langle a_{1,j} : j \geq 1 \rangle \oplus \langle b_{1,l} : l \geq 1 \rangle$ и квадратичной формой h_1 . Из [5] следует, что

$$\mathcal{Q}^{G'} = \mathbb{R}(h_1, \dots, h_k, \bar{z}), \quad \mathcal{P}^{G'} = \mathbb{R}[h_1, \dots, h_k, \bar{z}]. \quad (2)$$

При этом

$$\mathcal{Q}^G \subseteq \mathcal{Q}^{G'}, \quad \mathcal{P}^G \subseteq \mathcal{P}^{G'}. \quad (3)$$

Пусть отражение R – принадлежащее M_1 отражение относительно гиперплоскости P в направлении вектора d . Тогда

$$d = \sum_j \alpha_j a_{1,j} - \sum_{p \leq s} \sum_{i > 1} \gamma_p b_{i,p} + \sum_l \beta_l b_{1,l},$$

$P = \ker \Xi$, где

$$\Xi = \sum_j \alpha_j \varepsilon_{1,j} x_{1,j} + \sum_{p \leq s} \gamma_p \xi_{1,p} + \sum_{l \geq 1} \beta_l \xi_{1,s+l}.$$

Положим

$$\sigma = \Xi(d).$$

Для каждого $i = 1, \dots, k$, действуя отражением R на многочлен h_i , получаем

$$h_i \cdot R = h_i + 4\sigma^{-1} \Xi \sum_{p \leq s} \gamma_p \xi_{i,p}. \quad (4)$$

В самом деле, форма φ_1 инвариантна относительно R и поэтому

$$\begin{aligned} h_1 \cdot R &= \left(\varphi_1 + 2 \sum_{p \leq s} y_{2,p} \xi_{1,p} \right) \cdot R = \varphi_1 + 2 \sum_{p \leq s} (y_{2,p} \cdot R) \xi_{1,p} = \\ &= h_1 - 2 \sum_{p \leq s} y_{2,p} \xi_{1,p} + 2 \sum_{p \leq s} (y_{2,p} + 2 \sigma^{-1} \gamma_p \Xi) \xi_{1,p}, \end{aligned}$$

и получаем (4) для $i = 1$; если же $i \geq 2$, то

$$h_i \cdot R = \sum_j \varepsilon_{i,j} x_{i,j}^2 + 2 \sum_{p \leq s} (y_{i,p} + 2 \sigma^{-1} \gamma_p \Xi) \xi_{i,p} + 2 \sum_{l > s} \xi_{i,l} y_{i,l},$$

и опять получаем (4).

Из (2)–(4) следует утверждение (a).

Пусть теперь $s > 0$, $\rho > 0$. Тогда из (4) следует, что для любых i и j

$$H_{i,j} \cdot R = \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,i} & h_1 \cdot R \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i,1} & \dots & \xi_{i,i} & h_i \cdot R \\ \xi_{j,1} & \dots & \xi_{j,i} & h_j \cdot R \end{vmatrix} = H_{i,j} + 4 \sigma^{-1} \Xi \sum_{p \leq s} \gamma_p \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,i} & \xi_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i,1} & \dots & \xi_{i,i} & \xi_{i,p} \\ \xi_{j,1} & \dots & \xi_{j,i} & \xi_{j,p} \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Поэтому $H_{\rho, \rho+1}, \dots, H_{\rho, k}$ – инварианты группы G .

В силу (2) и (3), остается доказать следующее:

Пусть $1 \leq r \leq \rho$, $K_r \neq 0$, $g = f(h_1, \dots, h_k, \bar{z}) \in \mathcal{Q}^G \cap \mathbb{R}(h_1, \dots, h_k, \bar{z})$;
если $r < k$, то

$$g = f(0, \dots, 0, H_{r, r+1} K_r^{-1}, \dots, H_{r, k} K_r^{-1}, \bar{z}); \quad (6)$$

если $r = k$, то

$$g = f(0, \dots, 0, \bar{z}). \quad (7)$$

Докажем это индукцией по r .

Для каждого $p \in \{1, \dots, s\}$ и $t \in \mathbb{R}$ пусть $T(p, t)$ – отражение относительно гиперплоскости $\varepsilon_{11} x_{11} + t \xi_{1,p} = 0$ в направлении $a_{1,1} - t(b_{2,p} + \dots + b_{k,p})$.

Допустим, что $r = 1$, $K_1 = \xi_{1,1} \neq 0$. Тогда

$$g = f(h_1 \cdot T(1, t), \dots, h_k \cdot T(1, t), \bar{z}) \quad (8)$$

в силу $T(1, t)$ -инвариантности g . Положим

$$t' = 4t(x_{1,1} + t \varepsilon_{1,1}^{-1} \xi_{1,1}).$$

Из (4) имеем:

$$h_i \cdot T(1, t) = h_i + t' \xi_{i,1} \quad (i = 1, \dots, k). \quad (9)$$

При этом элемент t' поля $\mathcal{Q}(t)$ трансцендентен над $\mathcal{Q}$, т.к. $t' \notin \mathcal{Q}$. Значит, из (8) и (9) следует, что в поле $\mathcal{Q}(t)$ выполняется равенство

$$g = f(h_1 + t \xi_{1,1}, \dots, h_k + t \xi_{k,1}, \bar{z}).$$

Из этого равенства при $t = -h_1 \xi_{1,1}^{-1}$ получим (6) для $r = 1$.

Предположим, что (6) доказано для $r = l < k$. Пусть $r = l + 1$ и $K_r \neq 0$. За счет изменения нумерации базисных векторов, при котором меняются местами первые $l + 1$ столбцов матрицы Δ и, следовательно, сохраняются функции $H_{l+1,l+2} K_{l+1}^{-1}, \dots, H_{l+1,k} K_{l+1}^{-1}$ (хотя не обязательно сохраняются $H_{l,l+1}, \dots, H_{l,k}$ и K_l), можно считать, что $K_l \neq 0$. Тогда, по индуктивному предположению,

$$g = f(0, \dots, 0, H_{l,l+1} K_l^{-1}, \dots, H_{l,k} K_l^{-1}, \bar{z}).$$

Отсюда и из $T(l+1, t)$ -инвариантности g получаем

$$g = f(0, \dots, 0, (H_{l,l+1} K_l^{-1}) \cdot T(l+1, t), \dots, (H_{l,k} K_l^{-1}) \cdot T(l+1, t), \bar{z}). \quad (10)$$

Для каждого $j \in \{l+1, \dots, k\}$, полагая

$$K_{l,j} = \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,l} & \xi_{1,l+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{l,1} & \dots & \xi_{l,l} & \xi_{l,l+1} \\ \xi_{j,1} & \dots & \xi_{j,l} & \xi_{j,l+1} \end{vmatrix},$$

из (5) имеем:

$$H_{l,j} \cdot T(l+1, t) = H_{l,j} + 4t(x_{1,1} + t\varepsilon_{1,1}^{-1} \xi_{1,1}) K_{l,j}.$$

Используя это, как и в случае $r = 1$, из (10) в поле $\mathcal{Q}(t)$ получаем:

$$g = f(0, \dots, 0, (H_{l,l+1} + t K_{l,l+1}) K_l^{-1}, \dots, (H_{l,k} + t K_{l,k}) K_l^{-1}, \bar{z}).$$

Из этого равенства при $t = -H_{l,l+1} K_{l+1}^{-1}$, учитывая, что $K_{l,l+1} = K_{l+1}$, имеем:

$$\begin{aligned} g = f(0, \dots, 0, 0, (H_{l,l+2} K_{l,l+1} - H_{l,l+1} K_{l,l+2}) K_l^{-1} K_{l+1}^{-1}, \dots \\ \dots, (H_{l,k} K_{l,l+1} - H_{l,l+1} K_{l,k}) K_l^{-1} K_{l+1}^{-1}, \bar{z}). \end{aligned} \quad (11)$$

По детерминантному тождеству Сильвестра,

$$H_{l,j} K_{l,l+1} - H_{l,l+1} K_{l,j} = H_{l+1,j} K_l \quad (j = l+2, \dots, k).$$

Отсюда и из (11), при $r = l+1 < k$ получаем (6), а при $r = l+1 = k$ получаем (7).

2°. Пусть $X \subseteq \mathcal{Q}$. Назовем X вырожденным, если для некоторых принадлежащих V^* функций $y_1, \dots, y_p$, число которых меньше $\dim V$, $X \subseteq \mathbb{R}(y_1, \dots, y_p)$. В противном случае X назовем невырожденным.

Если для некоторого $i \leq k$ функции $\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,s_i}$ линейно зависимы, то группа, порожденная множеством M_i , содержит сдвиги. В этом случае поле $\mathcal{Q}^G$ является вырожденным, и всякая неприводимая алгебраическая G -инвариантная поверхность цилиндрична.

Укажем условия, при которых G действует на нецилиндрических алгебраических поверхностях. При этом будем далее предполагать, что $\{M_1, \dots, M_k\}$ – семейство *основного типа*. Это означает, что $M_1, \dots, M_k$ удовлетворяют указанным

выше условиям (А)–(В), для каждого i функции $\xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,s_i}$ линейно независимы, а строки матрицы Δ пропорциональны друг другу. Изучению строения группы G (называемой группой *основного типа*), для которой $\{M_1, \dots, M_k\}$ – семейство основного типа, посвящен целый ряд работ (см., например, обзор [6] и список литературы из этого обзора).

Не нарушая общности, будем считать, что

$$\xi_{1,j} = \dots = \xi_{k,j} \quad (j = 1, \dots, s). \quad (12)$$

Из теоремы 1 следует, что в этом случае

$$\mathcal{Q}^G = \mathbb{R}(h_1 - h_2, \dots, h_1 - h_k, \bar{z}), \quad \mathcal{P}^G = \mathbb{R}[h_1 - h_2, \dots, h_1 - h_k, \bar{z}]. \quad (13)$$

Поэтому вырожденность $\mathcal{Q}^G$ эквивалентна вырожденности $\mathcal{P}^G$.

Положим

$$\Lambda = \langle \xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,s} \rangle, \quad \Lambda_i = \langle x_{i,1}, \dots, x_{i,m_i}, \xi_{i,1}, \dots, \xi_{i,s_i} \rangle \quad (i = 1, \dots, k).$$

Очевидно, что $\Lambda \subseteq \Lambda_1 \cap \dots \cap \Lambda_k$.

Теорема 2. *G имеет невырожденную алгебру полиномиальных инвариантов тогда и только тогда, когда*

$$\Lambda_1 \cap \dots \cap \Lambda_k = \Lambda.$$

Доказательство. Если $v \in V$, $f \in \mathcal{P}$, то f'_v будет обозначать производную функции f по вектору v .

Из (13) следует, что вырожденность $\mathcal{P}^G$ равносильна существованию ненулевого вектора

$$d = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} a_{i,j} + \sum_{i,l} \beta_{i,l} b_{i,l}, \quad (14)$$

для которого

$$(h_1 - h_2)'_d = \dots = (h_1 - h_k)'_d = 0. \quad (15)$$

При этом если выполнено (14), то (15) равносильно системе равенств

$$\alpha_{i,j} = 0 \quad (i = 1, \dots, k; \quad j = 1, \dots, m_i), \quad (16)$$

$$\sum_l \beta_{1,l} \xi_{1,s+l} = \sum_l \beta_{i,l} \xi_{i,l} \quad (i = 2, \dots, k). \quad (17)$$

Допустим, что существует ненулевой вектор d , удовлетворяющий условиям (14) и (15). Но тогда $s_1 > s$ и найдется l , для которого $\beta_{1,l} \neq 0$. Отсюда следует, что

$$\sum_l \beta_{1,l} \xi_{1,s+l} \in (\Lambda_1 \cap \dots \cap \Lambda_k) \setminus \Lambda.$$

Обратно, пусть $\xi \in (\Lambda_1 \cap \dots \cap \Lambda_k) \setminus \Lambda$. Тогда

$$\xi = \sum_{i \leq s} \gamma_i \xi_{1,i} + \sum_l \beta_{1,l} \xi_{1,s+l} = \sum_{i \leq s} \gamma_{j,i} \xi_{1,i} + \sum_{l > s} \beta_{j,l} \xi_{j,l} \quad (j = 2, \dots, k).$$

Полагая

$$\beta_{j,i} = \gamma_{j,i} - \gamma_i \quad (j = 2, \dots, k; \quad i = 1, \dots, s),$$

получаем ненулевой вектор d , для которого выполняются равенства (14)–(17).

Замечание. Если G имеет вырожденную алгебру инвариантов, то найдется ненулевой вектор d , удовлетворяющий следующему условию: *каждый инвариант группы G сохраняется любым отражением в направлении d* . Если это условие выполнено, то из доказательства теоремы 2 следует, что $d \in \langle b_{i,j} : i \geq 1; j \geq 1 \rangle$ и поэтому d сохраняется каждым отражением, принадлежащим M ; значит, d – G -инвариантный вектор. Но если R – отражение в направлении d , то $R(d) = -d$, и $R \notin G$.

Отметим также, что множество всех отражений в направлении фиксированного вектора не может быть подмножеством объединения каких-либо поэлементно коммутирующих квадратичных множеств отражений.

Для каждого $i \leq k$ пусть $\mu_i : A_i \rightarrow \Lambda_i$ – линейный изоморфизм, сопоставляющий каждому вектору, принадлежащему A_i , линейную форму, φ_i -сопряженную этому вектору,

$$\Lambda'_i = \bigcap_{j \neq i} \Lambda_j;$$

если $\eta \in \Lambda'_i$, $\xi \in \Lambda_i$, $\xi(\mu_i^{-1}(\eta)) \neq 0$ (т.е. если M_i содержит отражение относительно гиперплоскости $\ker(\xi)$), и

$$\nu_i(\xi, \eta) = \mu_i^{-1}(\xi) + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta), \quad (18)$$

то $(\xi - \eta)(\nu_i(\xi, \eta)) = \xi(\mu_i^{-1}(\xi)) \neq 0$ и поэтому определено отражение $T_i[\xi, \eta]$ относительно гиперплоскости $\ker(\xi - \eta)$ в направлении вектора $\nu_i(\xi, \eta)$. Положим

$$\widetilde{M}_i = \{T_i[\xi, \eta] : \eta \in \Lambda'_i, \xi \in \Lambda_i, \xi(\mu_i^{-1}(\eta)) \neq 0\}, \quad \widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \cup \dots \cup \widetilde{M}_k.$$

Теорема 3. Пусть G имеет невырожденную алгебру полиномиальных инвариантов. Тогда $\widetilde{M}_1, \dots, \widetilde{M}_k$ – квадратичные множества отражений. При этом $\{\widetilde{M}_1, \dots, \widetilde{M}_k\}$ – семейство основного типа, $\widetilde{M}$ – множество всех отражений, сохраняющих каждый инвариант группы G .

Доказательство. 1. Отметим сначала следующее свойство согласованности отображений $\mu_1, \dots, \mu_k$:

$$\left(\forall (a_1, \dots, a_k) \in \prod_i A_i \right) \left(\left(\sum_i a_i = 0 \right) \iff (\mu_1(a_1) = \dots = \mu_k(a_k)) \right). \quad (19)$$

В самом деле, если $(a_1, \dots, a_k) \in A_1 \times \dots \times A_k$ и $a_1 + \dots + a_k = 0$, то используя разложение векторов $a_1, \dots, a_k$ по базисным векторам (1), получаем, что найдутся вещественные $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, для которых

$$a_i = \gamma_1 b_{i,1} + \dots + \gamma_s b_{i,s} \quad (i = 2, \dots, k). \quad (20)$$

Применяя теперь равенства (12) и

$$\xi_{1,p} = \mu_1(b_{2,p} + \dots + b_{k,p}) \quad (p = 1, \dots, s), \quad (21)$$

получаем, что $\mu_1(a_1) = \dots = \mu_k(a_k)$.

Обратно, если $\mu_1(a_1) = \dots = \mu_k(a_k) = \omega$, то $\omega \in \Lambda_1 \cap \dots \cap \Lambda_k$, и, по теореме 2, найдутся вещественные $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, для которых $\omega = \gamma_1 \xi_{1,1} + \dots + \gamma_s \xi_{1,s}$. Теперь из (12), (21) и инъективности отображений $\mu_1, \dots, \mu_k$ получаем равенства (20) и равенство $-a_1 = a_2 + \dots + a_k$.

2. Покажем, что $\widetilde{M}_1, \dots, \widetilde{M}_k$ – квадратичные множества отражений.

Пусть $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$\nu_i : \Lambda_i \times \Lambda'_i \rightarrow V$$

– линейное отображение, определяемое равенством (18); положим

$$\widetilde{A}_i = \nu_i(\Lambda_i \times \Lambda'_i).$$

Если (ξ, η) и (ξ', η') принадлежат $\Lambda_i \times \Lambda'_i$ и $\xi - \eta = \xi' - \eta'$, то

$$\xi' - \xi = \eta' - \eta = \omega \in \Lambda_i \cap \Lambda'_i = \Lambda,$$

$$\begin{aligned} \nu_i(\xi', \eta') &= \nu_i(\xi + \omega, \eta + \omega) = \mu_i^{-1}(\xi + \eta) + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta + \omega) = \\ &= \mu_i^{-1}(\xi) + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta) + \sum_l \mu_l^{-1}(\omega) = \nu_i(\xi, \eta), \end{aligned}$$

т.к. $\mu_1^{-1}(\omega) + \dots + \mu_k^{-1}(\omega) = 0$ в силу (19).

Обратно, если $\nu_i(\xi, \eta) = \nu_i(\xi', \eta')$, то

$$\mu_i^{-1}(\xi - \xi') + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta - \eta') = 0,$$

и из (19) следует, что $\xi - \xi' = \eta - \eta'$, т.е. $\xi - \eta = \xi' - \eta'$.

Таким образом,

$$(\forall (\xi, \eta) \in \Lambda_i \times \Lambda'_i) (\forall (\xi', \eta') \in \Lambda_i \times \Lambda'_i) ((\nu_i(\xi, \eta) = \nu_i(\xi', \eta')) \iff (\xi - \eta = \xi' - \eta')).$$

Отсюда следует, что равенство $\widetilde{\mu}_i(\nu_i(\xi, \eta)) = \xi - \eta$ однозначно определяет линейный изоморфизм

$$\widetilde{\mu}_i : \widetilde{A}_i \rightarrow \Lambda_i + \Lambda'_i.$$

При этом если (ξ, η) и (ξ', η') принадлежат $\Lambda_i \times \Lambda'_i$, то

$$\begin{aligned} (\xi - \eta) \left(\mu_i^{-1}(\xi') + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta') \right) &= \xi(\mu_i^{-1}(\xi')) = \\ &= \xi'(\mu_i^{-1}(\xi)) = (\xi' - \eta') \left(\mu_i^{-1}(\xi) + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta) \right). \end{aligned}$$

Значит, для любых a и a' , принадлежащих $\tilde{A}_i$, $\tilde{\mu}_i(a)(a') = \tilde{\mu}_i(a')(a)$. Поэтому плоскость $\tilde{A}_i$ и отображение $\tilde{\mu}_i$ определяют квадратичное множество отражений, содержащее отражение R относительно гиперплоскости P в направлении d тогда и только тогда, когда $P = \ker(\tilde{\mu}_i(d))$ и $d \in \tilde{A}_i \setminus P$. Это равносильно условию $R \in \tilde{M}_i$.

3. $\tilde{M}$ – множество всех отражений, сохраняющих каждый инвариант группы G .

В самом деле, пусть

$$d = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} a_{i,j} + \sum_{i,l} \beta_{i,l} b_{i,l} + \sum_q \gamma_q c_q \in V, \quad \theta \in V^*, \quad \theta(d) \neq 0, \quad P = \ker(\theta),$$

R – и отражение относительно P в направлении d . Это отражение сохраняет каждый инвариант группы G в том и только том случае, если

$$(z_q)_d' \parallel \theta \quad (q = 1, \dots, m), \quad (h_1 - h_i)_d' \parallel \theta \quad (i = 2, \dots, k),$$

т.е. если

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0, \quad (22)$$

$$\sum_j \alpha_{i,j} \varepsilon_{i,j} x_{i,j} - \sum_j \alpha_{1,j} \varepsilon_{1,j} x_{1,j} + \sum_l \beta_{i,l} \xi_{i,l} - \sum_l \beta_{1,l} \xi_{1,s+l} \parallel \theta \quad (i = 2, \dots, k). \quad (23)$$

Из (22) и невырожденности $\mathcal{P}^G$ следует, что найдется натуральное число $\tau > 1$, для которого $(h_1 - h_\tau)_d'$ – ненулевая линейная форма.

3.1. Допустим, что R сохраняет все инварианты группы G . Тогда найдется $\alpha_{p,\lambda}$, не равное 0; в самом деле, если это не так, то из (23) при $i = \tau$ следует, что θ принадлежит $\langle z_1, \dots, z_m \rangle$, а тогда, в силу (22), $\theta(d) = 0$.

Если $p = 1$, то, в силу (23) при $i = 2$, можно считать, что

$$\theta = \sum_j \alpha_{1,j} \varepsilon_{1,j} x_{1,j} - \sum_j \alpha_{2,j} \varepsilon_{2,j} x_{2,j} + \sum_l \beta_{1,l} \xi_{1,s+l} - \sum_l \beta_{2,l} \xi_{2,l}.$$

Отсюда и из (23) при $i > 2$ получаем:

$$\alpha_{r,j} = 0 \quad (r = 2, \dots, k; j = 1, \dots, m_r),$$

и $\theta = \xi - \eta$, где

$$\xi = \sum_j \alpha_{1,j} \varepsilon_{1,j} x_{1,j} + \sum_l \beta_{1,l} \xi_{1,s+l}, \quad (24)$$

$$\eta = \sum_l \beta_{r,l} \xi_{r,l} \quad (r = 2, \dots, k). \quad (25)$$

Значит, $\xi \in \Lambda_1$, $\eta \in \Lambda'_1$, $R = T_1[\xi, \eta] \in \tilde{M}_1$.

Если же $p > 1$, то, в силу (23) при $i = p$, можно считать, что

$$\theta = \sum_j \alpha_{p,j} \varepsilon_{p,j} x_{p,j} - \sum_j \alpha_{1,j} \varepsilon_{1,j} x_{1,j} + \sum_l \beta_{p,l} \xi_{p,l} - \sum_l \beta_{1,l} \xi_{1,s+l}.$$

Отсюда и из (23) при $i \neq p$ получаем:

$$\alpha_{r,j} = 0 \quad (r = 1, \dots, k; \quad r \neq p; \quad j = 1, \dots, m_r),$$

и $\theta = \xi - \eta$, где

$$\xi = \sum_j \alpha_{p,j} \varepsilon_{p,j} x_{p,j} + \sum_l \beta_{p,l} \xi_{p,l}, \quad (26)$$

$$\eta = \sum_l \beta_{1,l} \xi_{1,s+l} = \sum_l \beta_{r,l} \xi_{r,l} \quad (r = 2, \dots, k; \quad r \neq p). \quad (27)$$

Значит, $\xi \in \Lambda_p$, $\eta \in \Lambda'_p$ и $R = T_p[\xi, \eta] \in \widetilde{M}_p$.

3.2. Покажем, что если $R \in \widetilde{M}$, то R сохраняет все инварианты группы G .

Пусть $p \in \{1, \dots, k\}$, $R \in \widetilde{M}_p$, $\xi' \in \Lambda_p$, $\eta' \in \Lambda'_p$, $P = \ker(\xi' - \eta')$, $d = \nu_p(\xi', \eta')$.

Если $p = 1$, то $\xi' = \xi + \xi_0$, где $\xi_0 \in \Lambda$, а ξ удовлетворяет равенству (24); поэтому полагая $\eta = \eta' - \xi_0$, получаем: η принадлежит Λ'_1 и поэтому удовлетворяет равенствам (25).

Если же $p > 1$, то $\eta' = \eta + \eta_0$, где $\eta \in \langle \xi_{1,s+l} : l \geq 1 \rangle$, $\eta_0 \in \Lambda$. Следовательно, η принадлежит Λ_p и поэтому удовлетворяет равенствам (27). Полагая $\xi = \xi' - \eta_0$, имеем: ξ принадлежит Λ_p и поэтому удовлетворяет равенствам (26).

Таким образом, для любого $p \geq 1$ получаем: $\xi' - \eta' = \xi - \eta$. Поэтому $d = \nu_p(\xi, \eta)$. Но при $p = 1$ из (24) и (25), а при $p > 1$ из (26) и (27) следует, что

$$\nu_p(\xi, \eta) = \sum_j \alpha_{p,j} a_{p,j} + \sum_{i,l} \beta_{i,l} b_{i,l}.$$

Отсюда $(z_1)'_d = \dots = (z_m)'_d = 0$. При этом если $p = 1$, то из (24) и (25) имеем:

$$(h_1 - h_2)'_d = \dots = (h_1 - h_k)'_d = 2(\xi - \eta),$$

а если $p > 1$, то из (26) и (27) следует, что

$$(h_1 - h_p)'_d = 2(\xi - \eta), \quad (h_1 - h_i)'_d = 0 \quad (i = 2, \dots, k; \quad i \neq p).$$

Значит, R сохраняет все инварианты группы G .

4. Проверим, что $\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_k$ удовлетворяют условию согласованности, аналогичному условию (19) согласованности отображений $\mu_1, \dots, \mu_k$. Пусть

$$\xi_i \in \Lambda_i, \quad \eta_i \in \Lambda'_i, \quad v_i = \nu_i(\xi_i, \eta_i), \quad \omega_i = \xi_i + \sum_{j \neq i} \eta_j \quad (i = 1, \dots, k).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_i v_i &= \sum_i \mu_i^{-1}(\xi_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta_j) = \\ &= \sum_i \mu_i^{-1}(\xi_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \mu_i^{-1}(\eta_j) = \sum_i \mu_i^{-1}(\omega_i). \end{aligned}$$

В силу (19), $v_1 + \dots + v_k = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega_1 = \dots = \omega_k$. Но для любых i и j

$$\omega_i = \omega_j \iff \xi_i + \eta_j = \xi_j + \eta_i \iff \xi_i - \eta_i = \xi_j - \eta_j \iff \tilde{\mu}_i(v_i) = \tilde{\mu}_j(v_j).$$

Поэтому

$$v_1 + \dots + v_k = 0 \iff \tilde{\mu}_1(v_1) = \dots = \tilde{\mu}_k(v_k). \quad (28)$$

5. Каждое собственное подмножество множества $\{\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_k\}$ независимо. В самом деле, пусть $(v_1, \dots, v_k) \in \tilde{A}_1 \times \dots \times \tilde{A}_k$, $v_1 + \dots + v_k = 0$ и при этом найдется i , для которого $v_i = 0$. Тогда $\tilde{\mu}_i(v_i) = 0$ и из (28) следует, что $\tilde{\mu}_1(v_1) = \dots = \tilde{\mu}_k(v_k) = 0$. Значит, $v_1 = \dots = v_k = 0$. Теорема доказана.

Следствие. $M_1 \cup \dots \cup M_k$ – множество всех отражений, сохраняющих каждый инвариант группы G , тогда и только тогда, когда $\Lambda'_1 = \dots = \Lambda'_k = \Lambda$.

Выводы

В работе продолжено исследование строения бесконечной группы G , порожденной объединением квадратичных множеств отражений. Построены базисные рациональные инварианты группы G в том случае, когда каждое собственное подмножество множества всех линейных оболочек G -орбит направлений симметрии отражений, принадлежащих группе, образует прямую сумму. Получены условия, при которых такая группа действует на нецилиндрических алгебраических гиперповерхностях, а множество всех отражений, сохраняющих каждый полиномиальный инвариант группы G , совпадает с порождающим ее объединением квадратичных множеств отражений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Криворучко А.И. О строении множества орбит отражений бесконечной группы, порожденной отражениями // Таврический вестник информатики и математики. – 2003. – № 1. – С. 78–92.
- [2] Zalesskii A.E. The fixed algebra of a group generated by reflections is not always free // Arch. Math. – 1983. – V.41, № 5. – P. 434–437.
- [3] Велесько А.Е. Существование групп, порожденных отражениями, с бесконечно порожденными кольцами инвариантов // Докл. АН БССР. – 1985. – Т.30, № 2. – С. 105–107.
- [4] Криворучко А.И. О двойном отношении четверки линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы, порожденной отражениями // Ученые записки ТНУ. Сер. "Математика". – 2001. – Т.14, № 1. – С. 60–64.
- [5] Криворучко А.И. О бесконечных группах отражений с двумя линейными оболочками орбит направлений симметрии // Ученые записки ТНУ. Сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн.". – 2009. – Т.22, № 1. – С. 78–85.

- [6] Игнатенко В.Ф. Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. III // Укр. математ. журн. – 1998. – Т. 50, № 10. – С. 1324–1340.

Про деякі нескінченні групи віддзеркалень

Нехай G є нескінченна група віддзеркалень, кожна власна підмножина множини всіх лінійних оболонок G -орбіт напрямків симетрій якої незалежна. Обчислюються базисні інваріанти групи G . Отримані умови невідродженості алгебри інваріантів цієї групи, а також умови повноти групи G .

Ключові слова: віддзеркалення, група, орбіта, інваріант.

On some infinite reflection groups

Let G be an infinite reflection group and each proper subset of the set of all linear spans of G -orbits of symmetry directions is independent. In the paper all basic invariants of G are calculated and the conditions of completeness of G are obtained.

Keywords: reflection, group, orbit, invariant.

Ю. Л. Кудряшов

МИНИМАЛЬНОСТЬ σ — СИММЕТРИЧЕСКОЙ ДИЛАТАЦИИ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА

В статье доказывается минимальность σ — симметрической дилатации операторного узла неограниченного оператора с непустым множеством регулярных точек.

Ключевые слова: неограниченный оператор, узел, дилатация.

ВВЕДЕНИЕ

Определение 1. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, где A — линейный не обязательно ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H . Оператор $\tilde{A}$, действующий в гильбертовом пространстве $\tilde{H}$, называется дилатацией оператора A [1], если

- 1) $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(\tilde{A})$,
- 2) $H \subset \tilde{H}$,
- 3) $R_{\lambda_0}^n(A)h = PR_{\lambda_0}^n(\tilde{A})h$, для любого $n \in \mathbb{N}$ и $h \in H$, P — ортопроектор из $\tilde{H}$ на H , $R_{\lambda_0}(A) = (A - \lambda_0 I)^{-1}$, $R_{\lambda_0}(\tilde{A}) = (\tilde{A} - \lambda_0 I)^{-1}$.

Исходя из этого определения, естественно дать следующее определение минимальной дилатации оператора.

Определение 2. Дилатация $\tilde{A}$, действующая в $\tilde{H}$ оператор A , действующего в H называется минимальной, если

$$\tilde{H}_{\min} = \text{span} \{R_{\lambda_0}^n(\tilde{A})h \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, h \in H\} -$$

— замкнутая линейная оболочка векторов.

Очевидно, что $\tilde{H}_{\min} \subset \tilde{H}$ и $\tilde{H}_{\min}$ инвариантно относительно $R_{\lambda}(\tilde{A})$, но не обязательно инвариантно относительно самого оператора $\tilde{A}$. Поэтому не всякую дилатацию можно сузить до минимальной, как в случае изометрической дилатации оператора сжатия [2].

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\overline{\mathfrak{D}(A)} = H$, $\lambda_0 \in \rho(A)$, $\text{Im } \lambda_0 < 0$.

Рассмотрим оператор

$$B_{\lambda_0} = i R_{\lambda_0} - i R_{\lambda_0}^* + \text{Im } \lambda_0 R_{\lambda_0}^* R_{\lambda_0}, \text{ где } R_{\lambda_0} = R_{\lambda_0}(A).$$

Множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 , обозначим $L(H_1, H_2)$.

Определение 3. Совокупность гильбертовых пространств H , E и операторов A , действующего в H , $\varphi \in L(H, E)$, $\sigma \in L(E, E)$, $\sigma = \sigma^*$ называется операторным узлом [3]

$$\theta = (A, H, \varphi, E, \sigma), \text{ если } B_{\lambda_0} = \varphi^* \sigma \varphi.$$

Оператор A называется основным, φ — каналовым, σ — метрическим операторами узла θ . Пространство H называется внутренним, E — внешним пространствами узла θ .

Определение 4. Оператор $\tilde{A}$ называется дилатацией операторного узла θ , если $\tilde{A}$ является дилатацией основного оператора A узла θ при любых φ и σ из узла θ [3].

В [3] построена σ — симметрическая дилатация S узла θ следующим образом.

Рассмотрим линейное многообразие вектор — функций $V(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве E при $t \in [0; \infty)$. Обозначим через $L_2(0, \infty; E)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания данного линейного многообразия вектор — функций по норме

$$\|V\|_{L_2(0, \infty; E)}^2 = \int_0^\infty \|V(t)\|_E^2 dt < \infty.$$

Введем пространство $\tilde{H} = H \oplus L_2(0, \infty; E)$, $\tilde{h} = \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix}$, $\tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ h_1 \end{pmatrix}$ со скалярным произведением

$$(\tilde{h}, \tilde{h}_1)_{\tilde{H}} = (V(t), V_1(t))_{L_2(0, \infty; E)} + (h, h_1)_H.$$

С помощью метрического оператора σ узла θ введем в пространстве $\tilde{H}$ σ — метрику следующим образом:

$$\sigma \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma} V \\ h \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\sigma} V = \sigma V(t)$ при каждом $t \in [0; \infty)$.

Обозначим $[f, g]_{\tilde{H}} = (\sigma f, g)_{\tilde{H}}$.

Определение 5. Оператор L , действующий в гильбертовом пространстве $\tilde{H}$ называется σ — симметрическим, если для любых $\{f, g\} \subset \mathfrak{D}(L)$

$$[Lf, g]_{\tilde{H}} = [f, Lg]_{\tilde{H}} \quad \overline{\mathfrak{D}(L)} = \tilde{H}$$

в обычной метрике пространства $\tilde{H}$.

Построим в пространстве $\tilde{H}$ оператор S следующим образом: вектор $\tilde{h} = \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

$$1) \left\{ V(t), \frac{dV(t)}{dt} \right\} \subset L_2(0, \infty; E);$$

$$2) h \in \mathfrak{D}(A);$$

$$3) V(0) = i\varphi(A - \lambda_0 I)h.$$

Оператор S определяется так

$$S\tilde{h} = S \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i \frac{dV(t)}{dt} \\ Ah \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем положим $\lambda_0 = -i$, что упростит выкладки и не нарушит общности рассуждений.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Теорема 1. Если пространство $E = \overline{\varphi H}$ — сепарабельно, то дилатация S узла θ является минимальной.

Доказательство. В [3] получено выражение для $(S + iI)^{-1} = R_{-i}(S)$.

$$R_{-i}(S) \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_0 + iI)^{-1}V(t) + i e^{-t}\varphi h \\ R_{-i}(A)h \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $(\mathcal{P}_0 + iI)^{-1}V(x) = \frac{1}{i} \int_0^x e^{t-x} V(t) dt$. Обозначим $R_{-i}(A) = R_{-i}$.

Отсюда, получаем

$$R_{-i}(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i e^{-t}\varphi h \\ R_{-i}h \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Применяя метод математической индукции, докажем формулу для n -ой степени резольвенты оператора S :

$$R_{-i}^n(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_n \\ h_n \end{pmatrix}, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, \quad (3)$$

$$V_n = e^{-t} \sum_{k=1}^n \frac{t^{n-k}}{(n-k)! i^{n-k-1}} \varphi R_{-i}^{k-1} h, \quad h_n = R_{-i}^n h.$$

Как легко видеть, при $n = 1$ мы получаем формулу (2).

Пусть равенство (3) верно для n и докажем его справедливость для $n + 1$, т. е.

$$\text{что } h_{n+1} = R_{-i}^{n+1} h, \quad V_{n+1} = e^{-t} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)! i^{n-k}} \varphi R_{-i}^{k-1} h.$$

Применяя формулу (1), получаем:

$$R_{-i}^{n+1}(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = R_{-i}(S) \cdot R_{-i}^n(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{n+1}' \\ h_{n+1}' \end{pmatrix},$$

где

$$V_{n+1}' = \frac{1}{i} \int_0^t e^{x-t} \cdot e^{-x} \sum_{k=1}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)! i^{n-k-1}} \varphi R_{-i}^{k-1} h \, dx + i e^{-t} \varphi R_{-i}^n h,$$

$$h_{n+1}' = R_{-i}^{n+1} h = h_{n+1}.$$

$$\begin{aligned} V_{n+1}' &= e^{-t} \sum_{k=1}^n \int_0^t \frac{x^{n-k}}{(n-k)! i^{n-k}} \, dx \varphi R_{-i}^{k-1} h + i e^{-t} \varphi R_{-i}^n h = \\ &= e^{-t} \sum_{k=1}^n \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)! i^{n-k}} \varphi R_{-i}^{k-1} h + i e^{-t} \varphi R_{-i}^n h = V_{n+1}. \end{aligned}$$

Пусть $h_0 \in \mathfrak{D}(A)$, тогда при $n = 0, 1, 2, \dots$, получаем:

$$R_{-i}^{n+1}(S) \begin{pmatrix} 0 \\ (A + iI)h_0 \end{pmatrix} - R_{-i}^n(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_n'' \\ h_n'' \end{pmatrix},$$

где $h_n'' = 0$,

$$\begin{aligned} V_n'' &= e^{-t} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)! i^{n-k}} \varphi R_{-i}^{k-2} h_0 - \sum_{k=1}^n \frac{t^{n-k}}{(n-k)! i^{n-k-1}} \varphi R_{-i}^{k-1} h_0 \right) = \\ &= e^{-t} \left(\frac{t^n}{n! i^{n-1}} \varphi (A + iI) h_0 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)! i^{n-k}} \varphi R_{-i}^{k-2} h_0 \right) - \\ &\quad - e^{-t} \sum_{k=1}^n \frac{t^{n-k}}{(n-k)! i^{n-k+1}} \varphi R_{-i}^{k-1} h_0. \end{aligned}$$

Производя замену в первой сумме $q = k - 1$, получим:

$$V_n'' = \frac{e^{-t} t^n}{n! i^{n-1}} \varphi (A + iI) h_0.$$

Т. к. $\overline{\varphi(A + iI) \mathfrak{D}(A)} = \overline{\varphi H} = E$, то в силу сепарабельности пространства E , множество вектор — функций вида $t^n e^{-t} h$, где $h \in E$, $n = 0, 1, 2, \dots$ плотно в $L_2(0, \infty; E)$.

Тогда $\text{span} \{R_{-i}^n(S)h \mid n \in \mathbb{N}, h \in H\} = L_2(0, \infty; E)$. □

Выводы

Если при построении дилатации положить $\tilde{H} = H \oplus L_2(0, \infty; \tilde{E})$, где $E = \overline{\varphi H}$ и $\overline{\varphi H} \subset \tilde{E}$, то полученная дилатация, как легко видеть, минимальной не будет. Выбирая φ из узла θ , можно получить минимальность дилатации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Золотарев В.А. *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов*. — Харьков: ХНУ, 2003. — 342 с.
- [2] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*. — М.: Мир, — 1970. — 431 с.
- [3] Кудряшов Ю.Л. σ — симметрическая дилатация операторного узла неограниченного оператора. // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. — 2010. — Т. 23 (62) №1. — С. 80–84.

Мінімальність σ — симетричної дилатації операторного вузла

У статті доводиться мінімальність σ — симетричної дилатації операторного вузла необмеженого оператора з непорожньою множиною регулярних точок.

Ключові слова: необмежений оператор, вузол, дилатація.

Minimality σ — symmetrical dilation of knot of unbounded operator

In the paper minimality σ — symmetrical dilation of knot of unbounded operator with unempty set of regular points is prove.

Keywords: unbounded operator, knot, dilation.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 76–89.

УДК 517.972

Е. М. КУЗЬМЕНКО

УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ И КОМПАКТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА $W^{1,p}(\Omega)$

Понятие псевдоквадратичного интеграла вариационного функционала обобщается на случай произвольных банаховых пространств. На компактные области Ω в $\mathbb{R}^n$ распространено известное ранее для отрезка утверждение о корректной определенности и условии компактной непрерывности в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}(\Omega)$ вариационного функционала с псевдоквадратичным интегралом.

Полученные результаты обобщены на случай вариационных функционалов с псевдополиномиальным интегралом и соответствующих пространств Соболева $W^{1,p}(\Omega)$ при произвольном $p \in \mathbb{N}$ и произвольной компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: вариационный функционал, псевдоквадратичность, пространства Соболева, псевдополиномиальность, корректная определенность, компактная непрерывность

e-mail: kuzmenko.e.m@mail.ru

ВВЕДЕНИЕ

В работах И.В.Орлова и Е.В.Божонюк [1]– [3] исследовались общие условия корректной определенности вариационных функционалов в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a, b] = H^1[a, b]$. При этом, от классической жесткой оценки интеграла $f(x, y, z) \leq \alpha + \beta z^2$ классического вариационного функционала $\Phi(y) =$

$\int_a^b f(x, y, y') dx$, $y(\cdot) \in W^{1,2}[a, b]$, был совершен переход к значительно более общему классу псевдоквадратичных по z интегрантов. Было показано, что псевдоквадратичность гарантирует корректную определенность функционала $\Phi(y)$ в данном пространстве Соболева [2].

В настоящей работе упомянутые результаты обобщаются по следующим направлениям:

- 1) Понятие псевдоквадратичного отображения переносится на случай произвольных банаховых пространств.
- 2) Теорема о корректной определенности вариационного функционала $\Phi(y)$ с псевдоквадратичным интегрантом переносится на случай пространства Соболева $W^{1,2}(\Omega)$ над произвольной компактной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- 3) Вводится более общее понятие K -псевдополиномиального отображения ($\forall p \in \mathbb{N}$) и теорема о корректной определенности вариационного функционала $\Phi(y)$ переносится на случай вариационного функционала с K -псевдополиномиальным интегрантом в пространстве Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
- 4) Условие компактной непрерывности вариационных функционалов в $H^1(\Omega)$ переносится на случай пространств Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Таким образом, создается база для обобщения построенной указанными авторами теории компактных экстремумов вариационных функционалов в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a, b]$ на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $p \in \mathbb{N}$ над произвольной компактной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Исследования вариационных функционалов в классах Соболева было начато в 20-х годах прошлого века в работах Тонелли и других авторов. Классическая теорема Тонелли связывает существование абсолютного экстремума вариационного функционала в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$, с p -степенной оценкой снизу по старшей производной, так называемое „условие роста“. Дополнительно на интегрант накладывается условие квазирегулярности.

Напомним более подробно классические результаты [4]. Далее Ω -компактная область в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Интегрант $f(x, y, z), (x, y, z) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, называется квазирегулярным, если $\forall (x, y) \in \Omega \times \mathbb{R}$ функция f является выпуклой по z .

Сформулируем теорему Тонелли, доказанную вначале для одномерного случая и позднее обобщенную на n -мерный случай [4].

Теорема 1. Пусть интегрант $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ в задаче

$$\Phi(y) = \int_{\Omega} f(x, y, \nabla y) dx \rightarrow \text{abs.min}$$

$$(y \in W^{1,p}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 1 < p < \infty, \quad y|_{\partial\Omega} = 0) \quad (1)$$

непрерывен по всем переменным, непрерывно дифференцируем по z , квазирегулярен и удовлетворяет следующему „условию роста“:

$$f(x, y, z) \geq \gamma \|z\|^p - \delta, \quad (\delta > 0, \gamma > 0) \quad (2)$$

Тогда задача (1) имеет решение в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$.

Корректная определенность функционала (1) гарантируется посредством p -степенной оценки сверху.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 при выполнении неравенства:

$$|f(x, y, z)| \leq \alpha \|z\|^p + \beta, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \quad (3)$$

вариационный функционал (1) определен всюду в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$.

Возникает естественный вопрос: можно ли от оценок (2) и (3) перейти к оценкам, в которых константы заменяются функциями от x, y, z (вообще говоря неограниченными)? Достаточно общий ответ на этот вопрос, как упоминалось, был получен в работах Орлова И.В. и Божонков Е.В.

Приведем соответствующие результаты. Базисным в дальнейшем является понятие псевдоквадратичной функции [1], [3].

Определение 2. Борелевская функция $f : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \rightarrow \mathbb{R}$ называется псевдоквадратичной по z ($f \in K_2(z)$), если f допускает представление в виде

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z)z + R(x, y, z)z^2 \quad (4)$$

где, при любом выборе компактов $C_x \subset \mathbb{R}_x$, $C_y \subset \mathbb{R}_y$ коэффициенты P, Q, R ограничены независимо от выбора $z \in \mathbb{R}_z$.

Заметим, что средний член в псевдоквадратичном представлении (4) может быть исключен. Отметим также, что псевдоквадратичность влечет за собой квадратичную оценку

$$|f(x, y, z)| \leq \alpha(x, y) \|z\|^2 + \beta(x, y),$$

коэффициенты α, β которой ограничены лишь локально по x и y , в отличие от глобальной ограниченности коэффициентов в классической оценке. Имеет место следующая теорема существования.

Теорема 3. Пусть $\Omega = [a; b]$. Если $f \in K_2(z)$, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа $\Phi(y) = \int_{\Omega} f(x, y, y') dx$, ($y(\cdot) \in W^{1,2}(\Omega)$) всюду определен в пространстве $W^{1,2}(\Omega)$.

Свойство K -непрерывности функционала $\Phi(y) = \int_{\Omega} f(x, y, y') dx$ в H^1 требует более сильных условий для f , чем псевдоквадратичность.

Определение 3. Пусть, в обозначениях определения 2, функция $f \in K_2(z)$ и непрерывна в $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$. Отображение f назовем вейерштрассовским псевдоквадратичным ($f \in WK_2(z)$), если представление (4) можно выбрать таким образом, что функции P, Q, R равномерно непрерывны и ограничены на $C_x \times C_y \times \mathbb{R}_z$ при любом выборе компактов $C_x \subset \mathbb{R}_x, C_y \subset \mathbb{R}_y$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Пусть $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Если $f \in WK_2(z)$, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа

$$\Phi(y) = \int_{\Omega} f(x, y, y') dx$$

K -непрерывен всюду на $H^1(\Omega)$.

2. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ ПСЕВДОКВАДРАТИЧНОСТИ. КОРРЕКТНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ФУНКЦИОНАЛА НА $W^{1,2}(\Omega)$ В МНОГОМЕРНОМ СЛУЧАЕ

Перейдем к изложению основных результатов.

Вначале обобщим понятие псевдоквадратичного интегранта на случай банаховых пространств. Далее, для произвольного банахова пространства Z , через Z^* обозначено банахово пространство всех линейных непрерывных функционалов на Z , через $(Z, Z)^*$ банахово пространство всех билинейных непрерывных симметричных функционалов на Z .

Определение 4. Пусть X, Y, Z – вещественные банаховы пространства; $\Omega \subset X$, $D_y \subset Y, D_z \subset Z$ – открытые области. Борелевская функция $f : \Omega \times D_y \times D_z \rightarrow \mathbb{R}$ псевдоквадратична по z ($f \in K_2(z)$), если f допускает представление в виде

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z)z + R(x, y, z)z^2 \quad (5)$$

где,

- 1) $P : \Omega \times D_y \times D_z \rightarrow \mathbb{R}$
- 2) $Q : \Omega \times D_y \times D_z \rightarrow Z^*$;
- 3) $R : \Omega \times D_y \times D_z \rightarrow (Z, Z)^* := L_2(Z; \mathbb{R})$,

причем при любом выборе компактов $C_x \subset \Omega, C_y \subset D_y$ коэффициенты P, Q, R ограничены независимо от выбора $z \in D_z$ (иначе говоря, P, Q, R ограничены локально по x, y и глобально по z).

Заметим, что из представления (5), как и в одномерном случае, следует квадратичная оценка:

$$|f(x, y, z)| \leq \alpha(x, y)\|z\|^p + \beta(x, y),$$

коэффициенты α, β которой ограничены локально по x и y . Далее, справедлива теорема о корректной определенности вариационного функционала, обобщающая на n -мерный случай приведенную ранее теорему 3.

Теорема 5. Пусть Ω – компактная область в $\mathbb{R}^n$. Пусть $u = f(x, y, z)$, интегрант $f : \Omega \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда, если $f \in K_2(z)$, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа

$$\Phi(y) = \int_{\Omega} f(x, y, \nabla y) dx, \quad (y(\cdot) \in W^{1,2}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n) \quad (6)$$

всюду определен в пространстве $W^{1,2}(\Omega)$. При этом для любого компакта $C \subset W^{1,2}(\Omega)$ справедлива квадратичная оценка по норме $\|y\|$:

$$|\Phi(y)| \leq A_C + B_C \|y\|_{W^{1,2}}^2 \quad (y \in C), \quad (7)$$

где коэффициенты A_C, B_C зависят только от выбора компакта C .

Доказательство. Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,2}(\Omega)$ и обозначим $C_y = y(\Omega)$ – компакт в $\mathbb{R}_y$. Тогда, в соответствии с определением 4, найдутся такие константы M_P, M_Q, M_R при любом фиксированном $x \in \Omega$:

$$|P(x, y, \nabla y)| \leq M_P, \quad \|Q(x, y, \nabla y)\| \leq M_Q, \quad \|R(x, y, \nabla y)\| \leq M_R. \quad (8)$$

Используя для f псевдквadraticное представление (5), имеем:

$$\Phi(y) = \int_{\Omega} P(x, y, \nabla y) dx + \int_{\Omega} (Q(x, y, \nabla y) \cdot \nabla y) dx + \int_{\Omega} (R(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^2) dx \quad (9)$$

Используя (8), получаем (с учетом свойств непрерывных линейных и билинейных функционалов и неравенства Коши–Буняковского):

А)

$$\left| \int_{\Omega} P(x, y, \nabla y) dx \right| \leq \int_{\Omega} |P(x, y, \nabla y)| dx \leq M_P \cdot \text{mes}(\Omega). \quad (10)$$

В)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} (Q(x, y, \nabla y) \cdot \nabla y) dx \right| &\leq \int_{\Omega} |Q(x, y, \nabla y) \cdot \nabla y| dx \leq \int_{\Omega} \|Q(x, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\| dx \leq \\ &\leq M_Q \cdot \int_{\Omega} \|\nabla y\| dx \leq M_Q \sqrt{\int_{\Omega} \|\nabla y\|^2 dx} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} dx} = \\ &= M_Q \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \cdot \sqrt{\int_{\Omega} \|\nabla y\|^2 dx} \leq M_Q \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \cdot \|y\|_{W^{1,2}}^2 \end{aligned} \quad (11)$$

С)

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\Omega} (R(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^2) dx \right| \leq \int_{\Omega} |(R(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^2)| dx \leq \\
& \leq \int_{\Omega} \|R(x, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\|^2 dx \leq M_R \cdot \int_{\Omega} \|\nabla y\|^2 dx \leq M_R \cdot \|y\|_{W^{1,2}}^2
\end{aligned} \quad (12)$$

Из (9) и (10)–(12) получаем:

$$\begin{aligned}
|\Phi(y)| & \leq \left| \int_{\Omega} P(x, y, \nabla y) dx \right| + \left| \int_{\Omega} (Q(x, y, \nabla y) \nabla y) dx \right| + \left| \int_{\Omega} R(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^2 dx \right| \leq \\
& \leq M_P \cdot \text{mes}(\Omega) + M_Q \cdot \sqrt{\text{mes}(\Omega)} \cdot \|y\|_{W^{1,2}} + M_R \cdot \|y\|_{W^{1,2}}^2 < \infty.
\end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, из (9) следует что $|\Phi(y)| < \infty$, при любом $y(\cdot) \in W^{1,2}(\Omega)$, т.е. функционал (6) определен всюду на $W^{1,2}(\Omega)$.

Получим теперь квадратичную оценку по норме (7), коэффициенты которой зависят лишь от выбора компакта $C \subset W_{1,2}(\Omega)$.

Так как $y(\cdot) \in C \subset W^{1,2}$, то множество $\tilde{C} = \{y(x) \mid x \in \Omega, y(\cdot) \in C\}$ – компакт в $\mathbb{R}$. Поскольку P, Q, R , вместе с f , ограничены локально по x, y и глобально по z , то на множестве $\Omega \times \tilde{C} \times \mathbb{R}_z$ также выполнены оценки типа (8):

$$|P(x, y, \nabla y)| \leq \tilde{M}_P, \quad \|Q(x, y, \nabla y)\| \leq \tilde{M}_Q, \quad \|R(x, y, \nabla y)\| \leq \tilde{M}_R. \quad (14)$$

Воспользовавшись оценками (14) (где константы $\tilde{M}_P, \tilde{M}_Q, \tilde{M}_R$ зависят только от выбора компакта $C \subset W^{1,2}(\Omega)$) и оценкой (13), мы получаем:

$$|\Phi(y)| \leq A_C + D_C \|y\|_{W^{1,2}} + B_C \|y\|_{W^{1,2}}^2, \quad (15)$$

где A_C, D_C, B_C – константы зависящие только от выбора компакта C . Средний член поглощается старшей степенью переменной и мы получаем оценку (7). $\square$

Заметим, что предположение о симметричности функционалов из класса $L_2(\mathbb{R}_z^n, \mathbb{R})$, было введено только для упрощения доказательства и может быть опущено.

Итак, псевдоквадратичность интегранта вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, кроме корректной определенности функционала гарантирует квадратичную оценку $|\Phi(y)|$ по норме $\|y\|$ на любом компакте из данного пространства Соболева.

3. К-ПСЕВДОПОЛИНОМЫ. КОРРЕКТНАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ВАРИАЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА НА $W^{1,p}(\Omega)$

Обобщим конструкцию предыдущего пункта на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – компактная область, $p \geq 1$. Далее, для

произвольного вещественного банахова пространства Z , обозначим через Z^* его сопряженное, через $\overbrace{(Z, \dots, Z)}^k$ – банахово пространство всех k -линейных симметричных непрерывных функционалов на Z .

Определение 5. Пусть X, Y, Z – банаховы пространства; $\Omega \subset X$, $D_y \subset Y$, $D_z \subset Z$ – открытые области. Назовем борелевскую функцию $f : \Omega \times D_y \times D_z \rightarrow \mathbb{R}$ K -псевдополиномом по z ($f \in K_p(z)$), если f можно представить в виде

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^p R_k(x, y, z)(z)^k \quad (16)$$

где:

- 1) $R_0 : \Omega \times D_y \times D_z \rightarrow \mathbb{R}$,
- 2) $R_k : \Omega \times D_y \times D_z \rightarrow (Z, \dots, Z)^* := L_k(Z; \mathbb{R})$ ($k = \overline{1, p}$); причем при любом выборе компактов $C_x \subset \Omega$, $C_y \subset D_y$ коэффициенты R_k ограничены независимо от выбора $z \in D_z$.

Справедлива теорема о корректной определенности вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, обобщающая приведенную ранее для случая $p = 2$ теорему 5.

Теорема 6. Пусть Ω -компактная область в $\mathbb{R}^n$. Пусть $u = f(x, y, z)$, интегрант $f : \Omega \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда, если $f \in K_p(z)$, то вариационный функционал Эйлера-Лагранжа

$$\Phi(y) = \int_{\Omega} f(x, y, \nabla y) dx, \quad (y(\cdot) \in W^{1,p}(\Omega)) \quad (17)$$

всюду определен в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$. При этом для любого компакта $C \subset W^{1,p}(\Omega)$ справедлива оценка $|\Phi(y)|$ по норме $\|y\|$:

$$|\Phi(y)| \leq A_C^0 + A_C^p \|y\|_{W^{1,p}}^p, \quad y \in C. \quad (18)$$

где коэффициенты A_C^0, A_C^p зависят только от выбора компакта C .

Доказательство. Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(\Omega)$ и обозначим $C_y = y(\Omega)$ – компакт в $\mathbb{R}_y$. Тогда, в соответствии с определением 5, найдутся такие константы M_k , $k = \overline{0, p}$, что :

$$\forall x \in \Omega : |R_0(x, y, \nabla y)| \leq M_0, \quad \|R_k(x, y, \nabla y)\| \leq M_k, \quad (1 \leq k \leq p). \quad (19)$$

Используя для f K -псевдополиномиальное представление (16), имеем

$$\Phi(y) = \sum_{k=0}^p \int_{\Omega} \left(R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k \right) dx. \quad (20)$$

Используя (19), получаем (с учетом свойств k -линейных непрерывных форм и неравенства Гельдера-Минковского [2]):

А) при $k = 0$

$$\left| \int_{\Omega} R_0(x, y, \nabla y) dx \right| \leq \int_{\Omega} |R_0(x, y, \nabla y)| dx \leq M_0 \cdot \text{mes}(\Omega). \quad (21)$$

В) при $1 \leq k \leq p$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \left(R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k \right) dx \right| &\leq \int_{\Omega} \left| (R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k) \right| dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\|R_k(x, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\|^k \right) dx \leq M_k \cdot \int_{\Omega} \|\nabla y\|^k dx \leq \\ &\leq M_k \left[\int_{\Omega} \left(\|\nabla y\|^k \right)^{\frac{p}{p-k}} dx \right]^{\frac{k}{p}} \cdot \left[\int_{\Omega} (dx) \right]^{\frac{p}{p-k}} \leq M_k [\text{mes}(\Omega)]^{\frac{p}{p-k}} \|y\|_{W^{1,p}}^k. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (20) – (22) получаем:

$$\begin{aligned} |\Phi(y)| &\leq \left| \sum_{k=0}^p \int_{\Omega} \left(R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k \right) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^p \left| \int_{\Omega} (R_k(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^k) dx \right| \leq \sum_{k=0}^p M_k [\text{mes}(\Omega)]^{\frac{p}{p-k}} \|y\|_{W^{1,p}}^k < \infty. \end{aligned} \quad (23)$$

Таким образом, $|\Phi(y)| < \infty$, т.е. функционал (17) определен всюду на $W^{1,p}(\Omega)$. Проведем теперь аналогично соответствующему пункту доказательства теоремы 5 оценку по норме (18), коэффициенты которой зависят лишь от выбора компакта $C \subset W^{1,p}(\Omega)$. Так как $y(\cdot) \in C \subset W^{1,p}$, то множество $\tilde{C} = \{y(x) \mid x \in \Omega, y(\cdot) \in C\}$ -компакт в $\mathbb{R}$. Поскольку R_k ($0 \leq k \leq p$), вместе с f , ограничены локально по x, y и глобально z , то на множестве $\Omega \times \tilde{C} \times \mathbb{R}_z$ также выполнены оценки типа (19):

$$\forall x \in \Omega : |R_0(x, y, \nabla y)| \leq \widetilde{M}_0, \quad \|R_k(x, y, \nabla y)\| \leq \widetilde{M}_k, \quad (1 \leq k \leq p). \quad (24)$$

Воспользовавшись оценками (24) (где константы $\widetilde{M}_k$ зависят только от выбора компакта $C \subset W^{1,p}(\Omega)$) и оценкой (23), мы получаем:

$$|\Phi(y)| \leq A_C^0 + A_C^1 \|y\|_{W^{1,p}} + \dots + A_C^p \|y\|_{W^{1,p}}^p, \quad (25)$$

где $A_C^0, A_C^1, \dots, A_C^p$ – константы зависящие только от выбора компакта C . Средние члены поглощаются старшей степенью переменной, и мы получаем оценку (18). $\square$ Заметим, что предположение о симметричности функционалов из классов $L_k(\mathbb{R}_z^n, \mathbb{R})$ было введено только для упрощения доказательства и может быть опущено.

Итак, K -псевдополиномиальность интегранта вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,p}(\Omega)$ ($p \in \mathbb{N}$), кроме корректной определенности функционала гарантирует степенную оценку порядка p по норме $\|y\|$ на любом компакте из данного пространства Соболева.

4. УСЛОВИЕ КОМПАКТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВАРИАЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Напомним вначале определение K -непрерывности функционала.

Определение 6. Пусть E – произвольное полное локально выпуклое пространство, $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$. Для всякого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ обозначим через E_C – банахово пространство $(\text{span} C, \|\cdot\|_C)$, где норма $\|\cdot\|_C$ есть функционал Минковского множества C . Функционал Φ называется *компактно непрерывным* (K -непрерывным) в точке $y(\cdot) \in E$, если все сужения Φ на подпространства $(y + E_C)$ непрерывны в точке y .

Наша цель обобщить теорему 4 на случай произвольных пространств Соболева $W^{1,p}(\Omega)$. Для этого введем подходящий класс гладкости K -псевдополиномиальных интегрантов $WK_p(z)$.

Определение 7. Пусть, в обозначениях определения 5, функция $f \in K_p(z)$ и непрерывна в $\Omega \times D_y \times D_z$ по (y, z) . Назовем отображение f *вейеритрассовским K -псевдополиномом* ($f \in WK_p(z)$), если представление (16) можно выбрать таким образом, что при любом выборе компактов $C_x \subset \Omega$, $C_y \subset D_y$ коэффициенты R_k ($k = \overline{0, p}$) равномерно непрерывны и ограничены на $C_x \times C_y \times D_z$.

Теорема 7. Пусть интегрант $u = f(x, y, z)$ есть отображение $f : \Omega \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \rightarrow \mathbb{R}$; $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}_y$, $z \in \mathbb{R}_z^n$, где Ω -компактная область в $\mathbb{R}_x^n$. Тогда, если f принадлежит вейеритрассовскому классу $WK_p(z)$, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа (17) K -непрерывен всюду в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$.

Доказательство.

1) Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(\Omega)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}(\Omega)$. Воспользуемся каноническим представлением (16) для функции f :

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^p R_k(x, y, z)(z)^k,$$

где коэффициенты $R_k : T_\Omega = \Omega \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z^n \rightarrow L_k(T_\Omega; \mathbb{R})$, согласно условию $f \in WK_p(z)$, равномерно непрерывны и ограничены локально по x, y и глобально по z .

Заметим, что в силу компактности множества $(y + C_\Delta)$ в $W^{1,p}(\Omega)$, числовое множество

$$K^{y,\Delta} := \bigcup_{h \in C_\Delta} (y + h)(\Omega)$$

есть компакт. Следовательно, на множестве $T_\Omega^{y,\Delta} = \Omega \times K^{y,\Delta} \times \mathbb{R}_z^n$ все коэффициенты R_k ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки

$$\left| R_k(x, y, z) \cdot (\zeta)^k \right| \leq M_k \cdot \|\zeta\|^k, \quad M_k < \infty \quad \left(k = \overline{0, p}; \quad (x, y, z) \in T_\Omega^{y,\Delta}, \quad \zeta \in \mathbb{R}_z^n \right) \quad (26)$$

Подставляя теперь в (17) представление (16), получим приращение вариационного функционала Φ в точке $y(\cdot)$ при $h \in C_\Delta$:

$$\begin{aligned} \Phi(y + h) - \Phi(y) &= \int_{\Omega} f(x, y + h, \nabla y + \nabla h) dx - \int_{\Omega} f(x, y, \nabla y) dx = \\ &= \int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^p R_k(x, y + h, \nabla y + \nabla h) (\nabla y + \nabla h)^k \right) dx - \int_{\Omega} \left(\sum_{k=0}^p R_k(x, y, \nabla y) (\nabla y)^k \right) dx = \\ &= \sum_{k=0}^p \int_{\Omega} \overbrace{\left[R_k(x, y + h, \nabla y + \nabla h) (\nabla y + \nabla h)^k - R_k(x, y, \nabla y) (\nabla y)^k \right]}^{\Delta_k} dx \quad (27) \end{aligned}$$

Фиксируем k и преобразуем выражение Δ_k :

$$\begin{aligned} \Delta_k &= R_k(x, y + \nabla y, h + \nabla h) \cdot \left(\sum_{l=0}^k C_k^l (\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l} \right) - R_k(x, y, \nabla y) (\nabla y)^k = \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} \underbrace{C_k^l R_k(x, y + h, \nabla y + \nabla h) (\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l}}_{A_{kl}} + \underbrace{[R_k(x, y + \nabla y, h + \nabla h) - R_k(x, y, \nabla y)] (\nabla y)^k}_{B_k} \quad (28) \end{aligned}$$

2) Проведем вначале оценку для интегралов от A_{kl} ($l = \overline{0, k-1}$). Поскольку ввиду (26),

$$|A_{kl}| \leq C_k^l \cdot M_k \cdot \|(\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l}\| \leq C_k^l \cdot M_k \cdot \|\nabla y\|^l \|\nabla h\|^{k-l},$$

то

$$\left| \int_{\Omega} \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl} \right) dx \right| \leq \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \cdot \int_{\Omega} \|\nabla y\|^l \|\nabla h\|^{k-l} dx \quad (29)$$

Применим к интегралам справа в (29) неравенство Гельдера-Минковского [5]:

$$\left| \int_{\Omega} \varphi(x) \psi(x) dx \right| \leq \left(\int_{\Omega} |\varphi(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_{\Omega} |\psi(x)|^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\left(1 < p', \quad q' < \infty; \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1\right).$$

Получаем при $p' = \frac{p}{k-l}$, $q' = \frac{p}{p-k+l}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \|\nabla y\|^l \|\nabla h\|^{k-l} dx \right| &\leq \left(\int_{\Omega} \|\nabla h\|^p dx \right)^{\frac{k-l}{p}} \cdot \left(\int_{\Omega} \|\nabla y\|^{\frac{pl}{p-k+l}} dx \right)^{\frac{p-k+l}{p}} = \\ &= (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l} \cdot \left(\|y\|_{W^{1, \frac{pl}{p-k+l}}} \right)^l \end{aligned} \quad (30)$$

Далее, элементарно проверяется неравенство $\frac{pl}{p-k+l} \leq p$, откуда следует неравенство для соответствующих соболевских норм:

$$\|y\|_{W^{1, \frac{pl}{p-k+l}}} \leq N_{kl} \cdot \|y\|_{W^{1,p}}, \quad (31)$$

где N_{kl} —постоянные.

Из неравенств (30), (31) следует:

$$\left| \int_{\Omega} \|\nabla y\|^l \|\nabla h\|^{k-l} dx \right| \leq (N_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l}. \quad (32)$$

Наконец, подставляя оценки (32) при $l = \overline{0, k-1}$ в (29), получаем:

$$\left| \int_{\Omega} \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl} \right) dx \right| \leq \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \cdot (N_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l} \quad (33)$$

Поскольку $(\|h\|_{C_{\Delta}} \rightarrow 0) \Rightarrow (\|h\|_{W^{1,p}} \rightarrow 0)$, то из (33) следует:

$$\left| \int_{\Omega} \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl} \right) dx \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{C_{\Delta}} \rightarrow 0 \quad (34)$$

3) Теперь проведем оценку для интеграла от B_k .

Для любого фиксированного $\delta > 0$ обозначим

$$e_{\delta} = \left\{ x \in \Omega \mid |h|^p + |\nabla h|^p > \delta^p \right\}, \quad e^{\delta} = \left\{ x \in \Omega \mid |h| < \delta, |\nabla h| < \delta \right\} \quad (35)$$

Заметим, что

$$(\|h\|_{W^{1,p}}^p < \delta^{p+1}) \Rightarrow (me_{\delta} < \delta) \quad (36)$$

Действительно, в противном случае имеем:

$$\|h\|_{W^{1,p}}^p = \int_{\Omega} (|h|^p + |\nabla h|^p) dx \geq \int_{e_{\delta}} (|h|^p + |\nabla h|^p) dx > \delta^p \cdot me_{\delta} \geq \delta^{p+1}$$

Очевидно также, что

$$\Omega = e_{\delta} \cup e^{\delta} \quad (37)$$

Фиксируем теперь $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$) и выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы, с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега и равномерной непрерывности R_k на множестве $T_\Omega^{y,\Delta}$, были выполнены условия:

$$\delta < \varepsilon, \quad \int_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx < \varepsilon^{\frac{p}{k}} \quad (38)$$

$$(|h| < \delta, \|\nabla h\| < \delta) \Rightarrow ((\|\Delta R_k\| < \varepsilon), \quad k = \overline{0, p}, (\forall x \in \Omega)) \quad (39)$$

Далее, выберем такое $\eta > 0$, чтобы

$$(\|h\|_{C_\Delta} \leq \eta) \Rightarrow \left(\|h\|_{W^{1,p}} < \delta^{\frac{p+1}{p}} \right) \quad (40)$$

Тогда при $\|h\|_{C_\Delta} \leq \eta$, используя неравенства (26), (37)–(40), получаем:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} B_k dx \right| &\leq \int_{\Omega} |B_k| dx = \int_{\Omega} |\Delta R_k \cdot (\nabla y)^k| dx \leq \int_{\Omega} \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^k dx \leq \\ &\leq \int_{e_\delta} \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^k dx + \int_{e^\delta} \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^k dx < M_k \cdot \int_{e_\delta} \|\nabla y\|^k dx + \varepsilon \cdot \int_{e^\delta} \|\nabla y\|^k dx \end{aligned} \quad (41)$$

Применяя вновь неравенство Гельдера-Минковского, при $p' = \frac{p}{k}$ к интегралам справа в (41), находим:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} B_k dx \right| &\leq \dots \leq M_k \cdot N_k \cdot \left(\int_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx \right)^{\frac{k}{p}} + N_k \cdot \varepsilon \cdot \left(\int_{e^\delta} \|\nabla y\|^p dx \right)^{\frac{k}{p}} \leq \\ &\leq M_k \cdot N_k \cdot \left(\varepsilon^{\frac{p}{k}} \right)^{\frac{k}{p}} + N_k \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^k \cdot \varepsilon = [M_k \cdot N_k + N_k \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^k] \cdot \varepsilon \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$N_k = [m(e_\delta)]^{\frac{p-k}{p}} \leq [m(\Omega)]^{\frac{p-k}{p}}.$$

Таким образом, из (42) следует

$$\left| \int_{\Omega} B_k dx \right| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{C_\Delta} \longrightarrow 0 \quad (43)$$

4) Наконец, из тождеств (27), (28) и оценок (34), (43) получаем:

$$|\Phi(y+h) - \Phi(y)| \leq \sum_{k=0}^p \left| \int_{\Omega} \Delta_k dx \right| \leq \sum_{k=0}^p \left| \int_{\Omega} \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl} \right) dx \right| + \sum_{k=0}^p \left| \int_{\Omega} B_k dx \right| \longrightarrow 0$$

при $\|h\|_{C_\Delta} \longrightarrow 0$. В силу произвольности выбора абсолютно выпуклого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}(\Omega)$, это означает K -непрерывность вариационного функционала Φ в произвольной точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Таким образом, K -непрерывность вариационного функционала гарантируется принадлежностью интегранта к классу вейерштрассовских псевдо- p -адичных отображений. Заметим, что предположение о симметричности функционалов из классов $L_k(T_\Omega, \mathbb{R})$ было введено только для упрощения доказательства и может быть опущено.

Выводы

В статье введено понятие K -псевдополиномиального интегранта в пространствах Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, где Ω -компактная область в R^n . Получены утверждения о корректной определенности вариационного функционала с таким интегрантом и о компактной непрерывности вариационного функционала с вейерштрассовским K -псевдополиномиальным интегрантом в данных пространствах Соболева. Автор выражает благодарность И.В. Орлову и Е.В. Божонку за полезные обсуждения и замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Орлов И.В., Божонку Е.В. *Условия существования, K -непрерывности и K -дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1* // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2006. – Т. 19(58), № 2. – С. 63–78.
- [2] Орлов И.В. *Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1 : учебное пособие* / [Орлов И.В., Божонку Е.В.]. – Симферополь: ДИАЙПИ, 2010 – 156 с.
- [3] Божонку Е.В. *Компактные экстремумы и компактно-аналитические свойства основного вариационного функционала в пространстве Соболева H^1 : дисс... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 "Дифференциальные уравнения"* / [Божонку Е.В.]; – Симферополь, 2009. – 161 с.
- [4] *Оптимальное управление* / [Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В., Магарил-Ильяев Г.Г. и др.]; под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2008. – 320 с.
- [5] Березанский Ю.М. *Функциональный анализ*. / [Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.]; – К.: Вища школа, 1990. – 600 с.
- [6] Мазья В.Г. *Пространства С.Л. Соболева*. / [Мазья В.Г.]; – Л.: ЛГУ, 1985. – 416 с.
- [7] Гельфанд И.М. *Вариационное исчисление*. / [Гельфанд И.М., Фомин С.В.]; – М.: ФМ, 1961. – 230 с.

**Умови коректної визначеності та компактної неперервності
варіаційних функціоналів у просторах Соболева $W^{1,p}(\Omega)$.**

Поняття псевдоквадратичного інтегранта варіаційного функціонала узагальнюється на випадок довільних банахових просторів. На компактній області в $\mathbb{R}^n$ поширюється відоме раніше для відрізка твердження про коректну визначеність і умова компактної неперервності у гільбертовому просторі Соболева $W^{1,2}$ варіаційного функціоналу із псевдоквадратичним інтегрантом.

Отримані результати узагальнено на випадок K -псевдополіноміального інтегранта ($\forall p \in \mathbb{N}$) і просторів Соболева $W^{1,p}$.

Ключові слова: варіаційний функціонал, псевдоквадратичність, простір Соболева, K -псевдополіноміальність, коректна визначеність, компактна неперервність.

Conditions of well-posedness and compact continuity of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}(\Omega)$.

The concept of pseudoquadratic integrand of variational functional is generalized to the case of an arbitrary Banach spaces. The known statements on well-posedness and compact continuity of the variational functionals having pseudoquadratic integrand in the Hilbert-Sobolev space $W^{1,2}$ over an interval are extended to the case of an arbitrary compact domain in $\mathbb{R}^n$.

The obtained results are generalised to the case of the variational functionals having a K -pseudopolynomial integrand in the corresponding Sobolev space $W^{1,p}$ for an arbitrary $p \in \mathbb{N}$

Keywords: variational functional, pseudoquadraticity, Sobolev space, K -pseudopolynomial, well-posedness, compact continuity.

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ

Пусть E - n - мерное комплексное пространство, $[x, y] = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n$ - индефинитная метрика в E и $SO(p, q)$ - специальная псевдоортогональная подгруппа в $GL(n, C)$. C^∞ - дифференцируемый путь $x : [0, 1] \rightarrow E$ называется регулярным, если $\det M(x)(t) \neq 0$ для всех $t \in [0, 1]$, где $M(x)(t)$ есть $n \times n$ - матрица $(x(t) \ x'(t) \dots x^{(n-1)}(t))$. Конечная система C^∞ - дифференцируемых путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ называется регулярной, если $x^1(t)$ есть регулярный путь.

Говорят, что две системы $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$, $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ путей в E являются $SO(p, q)$ - эквивалентными, если существует такое $g \in SO(p, q)$, что $y^i(t) = g x^i(t)$ для всех $t \in [0, 1]$, $i = \overline{1, k}$.

Теорема. Две регулярные системы путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ являются $SO(p, q)$ эквивалентными в том и только в том случае, когда

$$\begin{pmatrix} m \\ x^1, x^1 \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} m \\ y^1, y^1 \end{pmatrix}(t), \quad \begin{pmatrix} \ell \\ x^1, x^r \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} \ell \\ y^1, y^r \end{pmatrix}(t),$$

$$\det M(x^1)(t) = \det M(y^1)(t)$$

для всех $t \in [0, 1]$, $m = \overline{0, (n-2)}$, $\ell = \overline{0, (n-1)}$, $r = \overline{2, k}$.

Ключевые слова: псевдоортогональная группа, действие группы, регулярный путь

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из важных инструментов решения задачи об эквивалентности кривых при действии линейных групп является теория инвариантов для таких групп, основы которой были заложены в работах Г.Вейля [4], Т.Спрингера [10], D.Mumford,

J.Fogarty [3], X.Крафта [2] и других. При изучении задачи об эквивалентности бесконечно дифференцируемых вектор-функций естественно возникает вопрос об описании образующих в дифференциальных полях дифференциально рациональных функций, инвариантных относительно действия той или иной линейной группы. С помощью найденных систем образующих указанных полей, как правило, удастся получить удобные критерии для эквивалентности путей и кривых при действии различных классов линейных групп. Такой подход использовался в [1] при решении задачи об эквивалентности кривых для действия полупрямого произведения $R^n \triangleleft SL(R, n)$ групп R^n и $SL(R, n)$, а также в [12] для действия групп $R^n \triangleleft O(n, R)$ и $R^n \triangleleft SO(R, n)$.

В [8], [9] этим методом была решена задача об эквивалентности путей и кривых при действии симплектической группы.

В данной работе рассматривается задача об эквивалентности конечных систем путей для действия псевдоортогональной группы $O(p, q)$ и специальной псевдоортогональной группы $SO(p, q)$ и дается полное решение этой задачи с помощью теории дифференциальных инвариантов.

Используется терминология и обозначения из [11].

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ.

Пусть $E = C_{p,q}^n$ (где p, q - натуральные числа, $p + q = n$) - n - мерное комплексное пространство. Элементы из $C_{p,q}^n$ будем представлять в виде n - мерных вектор-столбцов. В $C_{p,q}^n$ рассматривается билинейная форма

$$[x, y] = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n,$$

где $x = \{x_i\}_{i=1}^n, y = \{y_i\}_{i=1}^n \in E$. Через $GL(n, C)$ будем обозначать группу всех обратимых линейных преобразований пространства E , а через $O(p, q)$ - подгруппу всех псевдоортогональных преобразований, т.е. $O(p, q) = \{g \in GL(n, C) : g^T I g = I\}$, где g^T - транспонированная матрица к g , $I = (I_{ij})_{i,j=1}^n, I_{ii} = 1$ при $i = \overline{1, p}$, $I_{ii} = -1$, при $i = \overline{(p+1), n}$, $I_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Пусть G - произвольная подгруппа в $GL(n, C)$. Рассмотрим естественное действие $(g, x) \rightarrow g x$ группы G на векторном пространстве E , как обычное умножение матрицы на вектор-столбец. Это действие естественным образом продолжается до действия G в E^k по формуле $g(\{x^i\}_{i=1}^k) = \{g x^i\}_{i=1}^k$, где $x^i = \{x_j^i\}_{j=1}^n \in E, i = \overline{1, k}$.

Непрерывное отображение $x(t)$ из $[0, 1]$ в E называется путем. Если координаты $x_j(t), j = \overline{1, n}$ пути $x(t)$ является бесконечно дифференцируемыми функциями на $[0, 1]$, то говорят, что $x(t)$ есть C^∞ - путь. В дальнейшем мы рассматриваем только C^∞ - пути.

Производной r -го порядка пути $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ назовем вектор $\overset{(r)}{x}(t) = \{\overset{(r)}{x}_j(t)\}_{j=1}^n$, где $\overset{(r)}{x}_j(t)$ - r -ая производная координатной функции $x_j(t)$, $j = \overline{1, n}$. Для каждого пути $x(t)$ рассмотрим $n \times n$ -матрицу $M(x)(t)$, в которой r -столбцом служат координаты вектора $\overset{(r-1)}{x}(t)$, $r = \overline{1, n}$. Если для пути $x(t)$ определитель $\det M(x)(t)$ отличен от нуля при всех $t \in [0, 1]$, то путь $x(t)$ называют регулярным.

Рассмотрим кольцо $C\{x^1, \dots, x^k\} = C\{x_1^1, \dots, x_n^1, \dots, x_1^k, \dots, x_n^k\}$ всех многочленов от счетного числа переменных $x_1^1, \dots, x_n^1, (x_1^1)', \dots, (x_n^1)', \dots, (x_1^1)^{(r)}, \dots, (x_n^1)^{(r)}, \dots, x_1^k, \dots, x_n^k, (x_1^k)', \dots, (x_n^k)', \dots, (x_1^k)^{(r)}, \dots, (x_n^k)^{(r)}, \dots$ над полем комплексных чисел C . Положим $d(x_j^i)^{(r)} = (x_j^i)^{(r+1)}$, $i = \overline{1, k}$, $j = \overline{1, n}$. Тогда d однозначно продолжается до дифференцирования в кольце $C\{x^1, \dots, x^k\}$, наделяя это кольцо структурой дифференциального кольца (d -кольца) [7]. Элементы этого d -кольца называются d -многочленами (дифференциальными многочленами). Известно [7], что дифференцирование d на $C\{x^1, \dots, x^k\}$ единственным образом продолжается до дифференцирования на соответствующее поле отношений. Это поле будем обозначать через $C < x^1, \dots, x^k >$, а его элементы будем называть d -рациональными функциями и будем записывать в виде $f < x^1, \dots, x^k >$. Говорят, что d -рациональная функция $f < x^1, \dots, x^k > - G$ -инвариантна, если $f < g x^1, \dots, g x^k > = f < x^1, \dots, x^k >$ для любых $g \in G$.

Множество всех G -инвариантных d -рациональных функций обозначим через $C < x^1, \dots, x^k >^G$. Известно ([11], с. 22), что оно является дифференциальным подполем в $C < x^1, \dots, x^k >$, при этом $C < x^1, \dots, x^k >^G$ инвариантно относительно действия дифференцирования из $C < x^1, \dots, x^k >$ [5].

Дифференциальное кольцо всех G -инвариантных многочленов будем обозначать через $C\{x^1, \dots, x^k\}^G$.

Заметим, что поле отношений для d -кольца $C\{x^1, \dots, x^k\}^G$ совпадает с d -полем $C < x^1, \dots, x^k >^G$ ([6], гл. I, § 2).

Говорят, что система элементов $A = \{a_i, i \in T\}$ является системой образующих d -поля $C < x^1, \dots, x^k >$ (d -кольца $C\{x^1, \dots, x^k\}$), если любой элемент $b \in C < x^1, \dots, x^k >$ может быть получен из конечного числа элементов множества A применением конечного числа раз операций d -поля $C < x^1, \dots, x^k >$ (d -кольца $C\{x^1, \dots, x^k\}$). В случае, когда в качестве системы образующих может быть выбрано конечное множество $A = \{a_1, \dots, a_p\}$, говорят, что d -поле (d -кольцо) имеет конечное число образующих $a_1, \dots, a_p$. Элементы $a_1, \dots, a_p$ из $C < x^1, \dots, x^k >$ называются d -алгебраически зависимыми, если существует такой ненулевой многочлен $f \in C\{x^1, \dots, x^k\}$, что $f(a_1, \dots, a_p) = 0$. В противном случае, система элементов $a_1, \dots, a_p$ называется d -алгебраически независимой.

Конечный набор образующих в d -поля $C < x^1, \dots, x^k >$ называется d -рациональным базисом, если этот набор d -алгебраически независим. Аналогично определяется d -рациональный базис в подполе $C < x^1, \dots, x^k >^G$.

В дальнейшем для набора $\{x_j^i\}_{j=1}^n \in E, i = \overline{1, k}$, символом $[x^1, x^2 \dots x^n]$ обозначается компонентный определитель

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

3. ОПИСАНИЕ СИСТЕМ ОБРАЗУЮЩИХ ДЛЯ d -ПОЛЕЙ $C < x^1, \dots, x^k >^{O(p,q)}$ И $C < x^1, \dots, x^k >^{SO(p,q)}$

Для нахождения условий, обеспечивающих эквивалентность путей при действии псевдоортогональной и специальной псевдоортогональной групп нам понадобится описание конечных систем образующих в d -полях $C < x^1, \dots, x^k >^G$, где $G = O(p, q)$ либо $G = SO(p, q) = \{g \in O(p, q) : \det g = 1\}$.

В случае $G = O(n, C)$ известна следующая

Теорема 1. ([11], теорема 12.5). Система d -многочленов

$$q_1^{(m)} < x^1, \dots, x^k > = (x^1, x^1)^{(m)}, \psi_r^{(m)} < x^1, \dots, x^k > = (x^1, x^r)^{(m)}, m = \overline{0, n-1}, r = \overline{2, k}$$

является d -рациональным базисом в $C < x^1, \dots, x^k >^{O(n,C)}$.

С помощью теоремы 1 устанавливается

Теорема 2. Следующие d -многочлены

$$f_1^{(m)} < x^1, \dots, x^k > = [x^1, x^1]^{(m)},$$

$$f_r^{(m)} < x^1, \dots, x^k > = [x^1, x^r]^{(m)}, m = \overline{0, n-1}, r = \overline{2, k},$$

образуют d -рациональным базисом в d -поле $C < x^1, \dots, x^k >^{O(p,q)}$.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся четыре леммы.

Лемма 1. Если $g \in GL(n, C)$, то $g \in O(p, q)$ тогда и только тогда, когда $[gx, gy] = [x, y]$ для любых $x, y \in E$.

Доказательство. Поскольку $O(p, q) = \{g \in GL(n, C) : g^T I g = I\}$, то из равенств $[x, y] = (x)^T I y$ и $(x)^T (g^T I g) y = (gx)^T I (gy) = [gx, gy]$ следует утверждение леммы 1. $\square$

Укажем теперь связь группы $O(p, q)$ с группой $O(n, C) = \{g \in GL(n, C) : g^T g = e\}$ всех ортогональных линейных преобразований пространства E (здесь e - тождественное преобразование в E). Пусть $h = (h_{ij})_{i,j=1}^n \in GL(n, C)$, где $h_{jj} = 1$ при $j = \overline{1, p}$, $h_{jj} = i$ (здесь $i^2 = -1$) при $j = \overline{(p+1), n}$, $h_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Ясно, что $h^T = h$ и $h^2 = I = h^{-2}$. Положим $G(h) = \{h g h^{-1} : g \in O(p, q)\}$.

Лемма 2. $G(h) = O(n, C)$.

Доказательство. Пусть $g_1 = h g h^{-1}$, $g \in O(p, q)$. Используя равенство $h^T = I h^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} g_1^T g_1 &= (h g h^{-1})^T (h g h^{-1}) = (h^T)^{-1} g^T h^T h g h^{-1} = (h^T)^{-1} g^T I g h^{-1} = (h^T)^{-1} I h^{-1} = \\ &= (I h^{-1})^{-1} I h^{-1} = h I^{-1} I h^{-1} = e. \end{aligned}$$

т.е. $g_1 = h g h^{-1} \in O(n, C)$ и поэтому $G(h) \subset O(n, C)$.

Обратно, пусть $g \in O(n, C)$, т.е. $g^T g = e$. Рассмотрим $g_1 = h^{-1} g h$. Имеем, что

$$g_1^T I g_1 = (h^{-1} g h)^T I (h^{-1} g h) = h^T g^T (h^T)^{-1} I h^{-1} g h = h^T g^T (h^T)^{-1} h^T g h = h^T h = I.$$

Следовательно $g_1 \in O(p, q)$, и поэтому $g = h g_1 h^{-1} \in G(h)$, т.е. $O(n, C) \subset G(h)$. Таким образом, $G(h) = O(n, C)$. $\square$

Лемма 3. Многочлен $p(x^1, \dots, x^k)$ инвариантен относительно действия группы $O(p, q)$ тогда и только тогда, когда многочлен $q(x^1, \dots, x^k) = p(h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k)$ инвариантен относительно действия группы $O(n, C)$.

Доказательство. Пусть многочлен $p(x^1, \dots, x^k)$ - инвариантен относительно $O(p, q)$, т.е. $p(x^1, \dots, x^k) = p(g x^1, \dots, g x^k)$ для любого $g \in O(p, q)$.

Положим $q(x^1, \dots, x^k) = p(h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k)$. Согласно лемме 2, любое $t \in O(n, C)$ представимо в виде $t = h g h^{-1}$ для некоторого $g \in O(p, q)$, и поэтому

$$\begin{aligned} q(t x^1, \dots, t x^k) &= q(h g h^{-1} x^1, \dots, h g h^{-1} x^k) = p(h^{-1} h g h^{-1} x^1, \dots, h^{-1} h g h^{-1} x^k) = \\ &= p(g h^{-1} x^1, \dots, g h^{-1} x^k) = p(h^{-1} x^1, \dots, h^{-1} x^k) = q(x^1, \dots, x^k), \end{aligned}$$

т.е. многочлен $q(x^1, \dots, x^k)$ инвариантен относительно ортогональной группы $O(n, C)$.

Аналогично показывается, что $O(n, C)$ - инвариантность многочлена $q(x^1, \dots, x^k) = p(h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k)$ влечет $O(p, q)$ - инвариантность многочлена $p(x^1, \dots, x^k)$. $\square$

Лемма 4. d - рациональная функция $f < x^1, \dots, x^k >$ инвариантна относительно группы $O(p, q)$ тогда и только тогда, когда d - рациональная функция $\varphi < x^1, \dots, x^k > = f < h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k >$ инвариантна относительно группы $O(n, C)$.

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 3.

Возвращаемся к доказательству теоремы 2.

Как установлено в теореме 1, для d - поля $C < x^1, \dots, x^k >^{O(n,C)}$ многочлены

$$q_1^{(m)} < x^1, \dots, x^k > = \binom{(m)}{x^1, x^1}, \psi_r^{(m)} < x^1, \dots, x^k > = \binom{(m)}{x^1, x^r}, m = \overline{0, n-1}, r = \overline{2, k}$$

образуют d - рациональный базис в $C < x^1, \dots, x^k >^{O(n,C)}$. Следовательно, в силу леммы 4, многочлены

$$q_1^{(m)} < h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k >, \psi_r^{(m)} < h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k >$$

инвариантны относительно действия псевдоортогональной группы $O(p, q)$ и образуют d - рациональный базис в $C < x^1, \dots, x^k >^{O(p,q)}$. Заметим, что

$$\begin{aligned} q_1^{(m)} < h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k > &= (h^{-1}x^1, h^{-1}x^1) = (h^{-1}x^1)^T (h^{-1}x^1) = (x^1)^T (h^{-1})^T h^{-1}x^1 = \\ &= (x^1)^T h^{-1}h^{-1}x^1 = (x^1)^T I x^1 = [x^1, x^1] = f_1^{(m)} < x^1, \dots, x^k >, \\ \psi_r^{(m)} < h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k > &= (h^{-1}x^1, h^{-1}x^r) = (h^{-1}x^1)^T h^{-1}x^r = (x^1)^T (h^{-1})^T h^{-1}x^r = \\ &= (x^1)^T h^{-1}h^{-1}x^r = [x^1, x^r] = f_r^{(m)} < x^1, \dots, x^k >. \end{aligned}$$

Это означает, что d - многочлены $f_1^{(m)} < x^1, \dots, x^k >, f_r^{(m)} < x^1, \dots, x^k >$ инвариантны относительно действия псевдоортогональной группы и образуют d - рациональный базис в $C < x^1, \dots, x^k >^{O(p,q)}$ (см. лемму 4).

Рассмотрим теперь специальную псевдоортогональную группу $SO(p, q)$. Для описания системы образующих d - поля $C < x^1, \dots, x^k >^{SO(p,q)}$ нам понадобится следующая

Теорема 3. ([11], теорема 12.7). Система d - многочленов

$$\binom{(m)}{x^1, x^1}, \binom{(\ell)}{x^1, x^r}, [x^1 x^1 \dots x^1],$$

где $m = \overline{0, (n-2)}, \ell = \overline{0, (n-1)}, r = \overline{2, k}$, является d - рациональным базисом в d - поле $C < x^1, \dots, x^k >^{SO(n,C)}$.

Используя теперь лемму 4 и теорему 3, получим следующую теорему.

Теорема 4. В d - поле $C < x^1, \dots, x^k >^{SO(p,q)}$ следующая система многочленов

$$\binom{(m)}{x^1, x^1}, \binom{(\ell)}{x^1 x^r}, (-i)^q [x^1 x^1 \dots x^1],$$

где $m = \overline{0, (n-2)}, \ell = \overline{0, (n-1)}, r = \overline{2, k}$, является d - рациональным базисом.

Доказательство. Согласно теореме 3, многочлены

$$q^{(m)} < x^1, \dots, x^k > = \binom{m}{x^1, x^1};$$

$$\psi_r^{(\ell)} < x^1, \dots, x^k > = \binom{\ell}{x^1, x^r}, \psi < x^1, \dots, x^k > = [x^1 \binom{(1)}{x^1} \dots \binom{(n-1)}{x^1}]$$

образуют d - рациональный базис в d - поле $C < x^1, \dots, x^k >^{SO(n,C)}$, где $m = \overline{0, (n-2)}, \ell = \overline{0, (n-1)}, r = \overline{2, k}$.

Повторяя доказательство теоремы 2, получим, что

$$q^{(m)} < h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k > = \binom{m}{x^1, x^1};$$

$$\psi_r^{(\ell)} < h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k > = \binom{\ell}{x^1, x^r}.$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \psi(h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k) &= [(h^{-1}x^1) \binom{(1)}{h^{-1}x^1} \dots \binom{(n-1)}{h^{-1}x^1}] = \\ &= \begin{vmatrix} x_1^1 & \dots & x_1^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_p^1 & \dots & x_p^{(n-1)} \\ -i x_{p+1}^1 & \dots & -i x_{p+1}^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ -i x_n^1 & \dots & -i x_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = (-i)^q \begin{bmatrix} x^{-1} \binom{(1)}{x^1} \dots \binom{(n-1)}{x^1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

В силу теоремы 3 и леммы 4, получим, что многочлены, указанные в формулировке теоремы 4, образуют d - рациональный базис в d - поле $C < x^1, \dots, x^k >^{SO(p,q)}$. $\square$

4. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ПУТЕЙ ДЛЯ ДЕЙСТВИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ.

Пусть G - подгруппа в группе $GL(n, C)$. Две системы путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ называются G - эквивалентными, если существует такое $g \in G$, что $y^i(t) = g x^i(t)$ при любых $t \in [0, 1]$, $i = \overline{1, k}$.

Рассмотрим конечную систему путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ в E , для которой один путь является регулярным. Не ограничивая общности, всегда можно считать, что путь $x^1(t)$ - регулярен. Такие системы путей будем называть регулярными.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для $O(p, q)$ (соответственно $SO(p, q)$) - эквивалентности регулярных систем путей на языке матриц $M(x)(t)$.

Теорема 5. (i) Две регулярные системы путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ в E являются $O(p, q)$ - эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:

$$1) (M(x^1(t)))^{-1} M'(x^1(t)) = (M(y^1(t)))^{-1} M'(y^1(t)); \quad (1)$$

$$2) M^T(x^1(t)) I M(x^1(t)) = M^T(y^1(t)) I M(y^1(t)); \quad (2)$$

$$3) (M(x^1(t)))^{-1} x^i(t) = (M(y^1(t)))^{-1} y^i(t), \quad (3)$$

для всех $t \in [0, 1]$, $i = \overline{2, k}$.

(ii) Две регулярные системы путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ - $SO(p, q)$ - эквивалентны в том и только в том случае, когда верны равенства (1) - (3) и равенство

$$\det M(x^1(t)) = \det M(y^1(t)) \quad (4)$$

для всех $t \in [0, 1]$.

Доказательство. Необходимость. Если $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ - $O(p, q)$ - эквивалентны (соответственно, - $SO(p, q)$ - эквивалентны), то существует такое $g \in O(p, q)$ (соответственно, $g \in SO(p, q)$), что $y^i(t) = g x^i(t)$ для всех $i = \overline{1, k}$. Справедливость соотношений 1), 2), 3) теперь легко проверяется:

$$(M(y^1))^{-1} M'(y^1) = (g M(x^1))^{-1} g M'(x^1) = (M(x^1))^{-1} g^{-1} g M'(x^1) = (M(x^1))^{-1} M'(x^1);$$

$$M^T(y^1) I M(y^1) = (g M(x^1))^T I g M(x^1) = M^T(x^1) g^T I g M(x^1) = M^T(x^1) I M(x^1);$$

$$(M(y^1))^{-1} y^i = (g M(x^1))^{-1} (g x^i) = (M(x^1))^{-1} g^{-1} g x^i = (M(x^1))^{-1} x^i.$$

В случае п. (ii) для группы $SO(p, q)$ имеем также, что $\det M(y^1) = \det(g M(x^1)) = \det g \cdot \det M(x^1) = \det M(x^1)$.

Достаточность. Пусть для регулярных конечных систем путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ выполняются соотношения 1) - 3). Если $A = A(t)$ - обратимая матрица, то, очевидно, что $(A^{-1})' = -A^{-1} A' A^{-1}$. Используя, это равенство, соотношение 1) может быть переписано в виде

$$1') (M(y^1) (M(x^1))^{-1})' = 0.$$

Кроме того, соотношение 2) переписывается в виде

$$2') ((M(y^1) (M(x^1))^{-1})^T I M(y^1) (M(x^1))^{-1} = I.$$

Равенства 1'), 2') означают, что $M(y^1) M^{-1}(x^1) = g \in O(p, q)$, т.е. $M(y^1) = g M(x^1)$, в частности, $y^1 = g x^1$. Из равенства 3) вытекает, что

$$(M(x^1))^{-1} x^i = (M(y^1))^{-1} y^i = (g M(x^1))^{-1} y^i = (M(x^1))^{-1} g^{-1} y^i,$$

т.е. $y^i = g x^i$ для любых $i = \overline{1, k}$. В случае п. (ii), используя равенство 4), получим, что $\det M(x^1) = \det M(y^1) = \det(g M(x^1)) = \det g \cdot \det M(x^1)$, т.е. $\det g = 1$, и поэтому $g \in SO(p, q)$. $\square$

Приведем теперь, критерий $O(p, q)$ - эквивалентности (соответственно, $SO(p, q)$ - эквивалентности) двух регулярных конечных систем путей на языке равенства билинейных форм.

Теорема 6. (i) Две регулярные системы путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ являются $O(p, q)$ - эквивалентными тогда и только тогда, когда

$$[x^1, x^1]^{(m) (m)}(t) = [y^1, y^1]^{(m) (m)}(t); \quad (5)$$

$$[x^1, x^r]^{(\ell)}(t) = [y^1, y^r]^{(\ell)}(t)$$

для всех $t \in [0, 1]$, $m = \overline{0, (n-1)}$, $\ell = \overline{0, (n-1)}$, $r = \overline{2, k}$.

(ii) Две регулярные системы путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ являются $SO(p, q)$ - эквивалентны в том и только в том случае, когда выполняются равенства (5), для всех $m = \overline{0, (n-2)}$, $\ell = \overline{0, (n-1)}$, $r = \overline{2, k}$, а также равенство

$$[x^1 x^1 \dots x^1]^{(1) (n-1)}(t) = [y^1 y^1 \dots y^1]^{(1) (n-1)}(t) \quad (6)$$

для всех $t \in [0, 1]$.

Доказательство. (i) Ясно, что из равенства $y^i = g x^i, g \in O(p, q)$ следуют равенства (5) (см. лемму 1).

Обратно, предположим, что верны равенства (5). Согласно теореме 2, имеем, что $f < y^1, \dots, y^k > = f < x^1, \dots, x^k >$ для любой d - рациональной функции $f \in C < x^1, \dots, x^k >^{O(p, q)}$.

Следовательно верны равенства 1), 2) и 3) из теоремы 5. Поэтому, в силу этой теоремы, системы путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ - $O(p, q)$ - эквивалентны.

(ii) Если $y^i = g x^i$ для всех $i = \overline{1, k}$, где $g \in SO(p, q)$, то, очевидно, выполняются равенства (5) (см. лемму 1). Кроме того, из равенства $M(y^1) = M(g x^1) = g M(x^1)$ следует, что

$$[y^1 y^1 \dots y^1]^{(1) (n-1)} = \det M(y^1) = \det g \det M(x^1) = [x^1 x^1 \dots x^1]^{(1) (n-1)},$$

т.е. выполняется равенство (6).

Пусть теперь верны равенства (5) для всех $m = \overline{0, (n-2)}$, $\ell = \overline{0, (n-1)}$, $r = \overline{2, k}$, $t \in [0, 1]$, а также равенство (6) для всех $t \in [0, 1]$. Согласно теореме 4, получаем, что $f < y^1, \dots, y^k > = f < x^1, \dots, x^k >$ для любых $f \in C < x^1, \dots, x^k >^{SO(p, q)}$. Следовательно, верны равенства (1) - (4) из теоремы 5. Используя теорему 5 (ii), получим, что системы путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ является $SO(p, q)$ - эквивалентными.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Khadjiev Dj., Peksen O. The complete of global integral and differential invariants for equi - affine curves // Differential Geometry and Applications – 2004. – V.20, № 2. – P. 167 - 175.
- [2] Kraft H. Geometrische Methoden in der Invarianten - theorie. – Braunschweig / Wiesbaden: Vieweg, 1984. – 308 s.
- [3] Mumford D., Fogarty J. Geometric invariant theory. – Berlin: Springer - Verlag, 1982. – 219 p.
- [4] Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. —М.: ИЛ. — 1947. — 408 с.
- [5] Винберг Э.Б., Попов И.Л. Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. — М.: ВИНТИ. — 1989. — Т. 55. — С. 137 - 309.
- [6] Дьёдонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов — М.: Мир, — 1974. — 280 с.
- [7] Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру — М.: ИЛ. — 1959. — 86 с.
- [8] Муминов К.К. Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы // Известия вузов. Математика. — 2002. — № 7. — С. 27 - 38.
- [9] Муминов К.К. Эквивалентность кривых относительно действия симплектической группы // Известия вузов. Математика. — 2009. — № 6. — С. 31 - 36.
- [10] Спрингер Т. Теория инвариантов. — М.:Наука. — 1981.— 191 с.
- [11] Хаджиев Дж. Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. — Ташкент: ФАН, 1988. — 136 с.
- [12] Хаджиев Дж., Арипов Р.Г. Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии // Известия вузов. Математика. — 2007. — № 7. — С. 3 - 16.

Еквівалентність скінченних систем шляхів відносно дії спеціальній псевдоортогонаній групі

Нехай E - n - мірний комплексний простір, $[x, y] = x_1y_1 + \dots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_ny_n$ - індефінітна метрика в E , та $SO(p, q)$ - спеціальна псевдоортогональна підгрупа в $GL(n, C)$. C^∞ - диференційований шлях $x : [0, 1] \rightarrow E$ називається регулярним, якщо $\det M(x)(t) \neq 0$ для всіх $t \in [0, 1]$, де $M(x)(t)$ є $n \times n$ - матриця $(x(t) \ x'(t) \dots x^{(n-1)}(t))$. Скінченна система C^∞ - диференційованих шляхів $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ називається регулярною, якщо $x^1(t)$ є регулярний шлях.

Дві системи $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}, \{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ шляхів в $E \in SO(p, q)$ - еквівалентні, якщо існує таке $g \in SO(p, q)$, що $y^i(t) = g x^i(t)$ для всіх $t \in [0, 1], i = \overline{1, k}$.

Теорема. Дві регулярні системи шляхів $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ і $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ є $SO(p, q)$ еквівалентні тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{aligned} [x^1, x^1](t) &= [y^1, y^1](t), \quad [x^1, x^r](t) = [y^1, y^r](t), \\ \det M(x^1)(t) &= \det M(y^1)(t) \end{aligned}$$

для всіх $t \in [0, 1]$, $m = \overline{0, (n-2)}$, $\ell = \overline{0, (n-1)}$, $r = \overline{2, k}$.

Ключові слова: псевдоортогональна група, дія групи, регулярний шлях

The equivalence of finite systems of pathes respect to action of the special pseudoorthogonal group

Let E be a n - dimensional complex space, $[x, y] = x_1 y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1} y_{p+1} - \dots - x_n y_n$ be an indefinite metrics in E and $SO(p, q)$ be the special pseudoorthogonal subgroup of $GL(n, C)$. C^∞ - differentiable path $x : [0, 1] \rightarrow E$ is called regular, if $\det M(x)(t) \neq 0$ for any $t \in [0, 1]$, where $M(x)(t)$ is the $n \times n$ - matrix $(x(t) x'(t) \dots x^{(n-1)}(t))$. The finite system of C^∞ - differentiable paths $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ is called regular, if $x^1(t)$ is the regular path.

Two systems $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}, \{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ of paths in E is said to be $SO(p, q)$ - equivalent if there exists element $g \in SO(p, q)$ such that $y^i(t) = g x^i(t)$ for all $t \in [0, 1]$, $i = \overline{1, k}$.

Theorem. Two regular systems $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}, \{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ of paths in E are $SO(p, q)$ - equivalent if and only if

$$\begin{aligned} [x^1, x^1](t) &= [y^1, y^1](t), \quad [x^1, x^r](t) = [y^1, y^r](t), \\ \det M(x^1)(t) &= \det M(y^1)(t) \end{aligned}$$

for all $t \in [0, 1]$, $m = \overline{0, (n-2)}$, $\ell = \overline{0, (n-1)}$, $r = \overline{2, k}$.

Keywords: pseudoorthogonal group, action of group, regular path

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 101–111.

УДК 517.98

Д. П. ПРОСКУРИН

О *-ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ВИКОВСКОГО АНАЛОГА ССР

*В работе изучаются *-представления виковского аналога алгебры канонических коммутационных соотношений, аннулирующие однородные виковские идеалы степеней 3 и 4. Представлен способ построения убывающей цепочки однородных виковских идеалов возрастающих степеней.*

Ключевые слова: деформации канонических коммутационных соотношений, виковские алгебры, неограниченные операторы.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе мы приводим некоторые результаты о строении однородных виковских идеалов в квадратических *-алгебрах с виковским упорядочением, коротко - виковских алгебрах. Пусть числа $\{T_{ij}^{kl}, i, j, k, l = 1, \dots, d\} \subset \mathbb{C}$ удовлетворяют условиям $T_{ji}^{lk} = \overline{T_{ij}^{kl}}$. Виковская алгебра $W(T)$, см. [3], порождается образующими $a_i, a_i^*, i = 1, \dots, d$, и соотношениями вида

$$a_i^* a_j = \delta_{ij} 1 + \sum_{k,l=1}^d T_{ij}^{kl} a_l a_k^*, \quad i, j = 1, \dots, d. \quad (1)$$

Следуя [3], построим конечномерное гильбертово пространство $\mathcal{H} = \mathbb{C}\langle e_1, \dots, e_d \rangle$ и его формально сопряженное $\mathcal{H}^* = \mathbb{C}\langle e_1^*, \dots, e_d^* \rangle$, где $\{e_i, i = 1, \dots, d\}$ образует ортонормированный базис $\mathcal{H}$. Обозначим $\mathcal{T}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*)$ полную тензорную алгебру над $\mathcal{H}, \mathcal{H}^*$, тогда

$$W(T) \simeq \mathcal{T}(\mathcal{H}, \mathcal{H}^*) / \langle e_i^* \otimes e_j - \sum_{k,l=1}^d T_{ij}^{kl} e_l \otimes e_k^* \rangle. \quad (2)$$

В этой реализации свободная алгебра, порожденная элементами $a_i, i = 1, \dots, d$, совпадает с $\mathcal{T}(\mathcal{H}) = \mathbb{C}\Omega \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}^{\otimes n}$.

Ключевую роль в изучении структуры виковских $*$ -алгебр играет оператор коэффициентов $T: \mathcal{H}^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes 2}$, определенный следующим образом

$$Te_k \otimes e_l = \sum_{i,j=1}^d T_{ik}^{lj} e_i \otimes e_j. \quad (3)$$

При $n > 2$ построим расширения T на $\mathcal{H}^{\otimes n}$:

$$T_i = \bigotimes_{k=1}^{i-1} \mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes T \otimes \bigotimes_{k=i+2}^n \mathbf{1}_{\mathcal{H}}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Операторы R_n ,

$$R_n: \mathcal{H}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes n}, \quad R_n = \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes n}} + T_1 + T_1 T_2 + \dots + T_1 T_2 \dots T_{n-1},$$

позволяют определить правило коммутации образующих a_i^* , $i = 1, \dots, d$ с любым однородным полиномом от $a_1, \dots, a_d$. А именно, см. [6], для любого $X \in \mathcal{H}^n$ имеет место равенство

$$e_i^* \otimes X = \mu_0(e_i^*)(R_n X + \sum_{k=1}^d T_1 T_2 \dots T_n (X \otimes e_k) \otimes e_k^*),$$

где $\mu_0(e_i^*): \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$,

$$\mu_0(e_i^*)e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_s} = \delta_{ii_1} e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_s}, \quad s \geq 1, \quad \mu_0(e_i^*)\Omega = 0.$$

В данной заметке мы будем предполагать, что оператор коэффициентов T является *косовым*, т.е. на $\mathcal{H}^{\otimes 3}$ выполнено соотношение $T_1 T_2 T_1 = T_2 T_1 T_2$.

Одной из важных задач теории представлений виковских $*$ -алгебр является поиск дополнительных соотношений между элементами a_i , т.е. построение специальных классов двусторонних идеалов в $\mathcal{T}(H)$. В работе [3] был вынесен на рассмотрение класс виковских $*$ -идеалов в $\mathcal{T}(H)$. В частности было показано, что виковские идеалы, порожденные полиномами степени 2, лежат в ядре фоковского представления $W(T)$, а также содержатся в $*$ -радикале виковских алгебр связанных со скрученными коммутационными соотношениями и соотношениями для обобщенных куонов см. [3, 4, 7].

Целью заметки является изучение структуры однородных виковских идеалов высших степеней. А именно, мы представляем метод, позволяющий строить однородный виковский идеал $\mathcal{I}_{n+1}$ степени $n+1$ основываясь на знании образующих некоторого однородного виковского идеала $\mathcal{I}_n$ степени n . При этом имеет место включение $\mathcal{I}_{n+1} \subset \mathcal{I}_n$. Мы также доказываем, что в некоторых случаях наша процедура позволяет описать максимальные однородные виковские идеалы высших степеней.

В качестве примера применения наших результатов мы описываем классы унитарной эквивалентности неприводимых $*$ -представлений виковского аналога CCR с

двумя образующими, в которых обращается в нуль некоторый однородный виковский идеал.

1. ОПИСАНИЕ ОДНОРОДНЫХ ВИКОВСКИХ ИДЕАЛОВ.

Понятие виковского идеала было введено в [3] в качестве естественного способа построения дополнительных соотношений между a_i , $i = 1, \dots, d$, совместимых с порождающими соотношениями.

Определение 1. Двусторонний идеал $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}(\mathcal{H})$ называется виковским идеалом, если

$$\mathcal{T}(\mathcal{H}^*) \otimes \mathcal{I} \subset \mathcal{I} \otimes \mathcal{T}(\mathcal{H}^*).$$

Если же виковский идеал $\mathcal{I}$ порожден подпространством $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{H}^{\otimes n}$, то $\mathcal{I}$ называется однородным виковским идеалом степени n .

Заметим, см. [3], что идеал $\mathcal{I} \subset \mathcal{T}(\mathcal{H})$ порожденный $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{H}^{\otimes n}$, будет виковским тогда и только тогда, когда

$$\mathcal{H}^* \otimes \mathcal{I}_0 \subset \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_0 \otimes \mathcal{H}^*.$$

Важной задачей теории представлений виковских алгебр является явное описание образующих однородных виковских идеалов высших степеней. Первый шаг в этом направлении был сделан в работе [6], где был доказан следующий результат.

Предложение 1. Пусть оператор коэффициентов T является косовым и $\|T\| \leq 1$. Обозначим $\mathcal{I}_2 \subset \mathcal{H}^{\otimes 2}$ подпространство, порождающее максимальный квадратический виковский идеал. Тогда подпространство

$$\mathcal{I}_3 = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes 3}} - T_1 T_2)(\mathcal{I}_2 \otimes \mathcal{H})$$

порождает максимальный однородный виковский идеал степени 3.

Напомним сперва некоторые свойства подпространств, задающих однородные виковские идеалы (см. [3, 6]).

Предложение 2. Пусть $P: \mathcal{H}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes n}$ оператор проектирования. Подпространство $\mathcal{I} = P(\mathcal{H}^{\otimes n})$ порождает виковский идеал тогда и только тогда, когда

- (1) $R_n P = 0$ (равенство в $\mathcal{H}^{\otimes n}$),
- (2) $[\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes n}} - P)] T_1 T_2 \cdots T_n [P \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}] = 0$ (равенство в $\mathcal{H}^{\otimes n+1}$).

Если же оператор коэффициентов T является косовым и P проектор на $\ker R_n$, то второе условие выполняется автоматически. Следовательно, в этом случае $\ker R_n$ порождает максимальный однородный виковский идеал степени n .

Заметим, что второе условие Утверждения 2 означает, что

$$T_1 T_2 \cdots T_n (\mathcal{I} \otimes \mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{I}. \quad (4)$$

Лемма 1. Пусть $\mathcal{I} \subset \mathcal{H}^{\otimes n}$ порождает однородный виковский идеал, тогда

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1 T_2 \cdots T_n)(\mathcal{I} \otimes \mathcal{H}) \subset \ker R_{n+1}.$$

Доказательство. Пусть $X \in \mathcal{I}$. Тогда $X \in \ker R_n$. Заметим, что

$$R_{n+1} = R_n \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + T_1 T_2 \cdots T_n = \mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} + T_1(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes R_n)$$

Тогда для каждого $i = 1, \dots, d$ получим

$$\begin{aligned} R_{n+1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1 T_2 \cdots T_n)(X \otimes e_i) &= \\ &= R_{n+1}(X \otimes e_i) - R_{n+1} T_1 T_2 \cdots T_n(X \otimes e_i) = \\ &= (R_n \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}} + T_1 T_2 \cdots T_n)(X \otimes e_i) \\ &\quad - (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} + T_1(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes R_n)) T_1 T_2 \cdots T_n(X \otimes e_i) = \\ &= T_1 T_2 \cdots T_n(X \otimes e_i) - T_1 T_2 \cdots T_n(X \otimes e_i) \\ &\quad - T_1(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes R_n) T_1 T_2 \cdots T_n(X \otimes e_i) = 0, \end{aligned}$$

где выше мы использовали свойство

$$T_1 T_2 \cdots T_n(\mathcal{I} \otimes \mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{I} \subset \mathcal{H} \otimes \ker R_n = \ker(\mathbf{1}_{\mathcal{H}} \otimes R_n).$$

□

Следствие 1. Если оператор T является косовым, то

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1 T_2 \cdots T_n)(\ker R_n \otimes \mathcal{H}) \subset \ker R_{n+1}.$$

Ниже мы будем использовать следующее простое наблюдение.

Лемма 2. Пусть T косовый. Тогда для всех $n \geq 2$ и $k \leq n-1$

$$(T_1 T_2 \cdots T_n)(T_1 T_2 \cdots T_k) = (T_2 T_3 \cdots T_{k+1})(T_1 T_2 \cdots T_n).$$

В следующем утверждении, в случае, когда T косовый, мы приводим способ построения образующих некоторого однородного виковского идеала степени $n+1$ по образующим известного однородного виковского идеала степени n .

Предложение 3. Пусть T косовый и подпространство $\mathcal{I}_n \subset \mathcal{H}^{\otimes n}$ порождает однородный виковский идеал степени n . Тогда подпространство

$$\mathcal{I}_{n+1} = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1 T_2 \cdots T_n)(\mathcal{I}_n \otimes \mathcal{H})$$

порождает однородный виковский идеал степени $n+1$.

Доказательство. В соответствии с Леммой 1

$$(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1 T_2 \cdots T_n)(\mathcal{I}_n \otimes \mathcal{H}) \subset \ker R_{n+1}.$$

Таким образом, остается убедиться, что

$$T_1 T_2 \cdots T_{n+1}(\mathcal{I}_{n+1} \otimes \mathcal{H}) \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{I}_{n+1}. \quad (5)$$

В самом деле

$$\begin{aligned}
T_1 T_2 \cdots T_{n+1} (\mathcal{I}_{n+1} \otimes \mathcal{H}) &= T_1 T_2 \cdots T_{n+1} (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1 T_2 \cdots T_n) (\mathcal{I}_n \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) = \\
&= (T_1 T_2 \cdots T_{n+1} - T_1 T_2 \cdots T_{n+1} T_1 T_2 \cdots T_n) (\mathcal{I}_n \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) = \\
&= (T_1 T_2 \cdots T_{n+1} - T_2 T_3 \cdots T_{n+1} T_1 T_2 \cdots T_{n+1}) (\mathcal{I}_n \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) = \\
&= (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_2 T_3 \cdots T_{n+1}) T_1 T_2 \cdots T_{n+1} (\mathcal{I}_n \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) = \\
&= (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_2 T_3 \cdots T_{n+1}) T_1 T_2 \cdots T_n (\mathcal{I}_n \otimes T(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})) \subset \\
&\subset (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_2 T_3 \cdots T_{n+1}) T_1 T_2 \cdots T_n (\mathcal{I}_n \otimes \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}) \subset \\
&\subset (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_2 T_3 \cdots T_{n+1}) (\mathcal{H} \otimes \mathcal{I}_n \otimes \mathcal{H}) = \\
&= \mathcal{H} \otimes (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes n}} - T_1 T_2 \cdots T_n) (\mathcal{I}_n \otimes \mathcal{H}) = \\
&= \mathcal{H} \otimes \mathcal{I}_{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Теперь наша цель выяснить в каких случаях приведенная выше конструкция позволяет получить описание максимальных однородных виковских идеалов высших степеней. Нам понадобятся несколько несложных результатов.

Лемма 3. Пусть оператор T косовый. Тогда для всех $n \geq 2$

$$R_{n+1} T_1 T_2 \cdots T_n = T_1 T_2 \cdots T_n + T_1^2 T_2 \cdots T_n (R_n \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}) \quad (6)$$

Лемма 4. Если T косовый, то при $n \geq 2$

$$R_{n+1} (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1 T_2 \cdots T_n) = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(n+1)}} - T_1^2 T_2 \cdots T_n) (R_n \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}}).$$

Положим $\mathcal{K}_2 = \ker R_2$ и

$$\mathcal{K}_{m+1} = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(m+1)}} - T_1 T_2 \cdots T_m) (\mathcal{K}_m \otimes \mathcal{H}), \quad m \geq 2.$$

Поскольку в силу (5)

$$\mathcal{K}_{m+1} \subset \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}_m + \mathcal{K}_m \otimes \mathcal{H},$$

виковские идеалы, порожденные $\mathcal{K}_m$, $m \geq 2$, образуют убывающую цепочку

$$\langle \mathcal{K}_2 \rangle \supset \langle \mathcal{K}_3 \rangle \supset \cdots \supset \langle \mathcal{K}_m \rangle \supset \cdots$$

Предложение 4. Преположим, что оператор коэффициентов T является косовым и для всех $m \geq 2$

$$\ker(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(m+1)}} - T_1 T_2 \cdots T_m) = \{0\} \quad \text{и} \quad \ker(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes(m+1)}} - T_1^2 T_2 \cdots T_m) = \{0\}.$$

Тогда

$$\mathcal{K}_m = \ker R_m, \quad m \geq 2,$$

и $\mathcal{K}_m$ порождает максимальный однородный виковский идеал степени m для всех $m \geq 2$.

Доказательство. Пусть $\dim \mathcal{H} = d$. Если операторы $\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes m+1}} - T_1 T_2 \cdots T_m$, $m \geq 2$ обратимы, по определению $\mathcal{K}_m$ получим

$$\dim \mathcal{K}_m = d \cdot \dim \mathcal{K}_{m-1} = d^{m-2} \cdot \dim \ker R_2.$$

Поскольку $\mathcal{K}_m \subset \ker R_m$ (Лемма 1), остается показать, что для всех $m \geq 2$

$$\dim \ker R_m = d \cdot \dim \ker R_{m-1} = \dots = d^{m-2} \dim \ker R_2.$$

Однако этот факт немедленно следует из равенства

$$R_{m+1}(\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes m+1}} - T_1 T_2 \cdots T_m) = (\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes m+1}} - T_1^2 T_2 \cdots T_m)(R_m \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{H}})$$

и обратимости операторов $\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes m+1}} - T_1 T_2 \cdots T_m$ и $\mathbf{1}_{\mathcal{H}^{\otimes m+1}} - T_1^2 T_2 \cdots T_m$. $\square$

2. *-ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВИКОВСКОГО АНАЛОГА CCR, АННУЛИРУЮЩИЕ ОДНОРОДНЫЕ ВИКОВСКИЕ ИДЕАЛЫ.

В этой части мы рассматриваем виковский аналог CCR, обозначаемый ниже $\mathcal{A}_d^0$:

$$\mathcal{A}_d^0 = \mathbb{C} \langle a_i, a_i^* \mid a_i^* a_j = \delta_{ij} \mathbf{1} + a_j a_i^*, \ i, j = 1, \dots, d \rangle.$$

В этом случае оператор T является оператором перестановки тензорных множителей

$$T e_i \otimes e_j = e_j \otimes e_i, \ i, j = 1, \dots, d$$

и максимальный квадратический виковский идеал $\mathcal{K}_2 = \ker R_2$ порождается элементами

$$A_{ij} = e_j \otimes e_i - e_i \otimes e_j, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \dots, d.$$

Действие оператора $T_1 T_2 \cdots T_k$ на произведении вида $B \otimes e_i$, $B \in \mathcal{H}^k$, $i = 1, \dots, d$, имеет следующий вид

$$(T_1 T_2 \cdots T_k)(B \otimes e_i) = e_i \otimes B, \quad i = 1, \dots, d.$$

Таким образом, если однородный виковский идеал $\mathcal{K}_m$ порождается семейством $\{B_j, \ j \in \mathcal{J}\}$, то

$$\mathcal{K}_{m+1} = \langle e_i \otimes B_j - B_j \otimes e_i, \ i = 1, \dots, d, \ j \in \mathcal{J} \rangle$$

Напомним также, что

$$e_i^* \otimes B_j = \mu_0(e_i^*)(R_m B_j + \sum_{k=1}^d T_1 T_2 \cdots T_m (B_j \otimes e_k) \otimes e_k^*), \ i = 1, \dots, d, \ j \in \mathcal{J}.$$

Поскольку

$$T_1 T_2 \cdots T_m (B_j \otimes e_k) = e_k \otimes B_j, \quad R_n B_j = 0,$$

и $\mu_0(e_i^*) e_k \otimes X = \delta_{ik} X$ для всех $X \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, получим

$$e_i^* \otimes B_j = B_j \otimes e_i^*, \quad i = 1, \dots, d, \ j \in \mathcal{J}.$$

Иными словами, если мы рассмотрим фактор-алгебру алгебры $\mathcal{A}_d^0$ по идеалу, порожденному $\mathcal{K}_{m+1}$, то получим следующие коммутационные соотношения между образующими алгебры и образующими $\mathcal{K}_m$

$$a_i^* B_j = B_j a_i^*, \quad a_i B_j = B_j a_i, \quad i = 1, \dots, d, \quad j \in \mathcal{J}.$$

Ниже мы дадим описание неприводимых *-представлений $\mathcal{A}_2^0$, аннулирующих идеалы $\mathcal{K}_m$, при $m = 2, 3, 4$.

2.1. Представления $\mathcal{A}_2^0$, аннулирующие квадратический и кубический идеалы. Пусть $d = 2$. Тогда идеал $\mathcal{K}_2$ порождается элементом $a_1 \otimes a_2 - a_2 \otimes a_1$ и фактор-алгебра $\mathcal{A}_2^0/\mathcal{K}_2$ изоморфна алгебре Вейля с двумя степенями свободы.

Известно, что фоковское представление является единственным интегрируемым неприводимым *-представлением алгебры Вейля. А именно, пространство представления равно $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes l_2(\mathbb{Z}_+)$ и

$$\pi_F(a_1) = a \otimes \mathbf{1}, \quad \pi_F(a_2) = \mathbf{1} \otimes a,$$

где $ae_n = \sqrt{n+1}e_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\{e_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ – стандартный ортонормированный базис $l_2(\mathbb{Z}_+)$.

Далее, опишем неприводимые представления $\mathcal{A}_2^0$, аннулирующие идеал $\mathcal{K}_3$. Идеал $\mathcal{K}_3$ порождается элементами

$$Aa_1 - a_1A, \quad Aa_2 - a_2A$$

где $A = a_2a_1 - a_1a_2$.

Поскольку $a_i^*A = Aa_i^*$, $i = 1, 2$, элемент A принадлежит центру фактор-алгебры $\mathcal{A}_2^0/\mathcal{K}_3$.

Мы будем считать, что в интегрируемом представлении оператор A коммутирует с a_i , a_i^* в сильном смысле (т.е. A допускает замыкание на области определения представления и для полярного разложения $A = U|A|$ оператор U и все спектральные проекторы $|A|$ принадлежат сильному коммутанту семейства $\{a_1, a_1^*, a_2, a_2^*\}$, [8]). Тогда по Лемме Шура будем иметь $A = x\mathbf{1}$, $x \in \mathbb{C}$. Таким образом описание неприводимых представлений $\mathcal{A}_2^{(0)}$, аннулирующих идеал $\mathcal{K}_3$, сводится к описанию неприводимых представлений следующего набора коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} a_i^*a_i - a_ia_i^* &= \mathbf{1}, \quad i = 1, 2, \\ a_1^*a_2 &= a_2a_1^* \quad a_2a_1 - a_1a_2 = x\mathbf{1}. \end{aligned} \tag{7}$$

Обозначим $A_{2,x}$ *-алгебру, порожденную (7) и $A_{2,0}$ *-алгебру, порожденную CCR с двумя степенями свободы.

Предложение 5. *-Алгебры $A_{2,x}$ и $A_{2,0}$ изоморфны для всех $x \in \mathbb{C}$.

Доказательство. Для произвольного фиксированного $x \in \mathbb{C}$ положим

$$d_1 = a_1 \quad \text{and} \quad d_2 = \left(1 + |x|^2\right)^{-\frac{1}{2}} a_2 - x a_1^*.$$

Очевидно, что d_1, d_2 порождают $A_{2,x}$ и

$$d_i^* d_i - d_i d_i^* = 1, \quad i = 1, 2, \quad d_1^* d_2 = d_2 d_1^*, \quad d_2 d_1 = d_1 d_2. \quad (8)$$

Наоборот, если c_1, c_2 образующие $A_{2,0}$, удовлетворяющие (8), то элементы

$$b_1 = c_1, \quad b_2 = \left(1 + |x|^2\right)^{\frac{1}{2}} c_2 + x c_1^*$$

удовлетворяют (7) и порождают $A_{2,0}$. Таким образом $A_{2,x} \simeq A_{2,0}$. $\square$

Из теоремы о единственности интегрируемого представления ССР с конечным числом степеней свободы получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Для каждого $x \in \mathbb{C}$ существует единственное, с точностью до унитарной эквивалентности, неприводимое интегрируемое представление $A_{2,x}$, заданное следующими формулами*

$$\begin{aligned} a_1 &= a \otimes \mathbf{1}, \\ a_2 &= \sqrt{1 + |x|^2} \mathbf{1} \otimes a + x a^* \otimes \mathbf{1}. \end{aligned}$$

2.2. Представления, аннулирующие $\mathcal{K}_4$. Опишем теперь неприводимые представления $\mathcal{A}_2^0$, которые аннулируют идеал $\mathcal{K}_4$. Напомним, что

$$\mathcal{K}_4 = \langle B_i a_j - a_j B_i, \quad i, j = 1, 2 \rangle,$$

где $B_i = A a_i - a_i A$, $i = 1, 2$, являются образующими идеала $\mathcal{K}_3$. Поскольку также

$$a_j^* B_i = B_i a_j^*, \quad i = 1, 2,$$

элементы B_1, B_2 принадлежат центру фактор-алгебры $\mathcal{A}_2^0 / \mathcal{K}_4$. Отождествив элементы алгебры с их образами в представлении π , $\pi(\mathcal{K}_4) = \{0\}$, мы будем требовать, чтобы в интегрируемом представлении

$$B_1 = A a_1 - a_1 A = x_1 \mathbf{1}, \quad B_2 = A a_2 - a_2 A = x_2 \mathbf{1}$$

для некоторых $x_1, x_2 \in \mathbb{C}$. Напомним также, что в $\mathcal{A}_2^0$ имеют место равенства $a_i^* A = A a_i^*$, $i = 1, 2$.

2.2.1. Представления с $x_1 \neq 0$. Зафиксируем $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ с $x_1 \neq 0$ и рассмотрим *-алгебру A_{x_1, x_2} , порожденную элементами a_1, a_2, A , удовлетворяющими коммутационным соотношениям вида

$$\begin{aligned} a_i^* a_i - a_i a_i^* &= 1, \\ a_1^* a_2 &= a_2 a_1^*, \quad A = a_2 a_1 - a_1 a_2, \\ A a_i - a_i A &= x_i \mathbf{1}, \quad a_i^* A = A a_i^*, \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

Положим

$$\begin{aligned} d_1 &= a_1 \\ d_2 &= |x_1|^{-1}(A - x_1 a_1^*) \\ d_3 &= \left(1 + \frac{|x_2|^2}{|x_1|^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(a_2 + \frac{x_2}{|x_1|} d_2^* - \frac{\bar{x}_1}{2} d_2^2 - |x_1| d_1^* d_2 - \frac{x_1}{2} (d_1^*)^2\right) \end{aligned} \quad (10)$$

Ниже мы покажем, что d_i , $i = 1, 2, 3$, порождают A_{x_1, x_2} и удовлетворяют CCR с тремя степенями свободы.

Нам понадобится знание соотношений между элементами a_i и d_j , $i, j = 1, 2$.

Lemma 1. *Элементы a_1 , a_2 , d_1 , d_2 удовлетворяют соотношениям вида*

$$\begin{aligned} d_1^* a_2 &= a_2 d_1^*, \\ a_2 d_1 - d_1 a_2 &= |x_1| d_2 + x_1 d_1^*, \\ a_2^* d_2 &= d_2 a_2^* + x_1 d_2^* + |x_1| d_1, \\ a_2 d_2 &= d_2 a_2 - \frac{x_2}{|x_1|}. \end{aligned} \quad (11)$$

Доказательство. Непосредственная проверка. $\square$

Lemma 2. *Элементы d_i , d_i^* , $i = 1, 2, 3$, порождают A_{x_1, x_2} и удовлетворяют CCR с тремя степенями свободы, т.е. для всех $i, j = 1, 2, 3$ и $i \neq j$*

$$d_i^* d_i - d_i d_i^* = 1, \quad d_i^* d_j = d_j d_i^*, \quad d_i d_j = d_j d_i. \quad (12)$$

Доказательство. Непосредственная проверка с использованием соотношений (11). $\square$

Обозначим A_3 алгебру, порожденную CCR с тремя образующими, и c_1 , c_2 , c_3 канонические образующие A_3 . Построим элементы b_1 , b_2 , B , принадлежащие A_3 используя формулы

$$\begin{aligned} b_1 &= d_1, \\ B &= |x_1| d_2 + x_1 d_1^*, \\ b_2 &= \left(1 + \frac{|x_2|^2}{|x_1|^2}\right)^{\frac{1}{2}} d_3 - \frac{x_2}{|x_1|} d_2^* + \frac{\bar{x}_1}{2} d_2^2 + |x_1| d_1^* d_2 + \frac{x_1}{2} (d_1^*)^2, \end{aligned} \quad (13)$$

Lemma 3. *Элементы b_1 , b_2 , B удовлетворяют (9) и порождают A_3 .*

Доказательство. Непосредственная проверка. $\square$

Очевидно, из Леммы 2 и Леммы 3 следует, что *-алгебры A_{x_1, x_2} и A_3 изоморфны.

Таким образом, при изучении неприводимых представлений A_{x_1, x_2} мы можем иметь дело с образующими d_1, d_2, d_3 . Мы будем называть представление *-алгебры A_{x_1, x_2} , $x_1 \neq 0$, аннулирующее K_4 , *интегрируемым*, если соответствующее представление $A_3 \simeq A_{x_1, x_2}$ является интегрируемым. Из единственности неприводимого

интегрируемого представления ССР с конечным числом образующих, получим, что пространство неприводимого представления $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+)^{\otimes 3}$ и

$$d_1 = a \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad d_2 = \mathbf{1} \otimes a \otimes \mathbf{1}, \quad d_3 = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes a.$$

Вернувшись с помощью формул (10) к образующим a_1, a_2, a_3 получим следующий результат.

Теорема 2. *Для всех $(x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, $x_1 \neq 0$, существует единственное, с точностью до унитарной эквивалентности, неприводимое интегрируемое *-представление A_{x_1, x_2} , определенное на образующих следующим образом*

$$\begin{aligned} a_1 &= a \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \\ a_2 &= \sqrt{1 + \frac{|x_2|^2}{|x_1|^2}} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes a - \frac{x_2}{|x_1|} \mathbf{1} \otimes a^* \otimes \mathbf{1} + \frac{\bar{x}_1}{2} \mathbf{1} \otimes a^2 \otimes \mathbf{1} + \\ &\quad + |x_1| a^* \otimes a \otimes \mathbf{1} + \frac{x_1}{2} (a^*)^2 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \\ A &= |x_1| \mathbf{1} \otimes a \otimes \mathbf{1} + x_1 a^* \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}. \end{aligned}$$

2.2.2. *Представления с $x_1 = 0$.* Предположим теперь, что $x_1 = 0$ и $x_2 \neq 0$. Тогда, как и в случае, рассмотренном выше, $A_{0, x_2} \simeq A_3$. Чтобы убедиться в этом достаточно выразить образующие a_1, a_2 через образующие d_1, d_2 и d_3 , удовлетворяющие ССР, используя формулы (13) с заменой a_1 на a_2 , a_2 на $-a_1$, x_1 на x_2 , и полагая затем $x_1 = 0$. Заметим, что $(-a_1)a_2 - a_2(-a_1) = A$, и $Aa_2 - a_2A = x_2$. Получим следующий результат.

Теорема 3. *Для любого $x_2 \in \mathbb{C}$, $x_2 \neq 0$, существует единственное, с точностью, до унитарной эквивалентности, неприводимое интегрируемое *-представление A_{0, x_2} , определенное следующими формулами*

$$\begin{aligned} a_2 &= a \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \\ a_1 &= -\left(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes a + \frac{\bar{x}_2}{2} \mathbf{1} \otimes a^2 \otimes \mathbf{1} + \right. \\ &\quad \left. + |x_2| a^* \otimes a \otimes \mathbf{1} + \frac{x_2}{2} (a^*)^2 \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}\right) \\ A &= |x_2| \mathbf{1} \otimes a \otimes \mathbf{1} + x_2 a^* \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \end{aligned}$$

В конце заметим, что если одновременно $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, то $Aa_i = a_iA$, $i = 1, 2$, и, следовательно, образ идеала $\mathcal{K}_3$ равен нулю. В этом случае интегрируемые неприводимые представления описаны в Теореме 1.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность М.А. Муратову и И.И. Карпенко за плодотворные дискуссии и помощь в подготовке работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] M. Bożejko and R. Speicher, *Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces* // Mat. Ann., **300**. - 1994. - P. 97–120.
- [2] P.E.T. Jørgensen, D.P. Proskurin and Yu.S. Samoilenko, *The kernel of Fock representation of Wick algebras with braided operator of coefficients* // Pacific J. Math., **198**. - 2001. - P. 109–122.
- [3] P.E.T.Jørgensen, L.M. Schmitt, and R.F.Werner, *Positive representations of general commutation relations allowing Wick ordering* // J. Funct. Anal., **134**. - 1995. - P. 33–99.
- [4] W. Marcinek, *On commutation relations for quons* // Rep. Math. Phys., **41**. - 1998. - Vol. 2. - P. 155–172.
- [5] V. Ostrovskiy and Yu. Samoilenko, *Introduction to the theory of representations of finitely presented algebras* – London: Gordon & Breach, 2000. – 261 p.
- [6] D. Proskurin, *Homogeneous ideals in Wick $\ast$ -algebras* // Proc. Amer. Math. Soc., **126**. - 1988. - Vol. 11. - P. 3371–3376.
- [7] Pusz W. and Woronowicz S.L. *Twisted second quantization* // Rep. Math. Phys., **27**. - 1989. - Vol. 2. - P. 231–257.
- [8] Schmüdgen K. *Unbounded operator algebras and representation theory* – Basel: Birkhäuser Verlag, 1990. – 400 P.

Проскурін Д.П. Про $\ast$ -зображення віківського аналогу CCR //

В роботі вивчаються $\ast$ -зображення віківського аналогу алгебри канонічних комутаційних співвідношень, що анулюють однорідні віківські ідеали степенів 3 та 4. Наведено спосіб побудови спадного ланцюга однорідних віківських ідеалів зростаючих степенів.

Ключові слова: деформації канонічних комутаційних співвідношень, віківські алгебри, необмежені оператори

Proskurin D.P. On $\ast$ -representations of Wick analogues of CCR //

In this paper we study $\ast$ -representations of Wick analogue of algebra of canonical commutation relations, annihilating certain homogenous Wick ideals of degrees 3 and 4. The construction of descending chain of homogeneous Wick ideals of growing degrees is presented.

Keywords: deformation of CCR algebra, Wick algebras, unbounded operator.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 112–124.

УДК УДК 551.466.8

А. А. Слепышев, А. В. Носова, В. О. Подрыга

ВОЛНОВОЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС ПРИ УЧЕТЕ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ И ДИФФУЗИИ

Асимптотическим методом многомасштабных разложений исследуются нелинейные эффекты при распространении внутренних волн при учете турбулентной вязкости и диффузии. Определяется вертикальная составляющая скорости стокового дрейфа, которая при учете турбулентной вязкости и диффузии отлична от нуля. Определяются вертикальные волновые потоки тепла и соли. Показано, что вертикальная составляющая скорости стокового дрейфа приводит к накапливающейся деформации профиля средней плотности, которая для высших мод может трактоваться, как необратимая тонкая структура, генерируемая волной.

Ключевые слова: внутренние волны, нелинейные эффекты, турбулентная вязкость, диффузия, стоковых дрейф

1. ВВЕДЕНИЕ

Механизмы перемешивания в морской среде пока ещё недостаточно изучены. Турбулентность в стратифицированной толще жидкости имеет перемежаемый характер и порождается преимущественно гидродинамической неустойчивостью течений и внутренних волн. Вертикальный обмен обычно связывают с такой перемежаемой или «фоновой» турбулентностью, вводя эффективные коэффициенты турбулентного обмена. Известно, что внутренние волны при учете турбулентной вязкости и диффузии затухают [1]. В данном случае «фоновая» турбулентность играет роль диссипативного фактора для внутренних волн. Отметим, что при этом появляется фазовый сдвиг между колебаниями вертикальной скорости и плотности (температуры, солености). За счет указанного фазового сдвига вертикальный поток тепла $\overline{u_3 T}$ отличен от нуля (здесь u_3 — вертикальная скорость, T — волновое возмущение температуры, черта сверху означает осреднение по периоду волны). Это же относится и к вертикальному волновому потоку соли. Ниже будет показано, что при

учете турбулентной вязкости и диффузии отлична от нуля вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа, которая тоже вносит свой вклад в волновой тепломассоперенос. При распространении пакета внутренних волн индуцируется среднее эйлерово течение за счет нелинейности [2, 3]. Суммарная скорость дрейфа частиц жидкости складывается из эйлеровой скорости индуцированного среднего течения и скорости стокова дрейфа и, естественно, вносит свой вклад в волновой массоперенос. Представляет интерес сравнить волновые потоки с турбулентными потоками для типичных амплитуд внутренних волн на шельфе Черного моря.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Исходные нелинейные уравнения гидродинамики для волновых возмущений при учёте турбулентной вязкости и диффузии решаются асимптотическим методом многомасштабных разложений. В первом порядке малости по крутизне волны находится решение линейного приближения и дисперсионное соотношение при реальной стратификации и заданных коэффициентах турбулентной вязкости и диффузии. Находятся погранслоиные волновые решения у дна и свободной поверхности и декремент затухания волны на турбулентности. Определяются вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа. Во втором порядке малости по крутизне волны находится среднее эйлерово течение, индуцированное волной за счет нелинейности. Определяются вертикальные волновые потоки тепла и соли и сравниваются с соответствующими турбулентными потоками. Принимая в качестве исходных уравнений для волновых возмущений, уравнение Навье-Стокса для неоднородной жидкости и вводя безразмерные переменные по формулам (чертой сверху обозначены размерные физические величины).

$$\bar{x}_i = Hx_i \ (i = 1, 3), \ \bar{t} = \sqrt{\frac{H}{g}}t, \ \bar{\zeta}_3 = H\zeta_3, \ \bar{u}_3 = \sqrt{gH}u_i,$$

$$\overline{\rho_0(x_3)} = \rho_0(0)\rho_0(x_3), \ \bar{k} = \frac{k}{\lambda}, \ \bar{\omega} = \frac{\omega\sqrt{gH}}{\lambda},$$

$$\bar{P} = \rho_0(0)gHP, \ \bar{K}_1 = K_1\mu, \ \bar{K}_3 = K_3\mu,$$

$$\bar{M}_1 = M_1\mu, \ \bar{M}_3 = M_3\mu, \ \varepsilon_2^2 = \mu \frac{1}{g^{\frac{1}{2}}H^{\frac{3}{2}}},$$

где g — ускорение силы тяжести, u_i ($i = 1, 3$) — соответственно горизонтальная и вертикальная компоненты волновой скорости течения, H — глубина океана, $\overline{\rho_0(x_3)}$ — профиль средней плотности, $\bar{\zeta}_3$ — возвышение свободной поверхности, $\bar{K}_i$, $\bar{M}_i$ — коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии, $\mu = \bar{K}_i$, k — горизонтальное волновое число, ω — частота волны, λ — длина волны, получим систему уравнений гидродинамики для волновых возмущений в приближении Буссинеска.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_1}{\partial x_i} &= -\frac{\partial P}{\partial x_1} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial K_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1}}{\partial x_1} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial K_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3}}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_3}{\partial x_i} &= -\frac{\partial P}{\partial x_3} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial K_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1}}{\partial x_1} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial K_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3}}{\partial x_3} - \rho, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} &= \varepsilon_2^2 \frac{\partial K_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1}}{\partial x_1} + \varepsilon_2^2 \frac{\partial K_3 \frac{\partial \rho}{\partial x_3}}{\partial x_3} - u_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3}, \\
\frac{\partial u_i}{\partial x_i} &= 0.
\end{aligned} \tag{1}$$

Граничные условия на свободной поверхности — кинематическое и динамические условия [4]:

$$\begin{aligned}
\frac{d\zeta_3}{dt} &= u_3, \\
-P + \zeta_3 + 2\varepsilon_2^2 K_3 \frac{\partial u_3}{\partial x_3} &= 0, \\
K_3 \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + K_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= 0.
\end{aligned} \tag{2}$$

Первые два условия определяют отсутствие нормальных и тангенциальных напряжений. На дне примем условие прилипания:

$$u_3(-1) = 0, \quad u_1(-1) = 0. \tag{3}$$

Граничные условия по плотности первого рода (постоянство плотности на границе):

$$\begin{aligned}
\text{при } x_3 = \bar{\zeta}_3 : \\
\rho = \rho_{K1}(x_1, t) = \text{const},
\end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned}
\text{при } x_3 = -1 : \\
\rho = \rho_{K2}(x_1, t) = \text{const}.
\end{aligned}$$

Указанные граничные условия сводятся к виду:

$$\begin{aligned}
\text{при } x_3 = 0 : \\
\rho(0) + \zeta_3 \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} + \zeta_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} &= 0,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\text{при } x_3 = -1 : \\
\rho(-1) &= 0.
\end{aligned}$$

Следуя методу асимптотических многомасштабных разложений решение исходной системы уравнений (1) будем искать в виде асимптотического ряда [3]:

$$\begin{aligned}\Psi &= \sum_{n=1} \varepsilon^n \Psi_n(\xi, \tau, z, \theta), \\ \rho &= \sum_{n=1} \varepsilon^n \rho_n(\xi, \tau, z, \theta),\end{aligned}\tag{6}$$

где $\Psi(x_1, x_3, t)$ — функция тока, которая определяет поле волновых скоростей ($\frac{\partial \Psi}{\partial x_3}$ — горизонтальная скорость, $-\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}$ — вертикальная скорость), ε — крутизна волны ($\varepsilon \ll \varepsilon_2^2$), $\tau = \varepsilon^2 t$, $\xi = \varepsilon(x - C_g t)$ (C_g — групповая скорость в линейном приближении). Здесь θ — быстрая, ξ и τ — медленные переменные, θ — фаза волны. Волновое число и частота определяются по формулам: $k = \frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$.

3. ЛИНЕЙНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Подставляя разложение (6) в исходную систему уравнений движения и приравняв члены при одинаковых степенях ε , с точностью до ε^1 получим:

$$\begin{aligned}-\omega \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} &= k \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} + k \frac{\partial}{\partial \theta} \left[k \frac{\partial}{\partial \theta} \left(K_1 k^2 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_3 k \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial \theta \partial x_3} \right) \right] \varepsilon_2^2 + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x_3} \left[k^2 K_1 \frac{\partial^3 \Psi_1}{\partial \theta^2 \partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(K_3 \frac{\partial^2 \Psi_1}{\partial x_3^2} \right) \right] \varepsilon_2^2,\end{aligned}\tag{7}$$

$$-\omega \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} - k \frac{\partial}{\partial \theta} \left(M_1 k \frac{\partial \rho_1}{\partial \theta} \right) \varepsilon_2^2 - \frac{\partial}{\partial x_3} \left(M_3 \frac{\partial \rho_1}{\partial x_3} \right) \varepsilon_2^2 - \frac{\partial \rho_0}{\partial x_3} k \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} = 0,\tag{8}$$

Волновые возмущения функции тока Ψ_1 и плотности ρ_1 представим в виде:

$$\Psi_1 = A \varphi_1 e^{i\theta} + \text{к.с.}, \quad \rho_1 = A n_1 e^{i\theta} + \text{к.с.}\tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнения (7), (8) получим уравнения для $\varphi_1(x_3)$ и $n_1(x_3)$:

$$\begin{aligned}&\left(i\omega - k^2 M_1 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^2 \frac{d}{dx_3} \left(M_3 \frac{d}{dx_3} \right) \right) \times \\ &\times \left[k^2 \left(k^2 K_1 \varphi_1 - \frac{d}{dx_3} \left(K_3 \frac{d\varphi_1}{dx_3} \right) \right) + \frac{d}{dx_3} \left(-k^2 K_1 \frac{d\varphi_1}{dx_3} + \frac{d}{dx_3} \left(K_3 \frac{d^2 \varphi_1}{dx_3^2} \right) \right) \right] \varepsilon_2^2 - \\ &- i \varepsilon_2^2 \omega \left(k^2 M_1 - \frac{d}{dx_3} \left(M_3 \frac{d}{dx_3} \right) \right) \left(-k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) \varphi_1 = \\ &= \omega^2 \left(-k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) \varphi_1 - k^2 \frac{d\rho_0}{dx_3} \varphi_1,\end{aligned}\tag{10}$$

$$\left(i\omega - k^2 M_1 \varepsilon_2^2 + \varepsilon_2^2 \frac{d}{dx_3} \left(M_3 \frac{d}{dx_3} \right) \right) n_1 = -ik \frac{d\rho_0}{dx_3} \varphi_1$$

Из граничных условий (2), (3) получим с точностью до ε^1 :

на свободной поверхности $x_3 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{k}{\omega} \varphi_1 - \frac{\omega}{k} \frac{d\varphi_1}{dx_3} - ik\varepsilon_2^2 K_1 \frac{d\varphi_1}{dx_3} + ik^{-1} \varepsilon_2^2 \frac{d}{dx_3} \left(K_3 \frac{d^2 \varphi_1}{dx_3^2} \right) - 2i\varepsilon_2^2 K_3 k \\ K_3 \frac{d^2 \varphi_1}{dx_3^2} + K_1 k^2 \varphi_1 = 0, \end{aligned}$$

на дне $x_3 = -1$:

$$\varphi_1 = \frac{d\varphi_1}{dx_3} = 0. \quad (11)$$

Граничные условия для функции n_1 имеют вид:

на свободной поверхности $x_3 = 0$:

$$n_1(0) + \frac{k}{\omega_{01}} \varphi_1(0) \frac{d\rho_0}{dx_3} = 0, \quad (12)$$

на дне $x_3 = -1$:

$$n_1(-1) = 0.$$

Первое уравнение (10) имеет малый параметр при старшей производной. Следуя [4, 5], это уравнение при малом ε_2 будем решать асимптотическим методом Люстерника - Вишика, разлагая φ_1 , n_1 , ω в ряды:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_3) &= \sum_{i=0} \varphi_{1i}(x_3) \varepsilon_2^i + \varepsilon_2 \sum_{i=0} v_i^1 \varepsilon_2^i + \varepsilon_2^2 \sum_{i=0} \varepsilon_2^i v_i^0, \\ n_1 &= \sum_{i=0} n_{1i}(x_3) \varepsilon_2^i + \varepsilon_2 \sum_{i=0} w_i^1 \varepsilon_2^i + \varepsilon_2^2 \sum_{i=0} \varepsilon_2^i w_i^0, \\ \omega &= \omega_{01} + \varepsilon_2 \omega_{02} + \varepsilon_2^2 \omega_{03} + \dots, \end{aligned} \quad (13)$$

где $v_i^1((1+x_3)/\varepsilon_2)$, $w_i^1((1+x_3)/\varepsilon_2)$ —погранслоиные решения в окрестности дна, $v_i^0(x_3/\varepsilon_2)$, $w_i^0(x_3/\varepsilon_2)$ —погранслоиные решения в окрестности свободной поверхности. В нулевом порядке малости по параметру ε_2 получим краевую задачу для φ_{10}

и связь между φ_{10} и n_{10} :

$$\begin{aligned} \omega_{01}^2 \left(-k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi_{10} - k^2 \frac{d\rho_0}{dx_3} \varphi_{10} &= 0, \\ \frac{d\varphi_{10}}{dx_3} - \frac{k^2}{\omega_{01}^2} \varphi_{10} \Big|_{x_3=0} &= 0, \\ \varphi_{10}|_{x_3=-1} &= 0, \\ n_{10} &= -\frac{k}{\omega_{01}} \frac{d\rho_0}{dx_3} \varphi_{10}. \end{aligned} \quad (14)$$

Краевая задача для φ_{10} в (14) имеет счетный набор собственных значений k , соответствующих различным номерам мод при фиксированном ω_{01} . Входящие в разложение (13) погранслойные решения v_i^1 и v_i^0 , быстро затухающие при удалении от границы, необходимы для удовлетворения граничных условий (11). Погранслойные решения в окрестности дна, свободной поверхности, функция φ_{12} и декремент затухания волны $\delta\omega = \text{Im } \varepsilon_2^2 \omega_{03}$ получены в [6].

4. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭФФЕКТЫ

Осредняя уравнения движения по периоду волны, получим во втором порядке малости по крутизне волны уравнения для неосциллирующей поправки к функции тока $C(\xi, \tau, x_3)$:

$$\varepsilon_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \left(K_3 \frac{\partial^2 C}{\partial x_3^2} \right) = \left[ki \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\left(-k^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi_1 \varphi_1^* \right) + \text{к.с.} \right] A_1 A_1^*, \quad (15)$$

где $A_1 A_1^* = A_1 A_1^* \exp(-2|\delta\omega|\tau)$.

Из (15) следует, что функцию $C(\xi, \tau, x_3)$ следует искать в виде: $C(\xi, \tau, x_3) = c(x_3) A_1 A_1^*$, причём функция $c(x_3)$ удовлетворяют уравнению:

$$\varepsilon_2^2 \frac{d^2}{dx_3^2} \left(K_3 \frac{d^2 c}{dx_3^2} \right) = ki \frac{d}{dx_3} \left(\left(-k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) \varphi_1 \varphi_1^* \right) + \text{к.с.} \quad (16)$$

Уравнение (16) следует дополнить граничными условиями, вытекающими из (2), (3):

при $x_3 = 0$:

$$ik \varphi_1^* \frac{d^2 \varphi_1}{dx_3^2} + \text{к.с.} = \varepsilon_2^2 \frac{d}{dx_3} \left(K_3 \frac{d^2 c}{dx_3^2} \right),$$

при $x_3 = 0$:

$$\frac{d^2 c}{dx_3^2} = 0, \quad (17)$$

при $x_3 = -1$:

$$\frac{dc}{dx_3} = c = 0.$$

Подставляя разложение (13) для функций $\varphi_1 x_3$ в уравнения (16) и граничные условия (17), получим уравнение и граничные условия для решений $c(x_3)$ в основной толще жидкости (без учёта погранслоиных решений у дна и свободной поверхности):

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx_3^2} \left(K_3 \frac{d^2 c}{dx_3^2} \right) = \varphi_{120} \frac{d}{dx_3} \left(\left(-k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) \varphi_{10} \right) - \\ - \varphi_{10} \frac{d}{dx_3} \left(\left(-k^2 + \frac{d^2}{dx_3^2} \right) \varphi_{120} \right), \end{aligned} \quad (18)$$

здесь $\varphi_{120} = \frac{\varphi_{12}}{i}$ — действительная функция. Граничные условия для $c(x_3)$:

при $x_3 = 0$:

$$2k \varphi_{120} \frac{d^2 \varphi_{10}}{dx_3^2} - 2k \varphi_{10} \frac{d^2 \varphi_{120}}{dx_3^2} = \frac{d}{dx_3} \left(K_3 \frac{d^2 c}{dx_3^2} \right),$$

при $x_3 = 0$:

$$\frac{d^2 c}{dx_3^2} = 0, \quad (19)$$

при $x_3 = -1$:

$$\frac{dc}{dx_3} = c = 0.$$

Краевая задача (18), (19) при постоянном K_3 решалась аналитически, интегралы вычислялись численно. Горизонтальная и вертикальная и компоненты скорости

среднего течения, индуцированного волной за счёт нелинейности, определяются по формулам:

$$u_{1\text{инд}} = (|\varepsilon A_1|)^2 \frac{dc}{dx_3}, \quad u_{3\text{инд}} = -\varepsilon^2 c(x_3) \frac{\partial |A_1|^2}{\partial x_1}.$$

Индуцируемые пакетом течения и возмущения плотности присутствуют только в области пакета, т.к. C пропорциональна $|A_1|^2$, после прохождения пакета невозмущенный профиль среднего течения и средней плотности восстанавливается. Величина εA_1 находилась по известной величине максимальной амплитуды вертикальных смещений ($\max \zeta = 0.5$ м). Действительно, если функция тока ψ_1 линейного приближения определяется по формуле (9), то можно найти вертикальное смещение ζ , используя соотношение $\frac{\zeta}{t} = u_3$:

$$\zeta = \frac{k}{\omega_{01}} \varphi_{10} \varepsilon A_1 \exp(ikx - i\omega_{01}t) + \text{к.с.}$$

Отсюда следует

$$\varepsilon A_1 = \frac{\max \zeta}{2 \max |\varphi_{10}| \frac{k}{\omega_{01}}}.$$

Необходимо заметить, что индуцируемые за счет волновых напряжений течения следует отличать от стокова дрейфа частиц жидкости, который присутствует и в плоской волне. Средняя скорость стокова дрейфа частиц жидкости за счет осциллирующей части волнового поля определяется по формуле [7]:

$$\vec{u}_s = \overline{\int_0^t \vec{u} dt' \nabla \vec{u}}, \quad (20)$$

где $\vec{u}_s$ — поле волновых эйлеровых скоростей, черта сверху означает осреднение по периоду волны. Суммарная скорость дрейфа частиц жидкости складывается из эйлеровой скорости индуцированного среднего течения и скорости стокова дрейфа. Вертикальная компонента скорости стокова дрейфа с точностью до членов, квадратичных по крутизне волны, будет иметь вид:

$$u_{3s} = \varepsilon^2 k^2 \frac{2 \delta \omega}{\omega \omega^*} \frac{\partial}{\partial x_3} (\varphi_1 \varphi_1^*) A_1 A_1^* \quad (21)$$

При отсутствии турбулентности, когда коэффициенты турбулентной вязкости и диффузии равны нулю ($K_i = M_i = 0$), $\delta \omega = 0$ вертикальная компонента скорости стокова дрейфа равна 0. Профиль вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа для внутренних волн низшей моды с периодом 1 ч показан на рис. 1.

Расчёты делались при следующих коэффициентах турбулентной вязкости и диффузии $K_1 = 1 \text{ м}^2/\text{с}$, $K_3 = 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$, $M_1 = 0.5 \text{ м}^2/\text{с}$, $M_3 = 0.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ и профиле частоты Брента - Вайсяля, показанном на рис. 2. На том же рисунке показаны профили средней температуры и солёности.

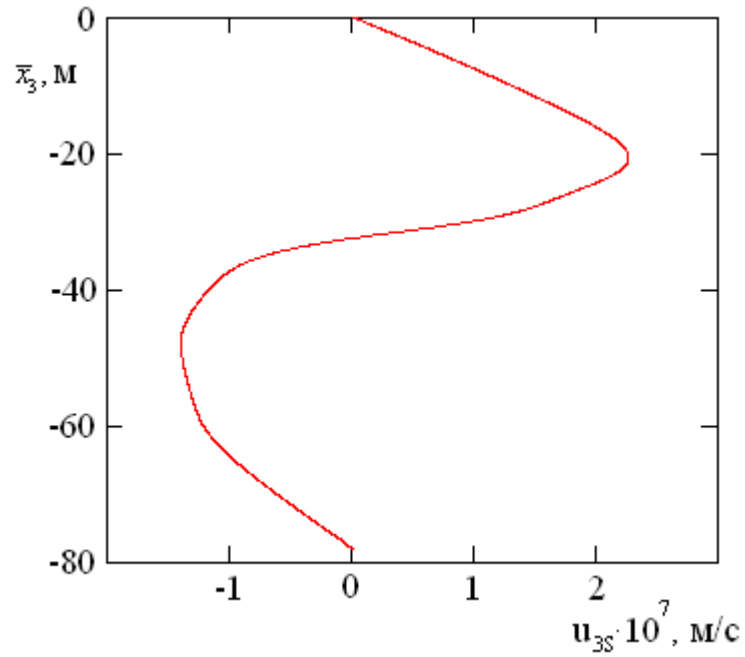


Рис. 1. Вертикальная компонента скорости стокова дрейфа.

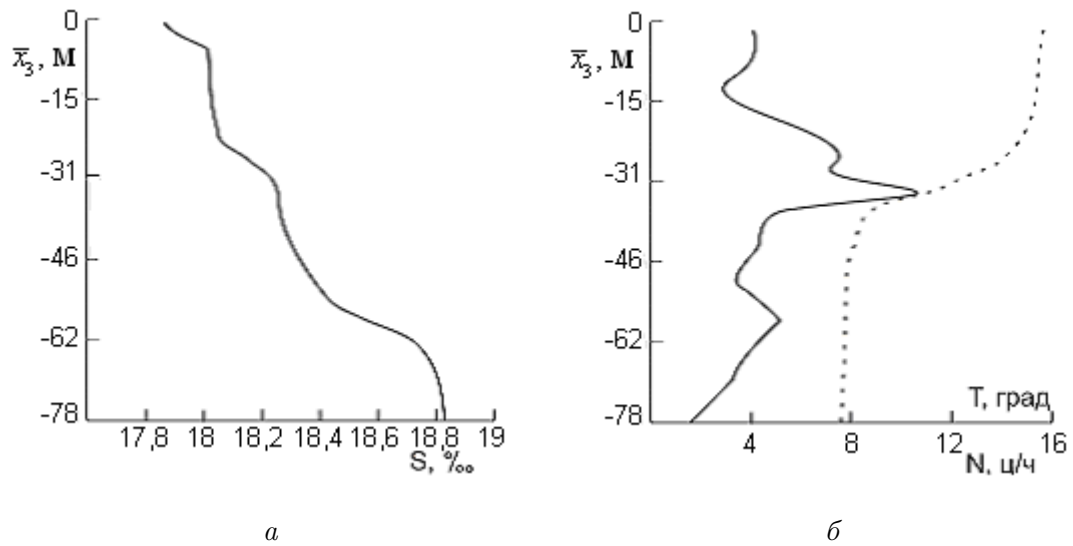


Рис. 2. Вертикальные профили солёности (а), частоты Брента-Вайсяля и температуры (б).

Как отличалось ранее, эйлерово поле скорости индуцированного течения не приводит за время прохождения пакета к перемещению частиц жидкости по вертикали и не вызывает необратимой деформации профиля средней плотности, но учет

стоксова дрейфа по вертикали может привести к остаточной деформации профиля средней плотности. Таким образом, волны за счет отличия от нуля вертикальной составляющей скорости стоксова дрейфа приводит к необратимой деформации профиля средней плотности. Накапливающаяся деформация плотности будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\bar{\rho} &= - \int_0^t u_{3s} \frac{d\rho_0}{dx_3} dt' = \\ &= - \frac{d\rho_0}{dx_3} \cdot 2 \varepsilon^2 k^2 \varepsilon_2^2 \frac{\omega_{030}}{\omega_{01}^2 + \varepsilon_2^4 \cdot \omega_{030}^2} \frac{d}{dx_3} (\varphi_{10} \cdot \varphi_{10}^*) \cdot \int_0^t A_1 A_1^* dt' \quad (22)\end{aligned}$$

После прохождения пакета в интеграле (22) необходимо поставить в верхнем пределе $+\infty$, т.е.

$$\bar{\rho} = - \frac{d\rho_0}{dx_3} \cdot 2 \varepsilon^2 k^2 \varepsilon_2^2 \cdot \frac{\omega_{030}}{\omega_{01}^2 + \varepsilon_2^4 \cdot \omega_{030}^2} \frac{d}{dx_3} (\varphi_{10} \cdot \varphi_{10}^*) \cdot \int_0^{+\infty} A_1 A_1^* dt' \quad (23)$$

Таким образом, внутренние волны при наличии турбулентности производят накапливающуюся со временем необратимую деформацию средней плотности, причём для высших мод такая деформация может интерпретироваться как тонкая структура, генерируемая волной. Сделаем оценку интеграла в (23), учитывая, что $A_1 \cdot A_1^* = A_1 \cdot A_1^* \cdot \exp(-2\varepsilon_2^2 |\delta\omega_{03}| \cdot \tau)$, тогда в пределе слабонелинейной плоской волны (при $A = A_0 = \text{const}$) (23) преобразуется к виду:

$$\bar{\rho} = - \frac{d\rho_0}{dx_3} \cdot \frac{k^2}{\omega_{01}^2 + \varepsilon_2^4 \cdot \omega_{030}^2} \frac{d}{dx_3} (\varphi_{10} \cdot \varphi_{10}^*) \cdot \varepsilon^2 A_0 A_0^* \quad (24)$$

На рис. 3 представлен профиль необратимой поправки к средней плотности у внутренних волн низшей моды с периодом 1 час. У второй моды волн с периодом 1 ч профиль вертикальной составляющей скорости стоксова дрейфа показан на рис. 4. У второй моды вертикальная составляющая скорости стоксова дрейфа выше, чем у первой при той же частоте и максимальной амплитуде волны. С уменьшением частоты волны вертикальная составляющая скорости стоксова дрейфа уменьшается при той же максимальной амплитуде волны, в частности, у двадцатиминутных внутренних волн второй моды вертикальная составляющая скорости стоксова дрейфа выше, чем у волн с периодом 1 ч второй моды (рис. 5а). У десятиминутных внутренних волн низшей моды вертикальная составляющая скорости стоксова дрейфа больше, чем у волн с периодом 1 ч и у второй моды двадцатиминутных внутренних волн (рис. 5б).

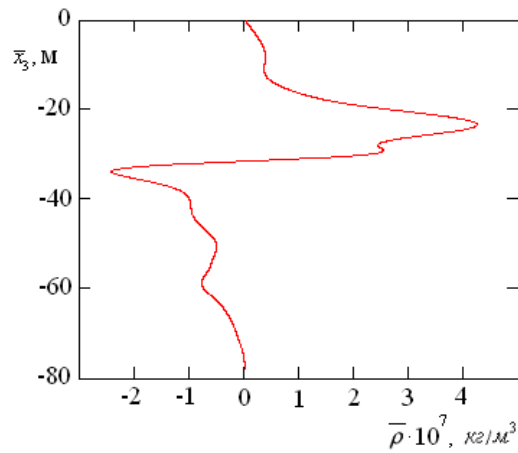


Рис. 3. Необратимая неосциллирующая поправка к средней плотности.

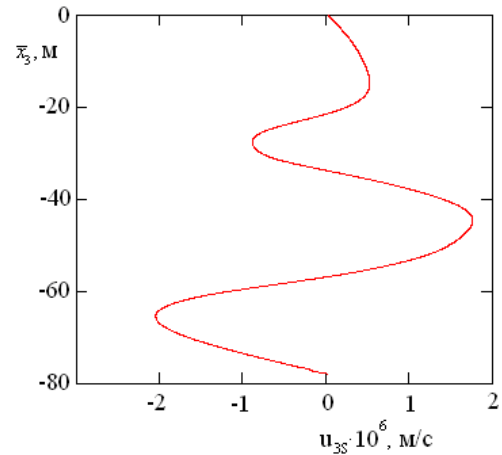


Рис. 4. Вертикальная компонента скорости стокова дрейфа у волны второй моды.

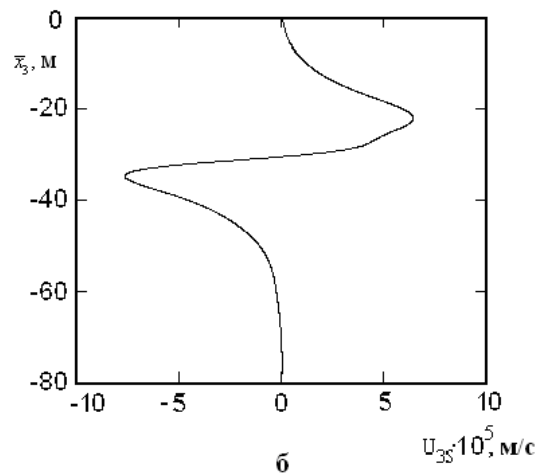
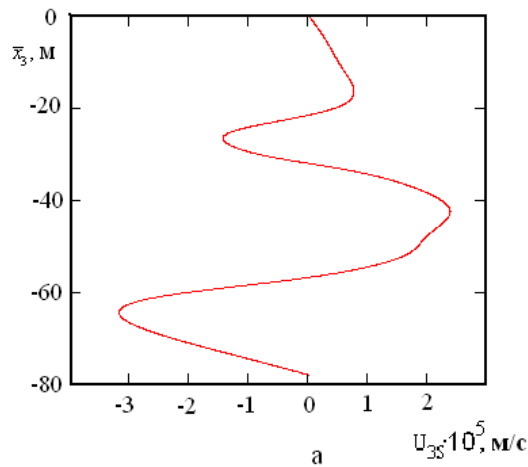


Рис. 5. Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа у двадцатиминутных внутренних волн второй моды (а) и у десятиминутных внутренних волн первой моды (б).

Такие, казалось бы, маленькие скорости вертикального переноса обуславливают значимый поток массы. На рис. 6 представлены вертикальные потоки тепла и соли у пятнадцатиминутных внутренних волн низшей моды. На этом же рисунке показаны профили и турбулентных потоков тепла и соли.

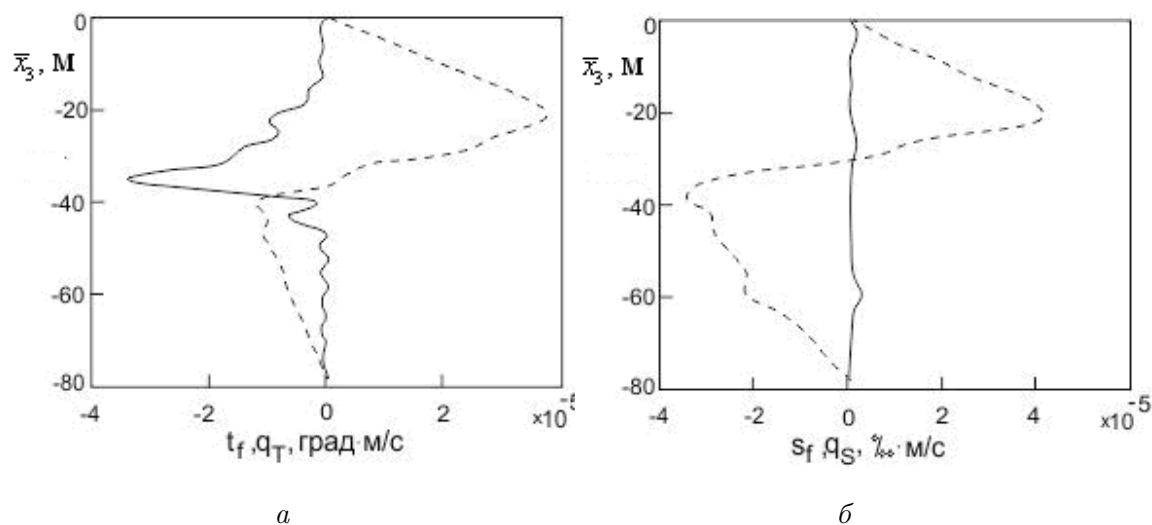


Рис. 6. Профили турбулентных и волновых (пунктирная линия) потоков а - тепла, б - соли.

Турбулентные потоки тепла и соли определялись по формулам:

$$t_f = -M_3 \frac{dT_0}{dx_3}, \quad s_f = -M_3 \frac{dS_0}{dx_3}.$$

Волновой поток тепла определялся по формуле $q_T = \overline{u_3 T} + T_0(x_3)u_{3s}$ ($T_0(x_3)$ — средний профиль температуры, u_{3s} — вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа, T — волновое возмущение температуры, черта сверху означает осреднение по периоду волны). Аналогичным образом определялся поток соли q_s . Причём, определяющий вклад в вертикальный волновой перенос вносит вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа.

Выводы

1. Вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа при учёте турбулентной вязкости и диффузии отлична от нуля и вносит определяющий вклад в волновой перенос.
2. С увеличением частоты волны или номера моды вертикальная составляющая скорости стокова дрейфа возрастает при неизменной максимальной амплитуде волны.
3. За счёт вертикальной составляющей скорости стокова дрейфа происходит накапливающаяся деформация профиля средней плотности, которая для высших мод может трактоваться, как необратимая тонкая структура. Это может быть объяснением наблюдаемой тонкой структуры в океане.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. — М.: Мир, 1981. — Ч. 1. — 478 с.
- [2] Борисенко Ю. Д. , Воронович А.Г. , Леонов А.И. , Миропольский Ю.З. К теории нестационарных слабонелинейных внутренних волн в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР ФАО. — 1976. — Т. 12. — No. 3. — С. 293–301.
- [3] Grimshaw R. The modulation of an internal gravity wave packet and the resonance with the mean motion.// Stud. In Appl. Math. — 1977. — V. 56. — P. 241–266.
- [4] Черкесов Л.В. Гидродинамика волн, Киев: Наукова Думка, 1980. — 259 с.
- [5] Задорожный А.И. Затухание длинных волн в экспоненциально стратифицированном море // Морские гидрофизические исследования. — 1975. — No. 3. — С. 96–110.
- [6] Слепышев А.А., Мартынова И.С. Нелинейные эффекты при распространении внутренних волн с учётом турбулентной вязкости и диффузии // Морской гидрофизический журнал. — 2009. — No. 5. — С. 3–22.
- [7] Longuet – Higgins M.S. On the transport of mass by time varying current // Deep Sea Res. — 1969. — V. 16. — No. 5. — P. 431–447.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 125–131.

УДК 517.925.51

О. В. Анашкин, О. В. Митько

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Рассматривается нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. На основе прямого метода Ляпунова получены достаточные условия неустойчивости нулевого решения.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с импульсным воздействием, неустойчивость, прямой метод Ляпунова.

ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием описывают поведение развивающихся во времени процессов разнообразной природы, которые могут почти мгновенно изменять свое состояние. Решения этих уравнений имеют разрывы первого рода в фиксированные или нефиксированные (зависящие от фазовых координат) моменты импульсного воздействия. Теория уравнений с импульсным воздействием строится по аналогии с классической теорией обыкновенных дифференциальных уравнений, но имеет заметные специфические отличия. Первые итоги развития теории уравнений с импульсным воздействием подведены в монографиях [1], [2] и других. Одним из важнейших направлений развития является теория устойчивости. Прямой метод Ляпунова является весьма эффективным инструментом исследования устойчивости решений уравнений с импульсным воздействием. К настоящему времени получены различные аналоги теорем прямого метода Ляпунова для обыкновенных дифференциальных уравнений, в частности, теоремы о существовании функций Ляпунова [3], а также принципиально новые результаты, существенно использующие специфику импульсного воздействия [1], [2]. Найти функцию Ляпунова для конкретной системы уравнений обычно очень непросто.

Поэтому вывод условий устойчивости, допускающих более широкий класс вспомогательных функций, всегда остается актуальным направлением исследований, имеющим важное практическое значение.

Настоящая работа продолжает исследования авторов [4, 5], распространяющих на уравнения с импульсным воздействием метод обобщенных функций Ляпунова [6]–[8]. Такие функции удовлетворяют менее ограничительным требованиям, чем классические функции Ляпунова и это облегчает подбор таких функций. Получены новые достаточные условия неустойчивости, обобщающие известные в литературе результаты.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Систему с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени принято записывать в виде

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x), \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta x|_{t=\tau_k} &= h_k(x),\end{aligned}\tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots$ — моменты импульсного воздействия, $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \theta > 0$, $\Delta x|_{t=\tau_k} = x(\tau_k + 0) - x(\tau_k - 0)$ — скачок решения $x(t)$ в момент τ_k , $k = 1, 2, \dots$. Система имеет нулевое решение: $f(t, 0) = h_k(0) = 0$. Предполагается, что решения системы (1) непрерывны слева, т. е. $x(t) = x(t - 0)$, функции $f(t, x)$ и $h_k(x)$ удовлетворяют условию Липшица в некоторой окрестности нуля $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ равномерно по $t \in \mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ и $k = 1, 2, \dots$. Как обычно, $x(t; t_0, x^0)$ обозначает решение задачи Коши для системы (1) с начальным условием $x(t_0) = x^0$.

Обозначим через $B_r \subset \mathbb{R}^n$ открытый шар радиуса r с центром в нуле (r -окрестность нуля), $B_r = \{|x| < r\}$. Здесь и далее $|\cdot|$ — норма в $\mathbb{R}^n$.

Нулевое решение системы (1) назовем

- *устойчивым*, если для любых $\varepsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что для любого $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;
- *равномерно устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\delta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;
- *равномерно притягивающим*, если некоторого $\eta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\sigma(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых $t_0 \geq 0$ и $x^0 \in B_\eta$ $x(t; t_0, x^0) \in B_\varepsilon$ при всех $t \geq t_0 + \sigma(\varepsilon)$;
- *равномерно асимптотически устойчивым*, если оно является равномерно устойчивым и равномерно притягивающим.

Решение, не являющееся устойчивым, называется *неустойчивым*.

Большинство публикаций, посвященных задаче об устойчивости, содержит теоремы об условиях различных типов асимптотической устойчивости. Понятие асимптотической устойчивости наиболее часто применяется в приложениях. Тем не менее, как теоретический, так и практический интерес представляют результаты об

условиях неустойчивости. В монографии [1] имеется раздел, посвященный прямо-му методу Ляпунова, где даны доказательства нескольких теорем о неустойчивости. Отметим, что там рассматривается более сложный класс систем с импульсным воз-действием на поверхностях, но, с другой стороны, вспомогательные функции пред-полагаются непрерывно дифференцируемыми всюду в пространстве $\{(t, x)\}$. Мы будем использовать разрывные функции Ляпунова, допускающие разрывы первого рода по времени в моменты импульсных воздействий.

Обозначим $\mathcal{G} = \mathcal{D} \times \mathbb{R}_+$ область определения системы (1). Областью положи-тельности функции $v: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, $v(t, 0) \equiv 0$, назовем множество $\{v > 0\} = \{(t, x) \in \mathcal{G}: v(t, x) > 0\}$. Будем говорить, что область $\{v > 0\}$ примыкает к нулю, если при всяком $t \geq 0$ и сколь угодно малом $\rho > 0$ множество $\{v > 0\}_t = \{x \in \mathcal{D}: v(t, x) > 0\}$ имеет открытое пересечение со сферой $\{|x| = \rho\}$.

Теорема 1 ([1], с.139). *Если существует функция $v(t, x)$ с примыкающей к нулю областью положительности, ограниченная в этой области и удовлетворяющая в ней условиям*

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial x} f(t, x) \geq 0, \quad (2)$$

$$v(\tau_k, x + h_k(x)) - v(\tau_k, x) \geq \psi(v(\tau_k, x)), \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3)$$

где $\psi(s)$ — непрерывная при $s \geq 0$ функция, $\psi(0) = 0$, $\psi(s) > 0$ при $s > 0$, то нулевое решение системы уравнений (1) неустойчиво.

Целью настоящей работы является доказательство теоремы о достаточных условиях неустойчивости нулевого решения системы (1), существенно обобщаю-щей сформулированный результат и значительно расширяющей класс подходящих функций.

ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Обозначим через $\mathcal{K}$ «класс Хана» — множество всех непрерывных строго воз-растающих функций $a: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, $a(0) = 0$, и введем в рассмотрение множество $\mathcal{T} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (\tau_k, \tau_{k+1})$. Чтобы не обсуждать возможные патологии, будем считать, что моменты импульсного воздействия τ_k распределены более или менее равномерно, а именно, пусть

$$0 < \theta_1 \leq \tau_{k+1} - \tau_k \leq \theta_2,$$

для некоторых положительных постоянных $\theta_1 \leq \theta_2$.

В дальнейшем существенную роль играет *линеаризация* системы (1) в нуле

$$\begin{aligned} \dot{y} &= A(t)y, \quad t \neq \tau_k, \\ \Delta y|_{t=\tau_k} &= B_k y, \end{aligned} \quad (4)$$

где $|f(t, y) - A(t)y| = o(|y|)$, $|h_k(y) - B_k y| = o(|y|)$ при $|y| \rightarrow 0$ равномерно по $t \geq 0$ и $k = 1, 2, \dots$

Пусть $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ — кусочно-непрерывная на отрезке $J \subset \mathbb{R}$ функция, имеющая на нем не более конечного числа разрывов первого рода. Обозначим

$$\|\varphi\|_J = \sup\{|\varphi(t)|, t \in J\}$$

норму $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}^n$ в пространстве $KC(J)$ всех таких функций.

Используя лемму Гронуолла, легко получить оценку роста нормы решения системы (1) на произвольном конечном отрезке $J = [t_0, t_0 + T]$: $|x(t; t_0, x^0)| \leq |x^0| \text{Const}$, где Const зависит только от длины промежутка J . Оценку нормы разности решений систем (1) и (4) на отрезке J можно получить при помощи теоремы 2.5 из [1, стр. 19] (теорема 4 в [2, стр. 25]):

$$|x(t; t_0, x^0) - y(t; t_0, x^0)| \leq \|x - y\|_J = o(|x^0|) \text{ при } |x^0| \rightarrow 0. \quad (5)$$

При этом оценка равномерна относительно $t_0 \geq 0$ и x^0 из заданной окрестности нуля и зависит только от величины T .

Достаточные условия неустойчивости нулевого решения уравнения (1) мы будем формулировать в терминах свойств вспомогательной функции $V(t, x)$, которая в точках $t = \tau_k$ может иметь разрывы первого рода и является непрерывной слева при всех $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 2. Пусть существуют постоянные $\tau \geq 0$, $\gamma > 0$ и функции $V, \Phi: [\tau, \infty) \times B_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $b \in \mathcal{K}$ такие, что:

- (i) функция V обладает примыкающей к нулю областью положительности $\{V > 0\}$ и $V(t, x) \leq b(|x|)$ в области $\{V > 0\}$;
- (ii) $\dot{V}\Big|_{(1)}(t, x) \geq \Phi(t, x)$ в области $\mathcal{T} \times B_\gamma$;
- (iii) существуют постоянные $d > 1$ и $M > 0$ такие, что

$$|\Phi(t, x)| \leq M|x|^d, \quad |\Phi(t, x') - \Phi(t, x'')| \leq Mr^{d-1}|x' - x''|$$

для $(t, x'), (t, x'') \in \mathcal{T} \times B_r$ при всяком $r \in (0, \gamma)$;

- (iv) существуют постоянные $T_0 > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что для всех (t_0, x^0) из области положительности $\{V > 0\}$ при $\Delta t \geq T_0$

$$\int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} \Phi(t, y(t; t_0, x^0)) dt \geq \delta_0 |x^0|^d \Delta t$$

где $y(t; t_0, x^0)$ — решение линеаризации (4);

- (v) $V(\tau_k, x + h_k(x)) - V(\tau_k, x) \geq 0$, $k = 1, 2, \dots$

Тогда нулевое решение системы (1) неустойчиво.

Доказательство. Обозначим $x(t; t_0, x^0)$ и $y(t; t_0, x^0)$ решения систем (1) и (4), соответственно, проходящие через точку $(t_0, x^0) \in \mathcal{G}$. Предположим, что теорема не верна и нулевое решение системы (1) устойчиво. Тогда любая траектория, выходящая из достаточно малой окрестности нуля будет оставаться в шаре B_γ и условия теоремы будут выполняться при всех $t > \tau$. Для краткости обозначим $x(t) = x(t; t_0, x^0)$, $y(t) = y(t; t_0, x^0)$.

Как известно [1, стр. 20], решение $x(t; t_0, x^0)$ системы (1) с начальными значениями t_0, x^0 может быть представлено в виде

$$x(t; t_0, x^0) = x^0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds + \sum_{t_0 \leq \tau_k < t} h_k(x^k), \quad (6)$$

где $x^k = x(\tau_k)$, $k = 1, 2, \dots$

По аналогии с (6) и с учетом условий теоремы получаем следующее неравенство

$$\begin{aligned} V(t, x(t)) &\geq V(t_0, x^0) + \int_{t_0}^t \Phi(s, x(s)) ds = \\ &= V(t_0, x^0) + \int_{t_0}^t \Phi(s, y(s)) ds + \int_{t_0}^t |\Phi(s, x(s)) - \Phi(s, y(s))| ds. \end{aligned} \quad (7)$$

Учитывая оценку (5) и условия теоремы можно показать, что при достаточно малом $\epsilon_0 > 0$ для $t_0 \geq \tau$ и $x^0 \in B_{\epsilon_0}$ таких, что $V(t_0, x^0) > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{t_0}^{t_0+T_0} \Phi(t, x(t; t_0, x^0)) dt \geq \frac{\delta_0}{2} |x^0|^d T_0 > 0. \quad (8)$$

Для сколь угодно малого $\eta > 0$ ($\eta < \epsilon_0$) можно выбрать $x^0 \in B_\eta$ так, что $V_0 = V(t_0, x^0) > 0$. Положим $t_k = t_0 + kT_0$, $k = 0, 1, \dots$. Принимая во внимание (7), (8), для всякого k получим оценку роста функции V в точках $(t_k, x(t_k))$

$$b(|x(t_k)|) \geq V(t_k, x(t_k)) \geq V(t_{k-1}, x(t_{k-1})) + \frac{\delta_0}{2} |x^{k-1}|^d T_0 > V_0.$$

Или

$$V(t_k, x(t_k)) \geq V(t_0, x(t_0)) + \frac{\delta}{2} T_0 \sum_{s=0}^{k-1} |x^s|^d > V_0.$$

Поскольку $|x(t_s)| > b^{-1}(V_0)$, $s = 1, \dots, k$, то $|x(t_k)| > \epsilon_0/2$ для достаточно большого k . В силу произвольной малости $|x^0|$ отсюда следует вывод о неустойчивости нулевого решения системы (1). $\square$

Функция Ляпунова, удовлетворяющая теореме 1, удовлетворяет и требованиям доказанной теоремы. Поэтому доказанная теорема является обобщением теоремы 1 для систем с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье получены достаточные условия неустойчивости нулевого решения нелинейной системы с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени. Условия устойчивости формулируются в терминах свойств функции Ляпунова, которая допускает немонотонное изменение вдоль решения импульсной системы и сама может иметь разрывы первого рода по времени. Таким образом существенно расширяется класс подходящих функций Ляпунова и это может облегчить построение таких функций для конкретных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — Киев, Вища школа, 1987. — 288 с.
- [2] Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью / [Н. А. Перестюк, В. И. Плотников, А. М. Самойленко, Н. В. Скрипник]. — К.: Ин-т математики НАН Украины, 2007. — 428 с.
- [3] Игнатьев А. О. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости решений систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием / А. О. Игнатьев // Матем. сборник. — 2003. — Т. 194, № 10. — С. 117-132.
- [4] Анашкин О. В. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений при наличии импульсных воздействий / О. В. Анашкин, Т. В. Довжик, О. В. Митько // Динамические системы. - 2010. - Вып. 28. - С. 3-8.
- [5] Анашкин О. В. Второй метод Ляпунова в теории устойчивости систем с импульсным воздействием / О. В. Анашкин, Т. В. Довжик, О. В. Митько // Таврический вестник информатики и математики. - 2010. - № 2. - С. 9-16.
- [6] Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости: Исследование резонансных многочастотных систем / М. М. Хапаев. — М.: Наука, 1986. — 192 с.
- [7] Хапаев М. М. Асимптотические методы и устойчивость в теории нелинейных колебаний / М. М. Хапаев. — М.: Высшая школа, 1988. — 184 с.
- [8] Анашкин О. В. Об устойчивости в системах с импульсными воздействиями, содержащих возмущения // Тез. конф. "Моделирование и исследование устойчивости физич. процессов". — К.: Об-во "Знание". — 1990. — С. 3-4.

Нестійкість в системах з імпульсним впливом

Розглядається нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь з імпульсним впливом у фіксовані моменти часу. На основі прямого методу Ляпунова отримані достатні умови нестійкості нульового рішення.

Ключові слова: диференціальні рівняння з імпульсним впливом, нестійкість, прямий метод Ляпунова.

Instability in systems with impulse effect

The problem of stability of the zero solution of a nonlinear system of ordinary differential equations with impulse effect at fixed times is considered. Sufficient conditions for instability of the zero solution are obtained by Lyapunov's direct method.

Keywords: differential equations with impulse effect, instability, Lyapunov's direct method.

СОДЕРЖАНИЕ

М. В. Ахрамович ПОДОБИЕ ПАР q – КОММУТИРУЮЩИХ НИЛЬПОТЕНТ- НЫХ МАТРИЦ	1
Е. П. Белан, О. В. Шиян УСТОЙЧИВЫЕ РЕЖИМЫ ГОРЕНИЯ ВДОЛЬ ПОЛОСЫ ...	7
А. С. Векслер, М. А. Муратов, Б. А. Рубштейн СХОДИМОСТЬ С РЕГУЛЯТОРОМ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ	23
В. И. Войтицкий О НОРМАЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЯХ ТЯЖЕЛОЙ СВЕРХТЕКУ- ЧЕЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ СОСУДЕ	35
И. В. Горохова АСИМПТОТИКА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ СТЕРЖНЯ С НАГРУЖЕННЫМИ КОНЦАМИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВЯЗ- КОГО ТРЕНИЯ	51
А. И. Криворучко ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП ОТРАЖЕ- НИЙ	59
Ю. Л. Кудряшов МИНИМАЛЬНОСТЬ σ — СИММЕТРИЧЕСКОЙ ДИЛАТА- ЦИИ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА	71
Е. М. Кузьменко УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ И КОМПАКТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАН- СТВАХ СОБОЛЕВА $W^{1,p}(\Omega)$	76
К. К. Муминов Р. А. Гаффоров ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ПУТЕЙ ОТ- НОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПСЕВДООР- ТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ	90

Д. П. Проскурин

О *-ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ВИКОВСКОГО АНАЛОГА ССР ... 101

А. А. Слепышев, А. В. Носова, В. О. Подрыга

**ВОЛНОВОЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС ПРИ УЧЕТЕ ТУР-
БУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ И ДИФФУЗИИ 112**

О. В. Анашкин, О. В. Митько

**НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В СИСТЕМАХ С ИМПУЛЬСНЫМ
ВОЗДЕЙСТВИЕМ 125**