Журнал основан в 1918 г.

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Научный журнал

Том 23 (62). 2

Физико-математические науки

Симферополь, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, 2010

ISSN 1606-3716
Свидетельство о регистрации – серия КВ №15717-4188Р
от 28 сентября 2009 года

Редакционная коллегия журнала:

Багров Н. В. - главный редактор журнала
Шульгин В. Ф. - заместитель главного редактора
Дзедолик И. В. - ответственный секретарь

Редакционный совет серии "Физико-математические науки":

Копачевский Н. Д.	доктор физико-математических наук, профессор (редактор раздела «Математика»)
Орлов И. В.	доктор физико-математических наук, профессор (заместитель редактора раздела «Математика»)
Анашкин О.В.	доктор физико-математических наук, доцент
Белан Е.П.	доктор физико-математических наук, доцент
Донской В. И.	доктор физико-математических наук, профессор
Муратов М.А.	доктор физико-математических наук, доцент
Рудницкий О. И.	кандидат физико-математических наук, доцент
Самойленко Ю. С.	доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент НАН Украины
Старков П. А.	кандидат физико-математических наук, доцент (отв. секретарь раздела «Математика»)
Чехов В. Н.	доктор физико-математических наук, профессор

**Печатается по решению Ученого совета университета,
протокол № 12 от 22 декабря 2010 г.**

"Вчені записки Таврійського національного університету імені В. І. Вернадського"
Науковий журнал. Том 23 (62). №2. Серія "Фізико-математичні науки".
Сімферополь, Таврійський національний університет імені В. І. Вернадського, 2010
Журнал заснований у 1918 р.
Адреса редакції: пр. Академіка Вернадського, 4, м. Сімферополь, 95007
Надруковано у інформаційно-видавницькому відділі Таврійського національного університету
імені В. І. Вернадського. пр. Академіка Вернадського, 4, м. Сімферополь, 95007
e-mail: dmath@list.ru

© Таврический национальный университет, 2010 г.

Подписано в печать Формат 70x100 $^{1}/_{16}$
усл. п. л. уч.-изд. л. Тираж 300. Заказ № _____.
Отпечатано в информационно-издательском отделе ТНУ.
пр. Академіка Вернадського, 4, г. Симферополь, 95007

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 1–7.

УДК 517.9

О. В. Анашкин, А. В. Шульгин

ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КВАДРАТИЧНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Рассматривается задача об устойчивости квадратичного разностного уравнения с постоянным запаздыванием. Коэффициенты уравнения являются почти-периодическими функциями дискретного аргумента. Исследование проводится путем построения так называемой возмущенной функции Ляпунова. Получены достаточные условия устойчивости исследуемого уравнения в виде числового индекса, формула которого показывает характер зависимости от коэффициентов уравнения и величины запаздывания.

Ключевые слова: разностные уравнения с запаздыванием, критерий устойчивости, прямой метод Ляпунова.

Введение

Разностные уравнения с запаздыванием сравнительно легко сводятся к разностным уравнениям без запаздывания более высокого порядка. Но такое сведение всегда предполагает фиксацию величины запаздывания, определяющего порядок нового уравнения. Это значительно усложняет изучение зависимости свойств решений от величины запаздывания. Поэтому для уравнений с запаздыванием следует развивать специальные методы исследования.

Для исследования устойчивости разностных уравнений широко применяется метод функций Ляпунова (см., например, работы [1]–[10] и литературу в них). В настоящей статье применен метод обобщенных функций Ляпунова, развитый для неавтономных разностных уравнений с запаздыванием, записываемых в специальной форме, охватывающей все возможные типы зависимости от запаздывания [2, 3].

Получены близкие к необходимым достаточные условия устойчивости квадратичного разностного уравнения с постоянным запаздыванием и почти-периодическими коэффициентами.

Постановка задачи

Пусть $\mathbb{Z}$ есть множество всех целых чисел, $J[a,b] \subset \mathbb{Z}$ — множество целых чисел на сегменте $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел. Обозначим $\mathfrak{M}_p$ пространство отображений множества $J[-p,0]$ в $\mathbb{R}^n$. Любое такое отображение определяется заданием вещественной $n \times (p+1)$-матрицы $\varphi = (\varphi(-p), \dots, \varphi(0))$. Введем в линейном пространстве $\mathfrak{M}_p$ норму $\|\varphi\| = \max\{|\varphi(s)| : s \in J[-p,0]\}$, где $|\cdot|$ есть какая-либо норма в $\mathbb{R}^n$. Для данной последовательности $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^n$, $k \mapsto x(k)$, обозначим $x[k]$ элемент пространства $\mathfrak{M}_p$, определенный как отрезок последовательности x: $x[k](s) = x(k+s)$, $s = -p, \dots, 0$.

Мы будем рассматривать разностные уравнения с запаздыванием, записанные в форме

$$\Delta x(k) = f(k, x[k]), \quad k = \sigma, \sigma+1, \dots, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$, функция $f : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}^n$ для каждого $k \in \mathbb{Z}$ определена в области $\mathfrak{B}_H^p = \{\|\varphi\| < H\} \subset \mathfrak{M}_p$ и существуют постоянные $M > 0$ и $d_0 > 1$ такие, что $|f(k,\varphi)| \le M\|\varphi\|^{d_0}$ для всех $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathfrak{B}_H^p$.

Обозначим

$$\Delta v|_{(1)}(\sigma,\varphi) = v(\sigma+1, x(\sigma,\varphi)[\sigma+1]) - v(\sigma,\varphi)$$

первую разность вперед функции $v : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}^n$ *в силу уравнения* (1). Здесь $x(\sigma,\varphi)$ обозначает решение уравнения (1), удовлетворяющее условию

$$x(\sigma,\varphi)[\sigma] = \varphi.$$

Пусть e_x есть функция-константа из пространства $\mathfrak{M}_q$, т.е. $e_x(s) = x$, для $-q \le s \le 0$. Для числовой функции $\Phi : \mathbb{Z} \times \mathfrak{M}_p \to \mathbb{R}$, $(t,\varphi) \mapsto \Phi(t,\varphi)$, обозначим

$$\widehat{\Phi}(x) = \mathcal{M}_k\{\Phi\}(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \Phi(k, e_x) \tag{2}$$

среднее значение функции Φ по k на $\mathbb{Z}_+$ при постоянном значении второго аргумента, если указанный предел существует. Среднее $\widehat{\Phi}$ есть числовая функция, заданная в $\mathbb{R}^n$, или константа, если Φ зависит только от k.

В статье рассматривается квадратичное разностное уравнение

$$\Delta x(k) = a(k)x^2(k) + b(k)x(k)x(k-h) + c(k)x^2(k-h) \tag{3}$$

с постоянным запаздыванием $h \ge 0$. Коэффициенты уравнения — почти-периодические функции вида

$$a(k) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} a_\nu \exp(i\nu k), \quad b(k) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} b_\nu \exp(i\nu k), \quad c(k) = \sum_{\nu\in\mathcal{N}} c_\nu \exp(i\nu k), \tag{4}$$

где $i^2 = -1$, a_ν, b_ν, c_ν — комплексные числа, причем $a_{-\nu}$ и a_ν комплексно сопряжены, то же верно и в отношении b_ν, c_ν. Предполагается, что множество $\mathcal{N}$ обладает

свойствами: $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{N} = -\mathcal{N}$, $0 \in \mathcal{N}$, множества $\mathcal{N}$ и $\mathcal{N} + \mathcal{N}$ не содержат чисел, кратных 2π.

Если среднее $\mathcal{M}_k\{a(k)+b(k)+c(k)\}$ суммы коэффициентов уравнения (3) отлично от нуля, то легко показать, что уравнение (3) имеет неустойчивое нулевое решение. Поэтому мы предполагаем, что среднее суммы коэффициентов равно нулю

$$\mathcal{M}_k\{a(k) + b(k) + c(k)\} = \widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = 0.$$

Частный случай, когда $\widehat{a} = \widehat{b} = \widehat{c} = 0$, был исследован в недавней статье авторов [6]. В настоящей работе мы не накладываем никаких ограничений на индивидуальные средние $\widehat{a}$, $\widehat{b}$ и $\widehat{c}$, кроме условия раавенства нулю их суммы.

Условия устойчивости

Далее будем использовать более компактные обозначения:

$$x' \equiv x(k+1), \quad x \equiv x(k), \quad x_h \equiv x(k-h).$$

В этих обозначениях уравнение (3) примет вид

$$\Delta x = ax^2 + bxx_h + cx_h^2. \tag{5}$$

Слегка преобразуем правую часть этого уравнения. Обозначим

$$\widetilde{a} = a - \widehat{a}, \quad \widetilde{b} = b - \widehat{b}, \quad \widetilde{c} = c - \widehat{c}, .$$

Теперь правую часть (5) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} ax^2 + bxx_h + cx_h^2 = \\ = \widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}xx_h + \widetilde{c}x_h^2 + (\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c})x_h^2 + \widehat{a}(x^2 - x_h^2) + \widehat{b}x_h(x - x_h) = \\ = \widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}xx_h + \widetilde{c}x_h^2 + [\widehat{a}(x + x_h) + \widehat{b}x_h](x - x_h). \end{aligned} \tag{6}$$

Принимая во внимание (6) и равенство

$$x - x_h = \sum_{s=1}^{h} \Delta x_s = \sum_{s=1}^{h} (ax_s^2 + bx_s x_{s+h} + cx_{s+h}^2), \tag{7}$$

запишем уравнение (5) в виде

$$\Delta x = \widetilde{a}x^2 + \widetilde{b}xx_h + \widetilde{c}x_h^2 + [\widehat{a}(x + x_h) + \widehat{b}x_h] \sum_{s=1}^{h} (ax_s^2 + bx_s x_{s+h} + cx_{s+h}^2). \tag{8}$$

Таким образом мы видим, что главные в малой окрестности нуля фазового пространства $\mathfrak{M}_q$ ($q > 2h$) уравнения (8) квадратичные слагаемые в правой части (8) имеют коэффициенты $\widetilde{a}$, $\widetilde{b}$, $\widetilde{c}$ с нулевым средним. Поэтому после приведения уравнения (5) к виду (8) мы можем воспользоваться рассуждениями работы [6].

Обозначим

$$\widetilde{A}(k)=\sum_{s=0}^{k-1}\widetilde{a}(s),\quad \widetilde{B}(k)=\sum_{s=0}^{k-1}\widetilde{b}(s),\quad \widetilde{C}(k)=\sum_{s=0}^{k-1}\widetilde{c}(s). \tag{9}$$

Чтобы получить условие, при котором нулевое решение уравнения (8) асимптотически устойчиво, возьмем за основу конструкции подходящей функции Ляпунова квадратичную функцию $V_0=x^2/2$. Вычисляя первую разность функции V_0 в силу уравнения (8), получим

$$\Delta V_0|_{(8)}=\widetilde{a}x^3+\widetilde{b}x^2x_h+\widetilde{c}xx_h^2+\frac{(\Delta x)^2}{2}+x[\widehat{a}(x+x_h)+\widehat{b}x_h]\sum_{s=1}^{h}(ax_s^2+bx_sx_{s+h}+cx_{s+h}^2)=$$

$$=\Phi_0(k,x[k])+\frac{(\Delta x)^2}{2}+x[\widehat{a}(x+x_h)+\widehat{b}x_h]\sum_{s=1}^{h}(ax_s^2+bx_sx_{s+h}+cx_{s+h}^2). \tag{10}$$

Среднее $\widehat{\Phi}_0(x_0)=0$. Для уничтожения в (10) слагаемого $\Phi_0(k,x[k])$ с нулевым средним построим возмущенную функцию [6]

$$V_1(k,x[k])=V_0(x(k))+u(k,x[k]),$$

где возмущение $u(k,x[k])$ имеет такую же структуру как и $\Phi_0(k,x[k])$:

$$u(k,x[k])=-\left[\widetilde{A}'x^3+\widetilde{B}'x^2x_h+\widetilde{C}'xx_h^2\right].$$

При таком выборе коэффициентов возмущения $u(k,x[k])$ получим

$$\Delta V_1|_{(8)}=\frac{(\Delta x)^2}{2}-\widetilde{A}'\Delta(x^3)-\widetilde{B}'\Delta(x^2x_h)-\widetilde{C}'\Delta(xx_h^2)+$$

$$+x[\widehat{a}(x+x_h)+\widehat{b}x_h]\sum_{s=1}^{h}(ax_s^2+bx_sx_{s+h}+cx_{s+h}^2). \tag{11}$$

Оставляя в выражениях для первых разностей в правой части последней формулы, только одночлены наименьшей (4-й) степени, получим

$$\Delta V_1|_{(8)}=\Phi_1(k,x[k])+\ldots=$$

$$=\frac{(\Delta x)^2}{2}-\left[3\widetilde{A}'x^2\Delta x+\widetilde{B}'(2xx_h\Delta x+x^2\Delta x_h)+\widetilde{C}'(2xx_h\Delta x_h+x_h^2\Delta x)\right]+$$

$$+x[\widehat{a}(x+x_h)+\widehat{b}x_h]\sum_{s=1}^{h}(ax_s^2+bx_sx_{s+h}+cx_{s+h}^2)+\ldots. \tag{12}$$

Учетывая, что среднее (2) выражения

$$x[\widehat{a}(x+x_h)+\widehat{b}x_h]\sum_{s=1}^{h}(ax_s^2+bx_sx_{s+h}+cx_{s+h}^2)$$

равно нулю, получим такую же формулу для среднего $\mathcal{M}_k\{\Phi_1(k, e_{x_0})\}$, что и в частном случае, рассмотренном в [6]:

$$\mathcal{M}_k\{\Phi_1(k, e_{x_0})\} = x_0^4\mathcal{I} = x_0^4\mathcal{M}_k\Big\{\frac{(a+b+c)^2}{2} - \\ - (3\widetilde{A}' + 2\widetilde{B}' + \widetilde{C}')(a+b+c) - (2\widetilde{C}' + \widetilde{B}')(a_h+b_h+c_h)\Big\}. \quad (13)$$

Из теорем об устойчивости, приведенных в [6] следует, что характер устойчивости нулевого решения уравнения (3) определяется знаком *индекса устойчивости* $\mathcal{I}$: при $\mathcal{I} < 0$ нулевое решение асимптотически устойчиво, при $\mathcal{I} > 0$ — неустойчиво.

В [6] получена явная формула зависимости индекса устойчивости $\mathcal{I}$ от коэффициентов разложений и запаздывания h, если функции a, b, c имеют вид (4):

$$\mathcal{I} = -2\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0}|a_\nu + b_\nu + c_\nu|^2 - \\ - 2\sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu>0}(|b_\nu|^2 + 2|c_\nu|^2)\frac{\cos(\nu(h+1)/2)\sin(\nu h/2)}{\sin(\nu/2)} + \\ + \sum_{\nu\in\mathcal{N},\nu\neq 0}[(a_{-\nu}+c_{-\nu})b_\nu + 2(a_{-\nu}+b_{-\nu})c_\nu]\,\frac{1-e^{i\nu h}}{1-e^{-i\nu}}. \quad (14)$$

Из этой формулы следует, что слагаемые, образующие правую часть уравнения (5), по-разному влияют на устойчивость. Важнейшую роль в стабилизации нулевого решения играет первое слагаемое, не зависящее от запаздывания. В указанных предположениях уравнение (5) имеет асимптотически устойчивое нулевое решение при любом запаздывании и любых коэффициентах b и c, если $\sum_{\nu\in\mathcal{N}}|a_\nu|^2$ достаточно велика. Неустойчивость нулевого решения имеет место только при наличии запаздывания h.

Чем же отличается общий случай, расмотренный в настоящей работе, от частного случая [6]? Анализируя доказательства теорем об устойчивости, опубликованные в [2, 3]. можно заметить, что максимум абсолютной величины среднего значения коэффициентов рассматриваемого уравнения существенно влияет на величину области притяжения асимптотически устойчивого нулевого решения в случае отрицательности индекса устойчивости. Это наблюдение полностью подтверждается вычислительными экспериментами, которые проводились с конкретными уравнениями вида (5). С увеличением максимума абсолютных величин индивидуальных средних $\widehat{a}$, $\widehat{b}$, $\widehat{c}$ область притяжения уменьшается. Детальному анализу численных экспериментов авторы планируют посвятить отдельную статью.

Заключение

В работе используется метод исследования устойчивости нелинейных разностных уравнений с запаздыванием, основанный на построении обобщенной функции Ляпунова. Найдены условия устойчивости (13) для скалярного квадратичного уравнения с почти-периодическими коэффициентами и постоянным запаздыванием в общем случае произвольных средних значений коэффициентов уравнения. Полученные условия устойчивости близки к необходимым, т.к. вывод об устойчивости не удается сделать только в исключительных случаях, когда выражение для индекса устойчивости (14) обращается в нуль.

Список литературы

[1] Анашкин О.В. Достаточные условия устойчивости для одного класса разностных уравнений / О.В. Анашкин // Динамические системы. – 2001. – Вып. 17. – С. 46–52.

[2] Анашкин О.В. Функции Ляпунова в теории устойчивости нелинейных разностных уравнений с запаздыванием / О.В. Анашкин // Дифференц. уравнения. – 2002. – Т. 38, No. 7. – С. 976–978.

[3] Анашкин О.В. Достаточные условия устойчивости для одного класса нелинейных разностных уравнений с запаздыванием / О.В. Анашкин // Ученые записки ТНУ, серия матем., мех., информатика и кибернетика. – 2006. – Т.19(58), No.2. – С. 12-19.

[4] Анашкин О.В. Об устойчивости разностных уравнений с запаздыванием / О.В. Анашкин, Й. Диблик // Динамические системы. – 2007. – Вып. 23. – С. 113–122.

[5] Богданов А.Ю. Исследование устойчивости почти-периодической дискретной системы на основе прямого метода Ляпунова и метода предельных уравнений / А.Ю. Богданов // Матем. моделирование. – 2009. – Т.21, No.1. – С. 25–32.

[6] Шульгин А.В. О реализации алгоритма исследования устойчивости разностного уравнения на языке компьютерной алгебры MAXIMA / А.В. Шульгин, О.В. Анашкин // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 151–160.

[7] Diblik J. Combination of Liapunov and retract methods in the investigation of the asymptotic behavior of solutions of systems of discrete equations / J. Diblik , I. Hlavickova // Dynam. Systems Appl. – 2009. – V.18, No. 3-4. – P.507–537.

[8] Diblik J. Khusainov D. Ya., Grytsay I. V., Šmarda, Z. Stability of nonlinear autonomous quadratic discrete systems in the critical case / J. Diblik, D. Ya. Khusainov, I. V. Grytsay, Z. Šmarda // Discrete Dyn. Nat. Soc., 2010, Article ID 539087, 23 p.

[9] Grytsay I.V. Instability of a zero solution of the difference system with the quadratic right-hand side / I. V. Grytsay, T. D. Khusainov // Stud. Univ. Žilina, Math. Ser., 2003. – V. 17, No. 1. – F. 87-92.

[10] Zhang S. A New Razumikhin Theorem for Delay Difference Equations / S. Zhang, M.-P. Chen // Computers and mathematics with applications. – 1998. – V. 36. – P. 405–412.

Вплив запізнення на стійкість квадратичного різницевого рівняння

Розглядається задача про стійкість квадратичного різницевого рівняння з постійним запізненням. Коефіцієнти рівняння є майже-періодичними функціями дискретного аргументу. Дослідження проводиться шляхом побудови так званої збуреної функції Ляпунова. Отримано достатні умови стійкості досліджуваного рівняння у вигляді числового індексу, формула якого показує характер залежності від коефіцієнтів рівняння і величини запізнення.

Ключові слова: різницеві рівняння із запізненням, критерій стійкості, прямий метод Ляпунова.

Influence of delay on stability of the quadratic difference equation

The problem of stability of a quadratic difference equation with constant delay is considered. Coefficients of the equation are quasi-periodic functions of a discrete argument. The study is carried out by constructing the so-called perturbed Lyapunov function. We obtain sufficient conditions for stability of the equation in the form of a numeric index, a formula which shows the dependence on coefficients and the magnitude of the delay.

Keywords: delay difference equations, stability criterion, Lyapunov's direct method.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 8–18.

УДК 517.968.7

М. В. Ахрамович, И. В. Орлов

ВАРИАНТ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ТИПА БАНАХА-ШТЕЙНГАУЗА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Получена новая теорема типа Банаха-Штейнгауза и соответствующий принцип равностепенной непрерывности в произвольных полных отделимых локально выпуклых пространствах. Рассмотрены некоторые приложения полученных результатов.

Ключевые слова: теорема Банаха-Штейнгауза, локально выпуклое пространство, проективная шкала пространств, бэровские категории, равностепенная непрерывность.

Введение

Теорема Банаха-Штейнгауза и связанный с ней принцип равномерной ограниченности (см., например, [1]) являются одними из основополагающих принципов функционального анализа, служат фундаментом многих направлений функционального анализа и его приложений.

Теорема Банаха-Штейнгауза — исторически первый абстрактный принцип линейного функционального анализа, открытый С. Банахом в 1920 году и независимо от него Г. Ханом в 1922 году (для случая $Y = \mathbb{R}$).

Первоначальная формулировка теоремы Банаха-Штейнгауза в банаховых пространствах неоднократно обобщалась. В настоящее время классической принято считать формулировку принципа равномерной ограниченности в классе бочечных пространств, содержащем, в частности, все полные метризуемые локально выпуклые пространства (ЛВП) (и, в частности, все банаховы пространства) и их индуктивные пределы ([2]-[4]).

Работы по изучению пространств, обладающих так называемым "свойством Банаха-Штейнгауза продолжаются и в настоящее время. В последние десятилетия

появились работы по "универсальным теоремам типа Банаха-Штейнгауза в которых непрерывность предельного оператора последовательности непрерывных операторов утверждается при минимальных требованиях к начальному и конечному пространствам ([5], [6]). Эти исследования активно продолжаются и в настоящее время ([7]-[10]).

В нашей работе предложен новый вариант универсальной теоремы типа Банаха-Штейнгауза, который, в небочечном случае, обобщает результаты, полученные в работе [5]. Рассмотрены некоторые приложения.

1. Основные результаты

Перед доказательством основного результата докажем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть $\{E^t\}_{t\in T}$– приведенная проективная шкала локально выпуклых пространств. Если подмножества $E^{0,t}\subset E^t$ имеют I категорию по Бэру в пространствах E^t, $t\in T$, и образуют проективную шкалу множеств (относительно вложений в исходной шкале), то множество $E^0=\varprojlim\limits_{t\in T}E^{0,t}$ также имеет I категорию по Бэру в пространстве $E=\varprojlim\limits_{t\in T}E^t$.*

Доказательство. Обозначим через $\phi_t:\ E\hookrightarrow E^t$– канонические вложения, порожденные вложениями в шкале $\{E^t\}_{t\in T}$. Как известно, ϕ_t– непрерывные и *почти открытые* линейные операторы (то есть для любой окрестности нуля $U(0)\subset E$ замыкание ее образа $\overline{\phi_t(U)}$ есть окрестность нуля в E_t, $t\in T$).

Допустим теперь, что E^0 не имеет I категории по Бэру в E. Следовательно, для любого разбиения $E^0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n^0$ найдется такой номер n_0, что замыкание $\overline{E_{n_0}^0}$ имеет внутреннюю точку в E.

Рассмотрим, для произвольного $t\in T$, разбиение $E^0=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n^t$, где E_n^t нигде не плотны в E^t (для любого $n\in\mathbb{N}$), и положим

$$E_n^0=\phi^{-1}\left(E_n^t\right)\cap E^0,\quad (n\in\mathbb{N})\,.$$

Так как

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\phi_t^{-1}\left(E_n^t\right)=\phi_t^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^t\right)=\phi_t^{-1}\left(E^t\right)=E,\ \text{то}\ E^0=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n^0.$$

Следовательно, в силу допущения, существует номер n_0 такой, что $\overline{E_{n_0}^0}$ имеет внутреннюю точку в E. Имеем:

$$\overline{\phi_t\left(\overline{E_{n_0}^0}\right)}=\overline{\phi_t\left(\overline{\phi_t^{-1}\left(E_{n_0}^t\right)\cap E^0}\right)}\subset$$
$$\subset\overline{\phi_t\left(\phi_t^{-1}\left(E_{n_0}^t\right)\right)\cap\phi_t\left(E^0\right)}=\overline{E_{n_0}^t\cap\phi_t\left(E^0\right)}\subset\overline{E_{n_0}^t}.$$

Поскольку, в силу почти открытости, замыкание $\overline{\phi_t\left(\overline{E^0_{n_0}}\right)}$ одержит внутреннюю точку, то и замыкание $\overline{E^t_{n_0}}$ также содержит внутреннюю точку. Это означает, что $E^t_{n_0}$ не является нигде не плотным в E^t, то есть мы пришли к противоречию. $\square$

Следующая теорема представляет собой обобщение теоремы VII.6.45 ([2]) на случай последовательностей операторов в полных отделимых локально выпуклых пространствах.

Теорема 1. *Пусть E и F — полные отделимые ЛВП, последовательность операторов $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L(E,F)$, поточечно сходится к оператору A на всюду плотном в E множестве. Тогда:*

1) либо $\{A_k\}$ расходится B-п.в. и даже B-п.в. неограничена;

2) либо $\{A_k\}$ поточечно сходится к A всюду на E, $A \in L(E,F)$, $\{A_k\}$ равностепенно непрерывна и $\{A_k\}$ равномерно сходится к A на каждом компакте из E.

Доказательство. Пусть E_0 — плотное подпространство в в E. Представим E и F в виде проективных пределов банаховых пространств следующим образом.
Пусть $\{\|.\|\}_{s\in S}$ и $\{\|.\|\}_{t\in T}$ —определяющие системы полунорм в E и F соответственно. Тогда $E = \varprojlim_{s\in S} \widetilde{E_s}$, $F = \varprojlim_{t\in T} \widetilde{F^t}$ где $\widetilde{E_s}$ —это фактор-пространства $(E/ker\|.\|_s)$, пополненные по соответствующим фактор-нормам, $\widetilde{F^t}$ —фактор-пространства $\left(F/ker\|.\|^t\right)$, пополненные по соответствующим фактор-нормам. При этом канонические вложения запишем в виде $e_s : E \to \widetilde{E_s}$, $f^t : F \to \widetilde{F^t}$.

Обозначим $E^0_s = e_s\left(E^0\right)$ $(\forall s \in S)$. Поскольку $E \hookrightarrow \widetilde{E_s}$, $E^0_s \hookrightarrow E$, то $E^0_s \hookrightarrow \widetilde{E_s}$.

Зафиксируем номер $k \in \mathbb{N}$. По непрерывности A_k,

$$\forall\, t \in T\ \exists\, s \in S : \left(\|h\|_s \to 0,\ h \in E^0\right) \Rightarrow \left(\|A_k h\|^t \to 0\right),$$

в частности,

$$\left(\|h\|_s = 0,\ h \in E^0\right) \Rightarrow \left(\|A_k h\|^t = 0\right),\ \text{т. е. } A_k\left(ker\|.\| \cap E^0\right) \subset ker\|.\|^t$$

(для соответствующих t и s).

Это позволяет продолжить операторы A_k до операторов $\widetilde{A}^t_{k,s(k,t)} : \widetilde{E}_s \to \widetilde{F}^t$ следующим образом:

$$A^t_{k,s(k,t)}\left(x + ker\|.\| \cap E^0\right) := A_k(x) + ker\|.\|^t\ (\forall x \in E^0).$$

Покажем непрерывность операторов $A^t_{k,s}$. Зафиксируем $t \in T,\ s \in \nu_{A_k}(t)$. По непрерывности A_k,

$$\forall\, \epsilon > 0\ \exists\, \delta > 0 :\ \left(\|h\|_s < \delta,\ h \in E^0\right) \Rightarrow \left(\|A_k h\|^t < \epsilon\right).$$

Рассмотрим $\widehat{h} \in E_s^0 : \ \|\widehat{h}\|_s^{\sim} < \delta$. Поскольку $\|\widehat{h}\|_s^{\sim} = \inf\limits_{h\in\widehat{h}} \|h\ \|_s$, то $\exists\ h \in \widehat{h} :$ $\|\ h\|_s < \delta$. Следовательно,

$$\left(\|A_k h\|^t < \epsilon\right) \Rightarrow \left(\|A_{k,s}^t(\widehat{h})\|_{\sim}^t = \inf_{p\in\widetilde{A}_{k,s}^t} \|p\|_s \le \|A_k h\|^t < \epsilon\right),$$

откуда $A_{s,k}^t$ непрерывен, поэтому можно продолжить $A_{s,k}^t$ по непрерывности до $\widetilde{A}_{k,s}^t : \widetilde{E}_s \to \widetilde{F}^t$.

Таким образом, любой оператор A_k порождает систему (шкалу) линейных непрерывных операторов

$$\mathfrak{A}_k = \{\widetilde{A}_{k,s(k,t)}^t : \widetilde{E}_s \to \widetilde{F}^t\}_{t\in T}.$$

При этом для любого фиксированного $t \in T$ последовательность $\{\widetilde{A}_{k,s}^t\}$ поточечно сходится на $E_s^0 \hookrightarrow \widetilde{E}_s$.

Для произвольного фиксированного t обозначим

$$E_\infty^t = \varprojlim_{k\to\infty} \widetilde{E}_{s(k,t)}.$$

Ввиду счетности $\{s(k,t)\}_{k=1}^\infty$, E_∞^t — пространство Фреше. При данном переходе к проективному пределу получаем соответствующую проективную шкалу подпространств $\{E_{s(k,t)}^0\}_{k=1}^\infty$, для которой проективный предел $E_\infty^{0,t} = \varprojlim\limits_{k\to\infty} \widetilde{E}_{s(k,t)^0}^0$, в силу плотности вложений $E_s^0 \hookrightarrow \widetilde{E}_s$, будет плотным подпространством в E_∞^t.

Таким образом, мы получаем для любого фиксированного $t \in T$ последовательность операторов $\{A_k^t : E_\infty^t \to \widetilde{F}^t\}$, которая поточечно сходится на $E_\infty^{0,t} \subset E_\infty^t$ к A^t. Следовательно, к $\{A_k^t\}$ можно применить теорему VII.6.45 ([2]). Рассмотрим два возможных случая.

I. *Существует конфинальная подсеть $T' \subset T$ такая, что $\forall t' \in T'$ последовательность $\{A_k^{t'}\}$ расходится B-п.в. и даже B-п.в. неограничена.*

Согласно первой части утверждения I, $\forall t' \in T'$ множество $E_\infty^{o,t'}$ (на котором есть сходимость по построению) имеет I категорию по Бэру в E_∞^t. Тогда по лемме 1 множество $E^0 = \varprojlim\limits_{t\in T} \widetilde{E}_\infty^{0,t} = \varprojlim\limits_{t'\in T'} \widetilde{E}_\infty^{0,t'}$ также имеет I категорию по Бэру в пространстве $E_\infty = \varprojlim\limits_{t\in T} E_\infty^t$.

Согласно второй части утверждения I, $\forall t' \in T'$ последовательность $\{A_k^{t'}\}_{k=1}^\infty$ неограничена в любой точке из $M_\infty^{t'} \subset E_\infty^{t'}$, где $N_\infty^{t'} = E_\infty^{t'} \setminus M_\infty^{t'}$-множество I категории.

Поскольку множество в проективном пределе $F = \varprojlim\limits_{t'} \widetilde{F}^{t'}$ ограничено только тогда, когда оно ограничено в любом $\widetilde{F}^{t'}$, то отсюда следует, что последовательность $\{A_k x\}_{k=1}^\infty$ также неограничена в любой точке $x \in M_\infty \subset E$, где $E \setminus M_\infty =: N_\infty = \varprojlim\limits_{t'\in T'} N_\infty^{t'}$. По лемме 1, N_∞ — множество I категории.

Таким образом, из утверждения I следует: последовательность $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ расходится на E B-п.в., и даже B-п.в. неограничена.

II. *Существует* $t_0 \in T:\ \forall t \succeq t_0$ *последовательность* $\{A_k^t\}_{k=1}^{\infty}$ *сходится к* A^t *всюду на* E_∞^t, A^t *непрерывен, последовательность* $\{A_k^t\}$ *равностепенно непрерывна и* A_k^t *равномерно сходится к* A^t *на каждом компакте из* E_∞^t.

Согласно первой части утверждения II, $A_k^t \to A^t$ всюду на E_∞^t. В силу вложений $E \hookrightarrow E_\infty^t \xrightarrow{A_k^t} \widetilde{F}^t$, сходятся продолжения $A_k^t \mid_E \to A^t \mid_E$.

Поскольку сходимость в проективном пределе $F = \varprojlim\limits_{t \in T} F^t = \varprojlim\limits_{t \succeq t_0} F^t$ равносильна сходимости в каждом из F^t, то отсюда следует, что $A_k \to A$ всюду на E.

Согласно второй части утверждения II, оператор A^t непрерывен. Тогда по теореме (V.2 [3]) оператор $A:\ E \to F = \varprojlim\limits_{t} \widetilde{F}^t$ также непрерывен.

Согласно третьей части утверждения II, последовательность $\{A_k^t\}_{k=1}^{\infty}$ равностепенно непрерывна (можно считать, что $A_k^t : E \to F^t$), то есть

$$\forall\ V^t(0) \subset \widetilde{F}^t\ \exists\ U^t(0) \subset E:\ A_k^t\left(U^t\right) \subset V^t\ (k = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку базис окрестностей нуля в F имеет вид

$$V(0) = \left(f^{t_1}\right)^{-1}\left(V^{t_1}\right) \cap \ldots \cap \left(f^{t_n}\right)^{-1}\left(V^{t_n}\right),$$

то выбрав соответствующую окрестность нуля $U^l(0) \subset E$ для любого индекса $l = \overline{1, n}$ такую, что все

$$A_k^{t_l}\left(U^l\right) \subset V^{t_l}\ (k = 1, 2, \ldots),$$

получаем

$$A_k\left(U_l\right) = A_k^{t_l} \circ \left(f^{t_l}\right)^{-1}\left(U_{t_l}\right) \subset \left(f^{t_l}\right)^{-1}\left(V^{t_l}\right),\ (l = \overline{1, n}),$$

откуда

$$A_k\left(\bigcap_{l=1}^{n} U_l\right) \subset \bigcap_{l=1}^{n}\left(f^{t_l}\right)^{-1}\left(V_{t_l}\right) = V(0),$$

то есть $\{A_k\}$ равностепенно непрерывна на E.

Согласно четвертой части утверждения II, $\{A_k^t\}$ равномерно сходится к A^t на любом компакте из E_∞^t. Допустим, что существует компактное множество $C \subset E$, на котором нет равномерной сходимости A_k к A. Из предложения (III.7 [11])следует, что существует компактное множество $C_\infty^t \subset E_\infty^t$ такое, что $C_\infty^t = Ce^t$, где $e^t : E \to E_\infty^t$. Тогда на C_∞^t не будет равномерной сходимости A_k^t, что противоречит утверждению II. Следовательно, $\{A_k\}$ равномерно сходится к A на любом компакте из E. □

Следствие 1. *Пусть* E *и* F*-полные отделимые ЛВП, последовательность операторов* $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \subset L(E, F)$ *поточечно сходится к оператору* A. *Тогда* $A \in L(E, F)$, $\{A_k\}$ *равностепенно непрерывна на* E *и* $\{A_k\}$ *равномерно сходится к* A *на каждом компакте из* E.

Доказательство. Поскольку поточечная сходимость имеет место на всем пространстве E, то случай 1) теоремы 1 не выполняется, то есть имеет место случай 2), что и требовалось доказать. □

2. Приложения полученных результатов

2.1. **Матричные методы суммирования.** Получим обобщение теоремы 7.2.4 ([4]) на случай полного отделимого ЛВП.

Пусть A — бесконечная матрица, то есть скалярная функция на произведении $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Обозначим через $D(A)$ множество тех $x \in C^{\mathbb{N}}$, для которых ряд $\sum\limits_n A_{m,n}x_n$ сходится при каждом m. Матрица A определяет линейное отображение u_A пространства $D(A)$ в $C^{\mathbb{N}}$, которое каждому $x \in D(A)$ сопоставляет последовательность $y = u_A(x)$, определенную соотношениями $y_m = \sum\limits_n A_{m,n}x_n$ $(m \in \mathbb{N})$. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть E-векторное подпространство в $D(A)$ и F — векторное подпространство в $C^{\mathbb{N}}$, причем E и F наделены структурами ЛВП, удовлетворяющими следующим условиям:*

1) F отделимо, и каждое $y \in F$ является пределом своих конечных сечений $s_k y$;

2) E-полное отделимое ЛВП.

Тогда, если $u_A(E) \subset F$, то u_A непрерывно отображает E в F.

Доказательство. В силу условия 2) и следствия 1 отображение $x \mapsto u_A(x)(m)$ непрерывно на E для каждого m. Пусть $u_k : E \to F$ $(k = 1, 2, \ldots)$ — отображение, определяемое k-тым сечением элемента $u_A(x)$, $u_k(x) = s_k u_A(x)$. В силу 1), $\lim u_k = u_A$ поточечно в E. Если F_k–подпространство в F, образованное теми $y \in F$, для которых $y = s_k y$ (то есть $y(n) = 0$ при $n > k$), то F_k конечномерно и может быть наделено единственной отделимой линейной топологией. Обозначим её через T. Топология T совпадает с топологией, определяемой любым тотальным множеством линейных форм на F_k, например линейными формами $y \to y(m)$ $(m = 1, 2, \ldots, k)$. В силу 7.2.4 ([4]), u_k непрерывно относительно топологии T. С другой стороны, так как F отделимо, то топология T должна совпадать с топологией, индуцированной топологией пространства F. Таким образом, u_k непрерывно отображает E в F. Используя тот факт, что E — полное отделимое ЛВП, получаем, что поточечный предел u_A последовательности $\{u_k\}$ есть непрерывное отображение, а множество отображений $\{u_k\}$ равностепенно непрерывно, что и требовалось доказать. □

Замечание. *Покажем, что пространство F, удовлетворяющее условиям теоремы 2, существует.*

Введем в $C_y^{\mathbb{N}} := C^{\mathbb{N}} \supseteq F$ топологию поточечной сходимости–это отделимая локально выпуклая топология, причем полная (поскольку фундаментальность в $C_y^{\mathbb{N}}$

равносильна фундаментальности по каждой координате в отдельности, отсюда следует, что топология поточечной сходимости в $C_y^{\mathbb{N}}$) — полная.

Так как для любого $y \in U_A(E)$, $y = U_A(x)$, то все $y_m = \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_{mn}x_n$ сходятся. Рассмотрим сечение $s_k(y) = (y_1, \ldots, y_k, 0, 0, \ldots)$

Обозначим $U_A(E)^s = \left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [s_k U_A(E)]\right) \cup U_A(E)$. Положим $F = \overline{U_A(E)^s}$; тогда F — замкнутое подпространство в $C_y^{\mathbb{N}}$, откуда следует, что F — полное отделимое ЛВП.

Заметим, что для $y \in U_A(E)^s$ верно: все $s_k(y) \in U_A(E)^s$ по построению. Возьмем $y^{k_0} \in s_{k_0}(U_A(E))$. Тогда

$$s_k\left(y^{k_0}\right) = s_k(y_1, \ldots, y_{k_0}, 0, \ldots) = \\ = \left(y_1, \ldots, y_{min(k,k_0)}, 0, \ldots\right) \in s_{min(k,k_0)}(U_A(E)).$$

Пусть $y \in \overline{U_A(E)^s}$; рассмотрим последовательность $y^l \in U_A(E)^s$, сходящуюся к $y^{(0)}$ поточечно. Если

$$y = \left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_p^0, \ldots\right),$$

то $y_p^l \to y_p^0$, $(\forall p \in \mathbb{N})$. Тогда $\forall s_{k_0}\left(y^{(0)}\right)$ имеет место сходимость

$$y_{k_0}^l = \left(y_1^l, \ldots, y_{k_0}^l, 0, \ldots\right) \to s_{k_0}\left(y^{(0)}\right), \ (l \to \infty).$$

Но $y_{k_0}^{(l)} = s_{k_0}\left(y^{(l)}\right) \in U_A(E)^s$, откуда, $s_{k_0}\left(y^{(0)}\right) \in \overline{U_A(E)^s}$.

2.2. **Недифференцируемость B-почти всюду функций класса Бэра $\mathbf{B}_\infty[\mathbf{0};\mathbf{1}]$.** Определим пространства (с топологией равномерной сходимости):

$$B_o[0;1] := C[0;1] - \text{нулевой класс Бэра},$$

$$B_1[0;1] := \{f : \ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), f_n \in B_o[0;1]\},$$

$$B_2[0;1] := \{f : \ f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), f_n \in B_1[0;1]\}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Получаем последовательность банаховых пространств $\{B_n[0;1]\}_{n=1}^{\infty}$, где каждое $B_{n-1}[0;1]$ изоморфно вложено в $B_n[0;1]$. Рассмотрим пространство $B_\infty[0;1] := \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n[0;1]$ с топологией индуктивного предела, то есть $B_\infty[0;1] = \varinjlim\limits_{n\to\infty} (B_n[0;1], \tau_n)$, где τ_n — топология равномерной сходимости в пространстве $B_n[0;1], n \in \mathbb{N}$. По теореме 2.5.3 [12],

$$\left(f_\alpha \xrightarrow{B_\infty[0;1]} f_0\right) \Leftrightarrow \left(f_\alpha \xrightarrow{B_n[0;1]} f_0, \text{при некотором } n \in \mathbb{N}\right),$$

откуда следует, что $\alpha \in \mathbb{N}$, то есть топология $B_\infty[0;1]$ секвенциальная. Таким образом, $B_\infty[0;1]$ — полное отделимое ЛВП (и, в силу секвенциальности, — пространство Фреше).

Рассмотрим последовательность линейных непрерывных форм $u_{n,a}$ на $B_\infty[0;1]$:

$$u_{n,a}(\varphi) := \frac{\varphi\left(a+\frac{1}{n}\right)-\varphi(a)}{\frac{1}{n}},\ u_{n,a} = n\left(\delta_{\left(a+\frac{1}{n}\right)}-\delta_{(a)}\right),$$

где δ — δ-функция Дирака ($\delta_{x_0}(\varphi)=\varphi(x_0)$).

Формы $u_{n,a}$ сходятся к δ'_a при $\varphi \to \delta_a$ на всюду плотном в $B_\infty[0;1]$ подпространстве $C^1[0;1]$. Покажем, что последовательность $\mathcal{U} = \{u_{n,a}\}_{n=1}^\infty$ неограничена.

Множество $\mathcal{U}$ ограничено тогда и только тогда, когда для любого компакта $K \subset B_\infty[0;1]$ найдется константа $M_K < \infty$ такая, что $\sup\limits_{\varphi\in K, u_{n,a}\in\mathcal{U}} |u_{n,a}(\varphi)| < M_K$.

Поскольку любое конечное множество компактно, то рассмотрим компакт $\hat{K} := \{\hat{\varphi}_a(x) = \sqrt{|x-a|}, x \in [0;1]\}$ из $B_\infty[0;1]$. Поскольку

$$\sup_{\varphi\in K, u_{n,a}\in\mathcal{U}} |u_{n,a}(\varphi)| \geq \sup_{u_{n,a}\in\mathcal{U}} |u_{n,a}(\hat{\varphi})| =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| n\left(\sqrt{\left|a+\frac{1}{n}-a\right|}-\sqrt{|a-a|}\right)\right| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{n} = \infty,$$

то последовательность $\mathcal{U} = \{u_{n,a}\}_{n=1}^\infty$ неограничена. Следовательно, по теореме 1 множество функций $\varphi \in B_\infty[0;1]$, для которых $u_{n,a}$ сходятся, I категории. Отсюда следует, что B-почти все функции из $B_\infty[0;1]$ не дифференцируемы в точке a.

Пусть R_1 — счетное плотное подмножество отрезка $[0;1]$. Множество функций, дифференцируемых в точке $a \in R_1$, I категории. Объединение счетного числа таких множеств снова имеет I категорию по Бэру. Поэтому B-почти каждая функция из $B_\infty[0;1]$ не дифференцируема в каждой точке R_1.

Пусть φ — такая функция из $B_\infty[0;1]$, для которой в любой точке $a \in R_1$ последовательность $\mathcal{U}$ неограничена. Зафиксируем φ и покажем, что она недифференцируема в B-почти каждой точке $x \in [0;1]$. Докажем, что φ — B-п.в. разрывная функция.

Допустим, что это не так. Следовательно, замыкание множества точек A, в которых функция φ непрерывна, содержит хотя бы одну внутреннюю точку. Пусть $x \in int\overline{A}$; тогда $\exists\delta > 0 : (x-\delta; x+\delta) \subset \overline{A}$. Обозначим

$$\delta_{max} = \sup_{\delta>0, (x-\delta;x+\delta)\subset\overline{A}} \delta,$$

$$\Delta = (x-\delta_{max}; x+\delta_{max}).$$

Очевидно, $R_1 \cap \Delta := R_2$ — счетное всюду плотное в Δ множество. Образуем последовательность функций

$$\varphi_n = \frac{\varphi\left(x + \frac{1}{n}\right) - \varphi(x)}{\frac{1}{n}}, x \in \Delta.$$

Это последовательность непрерывных (нелинейных) функций на пространстве Δ, не ограниченная ни в одной точке счетного плотного множества R_2. Поскольку при доказательстве теоремы 1 (и, соответственно, теоремы VII.6.45 ([2]) линейность операторов исходной последовательности не фигурировала в первой возможности, то получаем, что последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ неограничена в B-почти каждой точке $x \in \Delta$, откуда следует, что φ B-п.в. недифференцируема на Δ, то есть множество D точек из Δ, в которых φ дифференцируемо, I категории. Объединение таких множеств по максимальным интервалам непрерывности φ снова имеет I категорию. Таким образом, B-почти все функции из $B_\infty[0;1]$ B-п.в. не дифференцируемы.

3. Заключительные замечания

Отметим вначале, что условия теоремы 1, вообще говоря, слабее условий теоремы VII.6.45 ([2]), поскольку бэровские пространства полны. При этом существуют полные отделимые ЛВП, не являющиеся бочечными ([4]), а в силу теоремы II.7.1 ([3]), и бэровскими.

В силу сказанного выше результат следствия 1 не перекрывается следствием 7.4.4 ([4]). Но так как существуют неполные бочечные пространства ([4]), то утверждения следствий 1 и 7.4.4 ([4]) совпадают в случае полных отделимых бочечных пространств.

Поскольку ([12]) пространство E бочечно только тогда, когда его топология совпадает с сильнейшей локально выпуклой топологией E, то в небочечном случае результат следствия 1 сильнее результата теоремы 1 ([5]).

В условии теоремы 1, в отличие от условий в предложении 7([9]), не требуется равномерной сходимости на некотором классе ограниченных множеств. Но поскольку при этом непрерывный оператор является секвенциально непрерывным, то условия теоремы 1 и предложения 7([9]) перекрываются лишь частично. Однако результат теоремы 1 сильнее результата предложения 7([9]).

В рассмотренном приложении к матричным методам суммирования условия теоремы 2 частично перекрывают условия теоремы 7.2.4 [4]. Построен пример пространства, удовлетворяющего условиям теоремы 2 и не удовлетворяющего условиям теоремы 7.2.4 [4].

В рассмотренном приложении к недифференцируемости B-почти всюду функций класса Бэра $B_\infty[0;1]$ полученный результат не является тривиальным и есть обобщение классического результата (гл. VII, §6 [2]). Действительно, пространство $B_\infty[0;1]$ содержит как подпространство $C[0;1]$; недифференцируемость B-почти

всюду функций из класса $B_\infty[0,1]$ означает не только недифференцируемость B-почти всюду функций из класса $C[0;1]$, но и недифференцируемость B-почти всюду функций из его дополнения до класса $B_\infty[0;1]$.

Список литературы

[1] Люстерник Л.А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа.* – Москва: Наука, 1965. – 520 С.

[2] Шварц Л. *Анализ. Том 2.* – Москва: Мир, 1972. – 528 С.

[3] Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* – Москва: Мир, 1971. – 359 С.

[4] Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения.* – Москва: Мир, 1969. – 1072 С.

[5] Cui Chengri, Soncho Han. *Banach-Steinhaus properties of locally convex spaces.* // Kangweon-Kyuingki Math. Jour. — 1997. — Vol. 5, № 2. — P. 227–232.

[6] Li Ronglu, Min-Hyung Cho. *Banach-Steinhaus type theorem which is valid for every locally convex space.* // Appl. Func. Anal. — 1993. — Vol. 1, № 1. — P. 146–147.

[7] Enno Kolk. *Banach-Steinhaus type theorems for statistical and τ-convergence with applications to matrics maps.* // Rocky Mountain J. Math. — 2010. — Vol. 40, № 1. — P. 279–289.

[8] Lahrech S., Jaddar A., Hlal J., Ouahab A., Mbarki A. *Banach-Steinhaus type theorems in locally convex spaces for bounded convex processes.* // Int. Journal of Math. Analysis. — 2007. — Vol. 1, № 9. — P. 437–441.

[9] Lahrech Samir *Banach-Steinhaus type theorems in locally convex spaces for linear bounded operators.* // Note di Matematica. — 2004. — Vol. 23, № 1. — P. 167–171.

[10] Lahrech S., Jaddar A., Hlal J., Ouahab A., Mbarki A *Banach-Steinhaus type theorems in locally convex spaces for LSC convex processes* // Int. J. Contemp. Math. Sciences. — 2007. — Vol. 2, № 24. — P. 1183–1187.

[11] Робертсон А.П., Робертсон В.Дж. *Топологические векторные пространства.* – Москва: Мир, 1967. – 260 С.

[12] Бурбаки Н. *Топологические векторные пространства.* – Москва: Издательство иностранной литературы, 1959. – 419 С.

Варіант універсальної теореми типу Банаха-Штейнгауза у довільних повних локально опуклих просторах

Отримано нову теорему типу Банаха-Штейнгауза і відповідний принцип рівностепеневої неперервності у довільних повних відокремних локально опуклих просторах. Розглянуті деякі застосування отриманих результатів.

Ключові слова: теорема Банаха-Штейнгауза, локально опуклий простір, проективна шкала просторів, берівські категорії, рівностепенева неперервність.

Variant of universal Banach-Steinhaus type theorem for arbitrary locally convex spaces

A Banach-Steinhaus type theorem and the corresponding equicontinuity principle for the arbitrary complete separable locally convex spaces are received. Some applications of the results above are considered.

Keywords: Banach-Steinhaus type theorem, locally convex space, projective scale of spaces, Baire's categories, equicontinuity.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 19–39.

УДК 517.9:532

Э. И. Батыр

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе исследуется начально-краевая и спектральная задачи о малых колебаниях системы из трех сочлененных гиростатов, т.е. маятников с жидким наполнением, присоединенных один к другому. Формулируется теорема существования решений задачи Коши; описываются свойства нормальных колебаний; известная теорема Н.Е. Жуковского переносится на случай движения системы трех сочлененных гиростатов.

Ключевые слова: система трех сочлененных гиростатов, идеальная несжимаемая жидкость.

Уравнения малых колебаний гидромеханической системы.

Рассмотрим систему трех тел G_k, $k = \overline{1,3}$, последовательно соединенных между собой сферическими шарнирами. Первое тело $G_1 \subset \mathbb{R}^3$ имеет неподвижную точку O_1, а тела G_k, при $k = 2,3$ – соответственно точки O_k, соединяющие шарниром тело G_k и G_{k-1}. Каждое тело $G_k \subset \mathbb{R}^3$ имеет полость Ω_k, заполненную идеальной однородной несжимаемой жидкостью плотности $\rho_k > 0$, $k = \overline{1,3}$.

Будем считать, что на данную систему тел в состоянии покоя действует однородное гравитационное поле $\vec{g}$, а в процессе малых движений – силовое поле

$$\vec{F} := \vec{g} + \vec{f}(t,x),$$

где $\vec{f}(t,x)$ – малая динамическая добавка к гравитационному полю.

Для описания малых движений системы сочлененных гиростатов введем неподвижную систему координат $O_1x^1x^2x^3$ с ортами $\vec{e}^j$, $j = \overline{1,3}$, так, чтобы $\vec{g} = -g\vec{e}^3$. Кроме того, введем подвижные системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$, жестко связанные с телом G_k. Единичные векторы вдоль осей $O_kx_k^j$ обозначим через $\vec{e}_k^j$, $j = \overline{1,3}$,

$k=\overline{1,3}$. Кроме того, будем считать, что центр масс C_k гиростата G_k находится на оси $O_kx_k^3$, $k=\overline{1,3}$, а в состоянии покоя все точки O_k и C_k расположены на одной вертикальной оси, $k=\overline{1,3}$.

Положение подвижной системы координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$ относительно неподвижной системы $O_1x^1x^2x^3$ в процессе малых движений гидромеханической системы будем задавать малым вектором углового перемещения

$$\vec{\delta}_k(t)=\sum_{j=1}^{3}\delta_k^j(t)\vec{e}_k^j,\quad k=\overline{1,3}.$$

Тогда угловая скорость $\vec{\omega}_k(t)$ тела G_k будет, очевидно, равна $d\vec{\delta}_k/dt$, а угловое ускорение этого тела - величине $d^2\vec{\delta}_k/dt^2=d\vec{\omega}_k/dt$.

Обозначим через m_k массу k-го тела, а через $\vec{r}_k$ - радиус-вектор, идущий из полюса O_k в любую точку тела G_k. Введем также векторы $\vec{h}_k=\overrightarrow{O_kO_{k+1}},\quad k=1,2.$

Приведем теперь для каждого из гиростатов G_k линеаризованное уравнение изменения кинетического момента относительно точки O_k, $k=1,2,3$, а также следствия из этой совокупности уравнений. Вид этих уравнений можно найти в [1], стр. 129-132, с.145, с.336, а также в [2]–[3]. Из этих уравнений следует, что левые и правые части последующего уравнения целиком входят в левые и правые части предыдущего. Тогда, беря соответствующие разности левых и правых частей, а также последнее уравнение, приходим к следующим уравнениям движения трех сочлененных гиростатов:

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)dm_1+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}d\Omega_1+\\
&\qquad+\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2+\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}\right)dm_2+\\
&\quad+\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)dm_3+\\
&\quad+\alpha_1\vec{\omega}_1-\alpha_2\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)+g\left(m_1l_1+\left(m_2+m_3\right)h_1\right)P_2\vec{\delta}_1=\\
&\qquad=\int\limits_{G_1}\vec{r}_1\times\vec{f}_1dm_1+\int\limits_{G_2}\vec{h}_1\times\vec{f}_2dm_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_1\times\vec{f}_3dm_3\equiv\vec{M}_1;\quad(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)dm_2+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}d\Omega_2+\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1\right)dm_2+\\
&\qquad+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3+\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}\right)dm_3+
\end{aligned}$$

$$+\alpha_1(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1)-\alpha_2(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)+g(m_2l_2+m_3h_2)P_2\vec{\delta}_2=$$
$$=\int\limits_{G_2}\vec{r}_2\times\vec{f}_2dm_2+\int\limits_{G_3}\vec{h}_2\times\vec{f}_3dm_3\equiv\vec{M}_2;\quad(2)$$

$$\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)dm_3+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{r}_3\times\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}d\Omega_3+$$
$$+\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2\right)dm_3+\alpha_3(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2)+gm_3l_3P_2\vec{\delta}_3=$$
$$=\int\limits_{G_3}\vec{r}_3\times\vec{f}_3dm_3\equiv\vec{M}_3;\quad(3)$$

В формулах (1)–(3): $l_k:=|\overrightarrow{O_kC_k}|$ — расстояние от O_k до центра масс C_k гиростата G_k,

$$P_2\vec{\delta}_k:=\sum_{j=1}^{2}\delta_k^j\vec{e}_k^j$$

— проекция углового перемещения $\vec{\delta}_k$ на плоскость $O_kx_k^1x_k^2$, $k=\overline{1,3}$. Предполагается также, что в шарнире O_k сила трения пропорциональна разности угловых скоростей примыкающих гиростатов G_k и G_{k-1}, причем коэффициент пропорциональности $\alpha_k>0$, $k=\overline{1,3}$. Далее, через $\vec{u}_k=\vec{u}_k(t,x)$, $x\in\Omega_k$, обозначено поле относительной скорости движения жидкости в области Ω_k, $k=\overline{1,3}$. Наконец, использовано обозначение

$$\int\limits_{G_k}(\ldots)dm_k:=\int\limits_{\Omega_{0k}}(\ldots)\rho_{0k}d\Omega_k+\int\limits_{\Omega_k}(\ldots)\rho_kd\Omega_k,$$

где $\Omega_{0k}\subset G_k$ — область, занятая твердым телом постоянной плотности ρ_{0k}, а Ω_k — область, занятая жидкостью постоянной плотности ρ_k, $k=\overline{1,3}$. При этом, конечно же, нужно формально считать что в уравнениях (1)–(3) $\vec{u}_k\equiv0$ в области Ω_{0k}, $k=\overline{1,3}$.

Приведем теперь линеаризованные уравнения движения (уравнения Эйлера) идеальной жидкости в каждой из полостей Ω_k. Каждое уравнение записано в неинерциальной системе координат $O_kx_k^1x_k^2x_k^3$, жестко связанной с телом G_k, $k=\overline{1,3}$. Вид этих уравнений можно найти в [1], а также в [2]–[3]. Имеем

$$\rho_1\left(\frac{\partial\vec{u}_1}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)=-\nabla p_1+\rho_1\vec{f}_1,\quad\mathrm{div}\vec{u}_1=0\quad(\text{в }\Omega_1);\qquad(4)$$

$$\rho_2\left(\frac{\partial\vec{u}_2}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)=-\nabla p_2+\rho_2\vec{f}_2,\quad\mathrm{div}\vec{u}_2=0\quad(\text{в }\Omega_2);\qquad(5)$$

$$\rho_3\left(\frac{\partial\vec{u}_3}{\partial t}+\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)=-\nabla p_3+\rho_3\vec{f}_3,\quad \mathrm{div}\vec{u}_3=0\quad (\text{в }\Omega_3);\tag{6}$$

Здесь $p_k=p_k(t,x)$ — отклонение полей давлений от их равновесных значений, а $\vec{f}_k(t,x):=\vec{f}(t,x)\,|_{\Omega_k}$, $k=\overline{1,3}$.

В качестве граничных условий на границах $\partial\Omega_k=:S_k$, $k=\overline{1,n}$, выступают условия непротекания для идеальной жидкости:

$$\vec{u}_k\cdot\vec{n}_k=0\quad (\text{на }S_k)\quad k=\overline{1,3},\tag{7}$$

где $\vec{n}_k$ - внешняя нормаль к области Ω_k.

Для полной математической формулировки исследуемой начально-краевой задачи о малых движениях сочлененных гиростатов к уравнениям (1)—(7) следует добавить кинематические условия, которые удобно записать в виде:

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}_k=P_2\vec{\omega}_k,\quad \frac{d}{dt}\vec{\delta}_k^3=\vec{\omega}_k^3,\quad k=\overline{1,3},\tag{8}$$

а также начальные условия

$$\vec{u}_k(0,x)=\vec{u}_k^0(x),\quad x\in\Omega_k,\quad \vec{\omega}_k(0)=\vec{\omega}_k^0,\quad \vec{\delta}_k(0)=\vec{\delta}_k^0,\quad k=\overline{1,3}.\tag{9}$$

Таким образом, в данной задаче искомыми являются соленоидальные векторные поля $\vec{u}_k(t,x)$, поля давлений $p_k(t,x)$, угловые скорости $\vec{\omega}_k(t)$ и угловые перемещения гиростатов $\vec{\delta}_k(t)$, $k=\overline{1,3}$. Их требуется найти из уравнений движения гиростатов (1)—(3), уравнений (4)—(6) движения жидкостей в полостях Ω_k, условий непротекания (7), кинематических соотношений (8) и начальных условий (9).

Далее для простоты считаем, что границы $\partial\Omega_k=S_k$ областей Ω_k достаточно гладкие, например, дважды непрерывно дифференцируемы, т.е.

$$S_k=\partial\Omega_k\in C^2,\quad k=\overline{1,3}.\tag{10}$$

Закон баланса полной энергии

Будем считать, что задача (1)–(9) имеет классическое решение, т.е. все функции в уравнениях, граничных и начальных условиях непрерывны относительно своих переменных, и выведем из (1)–(9) закон баланса полной энергии исследуемой гидромеханической системы.

С этой целью осуществим следующие шаги. Обе части уравнений (1)–(3) умножим скалярно в $\mathbb{R}^3$ на $\vec{\omega}_1$, $\vec{\omega}_2$ и $\vec{\omega}_3$ соответственно, а обе части уравнений (4)–(6) умножим скалярно в $\mathbb{R}^3$ на $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ и $\vec{u}_3$ соответственно и проинтегрируем по областям Ω_1, Ω_2, Ω_3. Складывая теперь левые и правые части полученных соотношений, после преобразований с использованием формул векторного анализа приходим к соотношению вида

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_{G_1}|\vec{\omega}_1\times\vec{r}_1+\vec{u}_1|^2dm_1+\int\limits_{G_2}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{r}_2+\vec{u}_2|^2dm_2+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{G_3}|\vec{\omega}_1\times\vec{h}_1+\vec{\omega}_2\times\vec{h}_2+\vec{\omega}_3\times\vec{r}_3+\vec{u}_3|^2dm_3\right\}+$$
$$+\frac{1}{2}g\frac{d}{dt}\left\{[m_1l_1+(m_2+m_3)h_1]|P_2\vec{\delta}_1|^2+(m_2l_2+m_3h_2)|P_2\vec{\delta}_2|^2+m_3l_3|P_2\vec{\delta}_3|^2\right\}=$$
$$=-\left\{\alpha_1|\vec{\omega}_1|^2+\alpha_2|\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1|^2+\alpha_3|\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2|^2\right\}+\sum_{k=1}^{3}\vec{M}_k\cdot\vec{\omega}_k+\sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_k d\Omega_k. \tag{11}$$

Это соотношение есть закон баланса полной энергии изучаемой гидромеханической системы, записанный в дифференциальной форме. Действительно, слева в (11) стоит скорость изменения по времени полной (кинетической + потенциальной) энергии системы, а справа — мощность сил трения плюс мощность внешних сил, обусловленная действием дополнительных к гравитационным сил $\vec{f}_1$, $\vec{f}_2$, $\vec{f}_3$ соответственно, а также моментов сил $\vec{M}_1$, $\vec{M}_2$ и $\vec{M}_3$, которые выражены через эти силы (см. выражения для них в правых частях (1)—(3)).

Начально-краевая задача о малых движениях системы сочлененных гиростатов.

Задачу (1)—(9) будем исследовать методами функционального анализа, теории уравнений в частных производных, а также теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проектирование уравнений Эйлера на ортогональные подпространства. Будем считать в задаче (1)—(9) искомые функции $\vec{u}_k(t,x)$, $\nabla p_k(t,x)$, $k=\overline{1,3}$, функциями переменной t со значениями в гильбертовых пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k)$ с обычной нормой

$$\|\vec{u}_k\|^2_{\vec{L}_2(\Omega_k)}:=\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2d\Omega_k,\quad k=\overline{1,3}, \tag{12}$$

и соответствующим скалярным произведением.

Как известно (см., например, [4], стр. 38, а также [1]), пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega_k)$ имеет ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_k)=\vec{J}_0(\Omega_k)\oplus\vec{G}(\Omega_k), \tag{13}$$

где $\vec{J}_0(\Omega_k)$ — подпространство соленоидальных векторных полей с условием непротекания на границе $S_k=\partial\Omega_k$, т.е.

$$\vec{J}_0(\Omega_k):=\{\vec{u}_k\in\vec{L}_2(\Omega_k):\mathrm{div}\vec{u}_k=0(\text{в}\quad\Omega_k),\quad\vec{u}_k\cdot\vec{n}_k=0(\text{на}\quad S_k)\}, \tag{14}$$

а $\vec{G}(\Omega_k)$ — подпространство потенциальных полей:

$$\vec{G}(\Omega_k) := \{\vec{u}_k \in \vec{L}_2(\Omega_k) : \vec{u}_k = \nabla\varphi_k\}. \tag{15}$$

Здесь операции $\mathrm{div}\vec{u}_k$ и $\vec{u}_k \cdot \vec{n}_k$ понимаются для элементов из $\vec{L}_2(\Omega_k)$ в смысле обобщенных функций (рапределений), подробную информацию об этом можно найти, например, в [1], с.98-102.

Как следует из (13)–(15), а также из соотношений (4)–(6) и граничных условий (7), для искомых полей скоростей $\vec{u}_k(t,x)$ и полей давлений $\nabla p_k(t,x)$ при любом t имеют место свойства

$$\vec{u}_k \in \vec{J}_0(\Omega_k), \quad \nabla p_k \in \vec{G}(\Omega_k), \quad k = \overline{1,3}. \tag{16}$$

Опираясь на эти свойства, применим к уравнениям Эйлера (4)–(6) метод ортогонального проектирования на подпространства (13). Этот метод нашел широкое применение в задачах гидродинамики (см., например, [4], а также [1]).

Будем считать, что в уравнениях Эйлера (4)–(6) все функции являются непрерывными по t функциями со значениями в соответствующих пространствах $\vec{L}_2(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$. Обозначим через $P_{0,k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{J}_0(\Omega_k)$ ортопроектор на подпространство $\vec{J}_0(\Omega_k)$, а через $P_{G,k} : \vec{L}_2(\Omega_k) \to \vec{G}(\Omega_k)$ — ортопроектор на дополнительное подпространство $\vec{G}(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$.

Действуя ортопроекторами $P_{0,1}$, $P_{0,2}$ и $P_{0,3}$ на обе части уравнений Эйлера (4), (5) и (6) соответственно и заменяя в силу сказанного выше $\partial/\partial t$ на d/dt, приходим с учетом (16) к соотношениям

$$\frac{d\vec{u}_1}{dt} + P_{0,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = P_{0,1}\vec{f}_1(t), \tag{17}$$

$$\frac{d\vec{u}_2}{dt} + P_{0,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) = P_{0,2}\vec{f}_2(t), \tag{18}$$

$$\frac{d\vec{u}_3}{dt} + P_{0,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) = P_{0,3}\vec{f}_3(t), \tag{19}$$

Аналогичные проектирования на подпространства $\vec{G}(\Omega_k)$ дают связи

$$\rho_1 P_{G,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{r}_1\right) = -\nabla p_1 + \rho_1 P_{G,1}\vec{f}_1, \tag{20}$$

$$\rho_2 P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{r}_2\right) = -\nabla p_2 + \rho_2 P_{G,2}\vec{f}_2, \tag{21}$$

$$\rho_3 P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3\right) = -\nabla p_3 + \rho_3 P_{G,3}\vec{f}_3. \tag{22}$$

Из (20)–(22) следует, что поля давлений ∇p_k непосредственно вычисляются через угловые ускорения $d\vec{\omega}_k/dt$ и заданные функции $\vec{f}_k$; в то же время эти давления не входят в уравнения (1)–(3), описывающие движения гиростатов. Отсюда приходим

к выводу, что в дальнейшем следует рассматривать систему соотношений (1)–(3), (17)–(19), (8)–(9).

Преобразования уравнений движения гиростатов. Соотношения (17)–(19) также позволяют вычислить непосредственно поля $d\vec{u}_k/dt$ через $d\vec{\omega}_k/dt$ и $\vec{f}_k$, $k = \overline{1,3}$. Подставляя эти выражения для $d\vec{u}_k/dt$ в уравнения (1)–(3), затем вычисляя выражения $\int\limits_{G_k} (\ldots)\, dm_k$ согласно его определению и группируя слагаемые в виде интегралов $\int\limits_{\Omega_{0k}} (\ldots)\, d\Omega_{0k}$ и $\int\limits_{\Omega_k} (\ldots)\, d\Omega_k$, получим следующие уравнения движения гиростатов:

$$\begin{gathered}
\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}} \vec{r}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)d\Omega_{01}+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\left(P_{G,1}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{r}_1\right)\right)d\Omega_1+\\
+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}_1\times\left(P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right)d\Omega_2+\\
+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{h}_1\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)d\Omega_{03}+\\
+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{h}_1\times\left(P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)d\Omega_3+\\
\alpha_1\vec{\omega}_1-\alpha_2\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)+g\left(m_1l_1+\left(m_2+m_3\right)h_1\right)P_2\vec{\delta}_1=\\
=\rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}\vec{r}_1\times\vec{f}_{01}d\Omega_{01}+\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{h}_1\times\vec{f}_{02}d\Omega_{02}+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{h}_1\times\vec{f}_{03}d\Omega_{03}+\\
+\rho_1\int\limits_{\Omega_1}\vec{r}_1\times\left(P_{G,1}\vec{f}_1\right)d\Omega_1+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{h}_1\times\left(P_{G,2}\vec{f}_2\right)d\Omega_2+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{h}_1\times\left(P_{G,3}\vec{f}_3\right)d\Omega_3\equiv\tilde{M}_1\left(t\right);
\end{gathered}\tag{23}$$

$$\begin{gathered}
\rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\vec{r}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)d\Omega_{02}+\rho_2\int\limits_{\Omega_2}\vec{r}_2\times\left(P_{G,2}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{r}_2\right)\right)d\Omega_2+\\
+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\vec{h}_2\times\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)d\Omega_{03}+\\
+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\vec{h}_2\times\left(P_{G,3}\left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt}\times\vec{h}_1+\frac{d\vec{\omega}_2}{dt}\times\vec{h}_2+\frac{d\vec{\omega}_3}{dt}\times\vec{r}_3\right)\right)d\Omega_3+\\
+\alpha_1\left(\vec{\omega}_2-\vec{\omega}_1\right)-\alpha_2\left(\vec{\omega}_3-\vec{\omega}_2\right)+g\left(m_2l_2+m_3h_2\right)P_2\vec{\delta}_2=
\end{gathered}$$

$$= \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \vec{r}_2 \times \vec{f}_{02} d\Omega_{02} + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \vec{f}_{03} d\Omega_{03} +$$

$$+ \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \left(P_{G,2} \vec{f}_2 \right) d\Omega_2 + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left(P_{G,3} \vec{f}_3 \right) d\Omega_3 \equiv \tilde{M}_2(t); \quad (24)$$

$$\rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) d\Omega_{03} +$$

$$+ \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left(P_{G,3} \left(\frac{d\vec{\omega}_1}{dt} \times \vec{h}_1 + \frac{d\vec{\omega}_2}{dt} \times \vec{h}_2 + \frac{d\vec{\omega}_3}{dt} \times \vec{r}_3 \right) \right) d\Omega_3 +$$

$$+ \alpha_3 (\vec{\omega}_3 - \vec{\omega}_2) + g m_3 l_3 P_2 \vec{\delta}_3 =$$

$$= \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \vec{f}_{03} d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left(P_{G,3} \vec{f}_3 \right) d\Omega_3 \equiv \tilde{M}_3(t), \quad (25)$$

где использовано соотношене $I_k - P_{0,k} = P_{G,k}$, а I_k — единичный оператор в $\vec{L}_2(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$.

Таким образом, влияние движения жидкости в области Ω_k состоит в том, что в (23)–(25) единичные операторы I_k заменены операторами ортогонального проектирования $P_{G,k}$ на подпространства $\vec{G}(\Omega_k)$, $k = \overline{1,3}$. Заметим еще, что если поля $\vec{f}_k$ потенциальны, то $P_{G,k}\vec{f}_k = \vec{f}_k$, и тогда моменты внешних сил $\tilde{M}_k(t) \equiv \vec{M}_k(t)$, $k = \overline{1,3}$.

Подводя итоги этим преобразованиям, отметим, что теперь следует изучать задачу динамики гиростатов, исходя из уравнений (23)–(25), кинематических соотношений (8) и начальных условий (9) для $\vec{\omega}_k$ и $\vec{\delta}_k$, $k = \overline{1,3}$. При этом поля скоростей и давлений жидкости находятся по $\vec{\omega}_k$ и $\vec{\delta}_k$ посредством формул (17)–(19) и (20)–(22).

Переход к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка. Будем считать, что в задаче (23)–(25), (8), (9) искомым объектом является вектор-столбец

$$\vec{\delta}(t) := \left(\vec{\delta}_1(t); \vec{\delta}_2(t); \vec{\delta}_3(t) \right)^\tau, \quad (26)$$

где индекс $(...)^\tau$ означает транспонирование (в данном случае строки). Тогда, в силу (8) имеем

$$\vec{\omega}(t) := (\vec{\omega}_1(t); \vec{\omega}_2(t); \vec{\omega}_3(t))^\tau = d\vec{\delta}(t)/dt, \quad d\vec{\omega}(t)/dt = d^2\vec{\delta}(t)/dt^2. \quad (27)$$

Эти соотношения позволяют трактовать совокупность уравнений (23)–(25) как одно дифференциальное уравнение вида

$$C\frac{d^2\vec{\delta}}{dt^2} + A\frac{d\vec{\delta}}{dt} + B\vec{\delta} = \vec{M}(t), \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \quad \vec{\delta}'(0) = \vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0, \quad (28)$$

рассматриваемое в пространстве

$$\mathcal{H} := \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^3 \tag{29}$$

с соответствующей нормой

$$||\vec{\delta}||^2_{\mathcal{H}} = |\vec{\delta}_1|^2 + |\vec{\delta}_2|^2 + |\vec{\delta}_3|^2, \tag{30}$$

а также тривиальную задачу (см. (8), (9))

$$\frac{d}{dt}\vec{\delta}_k = \vec{\omega}_k, \quad k = \overline{1,3}. \tag{31}$$

При этом

$$\vec{\delta}^0 := \left(\vec{\delta}^0_1; \vec{\delta}^0_2; \vec{\delta}^0_3\right)^\tau, \quad \vec{\omega}^0 := \left(\vec{\omega}^0_1; \vec{\omega}^0_2; \vec{\omega}^0_3\right)^\tau, \quad \vec{M}(t) := \left(\vec{M}_1(t); \vec{M}_2(t); \vec{M}_3(t)\right)^\tau, \tag{32}$$

а операторные матрицы

$$C = (C_{lm})^3_{l,m=1}, \quad A = (A_{lm})^3_{l,m=1}, \quad B = (B_{lm})^3_{l,m=1}, \tag{33}$$

элементы которых определяются соответствующими выражениями из (23)—(25), стоящими при d^2/dt^2, d/dt и самой искомой функции, заданы посредством следующих формул:

$$\begin{aligned} C_{11}\vec{\delta}_1 := \rho_{01} \int\limits_{\Omega_{01}} \vec{r}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right) d\Omega_{01} + \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} \vec{r}_1 \times \left(P_{G,1}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right)\right) d\Omega_1 + \\ + \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{02} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_2 + \\ + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_3; \end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned} C_{12}\vec{\delta}_2 := \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{02} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right)\right) d\Omega_2 + \\ + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\right) d\Omega_3; \end{aligned} \tag{35}$$

$$C_{13}\vec{\delta}_3 := \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_1 \times \left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_1 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right)\right) d\Omega_3; \tag{36}$$

$$\begin{aligned} C_{21}\vec{\delta}_1 := \rho_{02} \int\limits_{\Omega_{02}} \vec{r}_2 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{02} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_2 + \\ + \rho_{03} \int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_3; \end{aligned} \tag{37}$$

$$C_{22}\vec{\delta}_2 := \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}} \vec{r}_2 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) d\Omega_{02} + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} \vec{r}_2 \times \left(P_{G,2}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right)\right) d\Omega_2 +$$
$$+ \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\right) d\Omega_3; \quad (38)$$

$$C_{23}\vec{\delta}_3 := \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{h}_2 \times \left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{h}_2 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right)\right) d\Omega_3; \quad (39)$$

$$C_{31}\vec{\delta}_1 := \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\right) d\Omega_3; \quad (40)$$

$$C_{32}\vec{\delta}_2 := \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\right) d\Omega_3; \quad (41)$$

$$C_{33}\vec{\delta}_3 := \rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}} \vec{r}_3 \times \left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right) d\Omega_{03} + \rho_3 \int\limits_{\Omega_3} \vec{r}_3 \times \left(P_{G,3}\left(\vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right)\right) d\Omega_3; \quad (42)$$

$$A := \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & -\alpha_2 & 0 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 & -\alpha_3 \\ 0 & -\alpha_3 & \alpha_3 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

а операторная матрица B диагональна и

$$B_{11}\vec{\delta}_1 := g(m_1 l_1 + (m_2 + m_3)h_1)P_2\vec{\delta}_1 =: gb_{11}P_2\vec{\delta}_1;$$
$$B_{22}\vec{\delta}_2 := g(m_2 l_2 + m_3 h_2)P_2\vec{\delta}_2 =: gb_{22}P_2\vec{\delta}_2;$$
$$B_{33}\vec{\delta}_3 := g(m_3 l_3)P_2\vec{\delta}_3 =: gb_{33}P_2\vec{\delta}_3. \quad (44)$$

Свойства операторных коэффициентов эволюционного уравнения. Рассмотрим, опираясь на формулы (34)—(44), общие свойства операторных матриц C, A и B дифференциального уравнения (28).

Лемма 1. *Матрица B неотрицательна и имеет трехмерное ядро, натянутое на векторы*

$$\left(\vec{0}, \vec{0}, \vec{e}_1^{\,3}\right)^\tau, \quad \left(\vec{0}, \vec{0}, \vec{e}_2^{\,3}\right)^\tau, \quad \left(\vec{0}, \vec{0}, \vec{e}_3^{\,3}\right)^\tau. \quad (45)$$

Лемма 2. *Матрица A является положительно определенным оператором, действующим в комплексном пространстве $\mathcal{H}$ с нормой* (30).

Теорема 1. *Операторная матрица C, элементы которой определены формулами* (34) — (42), *допускает представление*

$$C = C_{\text{тв}} + C_{\text{пр}} \tag{46}$$

в виде суммы операторной матрицы $C_{\text{тв}}$, связанной с движением собственно твердых сочлененных тел, и матрицы $C_{\text{пр}}$, связанной с движением идеальной жидкости в полостях этих тел. Назовем матрицу $C_{\text{пр}}$ по аналогии с термином, введенным Н.Е. Жуковским, присоединенной матрицей инерции.

Каждая из матриц в (46) *является положительно определенным самосопряженным оператором, действующим в (комплексном) пространстве $\mathcal{H}$, при этом их квадратичные формы соответственно равны*

$$\left(C_{\text{тв}}\,\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \rho_{01}\int\limits_{\Omega_{01}}\left|\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1\right|^2 d\Omega_{01} + \rho_{02}\int\limits_{\Omega_{02}}\left|\vec{\delta}_1\times\vec{h}_1+\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2\right|^2 d\Omega_{02}+$$
$$+\rho_{03}\int\limits_{\Omega_{03}}\left|\vec{\delta}_1\times\vec{h}_1+\vec{\delta}_2\times\vec{h}_2+\vec{\delta}_3\times\vec{r}_3\right|^2 d\Omega_{03} \tag{47}$$

$$\left(C_{\text{пр}}\,\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \rho_1\int\limits_{\Omega_1}\left|P_{G,1}(\vec{\delta}_1\times\vec{r}_1)\right|^2 d\Omega_1 + \rho_2\int\limits_{\Omega_2}\left|P_{G,2}(\vec{\delta}_1\times\vec{h}_1+\vec{\delta}_2\times\vec{r}_2)\right|^2 d\Omega_2+$$
$$+\rho_3\int\limits_{\Omega_3}\left|P_{G,3}(\vec{\delta}_1\times\vec{h}_1+\vec{\delta}_2\times\vec{h}_2+\vec{\delta}_3\times\vec{r}_3)\right|^2 d\Omega_3. \tag{48}$$

Замечание 1. Если рассмотреть для сравнения с изучаемой задачей случай, когда в полостях Ω_k содержится не идеальные жидкости, а твердые тела той же плотности ρ_k, $k=\overline{1,3}$, то такая задача о малых движениях сочлененных твердых тел снова сводится к эволюционному уравнению вида (28), где операторы A и B — те же, что и в (28), а оператор инерции $C_{\text{отв}}$ имеет вид

$$C_{\text{отв}} = C_{\text{тв}} + C_{\text{ж}}\,. \tag{49}$$

Здесь $C_{\text{тв}}$ — тот же, что был описан соотношениями (46) и (47), а $C_{\text{ж}}$ — самосопряженный положительно определенный оператор, связанный с движением отвердевших жидкостей; его квадратичная форма

$$\left(C_{\text{ж}}\,\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{3}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\left|\sum_{j=1}^{k-1}(\vec{\delta}_j\times\vec{h}_j)+\vec{\delta}_k\times\vec{r}_k\right|^2 d\Omega_k, \tag{50}$$

имеет такой же вид, как выражение (47) для $C_{\text{тв}}$.

Теорема Жуковского, потенциалы Жуковского. В задаче динамики твердого тела с полостью, целиком заполненной идеальной жидкостью, хорошо известен следующий факт, полученный Н.Е. Жуковским [7]: если поле массовых сил потенциально, то такая гидромеханическая система движется так же, как движется под действием этого поля сил другое твердое тело с измененным моментом инерции $\vec{J}_{\text{изм}} = \vec{J}_{\text{т}} + \vec{J}_{\text{пр}}$, где $\vec{J}_{\text{т}}$ — момент инерции твердого тела (без жидкости), а $\vec{J}_{\text{пр}}$ — присоединенный момент инерции, связанный с движением жидкости в полости.

Предыдущие рассмотрения задачи о малых колебаниях системы сочлененных гиростатов позволяют установить аналогичный факт.

Теорема 2. *(Обобщенная теорема Жуковского).*
Если поле внешних дополнительных массовых сил потенциально,

$$\vec{f} = \nabla f, \quad \vec{f}_k = \vec{f}|_{\Omega_k}, \quad \vec{f}_{0k} = \vec{f}|_{\Omega_{0k}}, \quad k = \overline{1,3}, \tag{51}$$

то система сочлененных гиростатов с полостями, целиком заполненными идеальными жидкостями, движется под действием внешних сил так же, как движется под действием этого внешнего поля сил система сочлененных твердых тел с измененной матрицей инерции, т.е. с матричным оператором (46)—(48).

Выражение (48) для квадратичной формы присоединенной матрицы инерции $C_{\text{пр}}$ позволяет вычислить ее, используя так называемые потенциалы Жуковского — функции переменной x, $x \in \Omega_k$, зависящие лишь от геометрических характеристик области Ω_k, $k = \overline{1,3}$. Перейдем к более подробному изложению таких построений применительно к исследуемой задаче о движении системы сочлененных гиростатов.

Введем потенциальное поле

$$P_{G,1}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right) = (I_1 - P_{0,1})\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right) =: \nabla\psi_1 \in \vec{G}(\Omega_1). \tag{52}$$

Так как $\operatorname{div}(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1) = 0$ и по определению (14) подпространства $\vec{J}_0(\Omega_1$ также $\operatorname{div}(P_{0,1}(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1)) = 0$, то из (52) следует, что потенциал ψ_1 поля $\nabla\psi_1$ находится с помощью решения задачи

$$\triangle\psi_1 = 0 \quad (\text{ в } \Omega_1\,), \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial n_1} = \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{r}_1\right) \cdot \vec{n}_1 \quad (\text{ на } S_1\,), \tag{53}$$

причем для его однозначного нахождения можно дополнительно потребовать, чтобы

$$\int\limits_{S_1} \psi_1 dS_1 = 0. \tag{54}$$

В самом деле, для элементов из $\vec{J}_0(\Omega_1)$ нормальная компонента поля на границе $S_1 = \partial\Omega_1$ равна нулю, откуда приходим к граничному условию Неймана в задаче (53)—(54) для гармонической функции $\psi_1 = \psi_1(x)$, $x \in \Omega_k$.

Из (53)—(54) следует, что поле $\nabla\psi_1$ является потенциально-гармоническим. Этим же свойством будут обладать поля, построенные по потенциалам Жуковского.

Так как $\vec{\delta}_1(t) = \sum\limits_{j=1}^{3} \delta_1^j(t)\vec{e}_1^j$, то решение задачи (53)—(54) можно представить в виде

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{3} \delta_1^j(t)\psi_{1j}, \tag{55}$$

где $\{\psi_{1j}\}_{j=1}^3$ — потенциалы Жуковского для области Ω_1. Они являются решениями следующих задач

$$\triangle\psi_{1j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\psi_{1j}}{\partial n_1} = \left(\vec{e}_1^j \times \vec{r}_1\right)\cdot\vec{n}_1 \quad (\text{на } S_1), \quad \int\limits_{S_1} \psi_{1j}dS_1 = 0, \quad j = \overline{1,3}, \tag{56}$$

и зависит, как уже упоминалось выше, лишь от геометрических характеристик области Ω_1.

Введем теперь потенциальное поле, отвечающее второму слагаемому в квадратичной форме (48):

$$\nabla\psi_2 := P_{G,2}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right) = (I_2 - P_{0,2})\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{r}_2\right). \tag{57}$$

Здесь постоянное поле $\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1$ уже потенциально, так как

$$\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 = \nabla\left(\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\cdot\vec{r}_2\right). \tag{58}$$

Поэтому аналогично предыдущим построениям имеем

$$\psi_2 = \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1\right)\cdot\vec{r}_2 + \sum_{j=1}^{3} \delta_2^j(t)\psi_{2j}, \tag{59}$$

где $\{\psi_{2j}\}_{j=1}^3$ — потенциалы Жуковского для области Ω_2:

$$\triangle\psi_{2j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\psi_{2j}}{\partial n_2} = \left(\vec{e}_2^j \times \vec{r}_2\right)\cdot\vec{n}_2 \quad (\text{на } S_2), \quad \int\limits_{S_2} \psi_{2j}dS_2 = 0, \quad j = \overline{1,3}. \tag{60}$$

Эти функции зависят лишь от конфигурации области Ω_2.

Наконец, для третьего слагаемого из (48) соответственно определяем:

$$\nabla\psi_3 := P_{G,3}\left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2 + \vec{\delta}_3 \times \vec{r}_3\right). \tag{61}$$

Тогда

$$\psi_3 = \left(\vec{\delta}_1 \times \vec{h}_1 + \vec{\delta}_2 \times \vec{h}_2\right)\cdot\vec{r}_3 + \sum_{j=1}^{3} \delta_3^j(t)\psi_{3j}, \tag{62}$$

где $\{\psi_{3j}\}_{j=1}^3$ — потенциалы Жуковского для области Ω_3:

$$\triangle\psi_{3j} = 0 \quad (\text{в } \Omega_3), \quad \frac{\partial\psi_{3j}}{\partial n_3} = \left(\vec{e}_3^j \times \vec{r}_3\right)\cdot\vec{n}_3 \quad (\text{на } S_3), \quad \int\limits_{S_3} \psi_{3j}dS_3 = 0, \quad j = \overline{1,3}. \tag{63}$$

Определение 1. Будем называть функции $\{\psi_k(x)\}_{k=1}^3$, определяемые формулами (55), (56), (59), (60), (62), (64), обобщенными потенциалами Жуковского, отвечающими задаче о малых движениях трех сочлененных гиростатов.

Очевидно, обобщенные потенциалы Жуковского зависят не только от конфигураций областей Ω_k, но также и от способа соединения гиростатов G_k, $k = \overline{1,3}$.

Проведенные рассмотрения показывают, что для квадратичной формы, определяемой присоединенной матрицей инерции, справедлив следующий результат.

Теорема 3. *Квадратичную форму присоединенной матрицы инерции $C_{\text{пр}}$ в задаче о колебаниях трех сочлененных гиростатов можно вычислить по формуле*

$$\left(C_{\text{пр}}\,\vec{\delta},\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} = \sum_{k=1}^{3}\rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\nabla\psi_k|^2\, d\Omega_k, \tag{64}$$

где ψ_k — обобщенные потенциалы Жуковского, выраженные через компоненты векторов $\vec{\delta}_1$, $\vec{\delta}_2$ и $\vec{\delta}_3$ следующим образом:

$$\psi_1 = \sum_{j=1}^{3}\delta_1^j(t)\psi_{1j}, \quad \psi_2 = \sum_{l=1}^{3}\delta_1^l\left(\vec{e}_1^{\,l}\times\vec{h}_1\right)\cdot\vec{r}_2 + \sum_{j=1}^{3}\delta_2^j(t)\psi_{2j}, \tag{65}$$

$$\psi_3 = \sum_{l=1}^{3}\delta_1^l\left(\vec{e}_1^{\,l}\times\vec{h}_1\right)\cdot\vec{r}_3 + \sum_{m=1}^{3}\delta_1^m\left(\vec{e}_2^{\,m}\times\vec{h}_2\right)\cdot\vec{r}_3 + \sum_{j=1}^{3}\delta_3^j(t)\psi_{3j}, \tag{66}$$

ψ_{kj} — потенциалы Жуковского, определяемые однозначно по решениям задач (56), (60), (64).

Таким образом, при исследовании задачи о малых движениях системы сочлененных гиростатов необходимо предварительно вычислить потенциалы Жуковского для областей Ω_k, $k = \overline{1,3}$, целиком заполненных идеальной жидкостью.

О разрешимости начально-краевой задачи о малых движениях системы сочлененных гиростатов. Опираясь на дифференциальное уравнение (28) и связь (31), на соответствующие начальные условия (см. (28), (32)) и свойства операторных коэффициентов A, B и C, выраженные в леммах 1, 2 и теореме 1, рассмотрим вопрос о разрешимости начально-краевой задачи (1)—(9) о колебаниях системы из трех сочлененных гиростатов.

Теорема 4. *Пусть в задаче* (1)—(9) *выполнены следующие условия:*

$$\vec{u}_k^{\,0}\in\vec{J}_0(\Omega_k), \quad \vec{\omega}_k^{\,0}, \quad \vec{\delta}_k^{\,0}\in\mathbb{R}^3, \quad k=\overline{1,3}, \tag{67}$$

а малое внешнее поле $\vec{f}=\vec{f}(t,x)$ удовлетворяет следующим свойствам: поля

$$\vec{f}_k(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{\Omega_k}, \quad \vec{f}_{0k}(t,x) := \vec{f}(t,x)|_{\Omega_{0k}}, \quad k=\overline{1,3}, \tag{68}$$

являются непрерывными функциями $t \in [0, \quad T]$ *со значениями в пространствах* $\vec{L}_2(\Omega_k)$ *и* $\vec{L}_2(\Omega_{0k})$ *соответственно.*

Тогда задача (1)—(9) *имеет единственное решение на отрезке* $[0, \quad T]$, *которое обладает следующими свойствами:*

1^0. *Функции* $\vec{\delta}_k(t)$ *являются дважды непрерывно дифференцируемыми по* $t \in [0, \quad T]$ *вектор-функциями со значениями в* $\mathbb{C}^3$, *т.е.*

$$\vec{\delta}_k(t) \in C^2\left([0, \quad T]; \mathbb{C}^3\right), \quad k = \overline{1, n}; \tag{69}$$

соответственно функции $\vec{\omega}_k(t)$ *обладают свойствами*

$$\vec{\omega}_k(t) \in C^1\left([0, \quad T]; \mathbb{C}^3\right), \quad k = \overline{1, n}. \tag{70}$$

2^0. *Поля скоростей* $\vec{u}_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$, *являются непрерывно дифференцируемыми по* t *функциями при* $t \in [0, \quad T]$ *со значениями в* $\vec{J}_0(\Omega_k)$:

$$\vec{u}_k(t, x) \in C^1\left([0, \quad T]; \vec{J}_0\left(\Omega_k\right)\right), \quad k = \overline{1, n}. \tag{71}$$

3^0. *Поля давлений* $\vec{p}_k(t, x)$, $x \in \Omega_k$, *обладают свойствами*

$$\nabla p_k(t, x) \in C\left([0, \quad T]; \vec{G}(\Omega_k)\right), \quad k = \overline{1, n}. \tag{72}$$

Иными словами, решение задачи (1)—(9) *таково, что все слагаемые во всех уравнениях являются непрерывными функциями* $t \in [0, \quad T]$ *со значениями в соответствующих гильбертовых пространствах.*

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы* (4), *то для решения задачи* (1)—(9) *справедлив закон баланса полной энергии в форме* (11), *где все слагаемые, в том числе первые производные по* t *от кинетической и потенциальной энергий, являются непрерывными функциями* $t \in [0, \quad T]$.

Нормальные колебания системы сочлененных гиростатов.

В данном параграфе изучается задача о так называемых нормальных движениях исследуемой гидромеханической системы. Формулируются свойства собственных значений и корневых элементов исследуемой задачи.

Постановка задачи о нормальных колебаниях. Будем считать, что на систему сочлененных гиростатов не действует дополнительное поле внешних сил, т.е. $\vec{f}(t, x) \equiv \vec{0}$. Тогда, как следует из (1)—(3), (11), (23)—(25), (32), заданные правые части в возникающих эволюционных уравнениях — тождественно нулевые вектор-функции переменной t, в частности, в первом уравнении (28) $\vec{M}(t) \equiv \vec{0}$ (см. (32)).

Движения такого вида будем называть свободными.

Определение 2. Будем говорить, что решение задачи о свободных движениях системы сочлененных гиростатов являются нормальными колебаниями, если искомые функции зависят от t по закону $\exp(-\lambda t)$, т.е.

$$\vec{\delta}_k(t) = e^{-\lambda t}\vec{\delta}_k, \quad \vec{\omega}_k(t) = e^{-\lambda t}\vec{\omega}_k, \quad k = \overline{1,3},$$
$$\vec{u}_k(t,x) = e^{-\lambda t}\vec{u}_k(x), \quad p_k(t,x) = e^{-\lambda t}p_k(x), \quad k = \overline{1,3}. \quad (73)$$

В этих формулах $\lambda \in \mathbb{C}$ — неизвестный заранее спектральный параметр задачи, а множители при $\exp(-\lambda t)$ — так называемые амплитудные элементы. Отметим еще, что $\operatorname{Re}\lambda$ (> 0) дают декремент затухания нормальных колебаний, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ — их частоту.

Рассмотрим нормальные колебания исследуемой гидромеханической системы на основе нескольких возникших эволюционных уравнений. Для задачи (23)—(25), (8) приходим к уравнениям

$$-\lambda C\vec{\omega} + A\vec{\omega} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad -\lambda\vec{\delta} = \vec{\omega}, \quad \vec{\omega}, \vec{\delta} \in \mathcal{H} \in \left(\mathbb{C}^3\right)^3, \quad (74)$$

для задачи (28), (31) (а также из (74)) получаем эквивалентную спектральную задачу

$$\lambda^2 C\vec{\delta} - \lambda A\vec{\delta} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad -\lambda\vec{\delta} = \vec{\omega}. \quad (75)$$

Простейшие свойства спектра и системы корневых элементов. Свойства собственных значений и корневых элементов задач (74), (75) сформулируем в виде отдельных утверждений.

Свойство 1^0. Число $\lambda = \lambda_0 = 0$ является 3—кратным собственным значением задач (74), (75). Отвечающее ему собственное подпространство $\mathcal{H}_0$ состоит из элементов вида

$$\left(\vec{\omega}, \vec{\delta}\right)^\tau = \left(\vec{0}, \vec{\delta}^3\right)^\tau, \quad \vec{\delta}^3 \in \ker B \neq \vec{0}, \quad (76)$$

где

$$\vec{\delta}^3 = \left(\vec{\delta}_1^3 = \delta_1^3\vec{e}_1^3; \vec{\delta}_2^3; \vec{\delta}_3^3\right)^\tau. \quad (77)$$

Свойство 2^0. Если $\lambda \neq 0$, то задача (74) либо (75) равносильна спектральной проблеме

$$L(\lambda)\vec{\delta} := \left(A - \lambda C - \lambda^{-1}P_2BP_2\right)\vec{\delta} = \vec{0}, \quad \vec{\delta} \in \mathcal{H}, \quad (78)$$

Собственные значения λ расположены симметрично относительно вещественной оси и по собственным элементам $\vec{\delta}$ находятся по формулам

$$\lambda_\pm = \frac{\left(A\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} \pm \sqrt{\left(A\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}^2 - 4\left(C\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}} \cdot \left(B_1P_2\vec{\delta}, P_2\vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}_1}}}{2\left(C\vec{\delta}, \vec{\delta}\right)_{\mathcal{H}}}; \quad (79)$$

Кроме того, они обладают свойством

$$\operatorname{Re}\lambda > 0. \quad (80)$$

Свойство 3^0**.** Невещественные собственные значения λ, а также те вещественные λ (они положительны), которым отвечают, кроме собственных, присоединенные элементы, расположены в сегменте

$$F := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \geqslant \frac{1}{2}\lambda_{min}\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right), |\lambda| \leqslant \lambda_{max}\left(\tilde{C}_{11}^{-1/2}B_1\tilde{C}_{11}^{-1/2}\right)\right\}, \quad (81)$$

где $\lambda_{min}\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right) > 0$— минимальное собственное значение оператора $C^{-1/2}AC^{-1/2}$, а $\lambda_{max}\left(\tilde{C}_{11}^{-1/2}B_1\tilde{C}_{11}^{-1/2}\right)$ — максимальное собственное значение задачи

$$B_1\left(P_2\vec{\delta}\right) = \lambda C\vec{\delta}, \quad (82)$$

причем

$$\tilde{C}_{11} := C_{11} - C_{10}C_{00}^{-1}C_{01} > 0, \quad C_{ij} := P_iCP_j, \quad i,j = 0,1, \quad (83)$$

где $P_1 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ и $P_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0$ ортопроекторы на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_0$ соответственно (в силу леммы 1 оператор B допускает представление в виде $B = diag\,(B_1; 0)$ в ортогональном разложении $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_0 = \ker B$, $\dim\mathcal{H}_0 = 3$, $\dim\mathcal{H}_1 = 2\cdot 3 = 6$, где $\mathcal{H}_0 = \ker B$ — подпространство, натянутое на элементы (45), а $\mathcal{H}_1$ состоит из элементов вида $P_2\vec{\delta} := \left(P_2\vec{\delta}_1; P_2\vec{\delta}_2; P_2\vec{\delta}_3\right)^\tau$, т.е. из набора проекций векторов $\vec{\delta}_k$ на плоскости $O_kx_k^1x_k^2$, $k = \overline{1,3}$).

Свойство 4^0**.** Если выполнено условие

$$\lambda_{min}\left(C^{-1/2}AC^{-1/2}\right) > 2\lambda_{max}\left(\tilde{C}_{11}^{-1/2}B_1\tilde{C}_{11}^{-1/2}\right), \quad (84)$$

то задача (75) не имеет невещественных собственных значений и присоединенных элементов.

Свойство 5^0**.** Задача (74) о нормальных колебаниях трех сочлененных гиростатов имеет $6\cdot 3 = 18$ собственных значений (с учетом их кратностей). При этом, как уже упоминалось в свойстве 1^0, $\lambda = 0$ — трехкратное собственное значение.

Свойство 6^0**.** Физический смысл нормальных движений, отвечающих собственному значению $\lambda = 0$, для трех сочлененных гиростатов состоит в следующем: этому λ соответствуют не движения, а новые состояния покоя гидромеханической системы, которые получаются из исходного состояния поворотом гиростатов на произвольные углы $\vec{\delta}_1^3$, $\vec{\delta}_2^3$, $\vec{\delta}_3^3$ соответственно.

Свойство 7^0**.** Если трение в шарнирах отсутствует, то $A = 0$. В этом случае задача (74) принимает вид

$$B\vec{\delta} - \lambda C\vec{\omega} = \vec{0}, \quad \vec{\omega} + \lambda\vec{\delta} = \vec{0}, \quad \vec{\omega}, \vec{\delta} \in \mathcal{H}. \quad (85)$$

Данная задача имеет $2\cdot 3 = 6$-кратное собственное значение $\lambda_0 = 0$, ему отвечает 3 первых присоединенных элементов соответственно вида

$$\vec{\omega}_0 = \vec{0}, \quad \vec{\delta}_0 = \vec{\delta}_0^3 \in \ker B = \mathcal{H}_0, \quad \vec{\omega}_1 = \vec{\omega}_1 \in \ker B, \quad \vec{\delta}_1 = \vec{0}. \quad (86)$$

Кроме того, задача (85) имеет $2 \cdot 3 = 6$ пар чисто мнимых собственных значений

$$\lambda_k^{\pm} = \pm i\lambda_k^{1/2}\left(\tilde{C}_{11}^{-1/2} B_{11} \tilde{C}_{11}^{-1/2}\right), \quad k = \overline{1,6}. \tag{87}$$

Свойство 8^0**.** В качестве следствия из свойства 7^0 получаем также утверждение: при достаточно малом трении в шарнирах (коэффициенты $\alpha_k > 0$, $k = \overline{1,3}$, достаточно малы) задача (74) имеет 3-кратное нулевое собственное значение и 3 собственных значения (вероятно, вещественных, а потому положительных) в окрестности нуля. Тогда всего в задаче (74) может быть не более $2 \cdot 3 = 6$ пар комплексно сопряженных собственных значений.

Свойство 9^0**.** Предыдущие свойства решений задачи (74) показывают, что трение в шарнирах играет существенную роль в данной задаче: если оно отсутствует, то спектр расположен на мнимой оси; если оно достаточно велико (выполнено условие (84)), то этот спектр расположен на неотрицательной полуоси; если трение умеренное, то спектр расположен (кроме нулевого собственного значения) в правой комплексной полуплоскости, причем может быть, по-видимому, не более чем $2 \cdot 3 = 6$ пар невещественных комплексно сопряженных собственных значений. Каждой такой паре $\lambda_0 = \alpha_0 + i\beta_0$ отвечает декремент затухания $\alpha_0 > 0$ нормального движения гидромеханической системы и частота колебания $\beta_0 > 0$.

Свойство 10^0**.** В качестве еще одного следствия из свойства 7^0 приведем такой факт: в задаче о свободных движениях гидромеханической системы, отвечающей задаче (85) при отсутствии трения в шарнирах, т.е. в задаче

$$C\frac{d\vec{\omega}}{dt} + B\vec{\delta} = \vec{0}, \quad \frac{d\vec{\delta}}{dt} = \vec{\omega}, \tag{88}$$

возможны тривиальные решения вида

$$\vec{\delta}(t) = \vec{\delta}_0 + t\vec{\omega}_0, \quad \vec{\delta}_0 = \vec{\delta}_0^3, \quad \vec{\omega}_0 = \vec{\omega}_0^3. \tag{89}$$

Они соответствуют произвольному перемещению системы при $t = 0$ на $\vec{\delta}_0 = \left(\vec{\delta}_{0,1}^3; \vec{\delta}_{0,2}^3; \vec{\delta}_{0,3}^3\right)^{\tau}$, а затем медленному равномерному вращению каждого гиростата с угловой скоростью $\vec{\omega}_0 = \left(\vec{\omega}_{0,1}^3; \vec{\omega}_{0,2}^3; \vec{\omega}_{0,3}^3\right)^{\tau}$.

Свойство 11^0**.** Отметим, наконец, еще одно математическое обстоятельство: система корневых (собственных и присоединенных) элементов этой задачи образует базис в пространстве $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1 = \left(\mathbb{C}^3\right)^3 \oplus \left(\mathbb{C}^2\right)^3 = \left(\mathbb{C}^5\right)^3 = \mathbb{C}^{15}$.

Индефинитный подход. К исследуемой проблеме нормальных колебаний системы из 3 сочлененных гиростатов можно применить еще один подход, основанный на теории самосопряженных операторов, действующих в пространстве с индефинитной метрикой (см. например, [8], [9] и [10]). Очень краткие сведения о таких операторах можно также найти в параграфе 1.4 монографии [1].

Проблема нормальных колебаний исследуемой гидромеханической системы сводится к спектральной задаче вида

$$\mathcal{A}\vec{v} = \lambda\vec{v}, \quad \vec{v} := \left(\vec{\psi}; \vec{\psi}_1\right)^\tau = \left(C^{1/2}\vec{\omega}; -iB_1^{1/2}\left(P_2\vec{\delta}\right)\right)^\tau, \tag{90}$$

$$\vec{\psi} \in \mathcal{H}, \quad \vec{\psi}_1 \in \mathcal{H}_1, \quad \vec{v} \in \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1, \quad \dim\mathcal{H} = 3n, \quad \dim\mathcal{H}_1 = 2n, \quad n = 3, \tag{91}$$

где оператор $\mathcal{A}$ определен формулой:

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & iP_2B_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2}P_2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} C^{-1/2}AC^{-1/2} & iC^{-1/2}P_2B_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2}P_2C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{92}$$

Этот оператор является (максимальным) аккретивным оператором, действующим в $\tilde{\mathcal{H}}$. Однако он обладает еще одним замечательным свойством: он является самосопряженным оператором в пространстве с индефинитной метрикой.

Введем, опираясь на ортогональное разложение $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}_1$ оператор

$$\mathfrak{J} := \mathrm{diag}(I_{3n}; -I_{2n}), \quad n = 3, \tag{93}$$

где I_{3n} и I_{2n} — единичные операторы в $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}_1$ соответственно. Очевидно, этот оператор обладает свойствами

$$\mathfrak{J} = \mathfrak{J}^* = \mathfrak{J}^{-1}, \tag{94}$$

т.е. является канонической симметрией.

Для элементов из $\tilde{\mathcal{H}}$ введем наряду с обычным скалярным произведением

$$(\vec{v}, \vec{w})_{\tilde{\mathcal{H}}} := \left(\vec{\psi}; \vec{\varphi}\right)_{\mathcal{H}} + \left(\vec{\psi}_1; \vec{\varphi}_1\right)_{\mathcal{H}_1}, \quad \vec{v} = \left(\vec{\psi}; \vec{\psi}_1\right)^\tau, \quad \vec{w} = (\vec{\varphi}; \vec{\varphi}_1)^\tau, \tag{95}$$

так называемое индефинитное скалярное произведение

$$[\vec{v}, \vec{w}] := \left(\vec{\psi}; \vec{\varphi}\right)_{\mathcal{H}} - \left(\vec{\psi}_1; \vec{\varphi}_1\right)_{\mathcal{H}_1} = (\mathfrak{J}\vec{v}, \vec{w})_{\tilde{\mathcal{H}}}. \tag{96}$$

Соответствующее пространство с индефининой метрикой обозначим (по аналогии с пространством Л.С. Понтрягина $\Pi_\varkappa$) символом $\tilde{\mathcal{H}}_\varkappa$, где, согласно (93), $\varkappa = 2n$, т.е. количеству отрицательных квадратов в квадратичной форме

$$[\vec{v}, \vec{v}] := ||\vec{\psi}||^2_{\mathcal{H}} - ||\vec{\varphi}_1||^2_{\mathcal{H}_1} = (\mathfrak{J}\vec{v}, \vec{v})_{\tilde{\mathcal{H}}}, \quad dim\mathcal{H}_1 = 2n, \quad n = 3. \tag{97}$$

Заметим теперь, что

$$\mathfrak{J}\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I_{3n} & 0 \\ 0 & -I_{2n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^{-1/2}AC^{-1/2} & iC^{-1/2}P_2B_1^{1/2} \\ iB_1^{1/2}P_2C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} C^{-1/2}AC^{-1/2} & iC^{-1/2}P_2B_1^{1/2} \\ -iB_1^{1/2}P_2C^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} = (\mathfrak{J}\mathcal{A})^*, \tag{98}$$

т.е. действительно является оператором, самосопряженным в пространстве $\tilde{\mathcal{H}}_\varkappa$ с индефинитной метрикой (97). Это важное обстоятельство, а также конечномерность пространства $\tilde{\mathcal{H}}_\varkappa$, $\dim \tilde{\mathcal{H}}_\varkappa = 5n$, позволяет сразу установить свойства решений спектральной задачи (90), а потому и связанных с ней задач (75) и (74).

Теорема 6. *Спектр задачи* (74) *(либо* (75)*) о нормальных колебаниях системы* $n = 3$ *сочлененных гиростатов может иметь при наличии трения в шарнирах и* $A >> 0$ *не более* $2\varkappa = 4n = 4 \cdot 3 = 12$ *невещественных (комплексно сопряженных) собственных значений. Остальные* $6n - 4n = 2n = 2 \cdot 3 = 6$ *собственных значений вещественны (неотрицательны) и обладают следующими свойствами:* $\lambda = \lambda_0 = 0$ *является* $n = 3$*-кратным собственным значением и ему не отвечают присоединенные элементы, остальные* $n = 3$ *собственных значений положительны и им также не отвечают присоединенные элементы.*

Если выполнено условие (84)*, то все собственные значения задачи* (74) *вещественны (и неотрицательны), а собственные элементы спектральной задачи* (90)*,* (91) *образуют* $\mathfrak{J}$*-ортогональный базис в пространстве* $\tilde{\mathcal{H}}_\varkappa$*, причем отвечающие элементам этого базиса собственные значения положительны.*

Список литературы

[1] *Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М., 1989.

[2] *Батыр Э.И.* Малые движения двойного маятника с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость. — //Ученые записки ТНУ.— Симферополь, 2001. — Том 14(53), №1 — С. 18–23.

[3] *Батыр Э.И.* Малые движения системы последовательно сочлененных тел с полостями, содержащими идеальную несжимаемую жидкость. — //Ученые записки ТНУ.— Симферополь, 2002. — Том 15(54), №2 — С. 5–10.

[4] *Ладыженская О.А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М., 1970.

[5] *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С.52–73.

[6] *Харламов П.В.* Составной пространственный маятник // Механика твердого тела. 1972. Вып. 4. С.73–82.

[7] *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Избр. соч.— Т. 1. — М.; Л.: Гостехиздат, 1948. — С. 31 – 152.

[8] *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. М., 1986.

[9] *Iohvidov I.S., Krein M.G., Langer H.* Introduction to the Spectral Theory of Operators in Spaces with an Indefinite Metric. Akademic. Verlag, Berlin, 1982.

[10] *Якубович В.А., Старжинский В.М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. М., 1972.

Малі рухи і нормальні коливання системи трьох зчленованих тіл з порожнинами, що заповнені ідеальною нестисливою рідиною.batyr

У роботі досліджується початково-краєва та спектральна задачі про малі коливання системи з трьох тіл. Система являє собою ланцюг послідовно з'єднанних твердих тіл. Кожне тіло такого ланцюга є гіростат. Формулюється теорема існування розв'язків задачі Коші; описуються властивості нормальних коливань; відома теорема Н.Є. Жуковського переноситься на випадок руху системи трьох тіл.

Ключові слова: система трьох зчленованих гіростатів, ідеальна нестислива рідина.

Батуг, Е.І. Small movements and normal oscillations of a system of three connected bodies with the cavities, filled by an ideal incompressible fluid.batyr

In this paper we considered an initial-boundary value and spectral problems about the small movements of a system of three bodies. The system is a circuit of the consistently connected hard bodies. Each of the bodies of such circuit is a gyrostat. The existence theorem of solutions of the Cauchy problem is formulated. The properties of normal oscillations are described. The known N.E. Zhukovsky's theorem is transferred on a case of a movement of three bodies.

Keywords: system of three connected gyrostats, ideal incompressible fluid.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 40–51.

УДК 517.972

Е. В. Божонок

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КОМПАКТНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА H^1

Найдено минимальное псевдоквадратичное представление интегранта класса $W^2K_2(z)$ вариационного функционала в H^1. Описан общий вид вариационного функционала, удовлетворяющего стационарной форме условий Лежандра–Якоби. Получены условия существования нелокального K–экстремума в нуле вариационного функционала в пространстве H^1. Рассмотрены примеры.

Ключевые слова: вариационный функционал, K–экстремум, пространство Соболева.

Введение. Предварительные сведения

Начиная с 20–х годов прошлого века и вплоть до настоящего времени, основное внимание математиков, исследовавших чрезвычайно важные для приложений вариационные задачи в пространствах Соболева, уделялось задачам на абсолютный экстремум и условный абсолютный экстремум (см. [1], [2]). Однако такой подход жестко ограничивает класс допустимых интегральных функционалов.

Глубинные причины отсутствия неабсолютных локальных экстремумов у вариационных функционалов в пространствах Соболева были вскрыты в замечательной теореме И.В. Скрыпника ([3]), которая исключает (в неквадратичном случае) применение традиционных аналитических методов нахождения локального экстремума и по сути свидетельствует *об отсутствии неабсолютных локальных экстремумов* в рассматриваемой ситуации.

Дальнейшее исследование экстремальных задач в классическом пространстве Соболева $H^1([0;T])$ с нормой

$$\|y\|_{H^1} = \left(\int_0^T |y(x)|^2 dx + \int_0^T |y'(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

привело в работах И.В. Орлова ([4], [5]) к введению понятия компактного экстремума (K–экстремума), а также понятий компактной непрерывности (K–непрерывности), компактной дифференцируемости (K–дифференцируемости) и т.д., основанному на переходе к соответствующим свойствам в банаховых подпространствах, порожденных всеми абсолютно выпуклыми компактами в исходном пространстве. В работах ([4], [6]) было показано, что в пространстве Соболева H^1 вариационный функционал для широкого класса интегрантов обладает свойством повторной компактной дифференцируемости. Кроме того, в ([7], [8]) перенесены на случай K–экстремума классические необходимые условия и достаточные условия локального экстремума для вариационного функционала в пространстве C^1.

В настоящей статье найдено минимальное псевдоквадратичное представление интегранта вариационного функционала класса $W^2K_2(z)$ (попадание интегранта в данный класс является достаточным условием повторной K–дифференцируемости вариационного функционала в H^1). Получены условия существования K–экстремума в нуле вариационного функционала в пространстве H^1, найден общий вид интегранта, удовлетворяющего данным условиям. Проведено исследование на нелокальность K–экстремума в нуле вариационного функционала. Рассмотрены конкретные примеры.

Приведем необходимые определения и результаты ([4]–[8]).

Определение 1. Пусть H — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $\Phi : H \to \mathbb{R}$. Говорят, что функционал Φ имеет *компактный экстремум* (K–*экстремум*) в точке $y \in H$, если для любого компактного эллипсоида $C_\varepsilon \subset H$ сужение Φ на $(y + span\, C_\varepsilon)$ имеет в точке y локальный экстремум относительно гильбертовой нормы $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порожденной C_ε.

Определение 2. Говорят, что отображение $f : [0;T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *принадлежит классу* $W^2K_2(z)$, если представление

$$f(x,y,z) = A(x,y,z) + B(x,y,z) \cdot z + C(x,y,z) \cdot z^2, \tag{1}$$

можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C_y \subset \mathbb{R}$ отображения A, B, $C \in W_K(z)$, т.е. равномерно непрерывны и ограничены на $T_C = [0;T] \times C_y \times \mathbb{R}$, с аналогичным требованием на градиенты ∇_{yz} и гессианы H_{yz} отображений A, B и C (в этом случае говорят, что отображения A, B, $C \in W_K^2(z)$).

В [6] было получено следующее достаточное условие повторной K–дифференцируемости вариационного функционала в пространстве Соболева $H^1([0;T])$.

Теорема 1. *Если $f \in W^2K_2(z)$, то функционал Эйлера-Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_0^T f(x,y,y')dx, \quad y(\cdot) \in H^1([0;T]), \tag{2}$$

дважды K–дифференцируем всюду на $H^1([0;T])$; при этом

$$\Phi''_K(y)(h,k) \quad = \quad \int\limits_0^T \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(h,k) \ + \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}((h',k) \ + \ (h,k')) \ + \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(h',k')\Big]dx. \tag{3}$$

Аналогом классического необходимого условия локального экстремума вариационного функционала для нахождения K-экстремума (2) в пространстве $H^1([0;T])$, является *обобщенное уравнение Эйлера–Лагранжа* ([5]).

Теорема 2. *Если, в предположениях теоремы 1:*

(i) *функционал (2) имеет K–экстремум в точке $y(\cdot) \in H^1([0;T])$;*
(ii) *функция $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')$ абсолютно непрерывна на $[0;T]$;*

то выполнено обобщенное уравнение Эйлера-Лагранжа:

$$L(f)(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\right) = 0 \quad \text{п.в. на } [0;T]. \tag{4}$$

В частности, условие (ii) выполнено, если $(\partial f/\partial z) \in C^1([0;T]\times\mathbb{R}^2)$, $y(\cdot) \in W^{2,2}([0;T])$.

Решения уравнения (4), при выполнении условия (ii) теоремы 2, называются *K–экстремалями* функционала (2) в пространстве $H^1([0;T])$.

Приведем также *обобщенное достаточное условие Лежандра–Якоби* ([7]) строгого K–экстремума в случае пространства Соболева $H^1([0;T])$.

Теорема 3. *Пусть $f : [0;T]\times\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in W^2K_2(z)$, $y(\cdot)$ — K–экстремаль функционала (2) в $H_0^1([0;T])$ и функции $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y(x),y'(x))$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y(x),y'(x))$ абсолютно непрерывны на K–экстремали $y(\cdot)$. Если на K–экстремали $y(\cdot)$:*

1) выполнено усиленное условие Лежандра, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y(x),y'(x)) > 0 \quad \text{всюду на } [0;T];$$

2) выполнено обобщенное условие Якоби, т.е. любое решение уравнения Якоби

$$-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y(x),y'(x))u'\right) + \left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y(x),y'(x))\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y(x),y'(x))\right]u \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \tag{5}$$

в классе $H^1([0;T])$*, удовлетворяющее начальным условиям* $u(0)=0$*,* $u'(0)=1$*, не обращается в нуль при* $0<x\le T$*, то функционал Эйлера–Лагранжа* (2) *имеет строгий* K*–минимум в точке* $y(\cdot)$*.*

1. Минимальное псевдоквадратичное представление интегранта вариационного функционала класса $W^2K_2(z)$

Рассмотрим $f\in W^2K_2(z)$, т.е.

$$f(x,y,z)=A(x,y,z)+B(x,y,z)\cdot z+C(x,y,z)\cdot z^2,$$

где A, B, $C\in W_K(z)$, с аналогичным представлением для градиента $\nabla_{yz}f$ и гессиана $H_{yz}f$.

Так как функция f дважды непрерывно дифференцируема в $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ по (y,z), то применяя в точке $(x,y,0)$ формулу Тейлора 2–го порядка по z, получаем:

$$f(x,y,z)=f(x,y,0)+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)\cdot z+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,0)\cdot\frac{z^2}{2}+\varphi(x,y;z),\tag{6}$$

где $\varphi(x,y;z)=o(z^2)$ при $z\to 0$ локально равномерно по x, y. Положим:

$$R(x,y,z)=\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,0)+\frac{\varphi(x,y;z)}{z^2}\quad\text{при}\quad z\ne 0;\qquad R(x,y,0)=0.$$

Тогда $R\in W_K(z)$, и обозначая $P(x,y)=f(x,y,0)$, $Q(x,y)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)$, из (6) получаем:

$$f(x,y,z)=P(x,y)+Q(x,y)\cdot z+R(x,y,z)\cdot\frac{z^2}{2},\tag{7}$$

где P, $Q\in C^2$; $R\in W_K(z)$.

Теперь, используя равенства:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y}\cdot z+\frac{\partial R}{\partial y}\cdot\frac{z^2}{2},\quad \frac{\partial f}{\partial z}=Q+R\cdot z+\frac{\partial R}{\partial z}\cdot\frac{z^2}{2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial y}\cdot z+\frac{\partial^2 R}{\partial y\partial z}\cdot\frac{z^2}{2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}\cdot z+\frac{\partial^2 R}{\partial y^2}\cdot\frac{z^2}{2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=R+2\frac{\partial R}{\partial z}\cdot z+\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\cdot\frac{z^2}{2},\tag{8}$$

из условий $\nabla_{yz}f\in WK_2(z)$, $H_{yz}f\in WK_2(z)$ получаем, что $\nabla_{yz}R\in W_K(z)$, $H_{yz}R\in W_K(z)$, т.е. в представлении (7) $R\in W_K^2(z)$.

Обратно, если выполнено представление (7), где P, $Q\in C^2$; $R\in W_K^2(z)$, то $f\in W^2K_2(z)$. Таким образом, доказана следующая теорема:

Теорема 4. *Представление* (7) *функции* f*, где* P*,* $Q\in C^2$*;* $R\in W_K^2(z)$*, является необходимым и достаточным для принадлежности* f *классу* $W^2K_2(z)$*.*

2. Условия существования K–экстремума в нуле вариационного функционала в пространстве H^1

Рассмотрим вариационный функционал

$$\Phi(y)=\int\limits_0^T\left(R(x,y,y')\cdot\frac{y'^2}{2}+Q(x,y)\cdot y'+P(x,y)\right)dx,\quad y(\cdot)\in H_0^1([0;T]),\qquad(9)$$

где P, $Q\in C^2$; $R\in W_K^2(z)$.

Отметим, что, согласно теореме 4, интегрант

$$f(x,y,z)=R(x,y,z)\cdot\frac{z^2}{2}+Q(x,y)\cdot z+P(x,y)$$

принадлежит классу $W^2K_2(z)$. Отсюда, по теореме 1, введенный выше функционал определен всюду и дважды K–дифференцируем в $H_0^1([0;T])$.

Рассмотрим теперь условия существования K–экстремума в нуле вариационного функционала (9).

1) Из равенств (8) получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)=\frac{\partial P}{\partial y}(x,0),\quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)=Q(x,0).\qquad(10)$$

Тогда, подставляя (10) в вариационное уравнение Эйлера–Лагранжа (4) на K–экстремали $y_0(x)\equiv 0$ $(0\le x\le T)$ для функционала (9) и учитывая, что, в силу $f\in C^2$, $(d/dx)[f(x,0,0)]=(d/dx)[Q(x,0)]$, получаем

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,0)\equiv 0.\qquad(11)$$

2) Изучим теперь условия выполнения достаточного условия Лежандра–Якоби строгого K–экстремума для функционала $\Phi(y)$ в пространстве Соболева H_0^1 (теорема 3) на K–экстремали $y_0(\cdot)$. Отметим вначале, что необходимо наложить на K–экстремали $y_0(x)\equiv 0$ дополнительное требование абсолютной непрерывности функций

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y_0(x),y_0'(x))=Q(x,0)\quad\text{и}\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y_0(x),y_0'(x))=\frac{\partial Q}{\partial y}(x,0).$$

i) *Усиленное условия Лежандра*, в случае K–минимума, всюду на $[0;T]$ для функционала (9) принимает вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,0,0)=R(x,0,0)>0.\qquad(12)$$

ii) *Условие Якоби*: из равенств (8) уравнение Якоби для функционала (9) на K–экстремали $y_0(\cdot)$

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,0,0)u'\right]+\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,0,0)\right)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0,0)\right]u\overset{\text{п.в.}}{=}0$$

принимает вид:

$$-\frac{d}{dx}\left[R(x,0,0)u'\right]+\left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial Q}{\partial y}(x,0)\right)+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,0)\right]u \overset{\text{п.в.}}{=} 0,$$

или, с учетом $f \in C^2$,

$$-\frac{d}{dx}\left[R(x,0,0)u'\right]+\left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,0)-\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x,0)\right]u \overset{\text{п.в.}}{=} 0, \tag{13}$$

с начальными условиями $u(0)=0$, $u'(0)=1$.

Рассмотрим теперь достаточные условия выполнимости условия Якоби.

Примем следующие дополнительные условия:

$$R(x,0,0) \equiv r > 0, \tag{14}$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)(x,0) \equiv p. \tag{15}$$

Тогда уравнение (13) примет вид:

$$ru''-pu=0, \quad u(0)=0, \;\; u'(0)=1. \tag{16}$$

Рассмотрим различные возможные случаи: $p=0$, $p>0$, $p<0$.

а) $p=0$. Уравнение (16) принимает вид: $u''=0$, откуда решение $u(x)=x$ удовлетворяет условию Якоби: $u(x)\neq 0$, $0<x\leq T$, при любом $T>0$.

б) $p>0$. Уравнение (16) принимает вид: $u''=\frac{p}{r}u$, где $\frac{p}{r}>0$, откуда решение $u(x)=\sqrt{\frac{r}{p}}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{p}{r}}x$ удовлетворяет условию Якоби: $u(x)\neq 0$, $0<x\leq T$, при любом $T>0$.

в) $p<0$. Уравнение (16) принимает вид: $u''=-\left|\frac{p}{r}\right|u$ (при этом $\frac{p}{r}<0$), откуда решение $u(x)=\sqrt{\left|\frac{r}{p}\right|}\sin\sqrt{\left|\frac{p}{r}\right|}x$ удовлетворяет условию Якоби: $u(x)\neq 0$, $0<x\leq T$, лишь при $T<\pi\sqrt{\left|\frac{r}{p}\right|}$.

Назовем условия (11)–(14)–(15) (обеспечивающие выполнение достаточных условий Лежандра–Якоби в нуле) стационарной формой условий Лежандра–Якоби (в нуле), или условиями (SLJ).

3. Общий вид интегранта, удовлетворяющего условиям (SLJ) в нуле

Наша задача в этом пункте — описать *все* интегранты $f(x,y,z)$ вариационного функционала (9) класса $W^2K_2(z)$, удовлетворяющие условиям (11)–(14)–(15):

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,0)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,0)\equiv 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}\right)(x,0)\equiv p, \quad R(x,0,0)\equiv r>0, \tag{17}$$

где P, Q, R — коэффициенты минимального представления (7) интегранта f; $P, Q \in C^2$; $R \in W^2_K(z)$.

1) Выберем $P(x,y) \in C^2$ произвольно. Тогда первое из уравнений (17) дает:

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x,0) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,0)\right) \Leftrightarrow \left(Q(x,0) = \int\limits_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,0)dt + C_1\right),$$

откуда

$$Q(x,y) = \int\limits_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,0)dt + \widetilde{Q}(x,y), \qquad \text{где} \quad \widetilde{Q}(x,0) \equiv C_1. \tag{18}$$

2) Из второго уравнения в (17) получаем:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x,0) = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,0) - p. \tag{19}$$

Подставляя (18) в (19), получаем:

$$\left(\frac{\partial^2 \widetilde{Q}}{\partial x \partial y}(x,0) = \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y}(x,0) = \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,0) - p\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial y}(x,0) = \int\limits_0^x \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0) - p\right] dt + C_2\right),$$

откуда

$$\frac{\partial \widetilde{Q}}{\partial y}(x,y) = \int\limits_0^x \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0) - p\right] dt + \widetilde{q}(x,y), \quad \text{где} \ \ \widetilde{q}(x,0) \equiv C_2.$$

Интегрируя теперь по y, получаем:

$$\widetilde{Q}(x,y) = \int\limits_0^y ds \int\limits_0^x \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0) - p\right] dt + \int\limits_0^y \widetilde{q}(x,s)ds + C_1, \quad \text{где} \ \ \widetilde{q}(x,0) \equiv C_2. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (18), получаем:

$$Q(x,y) = \int\limits_0^x \frac{\partial P}{\partial y}(t,0)dt + \int\limits_0^y ds \int\limits_0^x \left[\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0) - p\right] dt + \int\limits_0^y \widetilde{q}(x,s)ds + C_1, \ \text{где } \widetilde{q}(x,0) \equiv C_2,$$

или, обозначая $\widetilde{q}(x,y) = q(x,y) - q(x,0) + C_2$, после несложных преобразований:

$$Q(x,y) = \int\limits_0^x \left[\frac{\partial P}{\partial y}(t,0) + y \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0)\right] dt + \int\limits_0^y [q(x,s) - q(x,0)]ds + (C_1 + C_2 y - p \cdot xy), \tag{21}$$

где следующая функция $q \in C^2$ и константы C_1 и C_2 произвольны.

3) Полагая

$$R(x,y,z) = r(x,y,z) - r(x,0,0) + r, \tag{22}$$

мы также получаем последнее из условий (17): $R(x,0,0) \equiv r$, Подставляя, наконец, (21)–(22) в (7), получаем искомый результат:

$$f(x,y,z) = P(x,y) + \left\{ \int_0^x \left[\frac{\partial P}{\partial y}(t,0) + y \cdot \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(t,0) \right] dt + \int_0^y [q(x,s) - q(x,0)]ds + \right.$$

$$\left. +(C_1 + C_2 y - p \cdot xy) \right\} \cdot z + [r(x,y,z) - r(x,0,0) + r] \cdot \frac{z^2}{2}, \qquad (23)$$

где следующие функции и константы $P(x,y) \in C^2$, $q(x,y) \in C^2$, $r(x,y,z) \in W_K^2(z)$; C_1 и C_2 — произвольны.

4. Свойства отображений класса $W_K^2(z)$

Для практического применения формулы (23) необходимо иметь в своем распоряжении достаточно обширные классы отображений $R(x,y,z) \in W_K^2(z)$. С этой целью рассмотрим некоторые легко проверяемые свойства таких отображений.

Обозначим вначале через $W^2(z)$ класс отображений $\varphi(z)$, для которых $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ и $\varphi''(z)$ равномерно непрерывны и ограничены при $-\infty < z < \infty$.

Тогда справедливы следующие утверждения

Предложение 1. *Если*

$$R(x,y,z) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x,y) \cdot \beta_k(z), \quad \text{где} \quad \alpha_k \in C^2, \quad \beta_k \in W^2(z),$$

то $R \in W_K^2(z)$.

Предложение 2. *Если* $R_1, \ldots, R_m \in W_K^2(z)$; $\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in C^2$, *то* $\varphi(R_1(x,y,z), \ldots, R_m(x,y,z)) \in W_K^2(z)$.

Следствие 1. *Из условий* $R_1, \ldots, R_m \in W_K^2(z)$, $\alpha_k(x,y) \in C^2$ $(k = \overline{1,m})$ *следует, что*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k(x,y) R_k(x,y,z) \in W_K^2(z).$$

Последнее следствие 1 обобщает предложение 1, так как

$$\beta_k \in W^2(z) \Rightarrow \beta_k \in W_K^2(z).$$

Следствие 2. *Если* $R_1, \ldots, R_m \in W_K^2(z)$, *то* $R_1 \cdot R_2 \cdot \ldots \cdot R_m \in W_K^2(z)$.

Предложение 3. *Если* $R(x,y,z) \in W_K^2(z)$, $\psi(z) \in W^2(z)$, *то* $R(x,y,\psi(z)) \in W_K^2(z)$.

Отметим также некоторые свойства класса $W^2(z)$, используемого в предыдущих конструкциях.

Обозначим через $C_b^n(z)$ — класс функций $\varphi(z) \in C^n$, имеющих ограниченные производные до n–го порядка.

Свойство 1. *Справедливы вложения:* $C_b^3(z) \subset W^2(z) \subset C_b^2(z)$.

Свойство 2. *Если* $\varphi \in C^2$, φ *периодическая, то* $\varphi \in W^2(z)$.

Свойство 3. *Если* $\varphi \in C^2$, $\varphi^{(k)}$ $(\pm\infty)$ *существуют и конечны при* $k = 0, 1, 2$, *то* $\varphi \in W^2(z)$.

5. Условия нелокальности K–экстремума в нуле вариационного функционала в пространстве H^1

Вначале отметим, что если функционал (9) достигает строгого K–минимума в нуле, то в любой окрестности $U(0) \subset H^1$ найдутся значения y, для которых $\Phi(y) > \Phi(0)$. Таким образом, Φ *не может достигать локального максимума в нуле.*

Рассмотрим теперь условия, при которых функционал (9) не имеет локального минимума в нуле.

Пусть интегрант функционала (9) удовлетворяет условиям (17), т.е. имеет вид (23) и Φ достигает строгого K–минимума в нуле. Предположим для удобства, что $\Phi(0) = 0$. В силу (23), это означает, что

$$\int_0^T P(x, 0)dx = 0.$$

Последнее условие заведомо выполняется, если потребовать, чтобы

$$P(x, 0) \equiv 0. \tag{24}$$

Введем также дополнительные условия:

$$Q(0, 0) = 0, \tag{25}$$

что, в силу (23), равносильно условию $C_1 = 0$, а также *условие знакопеременности* R: при некотором z_0

$$R(x, 0, z_0) \le -r_0 < 0 \qquad (\forall\, x \in [0; T]). \tag{26}$$

Покажем, что при выполнении условий (24)– (26) $\Phi(y)$ *не достигает локального минимума в нуле.*

Положим, при достаточно малых $\varepsilon > 0$,

$$y^\varepsilon(x) = \begin{cases} z_0(x - \varepsilon), & \text{при} \quad 0 \le x \le \varepsilon; \\ 0, & \text{при} \quad \varepsilon \le x \le T. \end{cases}$$

Очевидно, $y^\varepsilon \in H_0^1([0; T])$, при этом

$$\|y^\varepsilon\|_{H^1}^2 = \int_0^\varepsilon \left(z_0^2(x - \varepsilon)^2 + z_0^2\right) dx = z_0^2 \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3}\right) \to 0 \quad \text{при } \varepsilon \to 0.$$

Интегрант f на функции y^ε принимает вид:

$$f(x, y^\varepsilon, (y^\varepsilon)') =$$

$$= \begin{cases} R(x, z_0(x-\varepsilon), z_0) \cdot \frac{z_0^2}{2} + Q(x, z_0(x-\varepsilon)) \cdot z_0 + P(x, z_0(x-\varepsilon)), & 0 \le x \le \varepsilon; \\ 0, & \varepsilon \le x \le T. \end{cases}$$

Отсюда

$$\Phi(y^\varepsilon) = \frac{z_0^2}{2} \cdot \int\limits_0^\varepsilon R(x, z_0(x-\varepsilon), z_0)dx + z_0 \cdot \int\limits_0^\varepsilon Q(x, z_0(x-\varepsilon))dx + \int\limits_0^\varepsilon P(x, z_0(x-\varepsilon))dx. \quad (27)$$

При этом

$$\begin{cases} \text{из (24) вытекает, что} & P(x, z_0(x-\varepsilon)) = o(1) \\ \text{из (25) вытекает, что} & Q(x, z_0(x-\varepsilon)) = o(1) \\ \text{из (26) вытекает, что} & R(x, z_0(x-\varepsilon), z_0) = -r_0 + o(1) \end{cases} \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \quad (28)$$

Из (27)–(28) получаем:

$$\Phi(y^\varepsilon) \le o(\varepsilon) + z_0 \cdot o(\varepsilon) + \frac{z_0^2}{2} \cdot [o(\varepsilon) - r_0\varepsilon] = -\frac{z_0^2 r_0}{2}\varepsilon + o(\varepsilon) < 0$$

при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Таким образом, функционал (9) не может достигать локального минимума в нуле, и, следовательно, *не достигает локального экстремума в нуле*. Следовательно, произвольный вариационный функционал $\Phi(y)$ с интегрантом, удовлетворяющим условиям (17) и (24)–(26), *достигает в нуле нелокального K–минимума.*

Итак, подведем итоги нашего рассмотрения.

Теорема 5. *Рассмотрим функционал вида*

$$\Phi(y) = \int\limits_0^T \left(R(x, y, y') \cdot \frac{y'^2}{2} + Q(x, y) \cdot y' + P(x, y) \right) dx, \quad y(\cdot) \in H_0^1([0; T]),$$

где P, $Q \in C^2$; $R \in W_K^2(z)$.

В предположениях:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, 0) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, 0) \equiv 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \right)(x, 0) \equiv p, \quad R(x, 0, 0) \equiv r > 0,$$

$$P(x, 0) \equiv 0, \quad Q(0, 0) = 0,$$

а также при условии знакопеременности R: при некотором z_0

$$R(x, 0, z_0) \le -r_0 < 0 \qquad (\forall\ x \in [0; T]);$$

вариационный функционал $\Phi(y)$ имеет ***нелокальный K–минимум в нуле*** *при любом $T \in (0; +\infty)$, если $p \ge 0$, и при $0 < T < \pi\sqrt{\left|\frac{r}{p}\right|}$, если $p < 0$.*

Рассмотрим некоторые конкретные примеры.

Пример 1. Рассмотрим функционал вида:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{1/3} \left((y')^2 \left(\sin(1+\cos y') - \frac{1}{2} \right) + y' \sin y^2 + y^2 \right) dx, \quad y(\cdot) \in H_0^1([0;1/3]).$$

В данном случае имеем

$$P(y) = y^2, \quad Q(y) = \sin y^2, \quad R(z) = 2\sin(1+\cos z) - 1.$$

Непосредственные вычисления показывают, что условия (17) и (24)–(26) для функционала $\Phi(y)$ выполнены, при этом имеем:

$$R(0) \equiv r = 2\sin 2 - 1 > 0,$$

а при $z = \pi \quad R(\pi) = -1 < 0$.

Таким образом, так как в нашем случае $p \equiv 2 > 0$ и $T = 1/3$, то в силу теоремы 5 функционал $\Phi(y)$ имеет нелокальный K–минимум в нуле.

Пример 2. Рассмотрим функционал вида:

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{1} \left(y^3 \lg(x^2+4) + y' \sin xy + \frac{(y')^2 \cos y'}{2(1+(y')^2)} \right) dx, \quad y(\cdot) \in H_0^1([0;1]).$$

В данном случае имеем

$$P(x,y) = y^3 \lg(x^2+4), \quad Q(x,y) = \sin xy, \quad R(z) = \frac{\cos z}{1+z^2}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что условия (17) и (24)–(26) для функционала $\Phi(y)$ выполнены, при этом имеем:

$$R(0) \equiv r = 1 > 0,$$

а при $z = \pi \quad R(\pi) = -1/(1+\pi^2) < 0$.

Таким образом, так как в нашем случае $p \equiv -1 < 0$, а $T = 1 < \pi$, то в силу теоремы 5 функционал $\Phi(y)$ имеет нелокальный K–минимум в нуле.

Выводы

В статье найдено минимальное псевдоквадратичное представление интегранта вариационного функционала класса $W^2K_2(z)$. Получены условия существования K–экстремума в нуле вариационного функционала в пространстве H^1, найден общий вид интегранта, удовлетворяющего данным условиям. Проведено исследование на нелокальность K–экстремума в нуле вариационного функционала. Рассмотрены конкретные примеры.

Автор выражает благодарность И.В. Орлову за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] *Оптимальное управление* / [Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В., Магарил-Ильяев Г.Г. и др.]; под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.

[2] Dacorogna B. *Direct methods in the calculus of variations.* — New York: Springer–Verlag, 1989. — 228 p.

[3] Скрыпник И.В. *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.* — К.: Наукова думка, 1973. — 219 с.

[4] Орлов И.В. *K–дифференцируемость и K–экстремумы* // Украинский математический вестник. — 2006. — Т. 3, № 1. — С. 97–115.

[5] Orlov I.V. *Compact extrema: general theory and its applications to the variational functionals* // Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser, Verlag Basel/Switzerland, 2009. — Vol. 190. — P. 397–417.

[6] Орлов И.В., Божонок Е.В. *Условия существования, K–непререрывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1* // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2006. – Т. 19(58), № 2. – С. 63–78.

[7] Божонок Е.В., Орлов И.В. *Условия Лежандра и Якоби для компактных экстремумов вариационных функционалов в пространстве Соболева* // Зб. праць Ін-ту математики НАН України. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2006. — Т. 3, № 4. — С. 282–293.

[8] Bozhonok E.V. *Some existence conditions of compact extrema for variational functionals of several variables in Sobolev space H^1* // Operator Theory: Advances and Applications. Birkhäuser, Verlag Basel/Switzerland, 2009. — Vol. 190. — P. 141–155.

Умови існування нелокальних компактних екстремумів варіаційних функціоналів у просторі Соболєва H^1

Знайдено мінімальне псевдоквадратичне зображення інтегранта класу $W^2K_2(z)$ варіаційного функціонала в H^1. Описано загальний вид варіаційного функціонала, що задовольняє стаціонарну форму умови Лежандра–Якобі. Отримано умови існування нелокального K–екстремуму в нулі варіаційного функціонала в просторі H^1. Розглянуто приклади.

Ключові слова: варіаційний функціонал, K–екстремум, простір Соболєва.

Conditions of existence of nonlocal compact extrema of variational functionals in Sobolev space H^1

The minimal pseudoquadratic representation of $W^2K_2(z)$ class integrands of variation functionals in H^1 is derived. A general form of variational functional satisfying stationary form of Legendre–Jacobi condition is described. The conditions of existence of nonlocal K–extremum at zero of variation functional in space H^1 are obtained. Some examples are considered.

Keywords: variational functional, K–extremum, Sobolev space.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 52–55.

УДК 517.968.7

Б. М. Вронский, Н. Д. Копачевский

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ

В работе получена оценка одной оператор-функции, возникающей при исследовании нормальных колебаний частично диссипативной гидросистемы, содержащей сжимаемые компоненты.

Ключевые слова: асимптотическая оценка.

Введение

В предлагаемой работе получена оценка одной оператор-функции, возникающей при исследовании нормальных колебаний частично диссипативной гидросистемы, содержащей сжимаемые компоненты.

Постановка задачи

В работе [1] рассмотрена задача о малых движениях и нормальных колебаниях гидросистемы, состоящей из несмешивающихся идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей, которые целиком заполняют ограниченный сосуд произвольнй формы. В процессе исследования возникает необходимость асимптотической оценки для некоторой оператор-функции. Эта оценка и будет приведена ниже.

Рассмотрим оператор-функцию

$$T(\lambda) := \lambda HY(c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} Y^* H^*. \tag{1}$$

Здесь введенные операторы имеют вид:

$$H = P^{\frac{1}{2}} Q, \quad H^* = \Gamma P^{-\frac{1}{2}}, \quad Y = -\gamma A^{-\frac{1}{2}}, \quad Y^* = A^{\frac{1}{2}} T. \tag{2}$$

Определения введенных операторов, множеств и пространств, в которых эти операторы действуют, приведены в работе [1] и в монографии [2].

Основная теорема

В этом разделе мы сформулируем и докажем основную теорему об асимптотической оценке при $\lambda \to \infty$ оператор-функции $T(\lambda)$.

Теорема 1. *Оператор-функция $T(\lambda)$ обладает свойством:*

$$T(\lambda) = o(1), \quad \textit{при } \lambda \to \infty, \lambda \in \Lambda(\varepsilon, R). \tag{3}$$

Доказательство. Оно основано на использовании леммы Г.В.Радзиевского (см. [3]), в частности, на свойстве

$$\lim_{\eta \to \infty} \sup_{|\lambda| > \eta} |\lambda|^{\beta} \| (I - \lambda H)^{-1} H^{\beta} T \| = 0, \tag{4}$$

при выполнении условий

$$\lambda \in \Lambda(\varepsilon, R), \quad 0 \le H \in \mathfrak{S}_{\infty}, \quad T \in \mathfrak{S}_{\infty}, \quad 0 \le \beta < 1.$$

Кроме того, мы будем использовать элементы теории шкал гильбертовых пространств.

Построим по оператору A шкалу пространств

$$E^{\alpha} := D(A^{\alpha}), \quad -1 \le \alpha \le 1.$$

Тогда:

$$E^0 = L_{2,\Omega_2} = L_2(\Omega_2) \ominus \{1_{\Omega_2}\}, \quad E^{1/2} = H^1_{\Omega_2} = D(A^{1/2}), \quad E^1 = D(A).$$

Докажем теперь, что операторы $A^{3/4}T : H^{-1/2}(\Gamma) \to E^{-1/4}$, и $\gamma A^{-1/4} : E^{-1/4} \to H^{1/2}$ ограниченны и взаимно сопряжены.

В самом деле, исходя из свойств решений первой и второй вспомогательных задач, имеет место равенства:

$$\langle \gamma A^{-1/2} \varphi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = (\varphi, A^{1/2} T \psi)_{L_2(\Omega_2)} = \langle A^{-1/4} \varphi, A^{3/4} T \psi \rangle_{L_2(\Omega_2)}, \tag{5}$$

$\forall \varphi \in L_{2,\Omega_2}, \quad \psi \in H_{\Gamma}^{-1/2} := (H_{\Gamma}^{1/2})^*, \quad H_{\Gamma}^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Omega_2}$.

Положим в равенстве (5) $A^{-1/4}\varphi = \hat{\varphi} \in E^{1/4}$ (если φ пробегает всё $E^0 = L_{2,\Omega_2}$, то $\hat{\varphi}$ пробегает всё $E^{1/4}$), тогда:

$$\langle \gamma A^{-1/2} \hat{\varphi}, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \hat{\varphi}, A^{3/4} T \psi \rangle_{L_2(\Omega_2)}, \quad \forall \psi \in H_{\Gamma}^{-1/2}, \quad \forall \hat{\varphi} \in E^{1/4}. \tag{6}$$

Отсюда, по общему определению сопряженного оператора, действующего из одного пространства в другое, получаем, что,

во-первых, $A^{3/4}T$— ограниченный оператор из $H_{\Gamma}^{-1/2}$ в $E^{-1/4}$, так как $A^{1/2}T$ — ограниченный оператор из $H_{\Gamma}^{-1/2}$ в E^0, а $A^{3/4} = A^{1/4}(A^{1/2}T)$ — ограниченный оператор из $H_{\Gamma}^{-1/2}$ в $E^{-1/4}$, поскольку $A^{1/4} : E^0 \to E^{-1/4}$ ограничен (из теории шкал),

во-вторых из (6) следует, что поскольку:

$$(\gamma A^{-1/4})^* = A^{3/4}T, \quad \gamma A^{-1/4} : E^{1/4} \to H_\Gamma^{1/2}$$

и нормы сопряженных операторов совпадают, то оператор $\gamma A^{-1/4}$ — тоже ограничен.

В дальнейшем в качестве основного выберем пространство $E^{-1/4}$.

Так как пространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega_1)$ и $E^{-1/4}$ сепарабельны, то между ними имеет место изометрический изоморфизм, точнее, можно считать, что:

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega_1) = VE^{-1/4}, \quad V^{-1}\vec{J}_{0,S}(\Omega_1) = E^{-1/4}, \quad VV^{-1} = I(\text{в } \vec{J}_{0,S}(\Omega_1)).$$

Тогда оператор-функцию $T(\lambda)$ можно переписать в виде:

$$-T(\lambda)c^2 = \lambda V\{\left(V^{-1}PQJ^*\gamma A^{-1/4}\right)\left(I + i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1}A^{-1/4}\cdot \\ \left(I - i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1}A^{-1/4}\left(A^{3/4}TJ\Gamma P^{-1/2}V\right)\}V^{-1} \quad (7)$$

Здесь $J : H_\Gamma^{1/2} \to (H_\Gamma^{1/2})^*$ — оператор вложения, являющийся по теореме Гальярдо вполне непрерывным. Имеем в итоге набор ограниченных операторов, действующих указанным ниже образом:

$$V : E^{-1/4} \to \vec{J}_{0,S}(\Omega_1); \quad P^{-1/2} : \vec{J}_{0,S}(\Omega_1) \to \vec{J}^1_{0,S}(\Omega_1);$$
$$\Gamma : \vec{J}^1_{0,S}(\Omega_1) \to H_\Gamma^{1/2}; \quad J - \text{вполне непрерывный из } H_\Gamma^{1/2} \text{в } (H_\Gamma^{1/2})^*;$$
$$T : (H_\Gamma^{1/2})^* \to H^1_{\Omega_2}; \quad A^{1/2} : H^1_{\Omega_2} \to E^0, \quad A^{1/4} : E^0 \to E^{-1/4}.$$

Поэтому $F := \left(A^{3/4}TJ\Gamma P^{-1/2}V\right), \quad F : E^{-1/4} \to E^{-1/4}$ — вполне непрерывный оператор, Кроме того, $F^* := \left(V^{-1}PQJ^*\gamma A^{-1/4}\right)$ — вполне непрерывный оператор.

С учетом новых обозначений имеем новое выражение для оператор-функции $T(\lambda)$:

$$\frac{c^2T(\lambda)}{\lambda} = V\left(F^*A^{-1/4}\left(I + i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1}\left(I - i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1}A^{-1/4}F\right)V^{-1}.$$

По лемме Г.В.Радзиевского имеем (для пространства $E^{-1/4}$, где оператор A^{-1} положителен и вполне непрерывен):

$$||\left(I - i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1}A^{-1/4}F|| = ||F^*A^{-1/4}\left(I + i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1}|| = o(\lambda^{1/2}),$$

при $\lambda \to \infty$ и $\lambda \in \Lambda(\varepsilon, R)$.

Из этого равенства и структуры изучаемой оператор-функции следует утверждение теоремы о поведении оператор-функции $T(\lambda)$ на бесконечности. **Доказательство** закончено.

Список литературы

[1] Вронский Б. М. О спектре одной гидродинамической задачи // Ученые записки Симферопольского государственного университета. - №7(46).- с.60-65.

[2] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. - М. : Наука, 1989. - 416 с.

[3] Радзиевский Г. В. Задача о полноте корневых векторов спектральной теории оператор - функций // УМН. - 1982. - т. 37, вып. 2, с. 81 - 145.

В роботі досліджена асимптотична поведінка деякої оператор-функції на нескінченності.

Ключові слова: асимптотична поведінка.

Asymptotic of some operator-function is investigated.

Keywords: operator-function, asymptotic.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 56–65.

УДК 519.95

В. И. Донской

ОЦЕНКИ ЕМКОСТИ ОСНОВНЫХ КЛАССОВ АЛГОРИТМОВ ЭМПИРИЧЕСКОГО ОБОБЩЕНИЯ, ПОЛУЧЕННЫЕ pVCD МЕТОДОМ

В работе представлены оценки емкости (VC-Dimension) основных классов алгоритмов эмпирического обобщения, используемых в задачах распознавания образов. Оценки получены новым pVCD методом, который основан на колмогоровском подходе к определению сложности и сводится к построению сжатого описания информации об алгоритмах каждого рассматриваемого класса в виде битовой строки.

Ключевые слова: емкость Вапника-Червоненкиса, машинное обучение.

Введение

Используемый в статье $pVCD$ метод предполагает сужение семейства моделей эмпирического обобщения до классов частично-рекурсивных функций и даже уже – до классов вычислимых функций, реализуемых на компьютерах. Целесообразность такого подхода объясняется реализацией алгоритмов обучения и распознавания, как правило, именно на компьютерах. Поэтому исходное математическое описание семейств используемых моделей и правил распознавания в более широких классах, в частности, использование семейств непрерывных функций, влечет завышение оценок их сложности, которые к тому же очень трудно получать. Традиционное завышение оценок сложности семейств моделей обучения и распознавания объясняется тем, что математическое мышление создателей моделей чаще всего (и особенно на начальном творческом уровне) не рекурсивно по своей природе. Но при переходе к компьютерной реализации исходные модели и семейства решаюших правил автоматически сужаются до конечных рекурсивных схем. Именно последние используются для получения решений, и поэтому именно они и должны оцениваться.

Далее используются следующие обозначения. S — произвольное семейство частично-рекурсивных функций (алгоритмов), состоящее из функций вида A :

$X^n \to \{0,1\}$; $X^n = \{X = (x_1, ...x_n) : x_i \in \{0,1,\ldots,2^M - 1\}\}$. Выборка, состоящая из l произвольных элементов множества X^n, обозначается $\widetilde{X}_l = X_1, \ldots, X_l$ и представляет собой упорядоченный набор $n \times l$ ограниченных чисел из расширенного натурального ряда. Теоретически и практически допустимо считать все рассматриваемые числа представленными в виде бинарных строк. Множество всех выборок обозначается X^l.

Обучающей выборкой называется пара $(\tilde{X}_l, \tilde{\alpha}_l)$, где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_l)$, $\alpha_j = F(X_j), j = 1, ..., l$; $F : X^n \to \{0;1\}$ – некоторая заранее неизвестная, но предполагаемая существующей классифицирующая функция. Множество всех возможных обучающих выборок $X^l \times \{0;1\}^l$ представляет собой генеральную совокупность, из которой могут извлекаться обучающие выборки. Задача обучения состоит в нахождении по заданной обучающей выборке $(\tilde{X}_l, \tilde{\alpha}_l)$ функции F или как можно более "близкой"к ней решающей функции (алгоритма или правила) $A^* \in S$. Отыскиваемая функция F, также как и её аппроксимация A^*, являются предикатами, определяющими некоторое свойство или закономерность. Именно обобщение свойств выборки (частных наблюдений) с целью выбора решающего правила или нахождения закономерности определяет применяемый метод – эмпирическую индукцию. Изначальная некорректность метода эмпирической индукции, обусловленная неединственностью множества решений задачи обучения, приводит к дополнительной проблеме обоснования выбранного решающего правила.

Семейство S, внутри которого отыскивается решение, определяется условиями, которым должна удовлетворять искомая функция, и выбором модели обучения (и соответствующего класса алгоритмов распознавания), например, вычисления оценок, нейронных сетей, деревьев решений или алгебраических корректирующих моделей над перечисленными и/или другими эвристическими алгоритмами [2, 4, 6, 7, 9]. В частности, отыскивается такая функция $A^* \in S$, для которой эмпирический риск $\nu^l(A) = l^{-1} \sum_{j=1}^{l} |A(X_j) - \alpha_j|$ минимален.

Сложность семейств алгоритмов, применяемых в указанных задачах, имеет большое значение для обоснования выбора решений. Впервые важнейшее значение сложности семейств решающих правил в задачах эмпирического обобщения показали В. Н. Вапник и А. Я. Червоненкис [1]. Предложенная ими мера сложности, вообще говоря, произвольных вещественнозначных функций – так называемая ёмкость или VC-размерность, – возможно, является одним из самых ярких и полезных понятий для развития теории индуктивной математики (и не только). В данной статье приводится алгоритмическое определение сложности семейств алгоритмов, основанное на идеях А. Н. Колмогорова [5], и рассматривается применение введенной меры алгоритмической сложности для оценивания VC-размерности. Статья развивает новое направление в алгоритмической теории обучения, элементы которого впервые появились в работе автора [3].

Множество $\{0,1\}^*$ всех строк из нулей и единиц любой длины обычным образом (лексикографически и по длине)представляет целые неотрицательные числа $0,1,2,\ldots$. Длина слова $p \in \{0,1\}^*$ обозначается $len(p)$. Класс частично-рекурсивных функций обозначается $P_{p.r.}$. Логарифмы полагаются по основанию 2.

Определение сложности по Комогорову и $pVCD$ метод

Определение 1. Пусть U — такая частично-рекурсивная функция, что для каждого алгоритма $A \in S$ и для любой выборки $\widetilde{X}_l$ найдется двоичное слово p, которое обеспечивает выполнение равенства $U(p,\widetilde{X}_l) = \widetilde{y}$, где $\widetilde{y} = A(X_1),...,A(X_l)$ — двоичное слово (строка) длины l. При этом каждый алгоритм $A \in S$ полагается определенным на каждой выборке $\widetilde{X}_l$ из X^l. Функция U с указанными свойствами существует в силу существования универсальной функции двух аргументов для любого семейства частично-рекурсивных функций одного аргумента.

(1) Сложность алгоритма A относительно выборки $\widetilde{X}_l$ по частично-рекурсивной функции U есть

$$K_U(A|\widetilde{X}_l) = \min len(p) : U(p,\widetilde{X}_l) = \widetilde{y}.$$

(2) Сложность алгоритма A на множестве X^l по частично-рекурсивной функции U есть

$$K_{U,X^l}(A) = \max_{\widetilde{X}_l \in X^l} K_U(A|\widetilde{X}_l)$$

(3) Сложность семейства алгоритмов S на множестве X^l по частично-рекурсивной функции U есть

$$K_{U,X^l}(S) = \max_{A \in S} K_{U,X^l}(A).$$

(4) Сложность семейства алгоритмов S на множестве X^l есть

$$K_l(S) = \min_{U \in P_{p.r.}} K_{U,X^l}(S).$$

В приведенном определении сложность семейства алгоритмов S на множестве всех возможных выборок X^l длины l - это наименьшая длина двоичного слова p, по которому можно восстановить самый сложных (и любой) алгоритм $A \in S$. Важно, что слово p обрабатывается одной и той же функцией (программой) U^*, причем, согласно (4), наилучшей в следующем смысле. Программа U^* обеспечивает наибольшее сжатие информации о семействе S в слово p длины $K_l(S)$. Мажоранту сложности $K_l(S)$ можно получить, если точно указать структуру слова p, подлежащего расшифровке, и его длину в битах, а также представить алгоритм обработки этого слова, который будет использоваться вместо программы U^* для оценивания сложности сверху.

Теорема 1. [10] *Пусть система частично-рекурсивных функций S вида $A : X^n \longrightarrow \{0,1\}$ имеет ограниченную емкость h_S и колмогоровскую сложность $K_l(S)$. Тогда при конечных значениях $h_S \geq 2$ и $l > h_S$ имеет место двойное неравенство $h_S \leq K_l(S) < h_S \log l$.*

Свойства сложности $K_l(S)$.

(1) Колмогоровская сложность семейства алгоритмов равна наименьшему целому, большему или равному логарифму функции роста этого семейства: $K_l(S) = \lceil \log m^S(l) \rceil$.
(2) $0 \leq K_l(S) \leq l$.
(3) Если $K_l(S) = o(l)$ при $l \to \infty$, то имеет место равномерная сходимость эмпирических частот ошибок к их вероятностям по всему классу S.
(4) Для любого алгоритма $U \in P_{p.r.}$ выполняется неравенство $K_l(S) \leq K_{U,X^l}(S)$.

Будем обозначать $h_S = VCD(S)$ емкость класса S. Подход к оцениванию VCD на основе неравенства $VCD(S) \leq len(p) : U(p, \widetilde{X}_l) = \widetilde{y} = (A(X_1), \ldots, A(X_l))$ называется методом программирования оценки VCD, сокращенно — $pVCD$ [3]. Метод $pVCD$ предполагает конструирование сжатого описания (слова) одной и той же структуры для любого $A \in S$ и указания алгоритма U, обрабатывающего вход $(p, \widetilde{X}_l)$. Длина такого слова p обозначается $pVCD(S) = len(p)$. Оценка $pVCD(S)$ может быть получена не единственным способом, и ее качество определяется найденным алгоритмом сжатия U. Иначе говоря, $pVCD(S)$ - это длина любого слова p такого, что его структура позволяет расшифровать при помощи некоторой программы U любой алгоритм из семейства S. При этом, хотя $pVCD(S)$ определяется неоднозначно, имеет место оценка $VCD(S) \leq pVCD(S)$. Построение слова p как можно меньшей длины и указание расшифровывающей его программы требует искусства программирования и изобретательности, всегда необходимой для получения новых математических результатов. В большинстве случаев точное определение структуры слова p делает очевидным алгоритм его расшифровки, что исключает необходимость подробного выписывания этого алгоритма.

Лемма 1. *(Об аддитивности pVCD оценки композиции алгоритмов).*

Пусть $S_0^r = \{f_0 = f_1 \circ \cdots \circ f_r : f_1 \in S_1, \ldots, f_r \in S_r\}$ — класс композиций алгоритмов зафиксированной структуры $f_0(f_1, \ldots, f_r)$, принадлежащих семействам $S_1, \ldots, S_r$, для которых известны оценки $pVCD(S_1) = L_1, \ldots, pVCD(S_r) = L_r$. Тогда справедлива оценка $pVCD(S_0^r) = \sum_{j=1}^r L_j$.

Доказательство. Поскольку структура композиции неизменна, любой входящий в нее алгоритм определяется совокупностью слов $p_1, ..., p_j, ..., p_r$, имеющих длины $L_1, ..., L_j, ..., L_r$. Для обработки этих слов, согласно $pVCD$ методу программирования оценок и соотношению $U_j(p_j, \tilde{X}_l) = \tilde{y} = f_j(\tilde{X}_l)$, указаны алгоритмы

$U_j, j = 1, ..., r$, каждый из которых по слову p_j восстанавливает алгоритм f_j. Поэтому легко указать алгоритм (программу) U_{S_0}, обрабатывающую конкатенацию $p_0 = p_1 p_2 ... p_r$ и соответствующую композиции $f_0 = f_1 \circ \cdots \circ f_r$. Такая программа будет содержать подпрограммы $U_j, j = 1, ..., r$, которые восстанавливают все алгоритмы $f_1, ..., f_r$, и переходы между этими подпрограммами, предопределенные зафиксированной структурой композиции и известными длинами $L_1, ..., L_j, ..., L_r$ подслов, входящих в конкатенацию $p_0 = p_1 p_2 ... p_r$.

1. Оценивание VCD класса $DNF_{m,\mu,n}$ дизъюнктивных нормальных форм, содержащих не более чем μ конъюнкций над n переменными и не более m литералов

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) представления булевых функций называется выражение вида $\bigvee\limits_{j=1}^{\mu} (x_{j,1}^{\sigma_{j,1}} \wedge x_{j,2}^{\sigma_{j,2}} \wedge ... \wedge x_{j,k_j}^{\sigma_{j,k_j}})$, где $x^\sigma = x$ при $\sigma = 1$ (положительный литерал) и $x^\sigma = \bar{x}$ при $\sigma = 0$ (отрицательный литерал); μ – число конъюнкций в ДНФ; $m = \sum\limits_{j=1}^{\mu} k_j$ – суммарное число литералов, входящих в ДНФ.

Обозначим $DNF_{m,\mu,n}$ — семейство булевых функций, представимых в виде ДНФ, содержащих не более чем μ конъюнкций над n переменными и не более m литералов. Покажем, что для этого семейства функций справедлива оценка

$$pVCD(DNF_{m,\mu,n}) = m + (\mu - 1 + m)\lceil \log(n+1) \rceil.$$

Действительно, слово p_f, позволяющее закодировать информацию о любой ДНФ, состоящей из μ конъюнкций над n переменными, можно представить конкатенацией двоичных слов сформированных из таких блоков, как показано в таблице 1.

Номер переменной x_j, $j \in 1, ..., n$, входящей в конъюнкцию, или ноль - разделитель блоков	Двоичная цифра 1, если x_j входит в конъюнкцию с инверсией, или 0 - в противном случае

Таблица 1. Фрагмент слова, кодирующего литерал

Чтобы представить в двоичном коде один любой номер переменной или ноль, достаточно зарезервировать $\lceil \log(n+1) \rceil$ двоичных разрядов. Поскольку номера переменных начинаются с единицы, номер ноль можно использовать как признак разделения конъюнкций в строке. Чтобы указать знак литерала - с инверсией или без неё - достаточно одного двоичного разряда. При таком кодировании на каждый литерал в слове p_f будет расходоваться $\lceil \log(n+1) \rceil + 1$ бит. На j-ю конъюнкцию будет расходоваться $k_j(\lceil \log(n+1) \rceil + 1)$ бит для представления литералов. $(\mu - 1)\lceil \log(n+1) \rceil$ бит понадобится для разделителей. Поэтому длина слова не превысит

$$(\mu - 1)\lceil \log(n+1) \rceil + \sum\nolimits_{j=1}^{\mu} k_j(\lceil \log(n+1) \rceil + 1) = m + (\mu - 1 + m)\lceil \log(n+1) \rceil.$$

Если ДНФ содержит $\nu < \mu$ конъюнкций, то последние $\mu - \nu$ блоков слова p_f заполняются нулями.

Пусть дана ДНФ $x_3\bar{x_5} \vee \bar{x_2}x_4$ из класса $DNF_{10,2,5}$ – не более чем с 10 литералами и не более чем с двумя конъюнкциями. Число переменных $n = 5$. Десятичная (для облегчения восприятия) структура слова p_f: |3|1|5|0|0|2|0|4|1|0|. Алгоритм расшифровки U поясняется следующей таблицей 2.

Цифра слова p_f	Пояснение
3	Взять переменную x_3
1	x_3 берется без инверсии
5	Взять переменную x_5
0	x_5 берется с инверсией
0	Поскольку вместо номера переменной - ноль, получена конъюнкция $x_3\bar{x_5}$, и далее начинается описание следующей конъюнкции, если за считанным нулем не последует второй ноль; счетчик выделенных конъюнкций увеличивается на единицу
2	Поскольку цифра не равна нулю, включить в новую текущую конъюнкцию переменную x_2
0	x_2 берется с инверсией
4	Взять переменную x_4
1	x_4 берется без инверсии
0	Поскольку вместо номера переменной - ноль, получена конъюнкция $\bar{x_2}x_4$; счетчик выделенных конъюнкций становится равным двум. Значение $\mu = 2$ свидетельствует об окончании слова p_f и полученииии результата расшифровки $x_3\bar{x_5} \vee \bar{x_2}x_4$

Таблица 2. Расшифровка ДНФ по слову p_f

2. Оценивание VCD нейронной сети с единственным скрытым слоем, содержащим k элементов (класс $NN_{k,1}$)

В работе [11] для нейронной сети с единственным скрытым слоем, содержащим k элементов, и зафиксированной непараметрической активационной функцией σ представлена оценка

$$VCD(NN_{k,1}) = (2kn + 4k + 2) \times \log(e(kn + 2k + 1)).$$

Используя pVCD метод, легко получить оценку

$$pVCD(NN_{k,1}) = M(nk + 2k + 1),$$

где M — число бит памяти, выделяемых для записи одного параметра; n — размерность входа.

Действительно, нейронные сети рассматриваемого класса полностью определяются $nk+2k+1$ параметрами: nk параметров соответствуют коэффициентам связи каждой из k внутренних вершин с каждым из n входов; k параметров определяют пороги суммирования для внутренних вершин и один параметр соответствует порогу выходной вершины сети. Если для каждого параметра используется M бит памяти, то каждую сеть рассматриваемого класса можно задать словом p_f длины $M(nk + 2k + 1)$. Алгоритм расшифровки этого слова состоит в последовательном считывании параметров (по M бит) согласно единому зафиксированному их порядку по всему классу. Считанные параметры подставляются в зафиксированные участки памяти алгоритма расшифровки.

Оценка, полученная pVCD методом, будет лучше известной [11] при $M < 2log(e(kn + 2k + 1))$, и ее выигрыш растет с ростом размерности задачи n.

3. VCD класса $N_{k,m}$ нейронных сетей с k элементами в каждом из m скрытых слоев

Для класса $N_{k,m}$ нейронных сетей с k элементами в каждом из m скрытых слоев аналогичным образом получена оценка

$$pVCD(N_{k,m}) = M(nk + 2mk^2).$$

4. VCD суперпозиции $f(F_1, \ldots, F_k)$ с фиксированным логическим корректором $f \in P_2(k)$

Пусть $F_1, \ldots, F_k$ — семейства алгоритмов вида $A : X^n \longrightarrow \{0, 1\}$, имеющие VCD $VCD(F_1), \ldots, VCD(F_k)$, и f — зафиксированная булева функция. Обозначим $f(F_1, \ldots, F_k) = \{f(f_1, \ldots, f_k) : f_i \in F_i, i = \overline{1, k}\}$. В работе [11] получена оценка

$$VCD(f(F_1, \ldots, F_k)) \leq 2k \log(ek) \max_{i=1,\ldots,k} \{VCD(F_i)\}$$

Использование pVCD метода (см. лемму 1) позволяет получить

$$pVCD(f(F_1, \ldots, F_k)) = \sum_{i=1}^{k} pVCD(F_i) \leq k \max_{i=1,\ldots,k} pVCD(F_i).$$

5. VCD класса бинарных решающих деревьев с μ листьями

pVCD метод позволяет получить оценку

$$pVCD(BFT_{n,\mu}) = (\mu - 1)(\lceil \log n \rceil + \lceil \log(\mu + 3) \rceil)$$

для класса $BFT_{n,\mu}$ бинарных решающих деревьев с μ листьями; n — число булевых переменных. Логико-комбинаторным методом автору ранее удалось получить

оценку $VCD(BFT_{n,\mu}) < \mu \log(n\mu)$, которая в результате применения pVCD метода оказалась улучшенной.

Для класса $BSP_{n,\mu}$ [9] композиций бинарных решающих деревьев не более чем с μ листьями и линейными предикатами во внутренних вершинах, зависящими от n числовых переменных, занимающих по M бит памяти каждая, pVCD оценка имеет вид (см. лемму 1)

$$pVCD(BSP_{n,\mu}) = (\mu - 1)(\lceil \log n \rceil + \lceil \log(\mu + 3) \rceil + nM).$$

6. VCD структурной композиции линейного алгебраического корректора k эвристических моделей $F_1, \ldots, F_k$ (класс $L(F_1, \ldots, F_k)$)

Для совокупности эвристических алгоритмов с произвольным линейным корректором pVCD метод позволяет получить оценку

$$pVCD(L(F_1, \ldots, F_k)) = Mk + \sum_{i=1}^{k} pVCD(F_i)$$

7. Оценивание VCD интервальных множественных автоматов (IMA)

Класс решающих функций $\mathfrak{F}_{IMA}$, порождаемый IMA, описывается на основе следующих двух определений.

Определение 2. [8] Множественным автоматом (MA) называется пятерка

$$< Q, \Sigma, \delta, q_0, F >,$$

где Q — конечное множество состояний; Σ — конечный алфавит; $\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow 2^Q$ — множественная функция переходов; $q_0 \in Q$ — начальное состояние; $F \subset Q$ — множество финальных состояний. Последовательность $p_0, p_1, \ldots, p_n$ называется принимаемым путем для входа $\omega_1, \ldots, \omega_n$, если $p_0 = q_0$, $p_i = \delta(p_{i-1}, \omega_i)$ для любого $i = 1, \ldots, n$ и $p_n \in F$. Автомат MA вычисляет функцию $f_{MA} : \Sigma^* \longrightarrow \{0, 1\}$, где $f_{MA}(\omega) = 1$, если число принимаемых путей для $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ является нечетным, и $f_{MA}(\omega) = 0$, если это число — четное.

Определение 3. [8] Интервальным множественным автоматом (IMA) называется пара $< A, C >$, где A — множественный автомат с алфавитом $\Sigma = \{0, 1, \ldots, \mu - 1\}$, C — множество, состоящее из μ вещественных чисел: $C = \{c_0, c_1, \ldots, c_{\mu-1}\}$; $c_0 = -\infty$; $c_0 < c_1, \cdots < c_{\mu-1}$. Индексом числа a, обозначаемым $ind_C(a)$, называется $\max\{i : c_i \leq a\}$.

Функция $f_{<A,C>}$, вычисляемая IMA $< A, C >$, ставит в соответствие вещественной числовой последовательности $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ значение

$f_A(ind_C(x_1), \ldots, ind_C(x_n)))$.

В работе [8] получена оценка

$$VCD(\mathfrak{F}_{IMA}) = O(\mu(\log \mu + r^2)),$$

где $\mu = |\Sigma|$, $r = |Q|$. Сначала авторы [8] оценили сверху число способов обработки IMA входной последовательности как $(VCD(\mathfrak{F}_{IMA}) \cdot n + 2)^{\mu} \cdot 2^{O(\mu r^2)}$, затем получили окончательный результат.

Применение pVCD метода дает существенно лучшую оценку

$$pVCD(\mathfrak{F}_{IMA}) = \mu(M + r^2) + r.$$

Выводы

Приведенные примеры оценивания VCD классов алгоритмов эмпирического обобщения при помощи pVCD метода и сравнение полученных оценок с известными ранее оценками позволяют заключить, что pVCD метод дает не худшие, а иногда даже лучшие результаты, чем логико-комбинаторные методы, применяемые для оценивания емкости. При этом оценки, получаемые pVCD методом, согласуются по своей структуре с известными из литературы оценками. Метод pVCD особенно эффективен для оценивания VCD классов сложных композиций алгоритмов эмпирического обобщения.

В дальнейшем целесообразно получить $pVCD$-оценки для классов моделей эмпирического обобщения, не рассмотренных в данной статье, в частности, ABO, потенциальных функций и др. [1, 4, 9]

Список литературы

[1] Вапник В. Н. *Восстановление зависимостей по эмпирическим данным.* – М: Наука, 1979. – 447 с.

[2] Донськой В. Й. *Бінарні вирішуючи дерева у задачах інтелектуального аналізу інформації* // Наукові вісті Національного технічного університету "Київський політехнічний Інститут". – 2001. – Вип. 5. –С.12–18.

[3] Донской В. И. *Колмогоровская сложность классов общерекурсивных функций с ограниченной емкостью* // Таврический вестник информатики и математики. – 2005. – №1. – С. 25–34.

[4] Журавлев Ю. И. *Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания* // Проблемы кибернетики. – 1978. – Вып. 33. – С. 5–68.

[5] Колмогоров А. Н. *Теория информации и теория алгоритмов.* – М: Наука, 1987. – 304 с.

[6] Матросов В. А. *Корректные алгебры ограниченной емкости над множествами некорректных алгоритмов* // ДАН СССР. – 1980. – Т.253, №1. – С. 25–30.

[7] Хайкин С. *Нейронные сети: полный курс* – М.:Из-во "Вильямс 2006. – 995 с.

[8] Beimel A., Kushilevitz E. *Learning Unions of High Dimentional Boxes over the Reals* // Inf. Proc. Letters. – 2000. – vol.73, Issue 5–6. – P. 213–220.

[9] Devroye L. A., Gyorfi L., Lugosi G. *Probabilistic Theory of Pattern Recognition* – NY: Springer-Verlag, 1996. – 636 p.

[10] Donskoy V. I. *The estimations based on the Kolmogorov Complexity and Machine Learning from Examples* // Proc. of the 5-th Int. Conf. "Neural Networks and Artificial Intelligence"(ICNNAI'2008). – Minsk:INNS. – 2008. – P. 292–297.

[11] Sontag E.D. *VC dimension of Neural Networks* // In Neural Networks and Machine Learning. – Berlin: Springer, 1998. – P. 69–95.

Оцінки місткості основних класів алгоритмів емпіричного узагальнення, одержані pVCD методом

У роботі представлені оцінки місткості (VC-Dimension) основних класів алгоритмів емпіричного узагальнення, використованих в задачах розпізнавання образів. Оцінки одержані новим pVCD методом, який заснований на колмогоровському підході до визначення складності і зводиться до побудови стислого опису інформації про алгоритми кожного даного класу у вигляді бітового рядка.

Ключові слова: Місткість Вапника-Червоненкиса, машинне навчання.

VC-Dimension Estimations of the Basic Algorithms of Empirical Generalization for Pattern Recognition Problems obtained by the pVCD method

In this paper, VC-Dimension estimations for Decision Trees, Neural Networks, DNF, Function Compositions obtained by pVCD method are presented. The pVCD method is based on the Kolmogorov' approach to complexity definition.

Keywords: VC-Dimension, Machine Learning

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 66–77.

УДК 517.968.7

О.А. Дудик

О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

В работе исследованы нормальные колебания маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. Изучены свойства спектра, доказана теорема о базисности системы корневых элементов, получена асимптотика собственных значений. Приведена теорема Лагранжа о неустойчивости.

Ключевые слова: нормальные колебания, собственные значения, асимптотика, неустойчивость.

Введение

В работе исследованы нормальные колебания маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. Изучены свойства спектра, получена асимптотика собственных значений. Доказано, что система корневых элементов образует базис Абеля–Лидского по норме графика либо, с точностью до конечного дефекта, в пространстве с нормой графика. Рассмотрен случай, когда оператор потенциальной энергии имеет хотя бы одно отрицательное собственное значение. Приведено обращение теоремы Лагранжа об устойчивости изучаемой гидромеханической системы.

1. Постановка спектральной задачи и некоторые свойства ее решений

Сформулируем полную постановку задачи о малых движениях маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью. Эту постановку можно найти, например, в [1], с. 23–24. Имеем

$$\rho\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(\vec{r}\times\vec{u})d\Omega+\vec{J}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}-\rho g\int\limits_{\Gamma}(\vec{e_3}\times\vec{r})\zeta d\Gamma=\vec{M}(t), \tag{1}$$

$$\rho\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+\rho\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right)+\nabla p=\mu\triangle\vec{u}+\rho\vec{f},\quad \mathrm{div}\vec{u}=0\quad(\text{в }\Omega), \tag{2}$$

$$\vec{u}=\vec{0}\quad(\text{на }S),\quad \mu(u_{j,3}+u_{3,j})=0\quad(j=1,2;\ \text{на }\Gamma), \tag{3}$$

$$-p+2\mu u_{3,3}=-\mathcal{L}_\sigma\zeta-\rho g\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e_3}\right]:=\sigma\Delta_\Gamma\zeta-a_\Gamma\zeta-\rho g\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e_3}\right]\quad(\text{на }\Gamma), \tag{4}$$

$$a_\Gamma=a_\Gamma(x):=-\sigma(k_1^2+k_2^2)+\rho g\cos\widehat{(\vec{n},\vec{e_3})},\quad x\in\Gamma, \tag{5}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=u_n:=\vec{u}\cdot\vec{n}=:\gamma_n\vec{u}\quad(\text{на }\Gamma), \tag{6}$$

$$\zeta(t,\hat{\xi})=0\quad(\text{на }\partial\Gamma),\quad\int\limits_{\Gamma}\zeta d\Gamma=0, \tag{7}$$

$$\frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}=P_2\vec{\omega},\quad \frac{d}{dt}\delta_3=\omega_3, \tag{8}$$

$$\vec{u}(0,x)=\vec{u}^0(x),\quad x\in\Omega;\quad\vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^0,\quad\vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0,$$
$$\zeta(0,\hat{\xi})=\zeta^0(\hat{\xi}),\quad\hat{\xi}=\left(\xi^1,\xi^2\right)\in\Gamma. \tag{9}$$

В уравнениях (1)–(9): ρ — плотность жидкости, Ω — область, занятая жидкостью, она ограничена твердой стенкой S и равновесной поверхностью Γ, $\alpha>0$ — коэффициент трения в шарнире, $\mu=\nu\rho>0$ — коэффициент динамической вязкости жидкости, $\nu>0$ — коэффициент кинематической вязкости жидкости, $\vec{f}=\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле, $u_{j,k}$ — ковариантная производная вектора u_j по переменной ξ^k, $\sigma>0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе “жидкость–газ”, $k_1(x)$ и $k_2(x)$, $x\in\Gamma$, — главные кривизны равновесной поверхности Γ, Δ_Γ — дифференциальный оператор Лапласа–Бельтрами, действующий на Γ, a_Γ — заданная формулой (5) функция, определяемая формой равновесной поверхности Γ, $P_2\vec{\delta}(t)=\sum\limits_{k=1}^{2}\delta_k(t)\vec{e}_k$, — проекция вектора углового перемещения $\vec{\delta}$ на плоскость Ox_1x_2, $m>0$ — масса всей системы, $\vec{u}(t,x)$ — поле относительных скоростей, $\vec{J}$ — тензор инерции системы, $\vec{\omega}(t)$ — вектор угловой скорости, ζ — функция, описывающая отклонение вдоль нормали $\vec{n}$ движущейся поверхности $\Gamma(t)$ от равновесной поверхности Γ.

Воспользуемся методом вспомогательных краевых задач С.Г. Крейна (см., например, [4], с. 277–280) и осуществим переход от задачи (1)–(9) к задаче Коши для системы дифференциально–операторных уравнений:

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt}+\rho\frac{d\vec{w}}{dt}+\rho P_{0,S}\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right)+\rho\nu A\vec{v}=\rho P_{0,S}\vec{f}, \tag{10}$$

$$\rho\frac{d\vec{w}}{dt}+\nu^{-1}VB_\sigma\,\gamma_n\,(\vec{v}+\vec{w})+\rho\nu^{-1}gV\theta\,[(P_2\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3]=\vec{0}, \tag{11}$$

$$\rho\frac{d}{dt}\int\limits_\Omega[\vec{r}\times(\vec{v}+\vec{w})]\,d\Omega+\vec{J}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}-\rho g\int\limits_\Gamma(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\zeta\,d\Gamma=\vec{M}(t), \tag{12}$$

$$\frac{d\zeta}{dt}-\gamma_n\,(\vec{v}+\vec{w})=0,\ \frac{d}{dt}P_2\vec{\delta}=P_2\vec{\omega},\ \frac{d}{dt}\delta_3=\omega_3, \tag{13}$$

$$\vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^0,\ \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0,\ \zeta(0)=\zeta^0,\ \vec{v}(0)=\vec{u}^0-\vec{w}(0), \tag{14}$$

$$\vec{w}(0)=-(\rho\nu)^{-1}\,V\,B_\sigma\,\zeta^0-g\nu^{-1}V\theta\left[(P_2\vec{\delta}^0\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right].$$

Здесь оператор $B_\sigma:=\theta\mathcal{L}_\sigma\theta$, θ — ортопроектор гильбертова пространства $L_2(\Gamma)$ на его подпространство $L_{2,\Gamma}$ коразмерности 1, состоящее из элементов ζ, удовлетворяющих условию сохранения объема жидкости в процессе малых движений; $P_{0,S}$ — ортопроектор на подпространство $\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ соленоидальных полей с функциями, обращающимися в нуль на Γ; поле скоростей представимо в виде суммы $\vec{u}=\vec{v}+\vec{w}$, где $\vec{v}:=(\mu A)^{-1}\left\{-\rho d\vec{u}/dt-\rho P_{0,\,S}\,(d\vec{\omega}/dt\times\vec{r})+\rho P_{0,\,S}\vec{f}\right\}$ является решением первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна, а $\vec{w}:=\mu^{-1}V\left(-B_\sigma\zeta-\rho g\theta\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\right)$ — решение второй вспомогательной задачи С.Г. Крейна. Следует отметить, что оператор A — самосопряженный положительно определенный оператор, заданный на области определения $\mathcal{D}(A)\subset\mathcal{D}(A^{1/2})=\vec{J}^1_{0,S}(\Omega)\subset\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ и имеющий область значений $\mathcal{R}(A)=\vec{J}_{0,S}(\Omega)$ (см. [4], с. 278-279); при этом $0<A^{-1}$ — компактный оператор.

Определение 1. Назовем решения однородной системы уравнений (1)–(9), зависящие от t по закону $\exp(-\lambda t)$, нормальными движениями исследуемой гидромеханической системы. □

Для определения искомых амплитудных элементов и спектрального параметра λ возникает следующая однородная спектральная краевая задача:

$$-\mu\Delta\vec{u}+\nabla p=\lambda\rho\,(\vec{u}+(\vec{\omega}\times\vec{r})),\quad \mathrm{div}\vec{u}=0\quad(\text{в}\quad\Omega),\quad \vec{u}=\vec{0}\quad(\text{на}\quad S), \tag{15}$$

$$\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}-\rho g\int\limits_\Gamma(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\zeta\,d\Gamma=\lambda\left(\vec{J}\vec{\omega}+\rho\int\limits_\Omega(\vec{r}\times\vec{u})\,d\Omega\right), \tag{16}$$

$$\mu\,(u_{j,3}+u_{3,j})=0\quad(j=1,2),\quad -p+2\mu\,u_{3,3}=-\mathcal{L}_\sigma\zeta-\rho\,g\,\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\quad(\text{на}\quad\Gamma), \tag{17}$$

$$u_n=-\lambda\zeta\quad(\text{на}\quad\Gamma),\quad\zeta=0\quad(\text{на}\quad\partial\Gamma),\quad\int\limits_\Gamma\zeta d\Gamma=0,\quad P_2\vec{\omega}=-\lambda P_2\vec{\delta},\quad\omega_3=-\lambda\delta_3. \tag{18}$$

Задачу (15)–(18) можно изучать теми же операторными методами, которые используются в [1] при исследовании начально–краевой задачи (1)–(9). В частности, начально–краевой задаче (10)–(14) отвечает спектральная краевая задача

$$\rho\nu A\vec{v} = \lambda\rho\left(\vec{v} + \vec{w} + P_{0,S}(\vec{\omega}\times\vec{r})\right), \tag{19}$$

$$\rho\vec{w} = -\nu^{-1}V\left\{B_\sigma\zeta + \rho\, g\,\theta\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\right\}, \tag{20}$$

$$\alpha\vec{\omega} + mglP_2\vec{\delta} - \rho g\int\limits_\Gamma(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\zeta\,d\Gamma = \lambda\left[\rho\int\limits_\Omega(\vec{r}\times(\vec{v}+\vec{w}))\,d\Omega + \vec{J}\vec{\omega}\right], \tag{21}$$

$$\gamma_n(\vec{v}+\vec{w}) = -\lambda\zeta, \quad P_2\vec{\omega} = -\lambda P_2\vec{\delta}, \quad \omega_3 = -\lambda\delta_3. \tag{22}$$

Далее преобразуем систему уравнений (19)–(22), введя поле $\vec{u} = \vec{v}+\vec{w}$ и используя векторно–матричную форму записи для искомых амплитудных элементов.

Из (19) имеем

$$\mu\vec{v} = \lambda\rho A^{-1}\left(\vec{v} + \vec{w} + P_{0,S}(\vec{\omega}\times\vec{r})\right), \quad \mu = \rho\nu; \tag{23}$$

складывая левые и правые части этого соотношения и (20), будем иметь после замены $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$

$$\mu\vec{u} = \lambda\rho A^{-1}\left(\vec{u} + P_{0,S}(\vec{\omega}\times\vec{r})\right) - V\left\{B_\sigma\zeta + \rho\, g\,\theta\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\right\}. \tag{24}$$

Вместе с (21) это уравнение можно переписать в векторно–матричной форме в следующем виде

$$\begin{pmatrix}\mu I & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}V & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}\mathcal{B}_\sigma\begin{pmatrix}\zeta\\ P_2\vec{\delta}\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}A^{-1} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\mathcal{C}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $\mathcal{B}_\sigma$ — оператор потенциальной энергии,

$$\mathcal{B}_\sigma\begin{pmatrix}\zeta\\ P_2\vec{\delta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}B_\sigma\zeta + \rho g\theta\left[\left(P_2\vec{\delta}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e}_3\right]\\ -\rho g\int\limits_\Gamma(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\zeta d\Gamma + mglP_2\vec{\delta}\end{pmatrix}, \tag{26}$$

а $\mathcal{C}$ — оператор кинетической энергии исследуемой гидромеханической системы,

$$\mathcal{C}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\vec{u} + \rho P_{0,S}(\vec{\omega}\times\vec{r})\\ \rho\int\limits_\Omega(\vec{r}\times\vec{u})\,d\Omega + \vec{J}\vec{\omega}\end{pmatrix}. \tag{27}$$

Запишем еще первые два соотношения в (22) в векторно–матричной форме:

$$\begin{pmatrix}\gamma_n & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix} = -\lambda\begin{pmatrix}\zeta\\ P_2\vec{\delta}\end{pmatrix}. \tag{28}$$

Кроме того, остается еще последняя связь (22):

$$\omega_3 = -\lambda\delta_3. \tag{29}$$

Таким образом, далее следует изучать нетривиальную спектральную задачу (25), (28) и тривиальное соотношение (29).

Если задача (25), (28) имеет решение для некоторого $\lambda \neq 0$, то можно исключить из рассмотрения столбец $\left(\zeta;\, P_2\vec{\delta}\right)^t$ и получить уравнение для искомого столбца $(\vec{u};\vec{\omega})^t$. В самом деле, находя $\left(\zeta;\, P_2\vec{\delta}\right)^t$ из (28) и подставляя его в (25), получим

$$\begin{pmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{C} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} + \lambda^{-1} \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \mathcal{B}_\sigma \begin{pmatrix} \gamma_n & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Преобразуем это уравнение к более симметричному виду путем замены

$$\vec{u} = A^{-1/2}\vec{\eta}, \quad \vec{\eta} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega). \quad (31)$$

Тогда, после применения слева оператора $\operatorname{diag}\left(A^{1/2}; I\right)$, будем иметь уравнение

$$\begin{pmatrix} \mu I & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{C} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix} +$$

$$+\lambda^{-1} \begin{pmatrix} Q^* & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \mathcal{B}_\sigma \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{\eta} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix}, \quad Q^* = A^{1/2}V, \quad Q = \gamma_n A^{-1/2}. \quad (32)$$

Эта форма записи спектральной задачи удобна тем, что здесь все коэффициенты — операторные матрицы — являются самосопряженными, т.е. исследуемой задаче отвечает самосопряженный операторный пучок (оператор–функция, зависящая от λ)

$$\mathcal{L}(\lambda) := \operatorname{diag}(\mu I;\, \alpha) - \lambda \operatorname{diag}\left(A^{-1/2};\, I\right) \mathcal{C} \operatorname{diag}\left(A^{-1/2};\, I\right) -$$

$$-\lambda^{-1} \operatorname{diag}(Q^*; P_2)\, \mathcal{B}_\sigma \operatorname{diag}(Q;\, P_2) \equiv \left(\mathcal{L}(\overline{\lambda})\right)^*, \quad (33)$$

действующий в гильбертовом пространстве $\vec{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3$. Рассмотрим, опираясь на вид (25), (28), (29), а также на вид (32), (29) исследуемой спектральной задачи, некоторые простые свойства ее решений.

Теорема 1. *Число $\lambda = 0$ всегда является собственным значением задачи* (25), (28), (29). *Если выполнено условие*

$$\ker \mathcal{B}_\sigma = \{0\}, \quad \mathcal{B}_\sigma : \quad \mathcal{D}(\mathcal{B}_\sigma) \subset L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2 \to L_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2, \quad (34)$$

то это нулевое собственное значение однократно, а соответствующий собственный элемент отвечает нулевому решению задачи (25), (28) *и произвольному значению $\delta_3 \in \mathbb{C}$. Такие тривиальные решения связаны с переходом маятника от исходного состояния покоя к новому состоянию покоя, полученному из исходного путем произвольного поворота на угол $\vec{\delta} = \delta_3\vec{e}_3$.*

Если выполнено условие

$$\ker \mathcal{B}_\sigma \neq \{0\}, \quad \dim \ker \mathcal{B}_\sigma = q > 0, \quad (35)$$

то задача (25), (28), (29) *имеет* $(q+1)$*–кратное нулевое собственное значение. Условие* (35) *выполнено, в частности, тогда, когда исследуемая гидромеханическая система находится на границе области устойчивости, т.е.*

$$\lambda_{\min}(\mathcal{B}_\sigma) = 0. \tag{36}$$

Рассмотрим теперь некоторые свойства решений задачи (25), (28), (29) при $\lambda \neq 0$, когда она эквивалентна задаче (32), (29). При этом будем пользоваться некоторыми определениями и положениями спектральной теории операторных пучков (см. [2], [6]).

Лемма 1. *В задаче* (32) *невещественные собственные значения* λ*, а также те вещественные, которым отвечают присоединенные элементы пучка* $\mathcal{L}(\lambda)$ *из* (33)*, расположены в полуплоскости*

$$Re\lambda \geq \min(\mu;\, \alpha) / \left(2\|\mathcal{C}^{1/2}\,\mathrm{diag}\left(A^{-1/2};\, I\right)\|^2\right) > 0. \tag{37}$$

Важным выводом из леммы 1 является такое утверждение.

Теорема 2. *(принцип смены устойчивости). При непрерывном изменении физических параметров исследуемой гидромеханической системы собственные значения* λ *задачи* (25), (28), (29) *могут непрерывно переходить из правой комплексной полуплоскости в левую лишь по вещественной оси через нуль комплексной плоскости, причем в момент перехода должно выполняться условие* (35).

Доказательство. В самом деле, по лемме 1 такие переходящие собственные значения не могут быть невещественными, а вещественным собственным значениям отвечают лишь собственные элементы. Отметим еще, что в левой комплексной полуплоскости собственные значения задачи (25), (28), (29) также могут быть лишь вещественными, причем им не могут отвечать присоединенные элементы.

Далее, так как задача (25), (28), (29) все время имеет одно нулевое собственное значение, то из соображений непрерывности по параметрам (до критического — в правой полуплоскости, после критического — в левой) в момент перехода собственное значение $\lambda = 0$ должно быть более чем однократно, а тогда по необходимости должно выполняться условие (35). Впервые (при изменении параметра или параметров) этот момент наступает, когда выполнено условие (36). $\square$

2. О полноте и базисности системы корневых элементов спектральной задачи

Отметим, что свойство базисности по Абелю–Лидскому является промежуточным между свойством полноты некоторой системы элементов гильбертова пространства и свойством базисности со скобками: здесь разложение любого элемента в ряд по данной системе производится с помощью специального метода, который называют методом Абеля–Лидского (см. [7], с. 248–249).

Как следует из рассмотрений [1], исследуемую спектральную задачу можно записать в виде:

$$-\omega_3 = \lambda\delta_3,\ \widetilde{B}x = \lambda\widetilde{A}x,\ x = \left(\vec{v};\vec{z};\vec{\omega};\zeta;P_2\vec{\delta}\right)^t \in \mathcal{H} = \vec{J}_{0,\,S}(\Omega)\oplus\vec{M}_0(\Omega)\oplus\mathbb{C}^3\oplus L_{2,\Gamma}\oplus\mathbb{C}^2, \tag{38}$$

где, в частности, операторная матрица $\widetilde{B}$ имеет структуру

$$\widetilde{B} = (I+R_2)\,B_0 + B_1, \quad B_0 = \operatorname{diag}(\rho\,\nu\,A;\,\nu^{-1}\,B;\,\alpha;\,I;\,1),$$
$$B_1 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad R_2 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}), \quad B := Q^*B_\sigma Q.$$

Здесь, однако, "главный" оператор $B_0 = B_0^* \gg 0$ неограничен, но не имеет компактного обратного, так как единичный оператор I действует в бесконечномерном пространстве $L_{2,\,\Gamma}$. Это не позволяет в задаче (38) использовать утверждения, связанные со свойством базисности Абеля–Лидского и получением асимптотики собственных значений.

Данную трудность можно преодолеть следующим образом. Исключим переменную ζ, тогда для амплитудных элементов

$$y := \left(\vec{v};\,\vec{z};\,\vec{\omega};\,P_2\vec{\delta}\right)^t \in \vec{J}_{0,\,S}(\Omega)\oplus\vec{M}_0(\Omega)\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}^2 =: \mathcal{H}_0 \tag{39}$$

возникает проблема

$$\begin{pmatrix} \rho\nu A\vec{v} \\ B^{1/2}A^{1/2}\vec{v} + \nu^{-1}B\vec{z} + \rho g B^{-1/2}\,PQ^*\theta\,[(P_2\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3] \\ \alpha\vec{\omega} + mglP_2\vec{\delta} \\ -P_2\vec{\omega} \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{\rho g}{\lambda}\begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \int\limits_\Gamma (\vec{e}_3\times\vec{r})\,\gamma_n\left(\vec{v}+\nu^{-1}R^+\vec{z}\right)d\Gamma \\ \vec{0} \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} \rho\vec{v} + \rho\nu^{-1}R^*\vec{z} + \rho P_{0,S}\,(\vec{\omega}\times\vec{r}) \\ \rho\vec{z} \\ \vec{J}\vec{\omega} + \rho\int\limits_\Omega \vec{r}\times\left(\vec{v}+\nu^{-1}R^+\vec{z}\right)d\Omega \\ P_2\vec{\delta} \end{pmatrix}, \tag{40}$$

а также связи

$$-\gamma_n\left(\vec{v}+\nu^{-1}\,R^+\vec{z}\right) = \lambda\zeta, \quad -\omega_3 = \lambda\delta_3. \tag{41}$$

Коротко задачу (40) можно переписать в виде:

$$\mathcal{A}y + \rho g\lambda^{-1}\mathcal{F}y = \lambda\mathcal{Z}y, \quad y\in\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \mathcal{D}(A)\oplus\mathcal{D}(B)\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}^2, \tag{42}$$

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Z}$ определяются соответствующими столбцами из (40).

Следует отметить, что оператор $\mathcal{Z}$ обратим и имеет структуру

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 + \mathcal{J}_1, \quad \mathcal{Z}_0 = \operatorname{diag}\left(\rho I;\,\rho I;\,\vec{J};\,1\right), \quad \mathcal{J}_1\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0). \tag{43}$$

Оператор $\mathcal{A}$ из (42), (40) обратим и имеет структуру

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1, \quad \mathcal{A}_0 = \operatorname{diag}\left(\rho\nu A;\,\nu^{-1}B;\,\alpha;\,1\right), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A)\oplus\mathcal{D}(B)\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}^2, \tag{44}$$

где $\mathcal{A}_1$ вполне подчинен $\mathcal{A}_0$, т.е. $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0)$.

Оператор $\mathcal{F}$ из (42), определенный вторым столбцом слева в (40) на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ (см. (44)), вполне подчинен оператору $\mathcal{A}_0$, т.е. $\mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0)$.

В результате задачу (42) можно переписать в виде

$$\left(I + \mathcal{J}_0 + \rho g \lambda^{-1} \mathcal{J}_{-1}\right) \mathcal{A}_0 y = \lambda \left(\mathcal{Z}_0 + \mathcal{J}_1\right) y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \tag{45}$$

$$\mathcal{J}_0 := \mathcal{A}_1 \mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0), \quad \mathcal{J}_{-1} := \mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0), \quad \mathcal{J}_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0), \tag{46}$$

$$\mathcal{A}_0 := \operatorname{diag}\left(\rho\nu A;\, \nu^{-1} B;\, \alpha;\, 1\right), \quad \mathcal{Z}_0 := \operatorname{diag}\left(\rho I;\, \rho I;\, \vec{J};\, 1\right). \tag{47}$$

Теорема 3. *Задача* (45)*, а потому и исходная спектральная задача о нормальных колебаниях исследуемой гидромеханической системы имеет дискретный спектр* $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ *с предельной точкой* $\lambda = \infty$ *и асимптотическим поведением*

$$\lambda_j = (\rho\nu)^{-1} \left(\frac{|\Gamma|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty). \tag{48}$$

Доказательство. Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$\mathcal{A}_0 y = \lambda \mathcal{Z}_0 y. \tag{49}$$

Отсюда и из определений (47) операторов $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{Z}_0$ получаем совокупность распавшихся задач:

$$\rho\nu A\vec{v} = \rho\lambda\vec{v} \quad \left(\vec{v} \in \vec{J}_{0,S}(\Omega)\right), \quad \nu^{-1} B\vec{z} = \lambda\rho\vec{z} \quad \left(\vec{z} \in \vec{M}_0(\Omega)\right), \tag{50}$$

$$\alpha\vec{\omega} = \lambda\vec{J}\vec{\omega} \quad \left(\vec{\omega} \in \mathbb{C}^3\right), \quad P_2\vec{\delta} = \lambda P_2\vec{\delta} \quad \left(P_2\vec{\delta} \in \mathbb{C}^2\right). \tag{51}$$

Конечномерные задачи (51), очевидно, не влияют на характер асимптотики, а задачам (50) отвечают две ветви собственных значений. С учетом асимптотических формул для собственных значений операторов A и B имеем

$$\lambda_{j1} = \nu\lambda_j(A) = \nu \left(\frac{|\,\Omega|}{3\pi^2}\right)^{-2/3} j^{2/3}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty), \tag{52}$$

$$\lambda_{j2} = (\rho\nu)^{-1}\lambda_j(B) = (\rho\nu)^{-1} \left(\frac{|\,\Gamma|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty). \tag{53}$$

Введем в рассмотрение функции распределения (с учетом кратностей) собственных значений операторов A и B:

$$N_A(\lambda) := \sum_{\lambda_j(A) < \lambda} 1, \quad N_B(\lambda) := \sum_{\lambda_j(B) < \lambda} 1. \tag{54}$$

Из (52), (53) следует, что

$$\lim_{\lambda \to +\infty} N_A(\lambda)\lambda^{-3/2} = \nu^{-3/2} \frac{|\,\Omega|}{3\pi^2}, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} N_B(\lambda)\lambda^{-2} = (\rho\nu)^2 \frac{|\,\Gamma|}{\pi}. \tag{55}$$

Так как задача (49) равносильна совокупности задач (50), (51), то функция распределения $N(\lambda)$ собственных значений задачи (49) равна сумме функций распределения собственных значений бесконечномерных задач (50) и конечномерных задач (51). Отсюда и из (55) получаем, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} N(\lambda)\lambda^{-2} = \lim_{\lambda\to+\infty} N_B(\lambda)\lambda^{-2} = (\rho\nu)^2\frac{|\,\Gamma|}{\pi}, \tag{56}$$

откуда следует, что для оператора $\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{Z}_0^{-1/2}$ в соответствующей задаче, полученной из (45) некоторыми преобразованиями,имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_j(\widetilde{\mathcal{A}}_0) = (\rho\nu)^{-1}\left(\frac{|\,\Gamma|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1+o(1)] \quad (j\to\infty). \tag{57}$$

Рассмотрим теперь, опираясь на теорему 3, вопросы полноты и базисности системы корневых элементов исследуемой задачи о нормальных колебаниях гидромеханической системы, в частности, задачи (45)–(47). При этом будем использовать методы, основанные на аналитическом возмущении линейных операторных пучков, а также на канонической факторизации оператор–функций (см., например, [6]).

Далее, введем следующие обозначения:

$$\widetilde{\mathcal{J}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{F}_0\mathcal{Z}_0^{1/2}, \quad \widetilde{\mathcal{J}}_{-1} := \rho g\mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{J}_{-1}\mathcal{Z}_0^{1/2}, \quad \widetilde{\mathcal{J}}_1 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{J}_1\mathcal{Z}_0^{-1/2}, \tag{58}$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{Z}_0^{-1/2}, \quad \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_0) = \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1}) = \mathcal{R}(\mathcal{Z}_0^{1/2}\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{Z}_0^{1/2}),$$

$$\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1}) = \mathcal{R}(\mathcal{Z}_0^{1/2}\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{Z}_0^{1/2}) = \mathcal{H}_0.$$

Здесь операторы $\widetilde{\mathcal{J}}_0$, $\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}$ и $\widetilde{\mathcal{J}}_1$ компактные, $\widetilde{\mathcal{A}}_0 = \widetilde{\mathcal{A}}_0^* \gg 0, \quad 0 < \widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0)$.

Для исследуемой задачи приходим из (45) к уравнению

$$\left(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_0 + \lambda^{-1}\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}\right)\widetilde{\mathcal{A}}_0 v = \lambda(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_1)v, \quad v = \mathcal{Z}_0^{1/2}y \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_0). \tag{59}$$

Осуществляя здесь далее замены вида

$$\lambda = \widetilde{\lambda}^{-1}, \quad \mathcal{I} + \widehat{S}_0 := (\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_1)^{-1}(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_0), \tag{60}$$

$$(\mathcal{I}+\widehat{S}_0)\widetilde{\mathcal{A}}_0 v = w, \tag{61}$$

получаем уравнение

$$\mathcal{L}(\widetilde{\lambda})w := \left(\mathcal{I} + \widetilde{\lambda}\widehat{\mathcal{B}} - \widetilde{\lambda}^{-1}\widehat{\mathcal{A}}\right)w = 0, \quad w \in \mathcal{H}_0, \tag{62}$$

$$\widehat{\mathcal{B}} := (\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_1)^{-1}\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_0)^{-1}(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_1) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0), \tag{63}$$

$$\widehat{\mathcal{A}} := \widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1}(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_0)^{-1}(\mathcal{I}+\widetilde{\mathcal{J}}_1) \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0). \tag{64}$$

Напомним, что собственные значения $\lambda_j(\widetilde{\mathcal{A}}_0)$ оператора $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ имеют асимптотическое поведение (57), и тогда

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_0), \quad p > 2. \tag{65}$$

Приведенные свойства операторов задачи (62) показывают, что для этой задачи справедливы следующие теоремы о базисности системы собственных и присоединенных (корневых) элементов спектральной задачи.

Теорема 4. *Пусть геометрические и физические параметры исследуемой гидромеханической системы таковы, что выполнено условие*

$$4\|\widehat{\mathcal{A}}\| \cdot \|\widehat{\mathcal{B}}\| < 1. \tag{66}$$

Тогда система корневых элементов задачи (45)–(47) *является полной в пространстве с нормой графика оператора* $\widetilde{\mathcal{A}}_0$*:*

$$\|\widetilde{\mathcal{A}}_0 v\|^2_{\mathcal{H}_0} = \left(\mathcal{Z}_0^{-1}\mathcal{A}_0 y, \mathcal{A}_0 y\right)_{\mathcal{H}_0} =$$

$$= \rho\nu^2 \|A\vec{v}\|^2_{\vec{J}_{0,S}(\Omega)} + (\rho^3\nu^2)^{-1}\|B\vec{z}\|^2_{\vec{M}_0(\Omega)} + \alpha^2\left(\vec{J}^{-1}\vec{\omega}\right)\cdot\vec{\omega} + |P_2\vec{\delta}|^2. \tag{67}$$

Если условие (66) *не выполнено, то система корневых элементов задачи* (45)–(47)*, отвечающая собственным значениям* λ_j *с* $|\lambda_j| > R$ *при любом* $R > 0$*, является полной с точностью до конечного дефекта по норме* (67)*.*

Теорема 5. *Если выполнено условие* (66)*, то система корневых элементов задачи* (45)–(47) *образует базис Абеля–Лидского порядка* $\alpha_0 > 2$ *в пространстве с нормой графика* (67)*. Если условие* (66) *не выполнено, то система корневых элементов задачи* (45)–(47)*, отвечающая собственным значениям* λ_j *с* $|\lambda_j| > R$ *при любом* $R > 0$*, образует базис Абеля–Лидского порядка* $\alpha_0 > 2$ *с точностью до конечного дефекта в пространстве с нормой* (67)*.*

3. Обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

В условиях, близких к невесомости, когда следует учитывать капиллярные силы, оператор потенциальной энергии $\mathcal{B}_\sigma$ может быть не обязательно положительно определенным, т.е. потенциальная энергия гидромеханической системы может не иметь минимума в состоянии равновесия (жидкость, подвешенная в пробирке при достаточно большой силе тяжести). В этом случае система является не только статически, но и динамически неустойчивой.

Теорема 6. *Пусть оператор потенциальной энергии* $\mathcal{B}_\sigma$ *имеет* $\varkappa$ *отрицательных собственных значений (с учетом их кратностей),* q*–кратное нулевое собственное значение, а остальные собственные значения оператора* $\mathcal{B}_\sigma$ *положительны. Тогда задача* (25)–(29) *имеет* $(q+1)$*–кратное нулевое собственное значение,* $\varkappa$ *отрицательных собственных значений, а остальные собственные значения расположены в правой полуплоскости.*

Доказательство. Оно проводится по схеме, изложенной в работе [5], с соответствующими усложнениями, связанными со спецификой задачи (25)–(29). □

Следствием этой теоремы является утверждение, которое называют обращением теоремы Лагранжа об устойчивости: *если потенциальная энергия гидромеханической системы не имеет минимума в состоянии равновесия и минимальное собственное значение* $\lambda_{\min}(\mathcal{B}_\sigma)$ *оператора потенциальной энергии* $\mathcal{B}_\sigma$ *отрицательно, то по крайней мере одно собственное значение* λ *задачи* (25)–(29) *расположено в левой полуплоскости, т.е. гидромеханическая система динамически неустойчива.*

Список литературы

[1] Батыр Э.И., Дудик О.А., Копачевский Н.Д. *Малые колебания тел с полостями, заполненными несжимаемой вязкой жидкостью* // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. Спецвыпуск: Актуальные проблемы математической гидродинамики. С. 15–29.

[2] Гохберг И.Ц., Крейн М.Г. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве* – М.: Наука, 1965. — 448 с.

[3] Дудик О.А. *Нормальные колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, при условии статической неустойчивости* // Ученые Записки ТНУ им. В.И. Вернадского. — Симферополь. — Т. 20 (59), № 1, 2007, с. 57–64.

[4] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.* – М: Наука, 1989. – 416 с.

[5] Копачевский Н.Д., Пивоварчик В.Н. *О достаточном условии неустойчивости конвективных движений жидкости в открытом сосуде* // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – Т. 33. – 1993, № 1. – С. 101–118.

[6] Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков* – Кишинев: Штиинца, 1986. – 260 с.

[7] Arganovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich N.N. *Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory* – Berlin : WILEY – VCH Verlag. – 1999. – 377 p.

Про нормальні коливання маятника з порожниною, частково заповненою капілярною в'язкою рідиною

В роботі досліджені задачі про нормальні коливання маятника з порожниною, частково заповненою капілярною в'язкою рідиною. Вивчені властивості спектру, доведена теорема про базісність системи кореневих елементів, отримана асимптотика власних значень. Доведена теорема Лагранжа про нестійкість.

Ключові слова: нормальні коливання, власні значення, асимптотика, нестійкість.

On normal oscillations of a pendulum with a cavity partially filled with a capillary viscous fluid

The problem on normal oscillations of a pendulum with a cavity partially filled with a capillary viscous fluid is investigated in the work. Spectral properties are studied, the theorem on basisity of the system of root elements is proved. The Lagrange theorem on nonstability is proved.

Keywords: normal oscillations, eigenvalues, asymptotic, nonstability.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 78–91.

УДК 517.968.7

И. И. Карпенко

НЕЭРМИТОВО САМОСОПРЯЖЕННЫЕ МАТРИЦЫ НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОНОВ

В работе рассматривается класс матриц, самосопряженных относительно неэрмитовой инволюции в вещественной алгебре кватернионов (a–самосопряженные матрицы). Для этого класса матриц получен аналог разложения Такаги. В качестве приложений доказана теорема о подобии произвольной кватернионной матрицы некоторой a–самосопряженной матрице и рассмотрены свойства конечномерного кватернионного модуля с внутренним произведением.

Ключевые слова: кватернион, алгебры с инволюцией, разложение Такаги, внутреннее произведение.

Введение

В комплексном матричном анализе наряду с эрмитовыми матрицами ($A^* = A$) рассматриваются симметричные матрицы ($A^T = A$). И хотя последние встречаются в приложениях значительно реже, однако они всё-таки используются, например, при изучении регулярных аналитических отображений единичного круга в комплексную плоскость. Для комплексных симметрических матриц известен ряд результатов, например, теорема о разложении Такаги [1], согласно которой любая симметричная матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ всегда может быть представлена в виде $A = U\Sigma U^T$, где $U-$ унитарная матрица, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)-$ неотрицательная диагональная матрица, причем столбцы матрицы U образуют множество ортонормированных собственных векторов матрицы $A\bar{A}$, и соответствующие диагональные элементы матрицы Σ являются неотрицательными квадратными корнями из собственных значений матрицы $A\bar{A}$, отвечающих этим собственным векторам.

Заметим, что операция транспонирования наряду с операцией эрмитова сопряжения является инволюцией в вещественной алгебре $M_n(\mathbb{C})$.

В кватернионном конечномерном анализе, как правило, рассматривается операция эрмитова сопряжения матриц, порожденная классической инволюцией в алгебре кватернионов. Однако в вещественной алгебре кватернионов $\mathbb{H}$ существуют (с точностью до изоморфизма) ровно две инволюции, и соответственно мы имеем еще одну инволюцию (неэрмитову) в $M_n(\mathbb{H})$. В настоящей работе рассматриваются классы самосопряженных матриц в алгебре $M_n(\mathbb{H})$, порожденные неэрмитовой инволюцией. Как оказалось, этот класс матриц является аналогом комплексных симметрических матриц и по аналогии с ними имеет ряд интересных свойств. Упоминание о таком инволютивном преобразовании мы встречаем в работе [2], где кососамосопряженнные (в неэрмитовом смысле) матрицы рассматриваются в качестве генераторов ортогональной группы. Причем, в этой работе неэрмитова инволюция рассматривается просто как возможная альтернатива для операции транспонирования, у которой в алгебре матриц над телом кватернионов отсутствует антикоммутативность .

1. Инволюции в вещественной алгебре кватернионов $\mathbb{H}$

Пусть $\mathbb{H}$ — вещественная алгебра размерности 4 с базисом $\{1, i, j, k\}$ и правилами умножения

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1 & j^2 = -1 & k^2 = -1 \\ ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Элементы такой алгебры называют *кватернионами*. Для любого кватерниона $q \in \mathbb{H}$ существуют единственные q_0, q_1, q_2, $q_3 \in \mathbb{R}$ такие, что $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ (*вещественное представление* кватерниона q). Полезна также *векторная форма* записи кватерниона: $q = q_0 + \vec{q}$, где $\vec{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ — *векторная* или *мнимая часть* q (кватернион, совпадающий со своей векторной частью, называется *мнимым* или *векторным*).Так, например, векторная форма произведения кватернионов q и p имеет вид

$$qp = q_0 p_0 - (\vec{q}, \vec{p}) + p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + [\vec{q}, \vec{p}]. \tag{1}$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение, а $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в 3–мерном подпространстве векторных кватернионов $\mathbb{R}\langle i, j, k\rangle$.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно рассматривать как вещественную подалгебру в $\mathbb{H}$: $\mathbb{C} = \mathbb{R}\langle 1, i\rangle$. Вложение $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$ позволяет получить *комплексное* (или *симплектическое*) представление кватернионов. А именно, если $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, то $q = (q_0 + q_1 i) + (q_2 + q_3 i) j = z_1 + z_2 j$, где z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

Линейный оператор J, действующий в вещественной алгебре $\mathbb{H}$, называется *инволюцией* в $\mathbb{H}$, если выполняются условия:

(1) $J^2 = I$;
(2) $J(pq) = J(q)J(p)$ $(\forall p, q \in \mathbb{H})$.

Примером такой инволюции служит операция сопряжения в $\mathbb{H}$:

$$\overline{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k.$$

При этом $q\overline{q} = \sum_{t=0}^{3} q_t^2$. Модуль $|q|$ кватерниона q определяется равенством $|q| = (q\overline{q})^{1/2}$, превращая таким образом $\mathbb{H}$ в нормированную алгебру с делением. Действительно, нетрудно видеть, что

$$q^{-1} = |q|^{-1/2}\overline{q}.$$

Следовательно, инволюция алгебры $\mathbb{H}$ дополнительно удовлетворяет равенству

$$J(1) = 1.$$

Заметим, что в отличие от комплексного случая тождественное отображение в $\mathbb{R}$–алгебре $\mathbb{H}$ уже не является инволюцией в силу некоммутативности этой алгебры. Выясним, существуют ли другие инволюции в $\mathbb{H}$ помимо приведенной выше операции сопряжения.

Так как всякая инволюция однозначно определяется своим действием на базисные векторы, положим

$$J(1) = 1, \quad J(i) = u, \quad J(j) = v, \quad J(k) = w.$$

Так как $i^2 = -1$, то $u^2 = -1$, откуда следует, что $\operatorname{Re} u = 0$, т.е. u — чисто мнимый кватернион, причем $|u| = 1$. Аналогично,

$$\operatorname{Re} v = \operatorname{Re} w = 0, \ |v| = |w| = 1.$$

Кроме того, действуя оператором J на равенство $ij = -ji$, получим $vu = -uv$. Следовательно, с учетом формулы (1) имеем:

$$-(v, u) + [v, u] = (u, v) - [u, v],$$

откуда следует, что $(u, v) = 0$.

Обратимся теперь к кватерниону w. Так как $k = ij$, то

$$w = vu = -(v, u) + [v, u] = [v, u].$$

Следовательно, вещественная часть кватерниона w равна нулю, и векторы u, v, w образуют левую ортогональную тройку в $\mathbb{R}^3$. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$. Тогда матрица оператора J в базисе $\{1, i, j, k\}$ имеет вид :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & v_1 & w_1 \\ 0 & u_2 & v_2 & w_2 \\ 0 & u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\det J = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = (u, v, w) = ([u, v], w) = -(w, w) = -1.$$

Так как столбцы матрицы J образуют ортонормированную систему, то J — ортогональная матрица. Кроме того, $J^2 = I$, поэтому собственные значения матрицы J удовлетворяют равенству $\lambda^2 = 1$. Следовательно, $\lambda = \pm 1$. Ортогональность матрицы J и вещественность ее спектра означают, что матрица J вещественно подобна диагональной матрице, на диагонали которой стоят ± 1. Так как $\det J = -1$, то возможны два варианта:

(1) $J_1 = \operatorname{diag}\{1, -1, -1, -1\}$;
(2) $J_2 = \operatorname{diag}\{1, 1, -1, 1\}$ (с точностью до расположения -1).

Таким образом, в вещественной алгебре $\mathbb{H}$ (с точностью до изоморфизма) существует ровно две инволюции J_1 и J_2, для кватерниона $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ определяемые равенствами:

$$J_1(q) = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k,$$
$$J_2(q) = q_0 + q_1 i - q_2 j + q_3 k.$$

Очевидно, что первая инволюция есть ни что иное, как введенная выше операция сопряжения: $J_1(q) = \overline{q}$. Для второй инволюции примем обозначение $J_2(q) = \widehat{q}$. Для указанных инволюций справедливо соотношение:

$$\widehat{q} = -j\overline{q}j. \tag{2}$$

Интересно отметить, что композиция этих инволюций дает автоморфизм алгебры $\mathbb{H}$:

$$q^c := \overline{\widehat{q}} = \widehat{\overline{q}} = -jqj.$$

Если кватернион q представлен своим симплектическим разложением $q = z_1 + z_2 j$, где $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$, то

$$\overline{q} = \overline{z_1} - z_2 j,\ \widehat{q} = z_1 - \overline{z_2} j,\ q^c = \overline{z_1} + \overline{z_2} j.$$

2. Инволюции и автоморфизмы в вещественной алгебре $M_n(\mathbb{H})$

Рассмотренные выше отображения вещественной алгебры $\mathbb{H}$ порождают вещественные линейные отображения в правом $\mathbb{H}$–модуле $M_{m\times n}(\mathbb{H})$. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{H}),\quad A = \|a_{st}\|$. Вводя следующие обозначения:

$$\overline{A} = \|\overline{a}_{st}\|,\quad \widehat{A} = \|\widehat{a}_{st}\|,$$

определим операции $(^a)$ и $(^*)$ над матрицами из $M_{m\times n}(\mathbb{H})$ следующим образом:

$$A^* := \overline{A}^{\,T};\quad A^a := \widehat{A}^{\,T}.$$

Нетрудно показать, что отображения $(^a)$ и $(^*)$ являются $\mathbb{R}$–линейными в $M_{m\times n}(\mathbb{H})$, и, кроме того, для матриц подходящих размерностей

$$(AB)^* = B^*A^*,\ (AB)^a = B^aA^a.$$

Таким образом, отображения $(^a)$ и $(^*)$ являются инволюциями вещественной алгебры $M_n(\mathbb{H})$, причем

$$A^a = -JA^*J, \tag{3}$$

где $J = Ej,\ E$ — единичная матрица. Инволюцию $(^*)$ называют, как правило, *эрмитовой*. Поэтому инволюцию $(^a)$ мы будем называть *неэрмитовой*.

Автоморфизм $q \to q^c$ порождает $\mathbb{H}$–линейное отображение в в правом $\mathbb{H}$–модуле $M_{m\times n}(\mathbb{H})$:

$$A^c = \|a^c_{st}\|.$$

Для такого отображения уже имеем $(AB)^c = A^cB^c$, что, в частности, означает, что $(^c)$ — автоморфизм алгебры $M_n(\mathbb{H})$. Кроме того,

$$(A^a)^* = (A^*)^a = A^c. \tag{4}$$

3. a–самосопряженные матрицы

Пусть $A = \|a_{st}\| \in M_n(\mathbb{H})$. Матрицу A назовем *a–самосопряженной*, если $A = A^a$.

Ввиду равенства (3) a–самосопряженная матрица A удовлетворяет условию:

$$A^* = -JAJ.$$

Лемма 1. *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ является a–самосопряженной, то собственные значения матрицы AA^c неотрицательны. Причем для каждого собственного значения σ существует вектор $v \in \mathbb{H}^n$ такой, что*

$$Av^c = v\sigma.$$

Доказательство. Пусть A — a–самосопряженная матрица из $M_n(\mathbb{H})$. Так как $A = A^a$, то $A^c = \overline{\widehat{A}} = (A^a)^* = A^*$. Следовательно, матрица AA^c является самосопряженной неотрицательной матрицей с неотрицательными собственными значениями.

Пусть $x \in \mathbb{H}^n$ — собственный вектор матрицы AA^c, соответствующий собственному значению σ^2. Возможны две ситуации:

(1) векторы Ax^c и x линейно зависимы;

(2) векторы Ax^c и x линейно независимы.

В первом случае существует такой кватернион q, что $Ax^c = xq$. Применяя операцию сопряжения $(^c)$, имеем $A^cx = x^cq^c$, откуда

$$AA^cx = Ax^cq^c = xqq^c.$$

Следовательно, $qq^c = \sigma^2$.

Во втором случае для любого $q \in \mathbb{H}$ вектор $y = Ax^c + xq$ отличен от нуля. Выберем q таким образом, чтобы выполнялось равенство $qq^c = \sigma^2$. Тогда

$$Ay^c = A(A^c x + x^c q^c) = x\sigma^2 + Ax^c q^c = xqq^c + Ax^c q^c = yq^c.$$

Таким образом, мы доказали, что всегда существует вектор $z \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ и $p \in \mathbb{H}$ такие, что $pp^c = \sigma^2$, и

$$Az^c = zp. \tag{5}$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $p = \sigma$. Действительно, умножая справа равенство (5) на $u^c,\ u \in \mathbb{H},\ |u| = 1$, получим

$$A(zu)^c = (zu)(\overline{u}pu^c).$$

Здесь за счет выбора кватерниона u мы можем добиться равенства $\overline{u}pu^c = \sigma$. □

Теорема 1. *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ является a–самосопряженной, то она допускает разложение вида:*

$$A = U\Sigma U^a,$$

где U — унитарная матрица, столбцы которой образуют множество ортонормированных собственных векторов матрицы AA^c, Σ — неотрицательная диагональная матрица, диагональные элементы которой являются неотрицательными квадратными корнями из собственных значений матрицы AA^c, соответствующих этим собственным векторам.

Доказательство. Пусть A — a–самосопряженная матрица из $M_n(\mathbb{H})$, $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ $(\sigma_t \geq 0)$ — собственные значения матрицы AA^c. Согласно лемме 1 мы можем утверждать, что существует вектор $x_1 \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ такой, что

$$Ax_1^c = x_1\sigma_1. \tag{6}$$

Дополним вектор x_1 до ортонормированного базиса в $\mathbb{H}^n$: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обозначим через V_1 унитарную матрицу, столбцы которой совпадают с векторами этого базиса. Действуя на равенство $V_1 V_1^* = E$ операцией $(^a)$, с учетом формулы (4) получим:

$$(V_1^*)^a V_1^a = V_1^c V_1^a = E.$$

Заметим также, что $(V_1^c)^a = V_1^*, (V_1^*)^a = V_1^c$ и, следовательно, матрица $V_1^* A V_1^c$ является a–самосопряженной.

В силу равенства (6) имеем:

$$V_1^* A V_1^c = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & A^{(1)} \end{bmatrix}$$

где матрица $A^{(1)}$ также a–самосопряженная. Применяя этот процесс редукции к матрице $A^{(1)}$ и ее преемникам самое большее $n-1$ раз, получим в результате равенство:

$$V_{n-1}^* \dots V_2^* V_1^* A V_1^c V_2^c \dots V_{n-1}^c = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} = \Sigma.$$

Полагая $U = V_1 V_2 \dots V_{n-1}$, получаем:

$$U^* A U^c = \Sigma.$$

Умножая это равенство справа на U^a и слева на U, окончательно получим:

$$A = U \Sigma U^a.$$

□

В качестве примера a–самосопряженной матрицы рассмотрим матрицу $S = \frac{1}{\sqrt{2}}(E + iB)$, где

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим ряд достаточно очевидных свойств матрицы S:

1) $S^T = S$;

2) $\widehat{S} = S$;

3) $S^a = S$.

Так как $B^2 = E$, то $S\overline{S} = \frac{1}{2}(E + iB)(E - iB) = E$. Отсюда следует, что $\overline{S} = S^{-1}$. Отметим также, что $SS^* = S^*S = E$. Таким образом, матрица S является не только a–самосопряженной, но еще и нормальной матрицей.

Пусть $J_k(\lambda)$ — жорданов блок порядка $k \geq 2$, $J_k(\lambda) = \lambda E + N$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$BNB = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = N^a,$$

при этом $(BNB)^T = N$ или $(BNB)^a = N$. Так как

$$BN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \; NB = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то $(BN)^a = BN, (NB)^a = NB$. Следовательно,

$$SJ_k(\lambda)S^{-1} = SJ_k(\lambda)\bar{S} = \frac{1}{2}(E + iB)(\lambda E + N)(E - iB) =$$
$$= \lambda E + 1/2(N + BNB) + i/2(BN - NB).$$

В полученном равенстве все три слагаемых есть a–самосопряженные матрицы. Таким образом, *жорданов блок $J_k(\lambda)$ подобен a-самосопряженной матрице.*

Теорема 2. *Каждая матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ подобна некоторой a–самосопряженной матрице.*

Доказательство. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$. Известно, (см., напр., [3]), что каждая квадратная матрица над алгеброй $\mathbb{H}$ подобна комплексной жордановой нормальной форме

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus J_{n_s}(\lambda_s),$$

где $J_{n_t}(\lambda_t) \in M_n(\mathbb{C}), \; t = \overline{1, s}$.

Если ввести в рассмотрение матрицы $S_{n_t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E + iB) \in M_{n_t}(\mathbb{C})$ для $n_t \geq 2$, $S_{n_t} = [1]$ для $n_t = 1$, и обозначить

$$S = S_{n_1} \oplus S_{n_2} \oplus \ldots \oplus S_{n_s},$$

то

$$SJS^{-1} = S_{n_1}J_{n_1}(\lambda_1)\bar{S}_{n_1} \oplus \ldots \oplus S_{n_s}J_{n_s}(\lambda_s)\bar{S}_{n_s}.$$

На основании проведенных выше рассуждений последняя матрица есть прямая сумма a–самосопряженных матриц, и, следовательно, сама является a-самосопряженной. □

Следовательно, каждый класс подобия в $M_n(\mathbb{H})$ содержит a–самосопряженную матрицу, каждому линейному оператору в $\mathbb{H}^n$ соответствует a-самосопряженное представление в некотором базисе. Из этого результата, в частности, следует, что спектр и жорданова форма a–самосопряженных матриц не имеют никакой специфики.

Другой вывод из приведенного выше результата заключается в том, что каждая матрица "диагонализуема"в некотором смысле.

Следствие 1. *Для всякой матрицы $A \in M_n(\mathbb{H})$ найдутся такие невырожденная матрица T и унитарная матрица U, что матрица $(TU)^{-1}A(TU^c)$ будет диагональной матрицей с неотрицательными элементами на главной диагонали.*

Доказательство. Согласно теореме 2

$$A = TBT^{-1},$$

где $B^a = B$. Тогда согласно теореме 1

$$B = U\Sigma U^a,$$

где U — унитарная матрица, Σ — неотрицательная диагональная матрица. Следовательно,

$$A = TU\Sigma U^a T^{-1}. \tag{7}$$

Так как $U^{-1} = U^*$ и $(U^a)^{-1} = (U^{-1})^a = (U^*)^a = U^c$, то равенство (7) можно переписать следующим образом:

$$A = TU\Sigma (TU^c)^{-1},$$

откуда $(TU)^{-1}A(TU^c) = \Sigma$. □

4. Внутреннее произведение в $\mathbb{H}$–модулях

Полученные результаты находят применение в исследовании $\mathbb{H}$–модулей со специальным внутренним произведением. Так, отображение $(^a)$ позволяет ввести внутреннее произведение на правом $\mathbb{H}$–модуле $\mathbb{H}^n$: для $x = (x_t),\ y = (y_t)$

$$[x, y] := y^a x = \sum_{t=1}^{n} y_t^a x_t.$$

Такое внутреннее произведение обладает следующими свойствами:

1. $[x, y]^a = [y, x]$;
2. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$;
3. $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$;
4. $[xq, y] = [x, y]q$ $(\forall q \in \mathbb{H})$;
5. $[x, yq] = q^a[x, y]$ $(\forall q \in \mathbb{H})$.

Заметим, что относительно данного внутреннего произведения справедливо равенство

$$[Ax, y] = [x, A^a y].$$

В правом $\mathbb{H}$–модуле $\mathbb{H}^n$ всегда можно ввести классическое скалярное произведение, которое определяется как

$$\langle x, y\rangle := \sum_{t=1}^{n} \overline{y}_t x_t.$$

Поэтому с помощью равенства (2) легко установить связь между внутренним и скалярным произведениями:

$$[x, y] = -j\langle Jx, y\rangle,$$

где $J = Ej,\ E$ — единичная матрица. Отметим, что линейный оператор J является антиинволюцией в $\mathbb{H}^n$:

$$J^* = -J_0, \quad J^2 = -I.$$

Векторы x, y назовем *J–ортогональными* ($x[\ \perp\ ]y$), если $[x, y] = 0$. Подмодули H_1, H_2 модуля H назовем *J–ортогональными подмодулями*, если для любых $x \in H_1,\ y \in H_2 :\ [x, y] = 0$. *$J$–ортогональным дополнением* к подмодулю H_1 в модуле H называется множество вида:

$$H_1^{[\perp]} = \{x \in H \mid [x, y] = 0, \forall y\ \in H_1\}.$$

Множество $H_1^0 = H_1 \cap H_1^{[\perp]}$ назовем *изотропной частью* подмодуля H_1. Если изотропная часть подмодуля H_1 равна $\{0\}$, то такой подмодуль называется *невырожденным*.

Так, сам модуль H является невырожденным. Действительно, если предположить, что $[x, y] = 0, \forall y\ \in H$, то, как следствие, $\langle Jx, y\rangle = 0, \forall y\ \in H$, откуда $Jx = 0$ и $x = 0$.

Определение 1. $\mathbb{H}$–подмодуль H_1 в H назовем *проекционно полным*, если имеет место равенство:

$$H_1[+]H_1^{[\perp]} = H.$$

Пусть H_1 — $\mathbb{H}$–подмодуль в H, P_1 — ортопроектор на H_1, P_2 — ортопроектор на $H_1^{\perp}$.

Теорема 3. *(Первый критерий проекционной полноты подмодуля.) $\mathbb{H}$–подмодуль H_1 является проекционно полным в H тогда и только тогда, когда H_1 удовлетворяет условию $P_1 J H_1 = H_1$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbb{H}$-подмодуль H_1 удовлетворяет условию

$$P_1 J H_1 = H_1.$$

С учетом свойств антиинволюции J для любого $x \in H$ имеет место представление: $x = Jx_0,\ x_0 \in H$. Кроме того, $x_0 = x_1 + x_2, Jx_1 \in H_1,\ x_2 \in H_1^{\perp}$. Так как по условию $x_1 = P_1 Jx_1',\ x_1' \in H_1$, то

$$x = J(P_1 Jx_1' + x_2) = J((I - P_2)Jx_1' + x_2) = -x_1' + J(-P_2 Jx_1' + x_2) = -x_1' + Jx_2',$$

где $x_1' \in H_1,\ x_2' \in H_1^{\perp},\ Jx_2' \in H_1^{[\perp]}$. Полученное разложение доказывает равенство

$$H = H_1[+]H_1^{[\perp]}.$$

Достаточность. Обратно, пусть подмодуль H_1 проекционно полный в H. Тогда для любого $x \in H_1$

$$Jx = x_1 + x_2, \quad x_1 \in H_1,\ x_2 \in H_1^{[\perp]}. \tag{8}$$

Принимая во внимание свойства антиинволюции J, $x_2' = Jx_2 \in H_1^{\perp}$. Действуя на равенство (8) оператором $-J$, имеем:

$$x = -Jx_1 - x_2',$$

откуда под действием оператора P_1 получим:

$$x_1 = -P_1 Jx_1 = P_1 J(-x_1),$$

что доказывает справедливость равенства $P_1 JH_1 = H_1$. □

Определим матрицу Грама G системы векторов $f_1, f_2, \ldots, f_m$ из H относительно внутреннего произведения $[\cdot,\cdot]$:

$$G = \begin{pmatrix} [f_1,f_1] & [f_2,f_1] & \ldots & [f_m,f_1] \\ [f_1,f_2] & [f_2,f_2] & \ldots & [f_m,f_2] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [f_1,f_m] & [f_2,f_m] & \ldots & [f_m,f_m] \end{pmatrix}$$

Лемма 2. *Матрица Грама G линейно независимой системы векторов $f_1, f_2, \ldots, f_m$ является обратимой тогда и только тогда, когда подмодуль $H_1 = \mathrm{Lin}_{\mathbb{H}}\langle f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ является невырожденным.*

Доказательство. Допустим, что $H_1^0 \neq \{0\}$. Тогда найдется $x \in H_1 \backslash \{0\}$ такой, что $x[\perp]H_1$. При этом $x = \sum_{t=1}^{m} f_t x_t$. Обозначим

$$g_t = ([f_1,f_t],[f_2,f_t],\ldots,[f_m,f_t]), t = \overline{1,m}.$$

Тогда

$$\sum_t g_t x_t = ([f_1,x],[f_2,x],\ldots,[f_m,x]) = 0.$$

Следовательно, строки матрицы $G \in M_m(\mathbb{H})$ линейно зависимы. Для обоснования необратимости матрицы G обратимся к ее симплектическому образу G^s. Если $G = G_1 + G_2 j,\ G_1, G_2 \in M_m(\mathbb{C})$, то строки матрицы $G^s = \begin{pmatrix} G_1 & -\overline{G}_2 \\ G_2 & \overline{G}_1 \end{pmatrix}$ также линейно зависимы. В этом случае $\det G^s = 0$, и матрица G^s является необратимой. Тогда матрица G также необратима.

Обратно, если матрица G необратима, то аналогичными рассуждениями можно показать, что строки матрицы G линейно зависимы, откуда следует существование ненулевого вектора x в $H_1 \cap H_1^{[\perp]}$. □

Доказанная лемма позволяет получить еще один критерий проекционной полноты.

Теорема 4. *(Второй критерий проекционной полноты подмодуля.) Подмодуль H_1 является проекционно полным в H тогда и только тогда, когда подмодуль H_1 — невырожденный.*

Доказательство. Пусть $\dim H_1 = m$, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — ортонормированный базис в H_1. Тогда $Jf_t = \sum_{r=1}^{m} f_r a_r + g$, где $g \in H_1^{\perp}$. Следовательно, $a_u = \langle Jf_t, f_u\rangle = [f_t, f_u]$. Таким образом,

$$P_1 J f_t = \sum_{r=1}^{m} f_r [f_t, f_r].$$

Пусть $y \in H_1$. Рассмотрим уравнение

$$P_1 J x = y \tag{9}$$

и выясним, при каком условии оно имеет решение в H_1.

Пусть $x = \sum_{t=1}^{m} f_t x_t$, тогда

$$P_1 J x = \sum_{t} (P_1 J f_t) x_t = \sum_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} f_r [f_t, f_r] x_t = \sum_{r=1}^{m} f_r \sum_{t=1}^{m} [f_t, f_r] x_t.$$

Так как $y \in H_1$, то $y = \sum_{r=1}^{m} f_r y_r$. Следовательно, задача о разрешимости уравнения (9) в H_1 сводится к разрешимости системы линейных уравнений:

$$\sum_{t=1}^{m} [f_t, f_r] x_t = y_r, \qquad r = \overline{1, m}. \tag{10}$$

Очевидно, система линейных уравнений (10) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица Грама G обратима. Согласно лемме 2 это условие равносильно невырожденности подмодуля H_1. □

В $\mathbb{H}$–модуле $\mathbb{H}^n$ с внутренним произведением $[\cdot,\cdot]$ имеет место аналог процесса ортогонализации Грама-Шмидта.

Лемма 3. *Пусть заданы векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{H}^n$, $m \le n$. Тогда существуют векторы $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{H}^n$ такие, что*

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{H}}\langle y_1, \ldots, y_m\rangle = \mathrm{Lin}_{\mathbb{H}}\langle x_1, \ldots, x_m\rangle,$$

причем $[y_t, y_s] = 0, t \ne s$, $[y_t, y_t] = 1$, если $t \le r$, и $[y_t, y_t] = 1$, если $t \ge r$. Здесь $r = \operatorname{rank} X^a X$, а $X = \|x_1\, x_2 \ldots x_k\|$.

Доказательство. Рассмотрим a–самосопряженную матрицу $X^a X$. Согласно теореме 1

$$X^a X = U \Sigma U^a,$$

где U — унитарная матрица, $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0\}, \sigma_t \ge 0$, $t = \overline{1, r}$. Пусть

$$D = \mathrm{diag}\{\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \sqrt{\sigma_r}, 1, 1, \ldots, 1\}, \quad I_r = \mathrm{diag}\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, 0, 0, \ldots, 0\}.$$

Тогда $X^a X = (UD) I_r (UD)^a$, где UD — невырожденная матрица. Введем обозначение $S := (UD)^a$. В этом случае $X^a X = S^a I_r S$ и $(S^a)^{-1} X^a X S^{-1} = I_r$,

или $(XS^{-1})^a XS^{-1} = I_r$. Таким образом, матрица $XS^{-1} = \|y_1\, y_2\, \ldots\, y_m\|$, где $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — требуемая система векторов. Отсюда

$$[x_1\, x_2 \ldots x_m] = [y_1\, y_2 \ldots y_m]S,$$

где $S = \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_m^T \end{bmatrix}$, $s_t^T = (s_{t1}, s_{t2}, \ldots, s_{tk})$.

Пусть $a = x_1\alpha_1 + \ldots + x_m\alpha_m, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^T$. Тогда

$$a = y_1(s_1^T\alpha) + y_2(s_2^T\alpha) + \ldots + y_k(s_k^T\alpha),$$

откуда

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{H}}\langle y_1, \ldots, y_m\rangle \subset \mathrm{Lin}_{\mathbb{H}}\langle x_1, \ldots, x_m\rangle.$$

Обратное включение доказывается аналогично. □

Выводы

В работе приведено обоснование использования неэрмитовой инволюции в алгебре матриц над телом кватернионов. Получен аналог разложения Такаги для класса a–самосопряженных матриц. В качестве приложения рассмотрены свойства конечномерного кватернионного модуля с внутренним произведением.

Список литературы

[1] Хорн З., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – Москва: Мир, 1989. – 655 С.

[2] De Leo S. *Hypercomplex Group Theory.* – arXiv:physics/9703033 v1 31 Mar.1997 – P.1-18.

[3] De Leo S., Scolarici G., Solombino L. *Quaternionic eigenvalue problem* // J.Math. Phys. Bd.43. - 2002. - Vol.11. - P.5815-5829.

[4] Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А. *Кватернионы в релятивистской физике.* – М.: Едиториал УРСС. - 2003. - 200 с.

Карпенко І.І. Неєрмітово самоспряжені матриці над тілом кватерніонів

У роботі розглядається клас матриць, самоспряжених щодо неєрмітової інволюції в дійсній алгебрі кватерніонов (a–самоспряжені матриці). Для цього класу матриць отриманий аналог розкладу Такаги. Як застосування доведено теорему про подібність довільної кватерніонної матриці деякій a–самоспряженій матриці та досліджені властивості скінченновимірного кватерніонного модуля із внутрішнім добутком.

Ключові слова: кватерніон, алгебри із інволюцією, розклад Такаги, внутрішній добуток.

Karpenko I.I. Non-Hermitian self-adjoint quaternionic matrixes

In this paper there considered matrices which are self-adjoint concerning the non-Hermitian involution in the real algebra of quaternions (a– self-adjoint matrices). Analog of Takagi decomposition for this matrix class is received. As applications the theorem about similarity of any quaternionic matrix and some a–self-adjoint matrix is proved and properties of the finite-dimensional quaternionic module with the inner product are investigated.

Keywords: quaternion, involution algebra, Takagi decomposition, inner product.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 92–96.

УДК 517. 432

Ю. Л. Кудряшов

σ–СИММЕТРИЧЕСКАЯ ДИЛАТАЦИЯ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

В статье производится явное построение σ–симметрической дилатации узла неограниченного оператора с непустым множеством регулярных точек.

Ключевые слова: неограниченный оператор, узел, дилатация.

Введение

Множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 обозначим $L(H_1,\ H_2)$.

Определение 1. Совокупность гильбертовых пространств H, E и операторов $A \in L(H,\ H)$, $\varphi \in L(H,\ E)$, $\sigma \in L(E,\ E)$, $\sigma = \sigma^*$ называется локальным узлом [1, 2]

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, \sigma), \ \text{ если } \quad A - A^* = i\varphi^*\sigma\varphi.$$

Оператор A называется основным оператором узла Δ, φ —каналовым, σ — метрическим оператором узла Δ. Пространство H — внутренним, E — внешним пространствами узла Δ.

Определение 2. Оператор B, действующий в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$ называется дилатацией оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H, если

$$H \subset \widetilde{H} \quad P_H(B - \lambda I)^{-1}\big|_H = (A - \lambda I)^{-1}$$

при любых λ, принадлежащей некоторой области $\operatorname{Im}\lambda < -a \quad (a > 0)$ [1, 4].

Определение 3. Оператор B называется дилатацией узла Δ, если оператор B является дилатацией основного оператора узла при любых φ и σ.

В случае ограниченного диссипативного оператора A в [2] строится самосопряженная дилатация узла Δ при $\sigma = E$.

Частный случай, когда $\varphi = \varphi^* = \left(\frac{A-A^*}{i}\right)^{\frac{1}{2}}$ был построен в [3].

В данной работе введенные выше понятия обобщаются на случай неограниченных операторов.

1. Предварительные сведения

Пусть оператор A действует в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $\overline{\mathfrak{D}(A)} = H$ и непустым множеством регулярных точек $\lambda_0 \in \rho(A)$ и $\operatorname{Im}\lambda_0 < 0$.

Рассмотрим оператор

$$B_{\lambda_0} = iR_{\lambda_0} - iR^*_{\lambda_0} + 2\operatorname{Im}\lambda_0 R^*_{\lambda_0} R_{\lambda_0}, \quad \text{где } R_{\lambda_0} = (A - \lambda_0 I)^{-1}.$$

Оператор B_{λ_0} назовем дефектным оператором оператора A, $B_{\lambda_0} \in L(H,\ H)$.

$$(B_{\lambda_0} f,\ f) = i(R_{\lambda_0} f,\ f) - i(R^*_{\lambda_0} f,\ f) + 2\operatorname{Im}\lambda_0 \|R_{\lambda_0} f\|^2,$$

пусть $g = R_{\lambda_0} f$, тогда

$$(B_{\lambda_0} f,\ f) = 2\operatorname{Im}(Ag,\ g) \tag{1}$$

Из (1) следует, что если оператор A диссипативный, то $B_{\lambda_0} \geq 0$.

Определение 4. Совокупность гильбертовых пространств H, E и оператора A (не обязательно ограниченного, действующего в H), $\psi \in L(H,\ E)$, $\sigma \in L(E,\ E)$, $\sigma = \sigma^*$ называется операторным узлом

$$\theta = (A, H, \psi, E, \sigma), \ \text{ если } \ B_{\lambda_0} = \psi^* \sigma \psi.$$

Название операторов и пространств, как и в случае узла Δ.

Любой оператор A с $\rho(A) \neq \emptyset$, $\lambda_0 \in \rho(A)$ может быть включен в узел, причем неоднозначно.

Можно положить

$$E = \overline{B_{\lambda_0} H}, \quad \psi = P_E, \quad \sigma = B_{\lambda_0}\big|_E,$$

P_E — ортопроектор из H на E.

Или

$$E = \overline{B_{\lambda_0} H}, \quad \psi = |B_{\lambda_0}|^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \mathcal{J} = \operatorname{sign} B_{\lambda_0}. \tag{2}$$

Определение 5. Оператор B называется дилатацией операторного узла θ, если B является дилатацией основного оператора A узла θ при любых операторах ψ и σ из узла θ.

2. Построение σ — симметрической дилатации

Рассмотрим линейное многообразие вектор — функций $V(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве E при $t \in [0;\ +\infty)$. Обозначим через $L_2(0,\ \infty;\ E)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания данного линейного многообразия вектор — функций по норме

$$\|V\|^2_{L^2(0,\ \infty;\ E)} = \int\limits_0^\infty \|V(t)\|^2_E dt < \infty.$$

Введем пространство $\widetilde{H} = H \oplus L_2(0,\ \infty;\ E)$, $\tilde{h} = \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix}$, $\tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ h_1 \end{pmatrix}$ со скалярным произведением

$$(\tilde{h},\ \tilde{h}_1)_{\widetilde{H}} = (V(t),\ V_1(t))_{L^2(0,\ \infty;\ E)} + (h,\ h_1)_H.$$

С помощью метрического оператора σ узла θ введем в пространстве $\widetilde{H}$ σ — метрику следующим равенством:

$$\sigma \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma} V \\ h \end{pmatrix},$$

$\tilde{\sigma} V = \sigma V(t)$ при каждом $t \in [0;\ \infty)$.

Обозначим $[f,\ g]_{\widetilde{H}} = (\sigma f,\ g)_{\widetilde{H}}$.

Определение 6. Оператор B, действующий в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$ называется σ — симметрическим, если для любых $\{f,\ g\} \subset \mathfrak{D}(B)$

$$[Bf,\ g]_{\widetilde{H}} = [f,\ Bg]_{\widetilde{H}} \ \text{ и } \ \overline{\mathfrak{D}(B)} = \widetilde{H}$$

в обычной метрике пространства $\widetilde{H}$.

Построим в пространстве $\widetilde{H}$ оператор S следующим образом: вектор $\tilde{h} = \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{V(t),\ \dfrac{dV(t)}{dt}\right\} \subset L_2(0,\ \infty;\ E)$; 2) $h \in \mathfrak{D}(A)$; 3) $V(0) = i\psi(A - \lambda_0 I)h$.

Оператор S определяется так

$$S\tilde{h} = S \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\dfrac{dV(t)}{dt} \\ Ah \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Оператор S является σ–симметрической дилатацией узла θ.*

Доказательство. Из (1) следует, что

$$(\sigma\psi(A - \lambda_0 I)h,\ \psi(A - \lambda_0 I)h) = 2\,\mathrm{Im}\,(Ah,\ h) \quad \text{для любого} \quad h \in \mathfrak{D}(A). \tag{3}$$

.

Пусть $\tilde{h} \in \mathfrak{D}(S)$, тогда

$$[S\tilde{h},\ \tilde{h}]_{\widetilde{H}} - [\tilde{h},\ S\tilde{h}]_{\widetilde{H}} = \left[i\frac{dV(t)}{dt},\ V\right]_{\widetilde{H}} - \left[V,\ i\frac{dV(t)}{dt}\right]_{\widetilde{H}} + 2i\,\mathrm{Im}\,(Ah,\ h)_H =$$
$$= -i(\sigma V(0),\ V(0))_H + 2i\,\mathrm{Im}\,(Ah,\ h)_H = 0.$$

Последнее равенство получилось, используя (3) и условие 3 на $\mathfrak{D}(S)$.

Используя, что $\overline{\mathfrak{D}(A)} = H$, легко показать, что $\overline{\mathfrak{D}(S)} = \widetilde{H}$.

Теперь докажем, что S — дилатация оператора A. Обозначим $\mathcal{P}_0 = i\dfrac{dV(t)}{dt}\Big|_M$, $M = \big\{\{V(t),\ V'(t)\} \subset L_2(0,\ \infty;\ E)\big|V(0) = 0\big\}$. Так как $\mathrm{Im}\,\lambda_0 < -a, \quad a > 0$, то $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(\mathcal{P}_0)$. Построим оператор R и докажем, что $R = (S - \lambda I)^{-1}$ для λ из некоторой окрестности точки λ_0, $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$.

$$R\tilde{h} = R\begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}V(t) + ie^{-i\lambda t}\psi(I + \mu R_\lambda)h \\ R_\lambda h \end{pmatrix},$$

где $\mu = \lambda - \lambda_0$, $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$,

$$(\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}V(x) = \frac{1}{i}\int\limits_0^x e^{-i\lambda(x-t)}V(t)dt.$$

Вектор $\tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ h_1 \end{pmatrix} = R\tilde{h} \in \mathfrak{D}(S)$, т. к. $V_1(t) \in W_2'(0,\ \infty;\ E)$ и $V_1(0) = [(\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}V(t) + ie^{-i\lambda t}\psi(I + \mu R_\lambda)h]_{t=0} = i\psi(I + \mu R_\lambda)h$, т. к. $h_1 = R_\lambda h$, а $h_1(0) = i\psi(A - \lambda_0 I)h_1$.

Таким образом, все три условия на $\mathfrak{D}(S)$ для вектора $R\tilde{h}$ выполняются.

Пусть $\tilde{h} \in \mathfrak{D}(S)$, тогда $R(S - \lambda I)\tilde{h} = \begin{pmatrix} \overline{V}(t) \\ h_0 \end{pmatrix}$, где

$$\overline{V}(t) = (\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}\left(\frac{idV(t)}{dt} - \lambda V\right) + ie^{-i\lambda t}\psi(I + \mu R_\lambda)(A - \lambda I)h =$$
$$= \overline{V}(t) + ie^{-i\lambda t}\psi(A - \lambda_0 I)h = V(t).$$

Аналогично, получаем

$$(S - \lambda I)R\tilde{h} = \begin{pmatrix} \overline{V}(t) \\ h_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\overline{V}(t) = (\mathcal{P} - \lambda I)(\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}V(t) + ie^{-i\lambda t}\psi(I + \mu R_\lambda)h =$$
$$= (\mathcal{P} - \lambda I)(\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}V(t) = V(t), \quad \mathcal{P}V = i\frac{dV}{dt},$$

т. к.

$$(\mathcal{P} - \lambda I)(ie^{-i\lambda t}\psi(I + \mu R_\lambda)h) =$$

$$= -\psi(I+\mu R_\lambda)h\frac{d(e^{-i\lambda t})}{dt} - i\lambda e^{-i\lambda t}\psi(I+\mu R_\lambda)h = 0.$$

Из выражения для $R=(S-\lambda I)^{-1}$ следует, что S — дилатация оператора A. $\square$

Выводы

Заметим, что в случае неограниченного диссипативного оператора A с плотной областью определения и $-i\in\rho(A)$ ($\lambda_0=-i$) симметрическая дилатация была получена в [4, 5], когда $\psi=\sqrt{B_{-i}}$, $\sigma=E$, а $\mathcal{J}$–симметрическая дилатация линейного оператора A с $-i\in\rho(A)$ была построена в [6], когда ψ и σ определяются равенствами (2).

Построение дилатации конкретного оператора связано с вычислением $\sqrt{B_{-i}}$, что довольно сложно. Эта задача была решена в [7] для одного класса операторов, когда $\dim\overline{B_{-i}H}=1$. В общем случае проще подобрать ψ и σ из операторного узла.

Список литературы

[1] Лившиц М. С., Янцевич А. А. *Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах.* — Харьков: Изд. Харьк. ун-та, 1971. — 160 с.

[2] Золотарев В. А. *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов.* — Харьков: ХНУ, 2003. – 342с.

[3] Павлов Б. С. *Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям* // Мат. сб. — 1977. — Т. 102 (144), №4. — С. 511 — 536.

[4] Кужель А. В., Кудряшов Ю. Л. *Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов* // ДАН СССР. — 1980. — Т. 253 №4. — С. 812 — 815.

[5] Кудряшов Ю. Л. *Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов*// Сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил. — 1982. — вып. 37. — С. 51 — 54.

[6] Кудряшов Ю. Л. *J — эрмитовы и $\mathcal{J}$ — самосопряженные дилатации линейных операторов* // Динам. системы. — 1984. — вып. 3. — С. 94 — 98.

[7] Кудряшов Ю. Л. *Спектральное представление самосопряженной дилатации одного класса операторов* // Динам. системы. — 2007. — вып. 23. — С. 95 — 98.

σ–симетрична дилатація операторного вузла необмеженого оператора

У статті проводиться явна побудова σ–симетричної дилатації вузла необмеженого оператора з непорожньою множиною регулярних точок.

Ключові слова: необмежений оператор, вузол, дилатація.

σ–symmetrical dilation of operator knot of unbounded operator

In the paper σ–symmetrical dilation of knot of unbounded operator with unempty set of regular points is constructed explicitly.

Keywords: unbounded operator, knot, dilation.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 97–112.

УДК 517.98

М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн

ПОРЯДКОВАЯ СХОДИМОСТЬ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА

В настоящей работе приводятся необходимые и достаточные условия порядковой сходимости чезаровских средних для абсолютных сжатий в пространствах Орлича. Мы рассматриваем случай пространства с бесконечной мерой. Рассмотрение порядковой сходимости приводит как к доминантной, так и к индивидуальной эргодическим теоремам. Классические доминантная и индивидуальная эргодические теоремы в пространствах $\mathbf{L}_p$ и классах Зигмунда $\mathbf{L}\log^r\mathbf{L}$ также получаются как частные случаи. При исследовании используется техника симметричных пространств измеримых функций на пространстве с бесконечной мерой и эргодической теории.

Ключевые слова: Пространства Орлича, классы Зигмунда, эргодические теоремы, порядковая сходимость

1. Введение

Одним из направлений исследования общей эргодической теории является изучение асимптотического поведения и условий сходимости чезаровских средних для различных классов операторов в банаховых пространствах. Важнейшие из полученных результатов были названы эргодическими теоремами (см. например, [1], [7] - [9], [13] - [17]). К числу таких теорем относится доминантная эргодическая теорема, которая рассматривалась Г.Харди и Д.Литлвудом [6] для трансляций, Н.Винером [16] для сохраняющих меру преобразований, Н.Данфордом и Д.Шварцем [3] для положительных сжатий. Индивидуальная эргодическая теорема для сохраняющих меру преобразований была получена Биркгоффом [1], дальнейшее развитие этой теории можно найти в [10].

В работах [2], [21] - [23] рассматривались аналоги доминантной эргодической теоремы для последовательностей абсолютных сжатий в симметричных пространствах измеримых функций на отрезке $[0,1]$ и на полуоси $[0,+\infty)$.

В данной статье приводятся необходимые и достаточные условия порядковой сходимости чезаровских средних для абсолютных сжатий в пространствах Орлича измеримых функций на пространствах с бесконечной мерой. Из этих результатов следуют, в частности, классические доминантная и индивидуальная эргодические теоремы для пространств $\mathbf{L}_p$ и классов Зигмунда $\mathcal{Z}_r = \mathbf{L}\log^r \mathbf{L}$.

Мы будем использовать обозначения и терминологию из [2], [4], [10], [12], [19].

2. Предварительные сведения

Пусть $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ пространство с бесконечной σ-конечной неатомической мерой, $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$ пространство всех μ-измеримых почти всюду конечных функций f на $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{L}_p = \mathbf{L}_p(\mathbf{\Omega}, \mu)$, $1 \le p \le +\infty$.

В случае, когда $\mathbf{\Omega} = \mathbf{R}_+ = [0,\infty)$ и $\mu = \mathbf{m}$ — мера Лебега на $[0,+\infty)$, будем писать: $\mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$.

Линейный оператор $T : \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \to \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ называется *абсолютным сжатием или* $(\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_\infty)$*-сжатием*, если T является сжатием как в $\mathbf{L}_1$ так и в $\mathbf{L}_\infty$. Обозначим через $\mathcal{PAC}$ множество всех абсолютных сжатий.

Для любых $T \in \mathcal{PAC}$ и $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ рассмотрим чезаровские средние

$$A_{n,T} f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$$

и соответствующую доминантную функцию

$$B_T f = \sup_{n \ge 1} A_{n,T} |f|.$$

Заметим, что $B_T f$ почти всюду конечна, то есть $B_T f \in \mathbf{L}_0$ для всех $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$ (см. [3]).

Напомним, что банахово пространство $(\mathbf{E}, \|\cdot\|_{\mathbf{E}})$ измеримых функций из $\mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$ называется *перестановочно инвариантным (п.и.) или симметричным*, если выполнены следующие два условия:

(i). Если $f \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{E}$ и $|f(t)| \leqslant |g(t)|$ почти всюду на $\mathbf{\Omega}$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} \leqslant \|g\|_{\mathbf{E}}$;

(ii). Если $f \in \mathbf{L}_0$, $g \in \mathbf{E}$ и $f^*(t) = g^*(t)$, то $f \in \mathbf{E}$ и $\|f\|_{\mathbf{E}} = \|g\|_{\mathbf{E}}$.

Здесь f^* — невозрастающая, непрерывная справа перестановка функции $|f|$. Отметим, что невозрастающая перестановка f^* может быть определена формулой:

$$f^*(x) := \inf\{y \in [0,+\infty) \colon \mathbf{n}_f(y) \le x\}, \quad x \in [0,\infty),$$

где $\mathbf{n}_f$ — функция распределения $|f|$:

$$\mathbf{n}_f(y) = \mu\{u \in \mathbf{\Omega} \colon |f(u)| > y\}.$$

Функции f и g называются *равноизмеримыми* ([19]), если $n_{|f|}(y) = n_{|g|}(y)$, то есть $f^* = g^*$.

Если $(\mathbf{\Omega}, \mu) = (\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, то п.и. пространство $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ называется *стандартным*. Для п.и. пространства $\mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu)$ на произвольном пространстве с мерой $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ существует единственное стандартное п.и. пространство $\mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ на $(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ (называемое стандартной реализацией $\mathbf{E}$) такое, что

$$f \in \mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad f^* \in \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m}).$$

Здесь и далее мы не предполагаем, что пространство с мерой $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ сепарабельно и изоморфно стандартному пространству с мерой $(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$.

Известно, что для каждого п.и. пространства $\mathbf{E}$ имеет место вложение

$$\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{E} \subseteq \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{L}_0.$$

Мы будем использовать максимальную функцию Харди-Литлвуда, которая определяется для $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu)$ следующим образом:

$$f^{**}(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f^*(s)\, ds, \quad x \in (0, +\infty).$$

Известно, что $f^{**}(t)$ — непрерывная, невозрастающая на $(0, +\infty)$ функция, $f^*(t) \leqslant f^{**}(t)$, для $u > f^*(\infty)$ имеет место равенство $f^{**}(\mu\{f^{**} > u\}) = u$ и $f^{**}(\infty) = f^*(\infty)$.

Важную роль в исследовании порядковой сходимости играет пространство $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$, определяемое следующим образом:

$$\mathcal{R}_0 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon f^*(+\infty) := \lim_{x \to +\infty} f^*(x) = 0\}.$$

Это пространство является перестановочно инвариантным и для него верны следующие равенства, каждое из которых можно рассматривать как определение:

$$\mathcal{R}_0 = \{f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty \colon \mathbf{n}_f(y) < +\infty \text{ , для всех } y > 0\};$$

$$\mathcal{R}_0 = cl_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty);$$

$$\mathcal{R}_0 = cl_{\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty}(\mathbf{L}_1),$$

где через $cl_{\mathbf{B}}\mathbf{A}$ мы обозначаем замыкание банахова пространства $\mathbf{A}$ в банаховом пространстве $\mathbf{B}$.

Пусть для любой функции $f \in \mathbf{L}_0 = \mathbf{L}_0(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$:

$$D_t f(x) := f(x/t) \ , \ 0 < x, t < \infty$$

Тогда $\{D_t \, , \, 0 < t < \infty\}$ — группа ограниченных линейных операторов $D_t \colon \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ на стандартном п.и. пространстве $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, соответствующем $\mathbf{E}(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Функция $d_{\mathbf{E}}(t) := \|D_t\|_{\mathbf{E}\to\mathbf{E}}$ является полумультипликативной на $(0,\infty)$, то есть

$$d_{\mathbf{E}}(s+t) \le d_{\mathbf{E}}(s)\, d_{\mathbf{E}}(t)$$

для всех s, t. Поэтому существуют пределы

$$p_{\mathbf{E}} := \lim_{t\to\infty} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)} = \sup_{t>1} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)} \quad , \quad q_{\mathbf{E}} := \lim_{t\to 0} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)} = \inf_{0<t<1} \frac{\log t}{\log d_{\mathbf{E}}(t)} \, ,$$

которые называются *нижним и верхним индексами Бойда* п.и. пространства $\mathbf{E}$ (см. [19], [12]).

В дальнейшем нам понадобятся следующие результаты:

Предложение 1. *([21]) Если $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, то для $x > f^{**}(+\infty)$ имеет место неравенство:*

$$\frac{1}{x} \int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\, d\mathbf{m} \le \mathbf{m}\{f^{**} > x\}. \tag{1}$$

Предложение 2. *([21]) Если $f \in \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty$, то для $C > 1$ и $x > f^{**}(+\infty)$ имеет место неравенство:*

$$\mathbf{m}\{f^{**} \ge Cx\} \le \frac{1}{(C-1)x} \int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\, d\mathbf{m}. \tag{2}$$

Теорема 1. *([4]) Пусть оператор $T \in \mathcal{PAC}$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{R}_0$ последовательность чезаровских средних*

$$A_{n,T} f = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f$$

сходится почти всюду на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Пусть θ — сохраняющее меру преобразование пространства $(\mathbf{\Omega}, \mu)$ и $T = T_\theta \in \mathcal{PAC}$ такой оператор, что

$$T_\theta f = f \circ \theta.$$

Так как $\mu(\mathbf{\Omega}) = \infty$, то из [10], §4.3 следует:

Предложение 3. *Для любого эргодического консервативного, сохраняющего меру преобразования θ существует $f \in \mathbf{L}_\infty(\mathbf{\Omega}, \mu)$ такая, что последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T_\theta}\}$ не сходится почти всюду на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$.*

3. Пространства Орлича

Функция $\Phi:\ [0,\infty)\to[0,\infty)$ называется *функцией Орлича*, если Φ — непрерывна слева, неубывающая, выпуклая функция, для которой $\Phi(0)=0$. Предполагается также, что функция Орлича Φ — нетривиальна, т.е. существуют такие $x_1,x_2\in(0,+\infty)$, что $\Phi(x_1)>0$ и $\Phi(x_2)<+\infty$.

Левая производная $\Phi'(u)$ функции $\Phi(u)$ существует почти всюду, непрерывна слева и имеет место следующее представление:

$$\Phi(x)=\int\limits_0^x \Phi'(u)\,du,\quad 0\leqslant x<\infty.$$

Предполагается, что $\Phi'(x)=+\infty$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x)=+\infty$.

Сопряженная функция Орлича Ψ определяется при помощи ее производной Ψ', которая является непрерывной слева обратной к функции Φ', то есть

$$\Psi(y)=\int\limits_0^y \Psi'(v)\,dv,\quad 0\leqslant y<\infty.$$

Пространством Орлича называется множество

$$\mathbf{L}_\Phi=\mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega},\mu)=\left\{f\in\mathbf{L}_0:\ \int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right)\,d\mu<\infty\ \text{ для некоторого }\ a>0\right\}$$

с нормой

$$\|f\|_\Phi=\|f\|_{\mathbf{L}_\Phi}=\inf\left\{a>0:\ \int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right)\,d\mu\leqslant 1\right\},\ f\in\mathbf{L}_0,$$

где предполагается, что $\inf\emptyset:=\infty$.

Пространство Орлича $(\mathbf{L}_\Phi,\|\cdot\|_{\mathbf{L}_\Phi})$ является перестановочно инвариантным и следовательно,

$$\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty\subset\mathbf{L}_\Phi\subset\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty.$$

В свою очередь, пространства $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_\infty$ и $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty$, $\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty$, а также классы Зигмунда $\mathbf{L}\log^r\mathbf{L}$, являются пространствами Орлича (см. [4], [14], [15], [20]).

Ядром пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi=\mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega},\mu)$, называется

$$\mathbf{H}_\Phi=\mathbf{H}_\Phi(\mathbf{\Omega},\mu):=\left\{f\in\mathbf{L}_0\colon\ \int\limits_\Omega \Phi\left(\frac{|f|}{a}\right)\,d\mu<\infty\ \text{ для всех }\ a>0\right\}.$$

$\mathbf{H}_\Phi$ является замкнутым подпространством пространства $\mathbf{L}_\Phi$. Если $\Phi(x)<+\infty$ для всех $x>0$, то ядро $\mathbf{H}_\Phi$ совпадает с замыканием $cl_{\mathbf{L}_\Phi}(\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty)$ пересечения $\mathbf{L}_1\cap\mathbf{L}_\infty$ в $\mathbf{L}_\Phi$. Если $\Phi(x)=+\infty$ для некоторого $x>0$, то $\mathbf{H}_\Phi=\{0\}$.

Отметим, что пространство Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ является интерполяционным между пространствами банаховой пары $\mathbf{L}_1$ и $\mathbf{L}_\infty$. Поэтому для любого $T \in \mathcal{PAC}$

$$T(\mathbf{L}_\Phi) \subseteq \mathbf{L}_\Phi,$$

и сужение $T|_{\mathbf{L}_\Phi} \colon \mathbf{L}_\Phi \to \mathbf{L}_\Phi$ является сжатием:

$$\|Tf\|_{\mathbf{L}_\Phi} \leq \|f\|_{\mathbf{L}_\Phi}.$$

Как и всякое перестановочно инвариантное пространство, пространство Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ является банаховой решеткой и подрешеткой решетки $\mathbf{L}_0$ относительно обычного частичного порядка на функциях.

Пространство $\mathbf{L}_0$ также является порядково σ-полной, и вполне порядково полной решеткой, поскольку мера μ σ-конечна. Это означает, что каждое порядково ограниченное подмножество $F \subset \mathbf{L}_0$ имеет наименьшую верхнюю грань $\bigvee F \in \mathbf{L}_0$ и наибольшую нижнюю грань $\bigwedge F \in \mathbf{L}_0$ (см. [12], [18]). Отметим, что

$$\bigvee F = ess\ \sup\ F, \quad \bigwedge F = ess\ \inf\ F.$$

Напомним еще, что последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ элементов частично упорядоченного множества F называется (o)-*сходящейся или порядково сходящейся* к $f \in F$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f$), если существуют такие $g_n \in F$ и $h_n \in F$, что

$$g_n \uparrow f, \quad h_n \downarrow f, \quad f = \bigvee_{n\geq 1} g_n = \bigwedge_{n\geq 1} h_n \in F.$$

Если F — σ-полная решетка, то последовательность $f_n \xrightarrow{(o)} f \in F$ тогда и только тогда, когда множество $\{f_n\,,\, n \geq 1\}$ порядково ограничено в F и

$$f = \bigvee_{n\geq 1} \bigwedge_{m\geq n} f_m = \bigwedge_{n\geq 1} \bigvee_{m\geq n} f_m \in F.$$

Таким образом, для каждого пространства Орлича $\mathbf{L}_\Phi \subseteq \mathbf{L}_0(\mathbf{\Omega}, \mu)$ имеем, что:

(i). $\mathbf{L}_\Phi$ является порядково полной подрешеткой порядково полной решетки $\mathbf{L}_0$;

(ii). Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (o)-сходится в $\mathbf{L}_\Phi$ ($f_n \xrightarrow{(o)} f \in \mathbf{L}_\Phi$) тогда и только тогда, когда

(1) $\{f_n\,,\, n \geq 1\}$ порядково ограничено в $\mathbf{L}_\Phi$ (то есть $|f_n| \leq g$ для всех n и некоторого $g \in \mathbf{L}_\Phi$), и

(2) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ (o)-сходится в $\mathbf{L}_0$ (то есть $f_n \to f$ почти всюду на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$).

Далее будут рассмотрены две взаимосвязанные задачи:

Проблема 1. Пусть $T \in \mathcal{PAC}$. Описать подмножество

$$\mathbf{L}_\Phi^T := \{f \in \mathbf{L}_\Phi \colon \{A_{n,T} f\}_{n=1}^\infty \ (o)\text{-сходится в } \mathbf{L}_\Phi\ \}.$$

Проблема 2. Описать подкласс всех пространств Орлича, таких что $\mathbf{L}_\Phi^T = \mathbf{L}_\Phi$ для всех $T \in \mathcal{PAC}$, то есть, для которых последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T}f\}_{n=1}^\infty$ (o)-сходится в $\mathbf{L}_\Phi$ для всех $f \in \mathbf{L}_\Phi$ и $T \in \mathcal{PAC}$.

Отметим, что последовательность $\{A_{n,T}f\}_{n\geq 1}$ чезаровских средних

$$A_{n,T}f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k f$$

(o)-сходится в $\mathbf{L}_\Phi$ тогда и только тогда, когда соответствующая доминантная функция $B_T f = \sup\limits_{n\geq 1} A_{n,T}|f|$ принадлежит $\mathbf{L}_\Phi$, и последовательность $\{A_{n,T}f\}_{n\geq 1}$ сходится почти всюду на $(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Это означает, что приведенная постановка задачи включает как доминантную эргодическую теорему, так и индивидуальную эргодическую теорему в случае классических $\mathbf{L}_p$ пространств, $1 \leq p < +\infty$ и классов Зигмунда $\mathcal{Z}_r = \mathbf{L}\log^r \mathbf{L}$.

Определение 1. Будем говорить, что пространство Орлича $\mathbf{L}_\Phi$

1) удовлетворяет *доминантной эргодической теореме* ($\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{DET}$), если последовательность чезаровских средних $A_{n,T}f$ является порядково ограниченной в $\mathbf{L}_\Phi$, то есть $B_T f \in \mathbf{L}_\Phi$ для любой функции $f \in \mathbf{L}_\Phi$;

2) удовлетворяет *индивидуальной эргодической теореме* ($\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{IET}$), если последовательность чезаровских средних $A_{n,T}f$ является порядково сходящейся в $\mathbf{L}_0$, т.е. сходящейся почти всюду на $\mathbf{\Omega}$, для любой функции $f \in \mathbf{L}_\Phi$;

3) удовлетворяет *порядковой эргодической теореме* ($\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{OET}$), если

$$\mathbf{L}_\Phi^T = \mathbf{L}_\Phi$$

для всех $T \in \mathcal{PAC}$, т.е., для любого $f \in \mathbf{L}_\Phi$ и $T \in \mathcal{PAC}$ последовательность чезаровских средних $\{A_{n,T}f\}_{n\geq 1}$ порядково сходится в $\mathbf{L}_\Phi$.

Заметим что $\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{OET}$ тогда и только тогда. когда $\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{DET}$ и $\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{IET}$.

Пусть $\mathbf{L}_\Phi = \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega}, \mu)$ пространство Орлича на пространстве с мерой $(\mathbf{\Omega}, \mu)$, и $\mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ — соответствующее ему стандартное пространство Орлича. Если функция $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu)$ и $f^{**} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, то $f \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Обозначим

$$(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = (\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}(\mathbf{\Omega}, \mu) = \{f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu) : \ f^{**} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})\}$$

и положим $\|f\|_{(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}} = \|f^{**}\|_{\mathbf{L}_\Phi}$.

Тогда пространство $((\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}, \|\cdot\|_{(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}})$ является п.и. и $(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}$ — замкнутое подпространство в $\mathbf{L}_\Phi$.

Наша цель — найти подпространство $(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}$. Для этого для любой функции Орлича Φ рассмотрим функцию ξ_Φ:

$$\xi_\Phi(x) = \Psi(\Phi'(x)) \, .$$

Если $y = \Phi'(x) < +\infty$, то в неравенстве Юнга

$$xy \le \Phi(x) + \Psi(y)$$

достигается равенство:

$$xy = \Phi(x) + \Psi(y),$$

и значит

$$\xi_\Phi(x) = x\Phi'(x) - \Phi(x).$$

Во многих важных случаях (но не всегда) ξ_Φ является функцией Орлича.

Возникает вопрос: существует ли функция Орлича Φ_H такая, что $\xi_{\Phi_H} = \Phi$, для данной функции Орлича Φ?

Предложение 4. *Пусть Φ — функция Орлича и*

$$\Phi_H(x) = x \int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x), \tag{3}$$

причем интеграл сходится для некоторого достаточно малого $x > 0$. Тогда функция Φ_H — функция Орлича и $\xi_{\Phi_H} = \Phi$.

Доказательство. Пусть $\delta > 0$ такое, что интеграл $\int\limits_0^\delta \frac{\Phi'(u)}{u}\, du$ сходится.

Ясно, что $\Phi_H(0) = 0$. Пусть $x_0 > 0$. Рассмотрим предел

$$\lim_{x \uparrow x_0} \Phi_H(x) = \lim_{x \uparrow x_0} \left[x \int\limits_0^\delta \frac{\Phi'(u)}{u}\, du + x \int\limits_\delta^x \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x) \right] =$$

$$= x_0 \int\limits_0^\delta \frac{\Phi'(u)}{u}\, du + x_0 \int\limits_\delta^{x_0} \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x_0) =$$

$$= x_0 \int\limits_0^{x_0} \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x_0) = \Phi_H(x_0).$$

Следовательно, функция $\Phi_H(x)$ непрерывна слева на $(0, +\infty)$. Так как

$$\Phi'_H(x) = \left[x \int\limits_0^x \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x) \right]' = \left[x \int\limits_0^\delta \frac{\Phi'(u)}{u}\, du + x \int\limits_\delta^x \frac{\Phi'(u)}{u}\, du - \Phi(x) \right]' =$$

$$= \int_0^{\delta} \frac{\Phi'(u)}{u}\,du + \int_{\delta}^{x} \frac{\Phi'(u)}{u}\,du + x\frac{\Phi'(x)}{x} - \Phi'(x) = \int_0^{x} \frac{\Phi'(u)}{u}\,du \geq 0,$$

то функция $\Phi_H(x)$ неубывает на $[0,+\infty)$. Далее,

$$\Phi''_H(x) = \left[\int_0^{\delta} \frac{\Phi'(u)}{u}\,du + \int_{\delta}^{x} \frac{\Phi'(u)}{u}\,du\right]' = \frac{\Phi'(x)}{x} \geq 0$$

при $x > 0$. Поэтому функция $\Phi_H(x)$ — выпуклая. Осталось заметить, что нетривиальность функции $\Phi_H(x)$ следует из нетривиальности функции $\Phi(x)$.

Так как

$$\Phi'_H(x) = \int_0^{x} \frac{\Phi'(u)}{u}\,du,$$

то

$$\xi_{\Phi_H} = x\Phi'_H(x) - \Phi_H(x) = x\int_0^{x} \frac{\Phi'(u)}{u}\,du - x\int_0^{x} \frac{\Phi'(u)}{u}\,du + \Phi(x) = \Phi(x).$$

□

Предложение 5. *([4]) Если $f \in (\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega},\mu)$ и Φ — функция Орлича, то имеет место равенство:*

$$\int_{\mathbf{\Omega}} \Phi(|f|)d\mu = \int_0^{\infty} \Phi'(x)\mu\{|f| > x\}\,dx. \tag{4}$$

Теорема 2. *Для функций Орлича Φ и Φ_H имеют место равенства:*

$$(\mathbf{L}_\Phi)_{\mathbf{H}} = \mathbf{L}_{\Phi_H} \quad и \quad (\mathbf{H}_\Phi)_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{\Phi_H}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию Орлича

$$\Phi_1(x) = \Phi_H(x) + \Phi(x) = x\int_0^{x} \frac{\Phi'(u)}{u}\,du.$$

Ясно, что $\Phi(x) \leq \Phi_1(x)$ для любого $x > 0$. Поэтому,

$$\mathbf{L}_{\Phi_1} \subset \mathbf{L}_\Phi$$

Покажем, что

$$(\mathbf{L}_\Phi)_{\mathbf{H}} = \mathbf{L}_{\Phi_1}$$

Пусть $f \in (\mathbf{L}_\Phi)_{\mathbf{H}}$. Тогда $f^{**} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+,\mathbf{m})$ и поэтому

$$\int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{f^{**}}{c}\right)d\mathbf{m} < \infty.$$

для некоторого $c > 0$. Без ограничения общности, в дальнейшем полагаем, что $c = 1$, т.е.

$$\int_0^\infty \Phi(f^{**})d\mathbf{m} = \int_0^\infty \mathbf{m}[\Phi(f^{**}) > x]dx < \infty.$$

Поэтому, в силу равенства (4)

$$\int_0^\infty \Phi(f^{**})d\mathbf{m} = \int_0^\infty \Phi'(x)\mathbf{m}\{f^{**} > x\}\,dx$$

и неравенства (1)

$$\frac{1}{x}\int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\,d\mathbf{m} \le \mathbf{m}\{f^{**} > x\}, \quad \text{если} \quad x > f^{**}(+\infty)$$

получим:

$$\int_0^\infty \Phi(f^{**})d\mathbf{m} = \int_0^\infty \Phi'(x)\mathbf{m}\{f^{**} > x\}\,dx \ge \int_0^\infty \Phi'(x)\left(\frac{1}{x}\int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\,d\mathbf{m}\right)dx =$$

$$= \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x}\left(\int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\,d\mathbf{m}\right)dx = \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x}\left[x\cdot\mathbf{m}\{f^* > x\} + \int_x^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\,dt\right]dx =$$

$$= \int_0^\infty \Phi'(x)\mathbf{m}\{f^* > x\}\,dx + \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x}\left[\int_x^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\,dt\right]dx =$$

$$= \int_0^\infty \Phi(f^*)d\mathbf{m} + \int_0^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\left[\int_0^t \frac{\Phi'(x)}{x}\,dx\right]dt =$$

$$= \int_0^\infty \Phi(f^*)\,d\mathbf{m} + \int_0^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}[\Phi_1'(t) - \Phi'(t)]\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \Phi(f^*)\,d\mathbf{m} + \int_0^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\Phi_1'(t)\,dt - \int_0^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\Phi'(t)\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \mathbf{m}\{f^* > t\}\Phi_1'(t)\,dt = \int_0^\infty \Phi_1(f^*)d\mathbf{m}.$$

Следовательно

$$\int_0^\infty \Phi_1(f^*)d\mathbf{m} \le \int_0^\infty \Phi(f^{**})d\mathbf{m} < \infty,$$

откуда $f^* \in \mathbf{L}_{\Phi_1}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ и следовательно, $f \in \mathbf{L}_{\Phi_1}(\mathbf{\Omega}, \mu)$.

Таким образом, мы получили вложение

$$(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} \subset \mathbf{L}_{\Phi_1}.$$

Пусть теперь $f \in \mathbf{L}_{\Phi_1}(\mathbf{\Omega}, \mu)$. Тогда $f^* \in \mathbf{L}_{\Phi_1}(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, и поэтому

$$\int_0^\infty \Phi_1(f^*) d\mathbf{m} < \infty.$$

Так как $\Phi \le \Phi_1$, то $\mathbf{L}_{\Phi_1} \subset \mathbf{L}_\Phi$. Отсюда $f^* \in \mathbf{L}_\Phi$ и

$$\int_0^\infty \Phi(f^*) d\mathbf{m} < \infty$$

В силу неравенства (2)

$$\mathbf{m}\{f^{**} \ge Cx\} \le \frac{1}{(C-1)x} \int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\, d\mathbf{m}, \quad C > 1,$$

имеем:

$$\int_0^\infty \Phi_1(f^*) d\mathbf{m} = \int_0^\infty \frac{\Phi'(x)}{x} \left(\int\limits_{\{f^*>x\}} f^*\, d\mathbf{m} \right) dx \ge \int_0^\infty \Phi'(x)(C-1)\mathbf{m}\{f^{**} \ge Cx\}\, dx =$$

$$= (C-1) \int_0^\infty \Phi'(x) \mathbf{m} \left\{ \frac{f^{**}}{C} \ge x \right\} dx = (C-1) \int_0^\infty \Phi\left(\frac{f^{**}}{C}\right)(x)\, dx =$$

$$= (C-1) \int_0^\infty \Phi\left(\frac{f^{**}}{C}\right) d\mathbf{m}.$$

Следовательно

$$\int_0^\infty \Phi\left(\frac{f^{**}}{C}\right) d\mathbf{m} < \infty.$$

Поэтому

$$\frac{f^{**}}{C} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$$

и значит $f^{**} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$. Таким образом $f \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega}, \mu)$. Тогда

$$\mathbf{L}_{\Phi_1} \subset (\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}.$$

Объединяя полученные вложения, имеем

$$(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{L}_{\Phi_1}.$$

Наконец, так как $\Phi_1(x) = \Phi_H(x) + \Phi(x)$, то $\mathbf{L}_{\Phi_1} = \mathbf{L}_{\Phi_H}$. Поэтому

$$(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H} = \mathbf{L}_{\Phi_H}.$$

Равенство $(\mathbf{H}_\Phi)_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_{\Phi_H}$ проверяется аналогично.

□

Предложение 6. *([12])*
Для пространств Орлича $\mathbf{L}_\Phi$ индексы Бойда $p_{\mathbf{L}_\Phi}$ и $q_{\mathbf{L}_\Phi}$ совпадают с индексами растяжения функции Φ:

$$p_{\mathbf{L}_\Phi} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\log M_\Phi(x)}{\log x} = \inf_{x>1} \frac{\log M_\Phi(x)}{\log x},$$

$$q_{\mathbf{L}_\Phi} = \lim_{x\to+0} \frac{\log M_\Phi(x)}{\log x} = \sup_{0<x<1} \frac{\log M_\Phi(x)}{\log x}$$

где

$$M_\Phi(x) = \sup_{0<y<\infty} \frac{\Phi(xy)}{\Phi(y)}.$$

Предложение 7. [19] *Пусть $\mathbf{L}_\Phi$ — пространство Орлича, $d_{\mathbf{L}_\Phi}(t) = \|D_t\|_{\mathbf{L}_\Phi\to\mathbf{L}_\Phi}$ и $p_{\mathbf{L}_\Phi}$ — нижний индекс Бойда. Тогда, следующие условия эквивалентны:*
(i). $(\mathbf{L}_\Phi)_{\mathbf{H}} = \mathbf{L}_\Phi$.
(ii). $p_{\mathbf{L}_\Phi} > 1$.
(iii). $\int\limits_0^1 d_{\mathbf{L}_\Phi}(1/t)\,dt < \infty$.
(iv). $d_{\mathbf{L}_\Phi}(t) = o(t)$ *при* $t \to +\infty$.

Отметим, что это предложение верно для любого перестановочно инвариантного пространства $\mathbf{E}$.

Условие $(\mathbf{L}_\Phi)_{\mathbf{H}} = \mathbf{L}_\Phi$ (которое эквивалентно условию $p_{\mathbf{L}_\Phi} > 1$) легко проверяется с помощью индекса

$$p(\Phi) := \sup\left\{p > 0\colon \inf_{x>0,y>1} \frac{\Phi(xy)}{x^p\Phi(x)} > 0\right\}.$$

Индекс $p(\Phi)$ был изучен в [2] в случае $\mu(\mathbf{\Omega}) < +\infty$, и в [5] при выполнении Δ_2-условия.

Предложение 8. *$p(\Phi) > 1$ тогда и только тогда, когда $p_{\mathbf{L}_\Phi} > 1$*

Для конечной меры это утверждение доказано в [2], для случая бесконечной меры доказательство аналогично.

Из предложений 7 и 8 получаем теорему:

Теорема 3. *Пусть Φ — функция Орлича.*
(i). $(\mathbf{L}_\Phi)_{\mathbf{H}} = \mathbf{L}_\Phi$ *тогда и только тогда, когда* $p(\Phi) > 1$*;*
(ii). Если $p(\Phi) > 1$, *то* $(\mathbf{H}_\Phi)_{\mathbf{H}} = \mathbf{H}_\Phi$.

Теорема 4. *Пусть* $\mathbf{L}_\Phi$ *— пространство Орлича и* $T \in \mathcal{PAC}$.

Тогда из $f \in (\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}$ *следует, что доминантная функция* $B_T f \in \mathbf{L}_\Phi$ *и*

$$\|B_T f\|_{\mathbf{L}_\Phi} \le \|f\|_{(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}}.$$

Доказательство. Пусть $f \in (\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}$. Тогда $f \in (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty)(\mathbf{\Omega}, \mu)$ и $f^{**} \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$. Следовательно,

$$(B_T f)^*(s) \le f^{**}(s)$$

для любого $s \in (0, +\infty)$ (см. [21]).

Поэтому, $(B_T f)^* \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$ и

$$\|(B_T f)^*\|_{\mathbf{L}_\Phi} \le \|f^{**}\|_{\mathbf{L}_\Phi}.$$

Но функции $B_T f$ и $(B_T f)^*$ имеют одинаковые убывающие перестановки:

$$[(B_T f)^*]^* = (B_T f)^*.$$

Поэтому $B_T f \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{\Omega}, \mu)$ и

$$\|B_T f\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \|(B_T f)^*\|_{\mathbf{L}_\Phi} \le \|f^{**}\|_{\mathbf{L}_\Phi} = \|f\|_{(\mathbf{L}_\Phi)_\mathbf{H}}.$$

□

Замечание 2. (*i*). $\mathbf{L}_\Phi \subseteq \mathcal{R}_0$ тогда и только тогда, когда $\Phi(x) > 0$ для любого $x > 0$.

Действительно, пусть $\mathbf{L}_\Phi \subseteq \mathcal{R}_0$. Тогда $f^*(+\infty) = 0$ для каждой функции $f \in \mathbf{L}_\Phi$, и потому $\mathbf{L}_\Phi$ не содержит $\mathbf{1}$, т.е. $\mathbf{L}_\infty \not\subseteq \mathbf{L}_\Phi$.

Обратно, пусть функция $f \in \mathbf{L}_\Phi$ такая, что

$$f^*(+\infty) = \lambda > 0$$

Тогда для функции $g \equiv \lambda$ имеем, что $g^* \le f^* \in \mathbf{L}_\Phi(\mathbf{R}_+, \mathbf{m})$, и потому $g \in \mathbf{L}_\Phi$. Таким образом, $\mathbf{1} \in \mathbf{L}_\Phi$, т.е. $\mathbf{L}_\infty \subseteq \mathbf{L}_\Phi$. Следовательно, $\mathbf{L}_\Phi \subseteq \mathcal{R}_0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{1} \notin \mathbf{L}_\Phi$, т.е. когда $\mathbf{L}_\infty \not\subseteq \mathbf{L}_\Phi$.

В свою очередь, $\mathbf{L}_\Phi$ содержит единицу $\mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда функция Орлича Φ равна нулю в некоторой окрестности нуля.

(*ii*). Так как $\mu(\mathbf{\Omega}) = \infty$, то $\mathbf{H}_\Phi$ никогда не содержит $\mathbf{1}$, и потому $\mathbf{H}_\Phi \subseteq \mathcal{R}_0$.

Из теорем 1, 2 и 4 и предложения 3 получаем:

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{L}_\Phi$ *— пространство Орлича. Тогда для всех* $f \in \mathbf{L}_{\Phi_H} \cap \mathcal{R}_0$ *и* $T \in \mathcal{PAC}$ *последовательность чезаровских средних* $\{A_{n,T} f\}$ *порядково сходится в* $\mathbf{L}_\Phi$.

Обратно, пусть $\mathbf{L}_\Phi$ *— такое пространство Орлича, что* $\mathbf{L}_\Phi \ne \mathbf{L}_{\Phi_H} \cap \mathcal{R}_0$. *Тогда, существуют* $f \in \mathbf{L}_\Phi$ *и* $T \in \mathcal{PAC}$ *такие, что последовательность* $\{A_{n,T} f\}$ *не является порядково сходящейся в* $\mathbf{L}_\Phi$.

Теорема 5 решает проблему 1. Решением проблемы 2 является следующая теорема:

Теорема 6. *Для пространства Орлича* $\mathbf{L}_\Phi$ *выполняется порядковая эргодическая теорема (*$\mathbf{L}_\Phi \in \mathcal{OET}$*) тогда и только тогда, когда* $p(\Phi) > 1$ *и* $\Phi(x) > 0$ *для всех* $x > 0$.

Для ядер пространств Орлича результаты аналогичны.

Теорема 7. (i). *Пусть* $\mathbf{L}_\Phi$ *— пространство Орлича и* $\mathbf{H}_\Phi$ *— его ядро. Тогда для всех* $f \in \mathbf{H}_{\Phi_H}$ *и* $T \in \mathcal{PAC}$ *последовательность чезаровских средних* $\{A_{n,T}f\}$ *порядково сходится в* $\mathbf{H}_\Phi$*;*

(ii). *Для* $\mathbf{H}_\Phi$ *выполняется порядковая эргодическая теорема (*$\mathbf{H}_\Phi \in \mathcal{OET}$*) тогда и только тогда, когда* $p(\Phi) > 1$.

Классы Зигмунда $\mathcal{Z}_r = \mathbf{L}\log^r \mathbf{L}, \quad 0 \le r < +\infty$

Рассмотрим, в частности, важный класс пространств Орлича $\mathcal{Z}_r = \mathcal{Z}_r(\mathbf{\Omega}, \mu)$, которые называют обычно классами Зигмунда. Эти пространства строятся по следующим функциям Орлича:

$$\Phi_r(x) := \begin{cases} 0 & ,0 \le x \le 1 \\ x\log^r x & ,1 < x < \infty \end{cases}, \quad 0 < r < +\infty$$

и

$$\Phi_0(x) := \begin{cases} 0 & ,0 \le x \le 1 \\ x - 1 & ,1 < x < \infty \end{cases}$$

Мы полагаем $\mathcal{Z}_r := \mathbf{L}_{\Phi_r} = \mathbf{L}\log^r \mathbf{L}$, $\mathcal{R}_r := \mathbf{H}_{\Phi_r}$ при $0 < r < \infty$ и

$$\mathcal{Z}_0 = \mathbf{L}_{\Phi_0} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_\infty.$$

Отметим, что ядро $\mathcal{Z}_0$ совпадает с $\mathcal{R}_0$. Прямое вычисление показывает, что $\xi_{\Phi_r} = \Phi_{r-1}$ для любого $r > 1$. В следующем предложении приведены некоторые свойства классов Зигмунда и их ядер.

Предложение 9. *Для всех* $0 \le r < +\infty$*:*

(i). $(\mathcal{Z}_r)_\mathbf{H} = \mathcal{Z}_{r+1}$ *и* $(\mathcal{R}_r)_\mathbf{H} = \mathcal{R}_{r+1}$ *для всех* $0 \le r < +\infty$*;*

(ii). $\mathcal{Z}_r \cap \mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_r = cl_{\mathcal{Z}_r}(\mathbf{L}_1 \cap \mathbf{L}_\infty)$ *для всех* $0 \le r < +\infty$*;*

Из теорем 6 и 7 для любых $0 \le r < +\infty$ имеем:

Следствие 1. (i). *Если* $f \in \mathcal{Z}_{r+1}$*, то последовательность средних* $\{A_{n,T}f\}$ *порядково ограничена в* $\mathcal{Z}_r$.

(ii). *Если* $f \in \mathcal{R}_{r+1}$*, то последовательность средних* $\{A_{n,T}f\}$ *порядково сходится в* $\mathcal{Z}_r$.

Пространства $\mathbf{L}_p$

Для пространств $\mathbf{L}_p$ индексы Бойда совпадают:

$$p_{\mathbf{L}_p} = q_{\mathbf{L}_p} = p$$

для каждого $1 \leq p \leq +\infty$. При $p > 1$ выполняется равенство:

$$(\mathbf{L}_p)_{\mathbf{H}} = \mathbf{L}_p,$$

в то время как

$$(\mathbf{L}_1)_{\mathbf{H}} = \mathcal{Z}_1 \not\subset \mathbf{L}_1$$

Таким образом, имеет место:

Следствие 2. (*i*). $\mathbf{L}_p \in \mathcal{OET}$ *тогда и только тогда, когда* $1 < p < +\infty$.

(*ii*). $\mathbf{L}_p \in \mathcal{DET}$ *тогда и только тогда, когда* $1 < p \leq +\infty$.

(*iii*). $\mathbf{L}_p \in \mathcal{IET}$ *тогда и только тогда, когда* $1 \leq p < +\infty$.

Список литературы

[1] Birkhoff G. D. Proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1931. — No. 17. — P. 656–660.

[2] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces // Studia Mathem. — 1998. — No. 128. — P. 145–157.

[3] Dunford N., Schwarts J. T. Convergence almost everywhere of operator averages // J. Rat. Mech. Anal. — 1956. — No. 5. — P. 129–178.

[4] Edgar G.A., Sucheston L. Stopping times and directed processes — Cambridge: University press, 1992. — 430 p.

[5] A. Florenza, M. Krbec. Indeces of Orlicz spaces and some applications. Comm. Math. Univ. Corolinae, 38(1997), 433–451.

[6] Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretik application // Acta Math. — 1930. — No. 54. — P. 81–116.

[7] Hopf E. On the ergodic theorem for positive linear operators // J. Reinc. Ang. Math. — 1960. — No. 205. — P. 101–106.

[8] Hopf E. The general temporally descrete Markov process // J. Rat. Meca. Anal. — 1954. — No. 3. — P. 13–45.

[9] Kakutani S. Iteration of linear operations in complex Banach spaces // Proc. Imp. Acad. Yokyo. — 1938. — No. 14. — P. 295–300.

[10] Krengel U. Ergodic Theorems — Berlin: de Gruyter Stud. Math., 1985. — 357 p.

[11] J. Lindenstrauss, L. Tzafriri, Classical Banach Spaces I. Sequemce Spaces. Springer, 1979.

[12] Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Function Spaces, Berlin: Springer, 1979. — 327 p.

[13] von Neumann J. Proof of the qlasiergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1932. — No. 18. — P. 70–82.

[14] M.M. Rao. App;ications of Orlicz spaces. M.Dekker, New-York, 2002.

[15] M.M. Rao, Z.D.Ren. Theory of Orlicz spaces. M.Dekker, Inc., New-York, 1991.
[16] Weiner N. The ergodic theorem // Duke. Math. J. — 1939. — No. 5. — P. 1–18.
[17] Yosida K. Mean ergodic theorem in Banach Spaces // Proc. Imp. Acad. Yokyo. — 1938. — No. 14. — P. 292–294.
[18] Л. В. Канторович, Г. П. Акилов. Функциональный анализ — Москва: Наука, 1977. — 742 с.
[19] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов — Москва: Наука, 1978. — 400 с.
[20] M.A. Krasnoselskii, Ya.B. Rutitzkii. Convex functions and Orlicz spaces. Noordhoff, 1961.
[21] Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003. — Т. 17(56), № 2. — С. 36 – 48.
[22] Муратов М. А., Рубштейн Б. А. Аналоги доминантной эргодической теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах // Ученые записки ТНУ. — 2004. — Т. 18(57), № 1. — С. 43 – 51.
[23] Муратов М. А., Пашкова Ю. С. Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича измеримых функций на полуоси // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — № 2. — С. 47–59.

Порядкова збіжність в ергодичних теоремах в просторах Орлича

У даній роботі наданні необхідні та достатні умови порядкової збіжності середніх Чезаро для абсолютних стисків в просторах Орліча. Розглядаються простори з нескінченной мірой. Вивчення порядкової збіжності дозволяє довести класичні домінантну та індівідуальну ергодичні теореми в просторах $\mathbf{L}_p$*, та класах Зігмунда* $\mathbf{L}\log^r \mathbf{L}$ *як окремі випадки. При дослідженні використана техніка симетричних просторів вимірних функцій на просторах з нескінченной мірой і ергодичной теории.*

Ключові слова: Простори Орліча, класи Зігмунда, порядкова збіжність, ергодичні теореми

Order Ergodic Theorems in Orlicz spaces

In this work we study the order convergence of Cesáro averages in Orlicz spaces. We investigate the case, when the considered measure is infinite. The problems of order convergence is connected with both Dominated and Individual Ergodic Theorems. In particular, the classical Dominated and Individual Ergodic Theorems for spaces $\mathbf{L}_p$ *and Zygmund classes* $\mathbf{L}\log^r \mathbf{L}$ *are obtained as the partial cases. The method's of the rearrangements invariant spaces and of Ergodic Theory are used.*

Keywords: Orlicz spaces, Zygmund classes, order convergence, Ergodic Theorems

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 113–123.

УДК 517.928:539.3

А. М. Погребицкая, С. И. Смирнова

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ГИБРИДНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

В работе приведена аналитическая оценка части двойного гибридного ВКБ-Галеркин решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, которое описывает математическую модель процесса теплопереноса.

Ключевые слова: нелинейное уравнение второго порядка, гибридное ВКБ-Галеркин решение, асимптотичность приближенного решения.

Введение

Развитие науки и техники приводит к необходимости постановки и решения новых задач математической физики, что включает разработку и исследование новых математических моделей механических систем ([1],[2]). К таким задачам относятся, например, задача исследования распространения тепла телом конической формы, задача теплоизлучения кольцевых ребер различных сечений (см. [3]) и ряд других задач. Процесс излучения тепла кольцевым ребром является перспективной задачей, так как ребро в сечении может иметь различные формы, а именно, трапецию, прямоугольник и треугольник, и данные ребра используются в аэрокосмической технике. В общем виде процесс теплоизлучения в ребре описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varepsilon^2 U''(r) + a(r,\varepsilon)U'(r) - \beta b(r,\varepsilon)U^4(r) = 0, \tag{1}$$

$$U(d) = 1, \qquad U'(f) = 0, \tag{2}$$

где ε, β — малые параметры, $a(r,\varepsilon)$, $b(r,\varepsilon)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, причем $a(r,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, $b(r,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$.

Для получения замкнутого аналитического решения уравнения (1) используется метод двойного гибридного асимптотического разложения (см. [4]). Впервые гибридный ВКБ-Галеркин метод был предложен Грищаком В.З. (см. [5]). На первом этапе применения данного подхода, представляя функцию $U(r)$ в виде ряда по степеням параметра β:

$$U(r,\beta) = U_0(r) + \beta U_1(r) + \beta^2 U_2(r) + \dots, \tag{3}$$

получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\varepsilon^2 U_0'' + a(r)U_0' = 0, \tag{4}$$

$$\varepsilon^2 U_1'' + a(r)U_1' = b(r)U_0^4. \tag{5}$$

1. Построение аналитического решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

В работе [7] было рассмотрено дифференциальное уравнение (4) и доказана теорема об ε–асимптотичности гибридного ВКБ–Галеркин решения этого уравнения. В частности, получена следующая оценка:

$$|U_0 - U_{0_H}| \leqslant \varepsilon \cdot M. \tag{6}$$

Рассмотрим дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка (5). Построим гибридное ВКБ-Галеркин решение этого уравнения для случая, когда функция $a(r)$ дифференцируема на отрезке $[d, f]$ и не обращается в нуль на этом отрезке. Пусть на концах отрезка выполняются условия

$$U_1(d) = 0, \qquad U_1'(f) = 0. \tag{7}$$

Для получения решения неоднородного уравнения (5) использовался метод вариации произвольных постоянных (см. [6]), т.е. решение $U_1(r)$ уравнения (5) искали в виде:

$$U_{1_H}(r) = k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} + k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}, \tag{8}$$

где неизвестные функции $k_1(r)$ и $k_2(r)$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} k_1'(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} + k_2'(r)\frac{G_2(r)}{e(r)} = 0, \\ k_1'(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(\delta_{0_1} g^{\frac{1}{2}}(r) - \frac{a(r)}{2\varepsilon^2}\right) + k_2'(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(\delta_{0_2} g^{\frac{1}{2}}(r) - \frac{a(r)}{2\varepsilon^2}\right) = b(r)U_{0_H}^4(r)/\varepsilon^2. \end{cases} \tag{9}$$

Решение системы (9) имеет вид:

$$k_1(r) = -\frac{1}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})}\left(\int_d^r \frac{e(x)b(x)U_{0_H}^4(x)}{g^{\frac{1}{2}}(x)G_1(x)}\,dx + t_1\right),$$

$$k_2(r) = \frac{1}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})} \left(\int_d^r \frac{e(x)b(x)U_{0_H}^4(x)}{g^{\frac{1}{2}}(x)G_2(x)}\,dx + t_2 \right).$$

Тогда решение уравнения (5) принимает вид:

$$U_{1_H}(r) = -\frac{G_1(r)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})e(r)} \left(\int_d^r \frac{e(x)b(x)U_{0_H}^4(x)}{g^{\frac{1}{2}}(x)G_1(x)}\,dx + t_1 \right) + \\ + \frac{G_2(r)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})e(r)} \left(\int_d^r \frac{e(x)b(x)U_{0_H}^4(x)}{g^{\frac{1}{2}}(x)G_2(x)}\,dx + t_2 \right). \quad (10)$$

Таким образом, с применением гибридного ВКБ-Галеркин подходом было получено аналитическое решение линейного дифференциального неоднородного уравнения с переменными коэффициентами, содержащими параметр при старшей производной.

2. Асимптотический характер гибридного ВКБ-Галеркин решения

Используя определение ε^r–асимптотического решения (см. [8], с. 291), докажем асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения уравнения (5) отрезке $[d, f]$ с краевыми условиями

$$U_1(d) = U_d, \quad U_1'(f) = U_f. \quad (11)$$

Теорема. *Если существует единственное решение $U_1(x, \varepsilon)$ краевой задачи* (5),(11), *а функция $a(r) = a(r, \varepsilon)$ дифференцируема по r на отрезке $[d, f]$, не обращается в нуль на этом отрезке и удовлетворяет условиям $a(r, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, $\alpha \leqslant \sqrt{g(r)} \leqslant \beta$ на $[d, f]$, а $b(r) = b(r, \varepsilon)$ дифференцируема по r на отрезке $[d, f]$ и $b(r, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, тогда для любого $r \in [d, f]$ функция* (10) *является ε–асимптотическим решением уравнения* (5).

Доказательство. Найдем первую и вторую производные гибридного ВКБ-Галеркин решения (8) с учетом (9):

$$U_{1_H}' = k_1'(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} + k_2'(r)\frac{G_2(r)}{e(r)} + k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} \left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)} \left(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2} \right) \right) + \\ + k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)} \left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)} \left(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2} \right) \right) = \left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}G \right) \cdot \\ \cdot \left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} + k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)} \right) + \sqrt{g(r)}\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2} \left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} - k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)} \right) = \\ = \left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}G \right) U_{1_H} + \sqrt{g(r)}\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2} \left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} - k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)} \right); \quad (12)$$

$$U''_{1_H} = k'_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(r)}\left(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)+$$
$$+k'_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(r)}\left(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)+$$
$$+k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(r)}\left(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)^2+$$
$$+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(r)}\left(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)^2+$$
$$+k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2}+\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}\left(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)+$$
$$+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2}+\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}\left(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)=\frac{b(r)U_{0_H}^4}{\varepsilon^2}+$$
$$+k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^4}-\frac{a(r)}{\varepsilon^2}\sqrt{g(r)}\left(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)+g(r)\left(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)^2\right)+$$
$$+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^4}-\frac{a(r)}{\varepsilon^2}\sqrt{g(r)}\left(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)+g(r)\left(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)^2\right)+$$
$$+\left(-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)+$$
$$+\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)=$$
$$=\frac{b(r)U_{0_H}^4}{\varepsilon^2}+\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^4}-\frac{a(r)\sqrt{g(r)}G}{\varepsilon^2}+2g(r)G^2+\frac{g(r)}{\varepsilon^2}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)+$$
$$+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(-\frac{a(r)}{\varepsilon^2}\sqrt{g(r)}+2g(r)G\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)+$$
$$+\left(-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)+$$
$$+\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)=\frac{b(r)U_{0_H}^4}{\varepsilon^2}+$$
$$+\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^4}-\frac{a(r)\sqrt{g(r)}G}{\varepsilon^2}+2g(r)G^2+\frac{g(r)}{\varepsilon^2}-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\right)U_{1_H}+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{a(r)}{\varepsilon^2}\sqrt{g(r)}+2g(r)G+\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right). \quad (13)$$

Подставив (12) и (13) в исходное уравнение (5), получим

$$\varepsilon^2 U''_{1_H}+a(r)U'_{1_H}-b(r)U_{0_H}^4=b(r)U_{0_H}^4+$$

$$+\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2}-a(r)\sqrt{g(r)}G+2g(r)G^2\varepsilon^2+g(r)-\frac{a'(r)}{2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\varepsilon^2\right)U_{1_H}+$$

$$+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(-a(r)\sqrt{g(r)}+2g(r)G\varepsilon^2+\frac{g'(r)\varepsilon^2}{2\sqrt{g(r)}}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)+$$

$$+\left(-\frac{a^2(r)}{2\varepsilon^2}+a(r)\sqrt{g(r)}G\right)U_{1_H}+a(r)\sqrt{g(r)}\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)-$$

$$-b(r)U_{0_H}^4=\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2}-a(r)\sqrt{g(r)}G+2g(r)G^2\varepsilon^2+g(r)-\frac{a'(r)}{2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\varepsilon^2-\frac{a^2(r)}{2\varepsilon^2}+\right.$$

$$\left.+a(r)\sqrt{g(r)}G\right)U_{1_H}+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(2g(r)G\varepsilon^2+\frac{g'(r)\varepsilon^2}{2\sqrt{g(r)}}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)=$$

$$=\left(-\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2}+2g(r)G^2\varepsilon^2+g(r)-\frac{a'(r)}{2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\varepsilon^2\right)U_{1_H}+$$

$$+\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(r)}\left(2\sqrt{g(r)}G+\frac{g'(r)}{2g(r)}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)=$$

$$=\left(-\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2}+2g(r)G^2\varepsilon^2+g(r)-\frac{a'(r)}{2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\varepsilon^2\right)U_{1_H}+$$

$$+\varepsilon^2\left(2\sqrt{g(r)}G+\frac{g'(r)}{2g(r)}\right)\left(U'_{1_H}+\left(\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}-\sqrt{g(r)}G\right)U_{1_H}\right)=$$

$$=\left(2\sqrt{g(r)}G+\frac{g'(r)}{2g(r)}\right)\left(\varepsilon^2U'_{1_H}+\frac{a(r)}{2}U_{1_H}\right). \quad (14)$$

Таким образом, U_{1_H} является общим решением уравнения

$$\varepsilon^2U''_{1_H}+\left(a(r)-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\right)U'_{1_H}-$$

$$-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_{1_H}=b(r)U_{0_H}^4. \quad (15)$$

Используя способ, основанный в [8], как и при доказательстве асимптотичности гибридного решения U_{0_H} (см. [7]), обозначим

$$D_1=U_1-U_{1_H} \quad (16)$$

и запишем уравнение (5) в виде

$$\varepsilon^2U''_1+\left(a(r)-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\right)U'_1-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_1=$$

$$=-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U'_1-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_1+b(r)U_{0_H}^4. \quad (17)$$

Обозначим

$$F = -\left(\frac{g'(r)}{2g(r)} + 2\sqrt{g(r)}G\right). \tag{18}$$

Находя разность уравнений (17) и (15), используя (16), получим уравнение, которому удовлетворяет функция D_1:

$$\varepsilon^2 D_1'' + (a(r) + \varepsilon^2 F)D_1' + \frac{a(r)}{2}FD_1 = \left(\varepsilon^2 U_1' + \frac{a(r)}{2}U_1\right)F + b(r)(U_0^4 - U_{0_H}^4). \tag{19}$$

На концах отрезка $[d, f]$ функция D_1 удовлетворяет краевым условиям

$$D_1(d) = 0, \qquad D_1'(f) = 0. \tag{20}$$

Уравнение (19) можно рассматривать как неоднородное уравнение относительно D_1. Тогда интегральное представление решения линейной неоднородной задачи (19)–(20) имеет единственное решение (см. [9]):

$$D_1 = \int_d^f Gr(r,s)\left(\left(\varepsilon^2 U_1' + \frac{a(s)}{2}U_1\right)F + b(s)(U_0^4 - U_{0_H}^4)\right)ds, \tag{21}$$

где $Gr(r,s)$ — функция Грина задачи (19)–(20).

Функция $Gr(r,s)$ определена при $r \in [d,f]$, $s \in (d,f)$ и при каждом $s \in (d,f)$ обладает следующими свойствами:

1) при $r \neq s$ функция $Gr(r,s)$ удовлетворяет соответствующему линейному однородному уравнению

$$\varepsilon^2 D_1'' + (a(r) + \varepsilon^2 F)D_1' + \frac{a(r)}{2}FD_1 = 0; \tag{22}$$

2) при $r = d$ и $r = f$ функция $Gr(r,s)$ удовлетворяет краевым условиям (20);

3) при $r = s$ функция $Gr(r,s)$ непрерывна по r, а ее производная по r имеет разрыв первого рода со скачком, равным $1/\varepsilon^2$, т.е.

$$Gr(s+0,s) = Gr(s-0,s), \qquad Gr_r'(s+0,s) - Gr_r'(s-0,s) = 1/\varepsilon^2.$$

Для нахождения функции Грина задачи (19)–(20), нужно построить решение $D_{1_1}(r) \neq 0$ уравнения (22), удовлетворяющее условию $D_{1_1}(d) = 0$, и решение $D_{1_2}(r) \neq 0$, удовлетворяющее условию $D_{1_2}'(f) = 0$.

Обозначим два линейно независимых решения уравнения (15) $U_{1_{H_1}}$ и $U_{1_{H_2}}$:

$$U_{1_{H_1}} = \frac{G_1(r)}{e(r)} = \frac{1}{e(r)}\exp\left((G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2})\int_d^r \sqrt{g(x)}\,dx\right), \tag{23}$$

$$U_{1_{H_2}} = \frac{G_2(r)}{e(r)} = \frac{1}{e(r)}\exp\left((G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2})\int_d^r \sqrt{g(x)}\,dx\right). \tag{24}$$

Тогда функции D_{1_1} и D_{1_2} могут быть определены как

$$D_{1_1} = U_{1_{H_1}} - U_{1_{H_2}}, \tag{25}$$

$$D_{1_2} = U_{1_{H_1}} -$$

$$- \exp\left(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx\right)\frac{\sqrt{g(f)}(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}U_{1_{H_2}}. \tag{26}$$

Функцию $Gr(r,s)$ будем искать в виде

$$Gr(r,s) = \begin{cases}\varphi(s)D_{1_1}(r), & d \leqslant r \leqslant s,\\ \psi(s)D_{1_2}(r), & s \leqslant r \leqslant f.\end{cases} \tag{27}$$

Функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ выбираются так, чтобы выполнялись условия, накладываемые на функцию Грина, т.е., чтобы

$$\begin{cases}\psi(s)D_{1_2}(r) = \varphi(s)D_{1_1}(r),\\ \psi(s)D'_{1_2}(r) - \varphi(s)D'_{1_1}(r) = 1/\varepsilon^2.\end{cases} \tag{28}$$

Отсюда

$$\varphi(s) = \frac{D_{1_2}(s)}{\varepsilon^2(D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s))}, \tag{29}$$

$$\psi(s) = \frac{D_{1_1}(s)}{\varepsilon^2(D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s))}. \tag{30}$$

Обозначив

$$P^* = D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s),$$

$$e^* = \exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2} \neq 1,$$

и учитывая (25)–(26), получим

$$P^* = (U_{1_{H_1}} - U_{1_{H_2}})(U'_{1_{H_1}} - e^*U'_{1_{H_2}}) - (U'_{1_{H_1}} - U'_{1_{H_2}})(U_{1_{H_1}} - e^*U_{1_{H_2}}) =$$
$$= (U_{1_{H_1}}U'_{1_{H_2}} - U'_{1_{H_1}}U_{1_{H_2}})(1 - e^*).$$

Учитывая (23)–(24), и то, что

$$U'_{1_{H_1}} = U_{1_{H_1}}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}\left(G + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\right)\right),$$

$$U'_{1_{H_2}} = U_{1_{H_2}}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}\left(G - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\right)\right),$$

имеем

$$P^* = -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\sqrt{g(s)}U_{1_{H_1}}U_{1_{H_2}}(1 - e^*) =$$

$$= -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\sqrt{g(s)}(1 - e^*)\frac{1}{e^2(s)} \exp\left(2G \int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\, dt\right). \tag{31}$$

Тогда функция Грина примет вид

$$Gr(r,s) = \begin{cases} \dfrac{D_{1_1}(r)D_{1_2}(s)}{\varepsilon^2 P^*}, & d \leqslant r \leqslant s, \\ \dfrac{D_{1_1}(s)D_{1_2}(r)}{\varepsilon^2 P^*}, & s \leqslant r \leqslant f. \end{cases} \tag{32}$$

Запишем решение задачи (19)–(20) с помощью функции Грина

$$D_1 = \int\limits_d^f Gr(r,s)\left(\left(\varepsilon^2 U_1' + \frac{a(s)}{2}U_1\right)F + b(s)(U_0^4 - U_{0_H}^4)\right) ds =$$

$$= -(U_{1_{H_1}}(r) - U_{1_{H_2}}(r))\cdot$$

$$\cdot \int\limits_d^r \frac{(U_{1_{H_1}}(s) - e^* U_{1_{H_2}}(s))e^2(s)\left(\left(\varepsilon^2 U_1' + \frac{a(s)}{2}U_1\right)F + b(s)(U_0^4 - U_{0_H}^4)\right) ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\sqrt{g(s)}(1 - e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\, dt\right)} -$$

$$- (U_{1_{H_1}}(r) - e^* U_{1_{H_2}}(r))\cdot$$

$$\cdot \int\limits_r^f \frac{(U_{1_{H_1}}(s) - U_{1_{H_2}}(s))e^2(s)\left(\left(\varepsilon^2 U_1' + \frac{a(s)}{2}U_1\right)F + b(s)(U_0^4 - U_{0_H}^4)\right) ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\sqrt{g(s)}(1 - e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\, dt\right)}. \tag{33}$$

Сделаем некоторые оценки

$$|G_1| \leqslant \max\{G_1, G_2\} = L, \quad |G_2| \leqslant \max\{G_1, G_2\} = L, \tag{34}$$

$$\left|\frac{F}{\sqrt{g(r)}}\right| = \left|2G + \frac{g'(r)}{2g(r)\sqrt{g(r)}}\right| \leqslant 2|G| + \frac{|g'(r)|}{2\min|g^{3/2}(r)|} = K, \tag{35}$$

$$\left|\frac{b(r,\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right| \leqslant B, \tag{36}$$

$$\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\, dt\right) \geqslant \exp(2G\alpha(s-d)) \geqslant N, \tag{37}$$

где

$$N = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ \exp(2G\alpha(f-d)), & \alpha < 0. \end{cases} \tag{38}$$

Учитывая (34)–(38), можно записать

$$|D_1| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}|1 - e^*|}\Big|(U_{1_{H_1}}(r) - U_{1_{H_2}}(r))\cdot$$

$$\cdot \int_d^r \frac{(U_{1_{H_1}}(s) - e^* U_{1_{H_2}}(s))}{\exp\left(2G \int_d^s \sqrt{g(t)}\, dt\right)} \frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}} e^2(s) \left(\left(U_1' + \frac{a(s)}{2\varepsilon^2} U_1\right) + \frac{b(s)}{\varepsilon^2 F(s)} (U_0^4 - U_{0_H}^4)\right) ds +$$

$$+ (U_{1_{H_1}}(r) - e^* U_{1_{H_2}}(r)) \cdot$$

$$\cdot \int_r^f \frac{(U_{1_{H_1}}(s) - U_{1_{H_2}}(s))}{\exp\left(2G \int_d^s \sqrt{g(t)}\, dt\right)} \frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}} e^2(s) \left(\left(U_1' + \frac{a(s)}{2\varepsilon^2} U_1\right) + \frac{b(s)}{\varepsilon^2 F(s)} (U_0^4 - U_{0_H}^4)\right) ds \mid \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|G_1| + |G_2|)(|G_1| + e^*|G_2|)}{2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}|1 - e^*|e^2(r)} \left| \int_d^f \frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}} \frac{e(s) \left((e(s)U_1)' + \frac{e(s)b(s)}{\varepsilon^2 F(s)} (U_0^4 - U_{0_H}^4)\right) ds}{\exp\left(2G \int_d^s \sqrt{g(t)}\, dt\right)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^2 K}{N\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}} \left|\frac{1 + e^*}{1 - e^*}\right| \left(\frac{1}{e(r)} \left| \int_d^f (e(s)U_1)'\, ds \right| + \frac{B}{e^2(r)} \left| \int_d^f \frac{e^2(s)}{F(s)} (U_0^4 - U_{0_H}^4)\, ds \right| \right).$$

Обозначив

$$C = \frac{L^2 K}{N} \left|\frac{1 + e^*}{1 - e^*}\right|,$$

а также учитывая оценку (6), получим

$$|D_1| \leqslant \frac{C\varepsilon}{e(r)\sqrt{1 + \varepsilon^2 G^2}} \left(\frac{|e(f)U_1(f) - e(d)U_1(d)|}{e(r)} + \right.$$

$$\left. + \frac{BM\varepsilon}{e^2(r)} \left| \int_d^f \frac{e^2(s)}{F(s)} (U_0^3 + U_0^2 U_{0_H} + U_0 U_{0_H}^2 + U_{0_H}^3)\, ds \right| \right),$$

или, с учетом оценки

$$\frac{1}{e^2(r)} \left| \int_d^f \frac{e^2(s)}{F(s)} (U_0^3 + U_0^2 U_{0_H} + U_0 U_{0_H}^2 + U_{0_H}^3)\, ds \right| \leqslant T,$$

$$|D_1| \leqslant \frac{C\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 G^2}} \left(|U_1(f) - U_1(d)/e(f)| + \varepsilon BMT \right).$$

Функция

$$\mu(r) = \frac{C}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 G^2}} \left(|U_1(f) - U_1(d)/e(f)| + \varepsilon BMT \right)$$

ограничена при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, обозначив

$$Q = \frac{C}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 G^2}} \left(|U_1(f) - U_1(d)/e(f)| + \varepsilon BMT \right),$$

имеем оценку

$$|U_1 - U_{1_H}| \leqslant \varepsilon \cdot Q,$$

что и доказывает ε–асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения (5)– (11) уравнения (5).

Теорема доказана. □

Выводы

Таким образом, показано, что часть гибридного ВКБ-Галеркин решения, возникающая при решении дифференциального уравнения (5), носит асимптотический характер. Это свидетельствует о высокой точности приближения его к точному решению уравнения (5). Это дает возможность оценить в целом точность приближенного гибридного асимптотического решения задачи (1), полученного в работе [4].

Список литературы

[1] Couto P. *Parametric analysis of heat transfer on mustistage cryogenic radiator* /P. Couto, M. Mantelli // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. – 2002. – Vol.16. – No. 3. – P. 313–316.

[2] Schnurr N.M. *Radiation from an array of gray circular fins of trapezoidal profile* /N.M. Schnurr, C.A. Cothran // AIA Journal. – 1974. – Vol.12. – No.11. – P. 1476–1480.

[3] Келлер Х. *Лучистый теплообмен кольцевых ребер трапецеидальной формы* /Х. Келлер // Труды Амер. об-ва инженеров-механиков, сер.С, Теплопередача. – 1970. – № 2. – С. 118–121.

[4] Gristchak V.Z. *On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems* /V.Z. Gristchak, A.M. Pogrebitskaya // Technische mechanik (to appear).

[5] Грищак В.З. *Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування.* /Грищак В.З. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2009. – 226 с.

[6] Грищак В.З. *Подвійний асимптотичний розклад у проблемі променевого теплообміну кільцевих ребер трапецеідальної форми* /В.З. Грищак, Г.М. Погребицька // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – № 52. – Вип.3. – С. 217–223.

[7] Погребицкая А.М. *К вопросу о точности приближенного аналитического решения нелинейной задачи теплоизлучения* /А.М. Погребицкая, С.И. Смирнова // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия “Математика. Механика. Информатика и кибернетика”. – 2009. – Т.22(61). – № 1. – С. 93–102.

[8] Моисеев Н.Н. *Асимптотические методы нелинейной механики.* /Н.Н. Моисеев – Москва: Наука, 1982. – 400 с.

[9] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. *Диференціальні рівняння в задачах: Навчальний посібник.* /А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк – К.: Либідь, 2003. – 504 с.

Про оцінку точності аналітичного гібридного розв'язку задачі теплоперенесення

В роботі наведено аналітичну оцінку частини подвійного ВКБ-Гальоркін розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що описує математичну модель процесу теплоперенесення.

Ключові слова: нелінійне рівняння другого порядку, гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок, асимптотичність наближеного розв'язку.

On estimate of exactness of analytical hybrid solution for the heat transfer problem

In the paper, the analytical estimate of the part of an double hybrid WKB-Galerkin solution for the nonlinear second order differential equation, that describes the mathematical model of the heat transfer process, is presented.

Keywords: second order nonlinear equation, hybrid WKB-Galerkin solution, approximate solution's asymptotic property.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 124–131.

УДК 517.968.7

О. И. Рудницкий, И. А. Романенко

АЛГЕБРЫ МНОГОЧЛЕНОВ ПОГОРЕЛОВА ОКТАЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП

Исследованы алгебры P^{O_m} многочленов Погорелова октаэдральных групп O_m, порожденных отражениями на унитарной плоскости. Найдены степени образующих алгебры $P^{O_{46}}$ многочленов Погорелова группы O_{46}.

Ключевые слова: многочлены Погорелова, октаэдральных групп, порожденных отражениями, степени образующих алгебры.

Введение

Данная статья является продолжением начатого в [2] изучения строения алгебр P^G многочленов Погорелова конечных унитарных групп G, порожденных отражениями, в случае, когда алгебра P^G не совпадает с алгеброй I^G инвариантов группы G. В настоящей заметке изучено строение алгебры многочленов Погорелова для октаэдральных групп, порожденных отражениями на унитарной плоскости U^2.

Постановка задачи

Как и в [1], многочлены Погорелова группы G — это формы вида

$$P_{2r}^G(\vec{x}) = \sum_{\sigma\in G} (\vec{x},\sigma\vec{s})^{2r}, \quad r \geq 1,$$

где $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$, $\vec{s}$ — единичный вектор нормали (с началом O) одной из осей, отражения σ относительно которых порождают группу G; $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ — ортонормированный базис U^2, определяющий прямоугольную декартову систему координат с началом O.

На унитарной плоскости U^2 существуют следующие конечные унитарные группы, порожденные отражениями: тетраэдральные — T_m, октаэдральные — O_m и икосаэдральные — I_m (m — число отражений, содержащихся в группе) [4].

Строение алгебры P^{T_m} для тетраэдральных групп T_m изучено в [2]. Данная статья посвящена изучению алгебр P^{O_m} многочленов Погорелова октаэдральных групп O_m.

В работе [1] установлено, что, в случае октаэдральных групп O_m, алгебра многочленов Погорелова P^{O_m} совпадает с алгеброй I^{O_m} инвариантов группы O_m для всех $m \neq 46$. При этом, найдены все образующие алгебр $P^{O_m} = I^{O_m}$ $(m \neq 46)$.

Цель настоящей заметки — построить образующие алгебры $P^{O_{46}}$ многочленов Погорелова группы O_{46}.

Доказана следующая

Теорема. Степени образующих алгебры $P^{O_{46}}$ равны 24, 48, 72, 96.

Доказательство теоремы

Группа O_{46} порождается тремя отражениями $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_3$ второго, третьего и четвертого порядков относительно осей с уравнениями

$$v_4x_1 - \varepsilon v_3x_2 = 0, \quad v_2x_1 + \eta v_1x_2 = 0$$

и $x_1 = 0$ соответственно; здесь

$$v_1 = \frac{\sqrt{3-\sqrt{3}}}{\sqrt{6}}, \quad v_2 = \frac{\sqrt{3+\sqrt{3}}}{\sqrt{6}},$$
$$v_3 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad v_4 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

η — первообразный корень восьмой степени из единицы, $\varepsilon = \sqrt{-1}$ [4].

Отметим, что отражения σ_1 и σ_2 порождают группу симметрий O_{28}, σ_1 и σ_3 — группу O_{30}, а σ_2 и σ_3 — группу O_{34} [3]. Порядок группы равен 576. Она содержит 18, 16 и 12 отражений ворого, третьего и четвертого порядков соответственно. Показатели группы $m_1 = m_2 = 24$ [4].

Множество $\sigma\vec{s}$ распадается на три O_{46} - инвариантных подмножества:
S_1, состоящего из векторов

$$\varepsilon^h\eta^{l+1}\omega^t\vec{e}_i, \quad \frac{\varepsilon^h\eta^l\omega^t}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_1 \pm \varepsilon^i\vec{e}_2\right);$$

S_2 — из векторов

$$\omega^t\eta^l\left(v_2\vec{e}_i + \varepsilon^h\bar{\eta}\,v_1\vec{e}_j\right);$$

S_3 — из векторов

$$\omega^t\eta^l\left(v_4\vec{e}_i + \varepsilon^h v_3\vec{e}_j\right), \quad \eta^l\frac{\omega^t}{\sqrt{2}}\mu\left(\vec{e}_i \pm \eta\vec{e}_j\right),$$

где $l = \overline{1,8},\ t = \overline{1,3},\ h = \overline{1,4},\ i,j = 1,2\ (i \neq j)$, ω — первообразный корень третьей степени из единицы, μ — первообразный корень шестнадцатой степени из единицы.

Обозначим через $P_{24}^{(i)^{O_{46}}} = \sum\limits_{\vec{s}\in S_i}(\vec{x},\vec{s})^{24} \quad (i = 1,\ 2,\ 3)$.

С точностью до постоянного множителя они имеют вид

$$\begin{aligned}
P_{24}^{(1)^{O_{46}}} &= 1025(x_1^{24}+x_2^{24})+10626(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})+735471(x_1^{16}x_2^8+x_1^8x_2^{16})+\\
&\quad +2704156x_1^{12}x_2^{12},\\
P_{24}^{(2)^{O_{46}}} &= 193(x_1^{24}+x_2^{24})-147246(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})+735471(x_1^{16}x_2^8+x_1^8x_2^{16})-\\
&\quad -386308x_1^{12}x_2^{12},\\
P_{24}^{(3)^{O_{46}}} &= 593(x_1^{24}+x_2^{24})+196098(x_1^{20}x_2^4+x_1^4x_2^{20})-334305(x_1^{16}x_2^8+x_1^8x_2^{16})+\\
&\quad +2704156x_1^{12}x_2^{12}.
\end{aligned}$$

В качестве образующих алгебры $I^{O_{46}}$ могут быть взяты, например, формы

$$P_{24}^{T_{22}}=P_{24}^{(1)^{O_{46}}}+P_{24}^{(2)^{O_{46}}} \quad \text{и} \quad P_{24}^{O_{46}}=P_{24}^{(1)^{O_{46}}}+P_{24}^{(2)^{O_{46}}}+P_{24}^{(3)^{O_{46}}}.$$

Любой элемент $P_{24r}^{O_{46}}\in P^{O_{46}}$, $r>1$ представим в виде многочлена подходящей степени от образующих $P_{24}^{T_{22}}$ и $P_{24}^{O_{46}}$, то есть

$$P_{24r}^{O_{46}}=\varphi\left(P_{24}^{T_{22}},\,P_{24}^{O_{46}}\right)=\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_{ri}\left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{r+1-i}\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{i-1}. \tag{1}$$

Числа λ_{ri} определяются из равенства (1), как равенства многочленов от переменных x_i $(i=1,\,2)$.

Используя равенство (1), будем последовательно представлять инвариант $P_{24t}^{O_{46}}\in P^{O_{46}}$, $t>1$, в виде многочлена подходящей степени от форм $P_{24r}^{O_{46}}$ $(1\le r<t)$:

$$\begin{aligned}
P_{24t}^{O_{46}} &= \varphi\left(P_{24r}^{O_{46}}\right)=\sum_{\substack{n_r=\overline{0,t}\\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}}\mu_j\prod_r\left(P_{24r}^{O_{46}}\right)^{n_r}=\\
&= \sum_{\substack{n_r=\overline{0,t}\\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}}\mu_j\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{n_1}\prod_{r\ne1}\left(\sum_{i=1}^{r+1}\lambda_{ri}\left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{r+1-i}\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{i-1}\right)^{n_r}=\\
&= \sum_{\substack{n_r=\overline{0,t}\\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}}\mu_j\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{n_1}\prod_{r\ne1}\Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r}\\ \sum\limits_{i=1}^{r+1}n_{ri}=n_r}}P(n_{r1},\dots,n_{rr+1})\prod_{i=1}^{r+1}\lambda_{ri}^{n_{ri}}\times\\
&\quad\times\left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{(r+1)n_r-\sum\limits_{i=1}^{r+1}i\cdot n_{ri}}\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\sum\limits_{i=1}^{r+1}i\cdot n_{ri}-n_r}\Bigg)=
\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{n_r=\overline{0,t} \\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}} \mu_j \Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r} \\ \sum\limits_{i=1}^{r+1} n_{ri}=n_r \\ r\neq 1}} \prod_{r\neq 1} P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1}) \prod_{i=1}^{r+1} \lambda_{ri}^{n_{ri}} \times$$

$$\times \left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left((r+1)n_r-\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}\right)} \left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)+n_1} \Bigg) =$$

$$= \sum_{\substack{n_r=\overline{0,t} \\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}} \mu_j \Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r} \\ \sum\limits_{i=1}^{r+1} n_{ri}=n_r \\ r\neq 1}} \prod_{r\neq 1} P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1}) \prod_{i=1}^{r+1} \lambda_{ri}^{n_{ri}} \times$$

$$\times \left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{t-\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)-n_1} \left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)+n_1} \Bigg),$$

где $j=\overline{1,s(t)}$ при $s(t)=\begin{cases} \sum\limits_{n_r=0}^{\left[\frac{t-\sum\limits_{k>r} k\cdot n_k}{r}\right]} 1 \quad, \text{ если } r>1, \\ 1 \quad, \text{ если } r=1 \end{cases}$,

$P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1})=\dfrac{(n_{r1}+\ldots+n_{rr+1})!}{n_{r1}!\cdot\ldots\cdot n_{rr+1}!}$.

Таким образом,

$$P_{24t}^{O_{46}} = \sum_{\substack{n_r=\overline{0,t} \\ \sum\limits_r r\cdot n_r=t}} \mu_j \Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r} \\ \sum\limits_{i=1}^{r+1} n_{ri}=n_r \\ r\neq 1}} \prod_{r\neq 1} P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1}) \prod_{i=1}^{r+1} \lambda_{ri}^{n_{ri}} \times$$

$$\times \left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{t-\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)-n_1} \left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)+n_1} \Bigg). \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) (при $r=t$) и (2), получим равенство многочленов от форм $P_{24}^{T_{22}}$, $P_{24}^{O_{46}}$.

Приравняв соответствующие коэффициенты при одинаковых одночленах в правой и левой частях равенства, получим систему $t+1$ уравнений относительно $s(t)$ неизвестных μ_j.

Столбцы матрицы $A_{(t+1)\times s(t)}$ этой системы образованы коэффициентами в правой части равенства (2) при соответствующих одночленах вида $\left(P_{24}^{T_{22}}\right)^{\alpha}\left(P_{24}^{O_{46}}\right)^{\beta}$ у

неизвестных μ_j. При этом, пусть порядок строк матрицы соответствует возрастанию степени α образующей $P_{24}^{T_{22}}$.

При $t = 2$ получим несовместную систему трех уравнений с одним неизвестным, расширенная матрица которой имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & \lambda_{23} \\ 0 & \lambda_{22} \\ 0 & \lambda_{21} \end{array}\right)$$

Следовательно, форма $P_{48}^{O_{46}}$ не выражается через форму $P_{24}^{O_{46}}$.

Если $t = 3$, то получим несовместную систему четырех уравнений с двумя неизвестными, расширенная матрица которой имеет вид

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & \lambda_{23} & \lambda_{34} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{33} \\ 0 & \lambda_{21} & \lambda_{32} \\ 0 & 0 & \lambda_{31} \end{array}\right)$$

Следовательно, форма $P_{72}^{O_{46}}$ не представима в виде многочлена третьей степени от форм $P_{24}^{O_{46}}$ и $P_{48}^{O_{46}}$.

При $t = 4$ имеем несовместную систему пяти уравнений относительно четырех неизвестных с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \lambda_{23} & \lambda_{34} & \lambda_{23}^2 & \lambda_{45} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{33} & 2\lambda_{22}\lambda_{23} & \lambda_{44} \\ 0 & \lambda_{21} & \lambda_{32} & \lambda_{22}^2 + 2\lambda_{21}\lambda_{23} & \lambda_{43} \\ 0 & 0 & \lambda_{31} & 2\lambda_{21}\lambda_{22} & \lambda_{42} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{21}^2 & \lambda_{41} \end{array}\right)$$

Следовательно, форма $P_{96}^{O_{46}}$ не представима в виде многочлена четвертой степени от форм $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$ и $P_{72}^{O_{46}}$.

Если $t = 5$, получим совместную систему шести уравнений относительно шести неизвестных с расширенной матрицей

$$\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & \lambda_{23} & \lambda_{34} & \lambda_{23}^2 & \lambda_{45} & \lambda_{23}\lambda_{34} & \lambda_{56} \\ 0 & \lambda_{22} & \lambda_{33} & 2\lambda_{22}\lambda_{23} & \lambda_{44} & \lambda_{23}\lambda_{33} + \lambda_{22}\lambda_{34} & \lambda_{55} \\ 0 & \lambda_{21} & \lambda_{32} & \lambda_{22}^2 + 2\lambda_{21}\lambda_{23} & \lambda_{43} & \lambda_{23}\lambda_{32} + \lambda_{22}\lambda_{33} + \lambda_{21}\lambda_{34} & \lambda_{54} \\ 0 & 0 & \lambda_{31} & 2\lambda_{21}\lambda_{22} & \lambda_{42} & \lambda_{23}\lambda_{31} + \lambda_{22}\lambda_{32} + \lambda_{21}\lambda_{33} & \lambda_{53} \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_{21}^2 & \lambda_{41} & \lambda_{22}\lambda_{31} + \lambda_{21}\lambda_{32} & \lambda_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_{21}\lambda_{31} & \lambda_{51} \end{array}\right)$$

Следовательно, форма $P_{120}^{O_{46}}$ выражается через формы $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$, $P_{72}^{O_{46}}$ и $P_{96}^{O_{46}}$.

Отметим, что, в каждом из рассмотренных случаев, числа

$$\lambda_{ti} \neq 0 \ (t = 2,\ 3,\ 4). \tag{3}$$

Для каждого следующего значения t количество строк матрицы $A_{(t+1)\times s(t)}$ увеличивается на 1, а количество столбцов (слагаемых в равенстве (2)) — более, чем на 1. Поэтому $t+1 < s(t)$ при $t > 5$.

Покажем, что любой элемент $P^{O_{46}}_{24t} \in P^{O_{46}}$ $(t \geq 5)$ представим в виде (2) при $r = \overline{1,4}$. Для этого методом математической индукции докажем, что ранг матрицы $A_{(t+1)\times s(t)}$ $(t \geq 5,\ r = \overline{1,4})$ равен $t+1$.

При $t = 5$ нетрудно убедиться в том, что ранг матрицы $A_{6\times 6}$ равен шести.

Предположим, что при $t = k$ ранг матрицы $A_{(k+1)\times s(k)}$ равен $k+1$, и докажем, что при $t = k+1$ ранг матрицы $A_{(k+2)\times s(k+1)}$ равен $k+2$.

Элемент $P^{O_{46}}_{24(k+1)}$ имеет степень на 24 большую, чем элемент $P^{O_{46}}_{24k}$. Поэтому его можно представить в виде

$$P^{O_{46}}_{24(k+1)} = F_{24k}P^{O_{46}}_{24} + \varphi\left(P^{O_{46}}_{48},\, P^{O_{46}}_{72},\, P^{O_{46}}_{96}\right),$$

где форма F_{24k} имеет тот же вид относительно форм $P^{O_{46}}_{24}$, $P^{O_{46}}_{48}$, $P^{O_{46}}_{72}$ и $P^{O_{46}}_{96}$, что и элемент $P^{O_{46}}_{24k}$ относительно этих же форм.

Тогда, на основании (2),

$$\begin{aligned}
P^{O_{46}}_{24(k+1)} \;=\; & \sum_{\substack{n_r=\overline{0,k}\\ \sum\limits_r r\cdot n_r = k}} \mu_l\Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r}\\ \sum\limits_{i=1}^{r+1} n_{ri}=n_r\\ r\neq 1}} \prod_{r\neq 1} P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1}) \prod_{i=1}^{r+1} \lambda_{ri}^{n_{ri}} \times \\
& \times \left(P^{T_{22}}_{24}\right)^{k-\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)-n_1} \left(P^{O_{46}}_{24}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)+n_1+1}\Bigg) + \\
+ \; & \sum_{\substack{n_r=\overline{0,k+1}\\ \sum\limits_r r\cdot n_r = k+1\\ r\neq 1}} \mu_m\Bigg(\sum_{\substack{n_{ri}=\overline{0,n_r}\\ \sum\limits_{i=1}^{r+1} n_{ri}=n_r\\ r\neq 1}} \prod_{r\neq 1} P(n_{r1},\ldots,n_{rr+1}) \prod_{i=1}^{r+1} \lambda_{ri}^{n_{ri}} \times \\
& \times \left(P^{T_{22}}_{24}\right)^{k+1-\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)} \left(P^{O_{46}}_{24}\right)^{\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri}-n_r\right)}\Bigg),
\end{aligned}$$

где $l = \overline{1, s(k)},\ m = \overline{s(k)+1, s(k+1)}$.

В первых $s(k)$ столбцах матрицы $A_{(k+2)\times s(k+1)}$ элементы, соответствующие $(k+1)$-й степени образующей $P^{T_{22}}_{24}$, равны нулю, так как $\sum\limits_{r\neq 1}\left(\sum\limits_{i=1}^{r+1} i\cdot n_{ri} - n_r\right) \geq 0$. Значит, в матрице $A_{(k+2)\times s(k)}$, образованной этими столбцами, $(k+2)$-я строка будет нулевой. Тогда, по предположению, $rang A_{(k+2)\times s(k)} = k+1$. Следовательно, среди $s(k)$ столбцов ровно $k+1$ линейно независимых.

В остальных $s(k+1)-s(k)$ столбцах элементы $(k+2)$-й строки будут отличны от нуля (см.(3)). Поэтому, добавив любой из этих столбцов к $k+1$ линейно независимым столбцам, получим $k+2$ линейно независимых столбцов. Таким образом, $rang A_{(k+2)\times s(k+1)} = k+2$.

Следовательно, любой элемент $P_{24t}^{O_{46}} \in P^{O_{46}}$ $(t \geq 5)$ представим в виде многочлена подходящей степени от форм $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$, $P_{72}^{O_{46}}$ и $P_{96}^{O_{46}}$, то есть

$$P_{24t}^{O_{46}} = \varphi\left(P_{24}^{O_{46}},\, P_{48}^{O_{46}},\, P_{72}^{O_{46}},\, P_{96}^{O_{46}}\right). \tag{4}$$

Алгебра $P^{O_{46}}$ многочленов Погорелова группы O_{46} порождается многочленами степеней 24, 48, 72, 96, а формы $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$, $P_{72}^{O_{46}}$ и $P_{96}^{O_{46}}$— ее образующие.

Теорема доказана.

Отметим, что формы $P_{24}^{O_{46}}$, $P_{48}^{O_{46}}$, $P_{72}^{O_{46}}$, $P_{96}^{O_{46}}$ не являются алгебраически независимыми. Действительно, между образующими алгебры $P^{O_{46}}$ имеются сизигии, то есть существуют многочлены

$$\begin{aligned} f_1(z_1,z_2,z_3) &= a_{11}z_1^6 + a_{12}z_1^4z_2 + a_{13}z_1^3z_3 + a_{14}z_1^2z_2^2 + a_{15}z_1z_2z_3 + \\ &\quad + a_{16}z_2^3 + z_3^2, \\ f_2(z_1,z_2,z_3,z_4) &= a_{21}z_1^6 + a_{22}z_1^4z_2 + a_{23}z_1^3z_3 + a_{24}z_1^2z_2^2 + a_{25}z_1^2z_4 + \\ &\quad + a_{26}z_1z_2z_3 + a_{27}z_2^3 + z_2z_4, \end{aligned}$$

такие, что подстановка $z_1 = P_{24}^{O_{46}},\ z_2 = P_{48}^{O_{46}},\ z_3 = P_{72}^{O_{46}},\ z_4 = P_{96}^{O_{46}}$ обращает их тождественно в ноль.

Значения коэффициентов a_{ij} $(i = 1,\ 2,\ j = \overline{1,7})$, найденные из соответствующего равенства (4), здесь не приведены из-за их громоздкости. Например, коэффициент a_{11} имеет вид:

$$a_{11}=\frac{46819853251356885452034504488689693566101393393600780966654791570605923916117450459801377030890631 6}{1126202262660249480910566358290898507939257367248436494812106490656184207582544174569387 5}$$

Вывод

В работе продолжено исследование строения алгебр многочленов Погорелова конечных унитарных групп G, порожденных отражениями, в случае, когда алгебра P^G не совпадает с алгеброй I^G инвариантов группы G. Получено решение указанной задачи для октаэдральных групп O_m унитарной плоскости. А именно: найдены степени образующих алгебры $P^{O_{46}}$ многочленов Погорелова группы O_{46}.

Список литературы

[1] Рудницкий О.И. *Алгебраические поверхности с конечными группами симметрий в унитарном пространстве.* – Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. - Минск: БГУ, 1990. - 11 с.

[2] Рудницкий О.И., Романенко И.А. *О специальных инвариантах тетраэдральных групп, порожденных отражениями на унитарной плоскости* // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. - 2006. - Т.19(58),N1. - с. 29 – 37.

[3] Crowe D.W. *Some tow-dimensional unitary groups generated by three reflections* // Can. J. Math. - 1961. - 13. - P. 418 – 426.

[4] Shephard G.C., Todd J.A. *Finite unitary reflection groups* // Can. J. Math. - 1954. - 6, N2. - P. 274 – 304.

Алгебри многочленів Погорелова октаедральних груп

Досліджені алгебри P^{O_m} многочленів Погорелова октаедральних груп O_m, що породжені віддзеркаленнями на унітарної площині. Знайдені степені твірних алгебри $P^{O_{46}}$ многочленів Погорелова групи O_{46}.

Ключові слова: многочлени Погорелова, октаедральних груп, породжені віддзеркаленнями, степені твірних алгебри.

Algebras of polynomials Pogorelov of the octahedral groups

The algebras P^{O_m} of the Pogorelov polynomials of the octahedral groups O_m generated by reflections on the unitary plane are investigated. The degrees of a generators of the algebra $P^{O_{46}}$ of the Pogorelov polynomials of the group O_{46} are found.

Keywords: Pogorelov polynomials, octahedral groups, reflection groups, degrees of a generators of the algebra.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 132–150.

УДК 517.98

Ф. С. Стонякин

СИЛЬНЫЕ КОМПАКТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА СВОЙСТВА РАДОНА-НИКОДИМА ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ЗАРЯДОВ

В данной работе исследуются новые характеристики векторных зарядов со значениями в локально выпуклых пространствах: сильная компактная вариация, сильная компактная абсолютная непрерывность, универсальная компактная и предельная формы свойства Радона-Никодима. Доказано, что любое пространство Фреше обладает универсальной компактной и предельной формами свойства Радона-Никодима. Рассмотрены некоторые приложения.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, пространство Фреше, векторный заряд, интеграл Бохнера, сильная компактная вариация, сильная компактная абсолютная непрерывность, универсальное K-свойство Радона-Никодима, предельная форма свойства Радона-Никодима, операторная мера.

Введение

Как известно, наиболее эффективный аналог интеграла Лебега в бесконечномерных пространствах — интеграл Бохнера — теряет одно из важнейших свойств интеграла Лебега: не всякое абсолютно непрерывное отображение является интегралом Бохнера [1]. Наиболее известный подход к данной проблеме заключается в выделении класса пространств со свойством Радона-Никодима (RNP), в которых это различие отсутствует. Недостатком данного подхода является отсутствие свойства (RNP) у многих важнейших пространств [2, 3]. Тем не менее, активные исследования свойства Радона-Никодима, а также его различных модификаций продолжаются и сегодня [4] — [11].

Другой подход приводит к теоремам типа Радона-Никодима, позволяющим описать неопределённый интеграл Бохнера в пространствах, которые не обладают свойством (RNP) [12] — [14].

В работе [15] нами совместно с И. В. Орловым предложен новый подход к указанной проблематике и введены новые компактные характеристики ЛВП-значных отображений: *сильная компактная вариация* (V_K) и *сильная компактная абсолютная непрерывность* (AC_K), получено описание класса AC_K как специального подмножества класса $W_1^1(I,E)$ всех неопределённых интегралов Бохнера отображений вещественного отрезка $I=[a;b]$ в ЛВП E.

Далее в [16, 17] нами был получен новый результат: совпадение классов компактно абсолютно непрерывных отображений $AC_K(I,E)$ и неопределённых интегралов Бохнера $W_1^1(I,E)$ в случае, когда E — пространство Фреше (иначе говоря, *любое пространство Фреше обладает K-свойством Радона-Никодима* RNP_K). Это позволило установить ещё более сильный топологический результат — *предельную форму свойства Радона-Никодима*. А именно, для любого пространства Фреше E пространство неопределённых интегралов Бохнера $W_1^1(I,E)$ можно двумя способами представить в виде индуктивного предела:

$$W_1^1(I,E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(I,E_C) \overset{top}{=} \varinjlim_{C'\in\mathcal{C}(E)} AC(I,E_{C'}), \tag{1}$$

где $\overrightarrow{E}_{\mathcal{C}}=\{E_C\}_{C\in\mathcal{C}(E)}$ — шкала банаховых пространств, порождённых всеми абсолютно выпуклыми компактами C в E.

Естественно возникает вопрос о переносе полученных результатов на случай конечных векторных зарядов со значениями в пространстве Фреше, которому и посвящена настоящая работа. Всюду далее *конечный векторный заряд* ν понимается как счётно-аддитивное отображение $\nu:\Sigma\to E$, где $|\nu(E)|<\infty$, E — вещественное пространство Фреше, Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого пространства S с конечной вещественной мерой μ, $S\in\Sigma$.

Основным результатом настоящей работы является доказательство справедливости предельной формы свойства Радона-Никодима для векторных зарядов в любом пространстве Фреше (теорема 8): для любого пространства Фреше E пространство Соболева неопределённых интегралов Бохнера $W_1^1(S,E)$ отображений $f:\Sigma\to E$ можно двумя способами представить как индуктивный предел:

$$W_1^1(S,E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(S,E_C) \overset{top}{=} \varinjlim_{C'\in\mathcal{C}(E)} AC(S,E_{C'}). \tag{2}$$

Работа состоит из трёх разделов. В первом разделе мы вводим аналоги сильных компактных характеристик для случая векторных зарядов (определения 1 и 2) и доказываем теорему типа Радона-Никодима о представимости всякого компактно абсолютно непрерывного отображения в виде интеграла Бохнера (теорема 1). Во втором разделе мы доказываем основной результат работы — справедливость предельной формы свойства Радона-Никодима для векторных зарядов в любом пространстве Фреше (теорема 8). В третьем разделе работы рассмотрены приложения

полученных результатов к некоторым задачам анализа: новый критерий непрерывности линейных операторов, заданных на пространствах Соболева $W_1^1(S,E)$ (следствие 10), теорема о среднем с компактной выпуклой оценкой для векторных зарядов (теорема 11), усиленные версии известной теоремы Березанского-Гельфанда-Костюченко о дифференцировании операторных мер со значениями в сепарабельных гильбертовых пространствах (теорема 13) и банаховых пространствах (теорема 15), а также теорема о дифференцируемости операторных мер со значениями в несепарабельных ЛВП (теорема 16).

1. Сильные компактные характеристики векторных зарядов

Начнём с определения сильной компактной вариации для конечных векторных зарядов со значениями в отделимых ЛВП. Напомним ([18], стр. 104), что *полной вариацией векторного заряда* $\nu : \Sigma \to E$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|^*$ в E называется отображение $|\ \nu\ |^*\colon \Sigma \to [0;+\infty]$, которое определяется равенством

$$|\nu|^*(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|\nu(A_k)\|^* \quad \forall A \in \Sigma, \tag{3}$$

где супремум берётся по всем конечным наборам $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \Sigma$ таким, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subseteqq A$. Легко проверить, что отображение $|\ \nu\ |^*$ — конечная счётно-аддитивная положительная мера на Σ (см. [18], стр. 104). Обозначим через $V(S,E)$ множество всех векторных зарядов $\nu : \Sigma \to E$, которые имеют конечную полную вариацию $|\ \nu\ |^*\ (S) < \infty$ относительно любой непрерывной полунормы $\|\cdot\|^*$ на E (см. (3)). Далее E, E_i $(i = \overline{1,3})$ — отделимые ЛВП. Будем обозначать через $E_C = (span\ C, \|\cdot\|_C)$ банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_C$, равными функционалам Минковского абсолютно выпуклых компактов $C \in \mathcal{C}(E)$.

Определение 1. Будем говорить, что ν имеет *(сильную) компактную вариацию* на S, если существует компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in V(S, E_C)$. Примем обозначения: $\nu \in V_K(S,E)$, $|\ \nu\ |_C$ — полная вариация векторного заряда ν относительно нормы $\|\cdot\|_C$.

Точно так же, как и для отображений вещественного отрезка $I = [a;b]$ в E (см. [15]), проверяются следующие общие свойства класса $V_K(S,E)$.

Предложение 1. *Справедливо включение $V_K(S,E) \subset V(S,E)$. В случае $dim E < \infty$ оба указанных класса совпадают.*

Предложение 2. *Класс $V_K(S,E)$ является линейным.*

Предложение 3. *Если $\nu \in V_K(S,E_1)$, $A \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$, то $A \circ \nu \in V_K(S,E_2)$.*

Предложение 4. *Пусть E — полное ЛВП, (S_1, Σ_1) и (S_2, Σ_2) — два непересекающихся измеримых пространства. Тогда $\nu \in V_K(S_1 \bigcup S_2, E)$ в том и только в том случае, когда $\nu|_{S_i} \in V_K(S_i, E)$, $i = 1, 2$.*

Предложение 5. *Заряд $(\nu_1, \nu_2) \in V_K(S, E_1 \times E_2)$ в том и только в том случае, когда $\nu_i \in V_K(S, E_i)$, $i = 1, 2$. При этом, если $\mid \nu_i \mid_{C_i} (S) < \infty$, где $C_i \in \mathcal{C}(E_i)$, $i = 1, 2$, то*

$$\frac{1}{2}\left[\mid \nu_1 \mid_{C_1} + \mid \nu_2 \mid_{C_2}\right] \leqslant \mid (\nu_1, \nu_2) \mid_{C_1 \times C_2} \leqslant \left[\mid \nu_1 \mid_{C_1} + \mid \nu_2 \mid_{C_2}\right].$$

Пусть $\mathbb{B}(E_1 \times E_2; E_3)$ — пространство всех билинейных непрерывных операторов, действующих из $E_1 \times E_2$ в E_3.

Предложение 6. *Если $\nu_i \in V_K(S, E_i)$, $i = 1, 2$, $B \in \mathbb{B}(E_1 \times E_2; E_3)$, то $B(\nu_1, \nu_2) \in V_K(S, E_3)$. При этом справедливо неравенство*

$$\mid B(\nu_1, \nu_2) \mid_{B(C_1 \times C_2)} \leqslant \sup_{A \in \Sigma} \|\nu_1(A)\|_{C_1} \cdot \mid \nu_2 \mid_{C_2} + \sup_{A \in \Sigma} \|\nu_2(A)\|_{C_2} \cdot \mid \nu_1 \mid_{C_1}.$$

Предложение 7. *Если $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(E)$, $C_1 \subset \lambda \cdot C_2$ $(\lambda > 0)$, то*

$$\mid \nu \mid_{C_2} \leqslant \lambda \cdot \mid \nu \mid_{C_1}.$$

Возникает естественный вопрос о возможности переноса компактной субдифференцируемости почти всюду ЛВП-значных отображений вещественного отрезка на случай векторных зарядов $\nu \in V_K(S, E)$ ([15], теорема 1.1). Отметим, что вообще говоря, такой перенос невозможен.

Действительно (см., например, замечание 1 §1 главы IV или §VI.1 в [19]), даже в случае $S \subset \mathbb{R}^2$ можно подобрать Σ, меру μ, суммируемую функцию $f : S \to \mathbb{R}$ и убывающую последовательность множеств $A_k \in \Sigma$ так, чтобы

$$\frac{1}{\mu(x + A_k)} \int\limits_{x + A_k} f(t) d\mu(t) \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

для $x \in \widetilde{S}$, где $\widetilde{S} \in \Sigma$ — некоторое множество с $\mu(\widetilde{S}) > 0$.

Это означает, что заряды (сильной) ограниченной вариации (в случае $E = \mathbb{R}$, $V_K(S, \mathbb{R}) = V(S, \mathbb{R})$) в силу предложения 1 могут быть не дифференцируемыми на множестве положительной меры даже в случае $S \subset \mathbb{R}^2$ и $E = \mathbb{R}$. Поэтому методика исследований для отображений вещественного отрезка в ЛВП [15], которая существенно опирается на исчисление компактных субдифференциалов, неприменима в случае векторных зарядов.

Тем не менее, возможно получить теорему типа Радона-Никодима для μ-абсолютно непрерывных векторных зарядов, обладающих сильной компактной вариацией, опираясь на известные результаты ([12], теоремы 1 и 2) и ([20], теорема 8.19.4) о представимости μ-абсолютно непрерывных векторных зарядов в виде интегралов Бохнера и Петтиса. Заметим однако, что упомянутые результаты из

[12, 20] справедливы только для векторных зарядов $\nu : \Sigma \to E$ и не могут быть использованы для исследования отображений $F : I = [a; b] \to E$. Это означает, что методика настоящей работы неприменима в случае отображений $F : I = [a; b] \to E$ и не может заменить методику [16, 17], основанную на K-субдифференциальном исчислении.

Для того, чтобы сформулировать полученный результат, нам потребуется новая характеристика зарядов $\nu \in V_K(S, E)$, а именно — *(сильная) компактная абсолютная непрерывность* относительно конечной числовой меры μ на Σ. Обозначим через $AC(S, E)$ множество всех зарядов $\nu \in V(S, E)$, обладающих свойством обычной *абсолютной непрерывности заряда относительно* μ, то есть таких, что мера $|\nu|^* \ll \mu$ ($\mu(A) = 0 \Rightarrow |\nu|^*(A) = 0$ или $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ (\mu(A) < \delta) \Rightarrow |\nu|^*(A) < \varepsilon$).

Определение 2. Будем говорить, что векторный заряд $\nu \in V_K(S, E)$ *(сильно) компактно абсолютно непрерывен на* S *относительно* μ, если существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in AC(S, E_C)$. Примем обозначение:
$\nu \in AC_K(S, E)$.

Отметим, что общие свойства класса $AC_K(I, E)$ (см. [15], предложения 2.1 — 2.8) непосредственно переносятся на класс $AC_K(S, E)$. Здесь мы сформулируем лишь те из них, которые будут использованы нами далее.

Предложение 8. *(i)* $AC_K(S, E) \subset AC(S, E)$*; если* $dim E < \infty$*, то оба указанных класса совпадают.*
(ii) $\nu \in AC_K(S, E) \Rightarrow \nu \ll \mu$*, т.е.* $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.
(iii) Если $\nu \in AC_K(S, E_1)$*,* $A \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$*, то* $A \circ \nu \in AC_K(S, E_2)$.

Перейдём теперь к теореме о представимости зарядов из $AC_K(S, E)$ в виде интегралов Бохнера. Пусть $\{\|\cdot\|_j\}_{j\in J}$ — некоторая определяющая система полунорм в ЛВП E, $\widehat{E}_j$ — пополнения пространств $E_j := E/ker\|\cdot\|_j$ относительно фактор-норм $\|\cdot\|\widehat{}_j$. Напомним, что интегрируемость по Бохнеру отображения $f : S \to E$ означает его интегрируемость в каждом из пространств $\widehat{E}_j$, $j \in J$ (т.е. интегрируемость каждого из отображений $f_j = \varphi_j(f)$, где $\varphi_j : E \to \widehat{E}_j$ — канонические вложения).

Теорема 1. *Если* $\nu \in AC_K(S, E)$*, то найдётся такое интегрируемое по Бохнеру отображение* $f : S \to E$*, что* $\forall A \in \Sigma$ *верно*

$$\nu(A) = (B) \int\limits_A f(t) d\mu(t). \tag{4}$$

Доказательство данной теоремы опирается на следующие результаты.

Теорема 2. *(см.* [12]*, теоремы 1 и 2)*
Пусть E *— банахово пространство,* $\nu : \Sigma \to E$ *— векторный заряд. Соотношение* (4) *верно в том и только в том случае, когда*

(i) $\nu \ll \mu$;
(ii) $\nu \in V(S,E)$;
(iii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon \in \Sigma$ *такое, что* $\mu(S\backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$ *и множество*

$$A_\varepsilon(\nu) = \left\{ \frac{\nu(A)}{\mu(A)} \;\middle|\; A \subset A_\varepsilon,\ \mu(A) > 0,\ A \in \Sigma \right\} \tag{5}$$

предкомпактно в E.

Теорема 3. *(см. теорему 8.19.4 из* [20]*, а также замечание перед ней)*
Пусть E *— отделимое ЛВП,* $\nu : \Sigma \to E$ *— векторный заряд, причём:*

(i) $\nu \ll \mu$;
(ii) *множество* $A_0(\nu) = \left\{ \frac{\nu(A)}{\mu(A)} \;\middle|\; \mu(A) > 0,\ A \in \Sigma \right\}$ *слабо предкомпактно в* E.

Тогда заряд ν *представим в виде интеграла Петтиса (*[20]*, 8.14.9):*

$$\nu(A) = (P) \int\limits_A f(t) d\mu(t)\ \forall A \in \Sigma, \tag{6}$$

где $f : S \to E$ *— некоторое интегрируемое по Петтису на* S *отображение причём* $f(S) \subset \overline{co}\ A_0(\nu)$.

Предложение 9. *(см.* [18]*, с. 105)*
Пусть E *— банахово пространство, векторный заряд* $\nu : \Sigma \to E$ *допускает представление* (6)*. Если* $\nu \in V(S,E)$*, отображение* f *из* (6) *сепарабельнозначно, то* f *интегрируемо по Бохнеру и верно* (4).

Теперь, опираясь на теоремы 2 и 3, а также предложение 9, докажем теорему 1.

Доказательство. 1). Имеем $\nu \in AC_K(S,E) \Rightarrow \exists C \in \mathcal{C}(E)$: $\nu \in AC(S, E_C)$, т.е. мера $|\ \nu\ |_C$ конечна и $|\ \nu\ |_C \ll \mu$ (см. определение 2). Следовательно, в силу классической теоремы Радона-Никодима ([21], теорема V.2.1), существует такая интегрируемая по Лебегу на S функция $\varphi : S \to [0; +\infty]$, что

$$|\ \nu\ |_C\ (A) = (L) \int\limits_A \varphi(t) d\mu(t) \qquad (\forall A \in \Sigma). \tag{7}$$

Как известно, в случае $E = \mathbb{R}$ интегрируемость по Лебегу совпадает с интегрируемостью по Бохнеру. Поэтому, в силу теоремы 2, $\forall \varepsilon > 0$ существует такое множество $A_\varepsilon \in \Sigma$, что $\mu(S\backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$ и множество

$$A_\varepsilon(|\ \nu\ |_C) = \left\{ \frac{|\ \nu\ |_C\ (A)}{\mu(A)} \;\middle|\; A \subset A_\varepsilon,\ \mu(A) > 0,\ A \in \Sigma \right\} \tag{8}$$

предкомпактно, т.е. ограничено в $\mathbb{R}$. Из (5) и (8) вытекает, что

$$\|A_\varepsilon(\nu)\|_C = \sup \left\{ \frac{\|\nu\|_C(A)}{\mu(A)} \;\middle|\; A \subset A_\varepsilon,\ \mu(A) > 0,\ A \in \Sigma \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{\frac{|\nu|_C(A)}{\mu(A)} \;\middle|\; A\subset A_\varepsilon,\ \mu(A)>0,\ A\in\Sigma\right\} = \sup A_\varepsilon(|\nu|_C) =: K_\varepsilon < \varepsilon,$$

то есть $\forall\varepsilon>0$ множество $A_\varepsilon(\nu)$ содержится в некотором компакте $K_\varepsilon\cdot C\subset E$.

Следовательно, по теореме 3, $\forall\varepsilon>0$ существует такое отображение $f_\varepsilon : S\to E$, что справедливо равенство

$$\nu(A) = (P)\int\limits_A f_\varepsilon(t)d\mu(t) \qquad (\forall A\in\Sigma,\ A\subset A_\varepsilon). \tag{9}$$

Пусть $\varepsilon_n=\frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ и $A_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_{\varepsilon_k}$. Заметим, что последовательность множеств A_n возрастает. Поскольку $\mu(S\backslash A_n)\leqslant\mu(S\backslash A_{\varepsilon_n})=\frac{1}{n}$, то $\mu\left(S\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right)=0$. Воспользовавшись тем, что последовательность A_n возрастает, будем выбирать отображения $f_n=f_{\varepsilon_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ так, чтобы $f_m\,|_{A_n}= f_n$ при $m>n$. Положим

$$f(t)=\begin{cases} f_n(t), & \text{если } t\in A_n\ ;\\ 0, & \text{в противном случае .}\end{cases}$$

Тогда

$$\nu(A) = (P)\int\limits_A f(t)d\mu(t) \quad \forall A\in\Sigma. \tag{10}$$

Действительно, $\forall\ell\in E^*$ и $A\in\Sigma$

$$\ell(\nu(A)) = \lim_{n\to\infty}\ell\left(\nu(A\bigcap A_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\ell\left((P)\int\limits_{A\bigcap A_n} f(t)d\mu(t)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(L)\int\limits_{A\bigcap A_n}\ell(f(t))d\mu(t) = (L)\int\limits_A\ell(f(t))d\mu(t),$$

так как последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и множество $S\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ имеет μ-меру нуль, а также $\nu\in V_K(S,E)\subset V(S,E)$.

2). Зафиксируем $j\in J$ и подействуем отображением $\varphi_j : E\to\widehat{E}_j$ на обе части равенства (10):

$$\nu_j(A) = \varphi_j(\nu(A)) = (P)\int\limits_A f_j(t)d\mu(t) \qquad (\forall j\in J\ \forall A\in\Sigma).$$

Согласно предложению 8, $\nu_j\in AC_K(S,\widehat{E}_j)$ и поэтому $\nu_j\in V(S,\widehat{E}_j)$. Далее,

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f_n^j(S) = \varphi_j(f_n)(S)\subset\overline{co}\ A_0(\nu_j\,|_{A_n}) = \varphi_j(\overline{co}\ A_0(\nu\,|_{A_n}))$$

по теореме 3. Это означает, что $f_n^j(S)$ содержится в некотором компактном подмножестве банахова пространства $\widehat{E}_j$, откуда $f_j = \varphi_j(f)$ сепарабельнозначно и интегрируемо по Бохнеру в силу предложения 9. Следовательно, равенство (4) справедливо и теорема доказана. □

Далее будет показано, что для пространств Фреше справедливо и обратное утверждение (см. теорему 6).

Замечание 3. Ввиду недифференцируемости неопределённого интеграла Лебега по произвольной мере μ даже для $S \subset \mathbb{R}^2$ (см. [19], §V1.1) в общем случае не удаётся доказать для векторных зарядов включение $f(t) \in \partial_K F(t)$ (см. [15], доказательство теоремы 3.2), справедливое для отображений отрезка $I = [a; b]$ в ЛВП E. Это не позволяет перенести на векторные заряды критерий сильной компактной абсолютной непрерывности, полученный ранее в ([15], теорема 3.2).

Рассмотрим достаточное условие компактной абсолютной непрерывности векторных зарядов в случае произвольного отделимого ЛВП E.

Теорема 4. *Пусть E — отделимое ЛВП и*

$$\nu(A) = (B)\int\limits_A f(t)d\mu(t) \quad \forall A \in \Sigma,$$

причём $\int\limits_S \|f(t)\|_C d\mu(t) < \infty$ для некоторого $C \in \mathcal{C}(E)$. Тогда $\nu \in AC_K(S, E)$.

Доказательство. Так как отображение f интегрируемо по Бохнеру, то оно интегрируемо по Петтису на любом множестве $A \in \Sigma$. Отсюда, учитывая включение $f(t) \in \|f(t)\|_C \cdot C$, $\forall A \in \Sigma$, $\ell \in E^*$, имеем

$$\ell(\nu(A)) = (L)\int\limits_A \ell(f(t))d\mu(t) \leqslant \int\limits_A \|f(t)\|_C d\mu(t) \cdot \sup \ell(C).$$

Далее, по известному следствию из теоремы Хана-Банаха о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества, имеем

$$\nu(A) \in \int\limits_A \|f(t)\|_C d\mu(t) \cdot C, \quad \|\nu(A)\|_C \leqslant \int\limits_A \|f(t)\|_C d\mu(t).$$

Поэтому $\nu \in V_K(\Sigma, E)$, $\nu \ll \mu$, $|\ \nu\ |_C \ll \mu$. Следовательно, $\nu \in AC_K(S, E)$. □

2. Предельная форма свойства Радона-Никодима справедлива для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше

Данный пункт посвящён доказательству представимости пространства Соболева $W_1^1(S, E)$ в виде топологического индуктивного предела как шкалы пространств

абсолютно непрерывных зарядов $\{AC(S, E_C)\}_{C\in\mathcal{C}(E)}$, так и шкалы пространств Соболева $\{W_1^1(S, E_C)\}_{C\in\mathcal{C}(E)}$. Эта форма свойства Радона-Никодима даёт возможность в ряде случаев «обходить» отсутствие классического свойства (RNP). Начнём со вспомогательного понятия *универсальной компактной формы свойства Радона-Никодима*, или, *универсального K-свойства Радона-Никодима.*

Далее (S, Σ, μ) — пространство с конечной вещественной σ-аддитивной мерой μ. В предыдущем пункте было показано, что

$$AC_K(S, E) \subset W_1^1(S, E) \subset AC(S, E). \tag{11}$$

Как и в случае отображений $F : I = [a; b] \to E$ (см. [15], определение 3.1), выделим класс ЛВП, характеризующихся равенством

$$AC_K(S, E) = W_1^1(S, E) \tag{12}$$

для произвольного фиксированного пространства с мерой (S, Σ, μ).

Определение 3. Будем говорить, что ЛВП E обладает *K-свойством Радона-Никодима* относительно пространства с конечной мерой (S, Σ, μ), если справедливо (12). Примем обозначение $E \in RNP_K(S, \mu)$. В случае, когда (12) выполнено для всех пространств с конечной мерой (S, Σ, μ), примем обозначение $E \in RNP_K^U$ и будем говорить, что E обладает *универсальным K-свойством Радона-Никодима.*

Вообще говоря, не всякое ЛВП обладает свойством RNP_K^U. Например, пусть $S = I = [a; b]$ — вещественный отрезок, Σ — борелевская σ-алгебра подмножеств S, а $\mu = mes$ — мера Лебега на Σ. Легко видеть, что всегда $RNP_K(I, mes) = RNP_K$. В ([15], пример 3.1) показано, что существует ЛВП E без RNP_K. Это означает, что данное пространство E не обладает свойством $RNP_K(I, mes)$, а тем более — свойством RNP_K^U.

В ([16], теорема 4) доказана справедливость RNP_K в любом пространстве Фреше. Напомним, что любое пространство Фреше E является проективным пределом банаховых пространств $\widehat{E}_n$, где $\widehat{E}_n$ — пополнения пространств $E_n = E/ker\|\cdot\|_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ по соответствующим фактор-нормам.

Оказывается, что свойство RNP_K^U справедливо в произвольном пространстве Фреше. Это вытекает из следующего результата ([16], теорема 2).

Теорема 5. *Пусть E — пространство Фреше и $1 \leqslant p < \infty$. Если отображение $f : S \to E$ интегрируемо по Бохнеру, причём $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int\limits_S \|f(t)\|_n^p \, d\mu(t) < \infty$, то существует такой компакт $C \subset E$, что $\int\limits_S \|f(t)\|_C^n \, d\mu(t) < \infty$.*

Из теоремы 5 и соотношения (11) немедленно вытекает

Теорема 6. *Любое пространство Фреше обладает свойством RNP_K^U.*

Таким образом, в пространствах Фреше свойства RNP_K и RNP_K^U равносильны. Отметим, что в общем случае (для произвольных ЛВП) вопрос о связи RNP_K^U и RNP_K остаётся открытым для дальнейшего изучения.

Теперь переходим к основному результату раздела. Приведём вспомогательный результат, вытекающий из теоремы 1 и свойства компактной аппроксимации для пространств Фреше ([16], теорема 6).

Теорема 7. *Если E — пространство Фреше, то имеет место векторный изоморфизм*

$$W_1^1(S,E) \overset{vect}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(S,E_C) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(S,E_C) \quad (\forall\ (S,\mu))\,. \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, в силу свойства компактной аппроксимации, $\forall C' \in \mathcal{C}(E)$ существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что справедливо компактное вложение: $E_{C'} \hookrightarrow\hookrightarrow E_C$. Это позволяет нам рассмотреть банахово пространство E_C как основное; при этом $C' \in \mathcal{C}(E_C)$, $(E_C)_{C'} = E_{C'}$, $\nu \in AC(S,(E_C)_{C'}) = AC(S,E_{C'})$. Следовательно, по теореме 1,

$$\nu(Q) = \int\limits_Q f(t)d\mu(t)\ \forall Q \in \Sigma \quad (f : S \to E_C),$$

причём отображение f μ-интегрируемо по Бохнеру в пространстве E_C. □

В действительности, как будет показано ниже, изоморфизм (13) является топологическим. В пространстве Фреше неопределённых интегралов Бохнера $W_1^1(S,E)$ над пространством Фреше E введём определяющую систему полунорм

$$\left\{ \|\nu\|^j = \int\limits_S \|f(t)\|_j d\mu(t) \right\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В пространствах $W_1^1(S,E_C)$ и более обширных пространствах K-абсолютно непрерывных векторных зарядов $AC(S,E_C)$, $C \in \mathcal{C}(E)$, введём банаховы нормы

$$\|\nu\|^C = \int\limits_S \|f(t)\|_C\ d\mu(t).$$

Перед тем, как доказать основную теорему пункта, приведём вспомогательное утверждение ([17], лемма 2.1).

Лемма 1. *Пусть E — пространство Фреше. Если $\{C_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}(E)$ и $\forall m \in \mathbb{N}$ $\alpha_n = o\,(1/diam_m(C_n))$, то*

$$C = \overline{co}\ \left(\bigcup_{n=1}^\infty \alpha_n C_n \right) \in \mathcal{C}(E).$$

В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} diam_m(C_n) = 0\ \forall m \in \mathbb{N}$, *то*

$$C = \overline{co}\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \in \mathcal{C}(E).$$

Теорема 8. *В любом пространстве Фреше* E *справедлива предельная форма свойства Радона-Никодима* (2)*:*

$$W_1^1(S,E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(S,E_C) \overset{top}{=} \varinjlim_{C'\in\mathcal{C}(E)} AC(S,E_{C'}) \quad (\forall\ (S,\mu)).$$

Доказательство. Обозначим $Y = W_1^1(S,E)$, $Y^C = W_1^1(S,E_C)$, $Y^{\mathcal{C}} = \varinjlim\limits_{C\in\mathcal{C}(E)} Y^C$. Докажем, что $Y \overset{top}{=} Y^{\mathcal{C}}$.

1). Имеем $\forall C \in \mathcal{C}(E)$:

$$(E_C \hookrightarrow E) \Rightarrow (Y^C \hookrightarrow Y) \Rightarrow \left(\varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} Y^C = Y^{\mathcal{C}} \hookrightarrow Y\right).$$

Таким образом, необходимо проверить только непрерывность обратного вложения: $Y \hookrightarrow Y^{\mathcal{C}}$.

2). Пусть $\nu_n \xrightarrow{Y} 0$, причём $\nu_n(Q) = (B)\int\limits_Q f_n(t)d\mu(t)$, f_n — простые отображения. Следовательно, $\forall m$ (в каноническом представлении $E \cong \varprojlim\limits_{m} E_m$): $\|\nu_n\|^m \to 0$ при $n \to \infty$. Положим

$$B_m = \{x \in E \mid \|x\|_m \leqslant 1\},\ C_{mn} = B_m \bigcap span f_n(S) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Так как $dim\ span f_n(S) < \infty$, то $C_{mn} \in \mathcal{C}(E)$; при этом $diam_m C_{mn} = diam_m B_m = 2$. Отсюда $\widetilde{C}_{mn} = e_m(C_{mn})$ ($e_m : E \hookrightarrow E_m$ — канонические вложения) принадлежат $\mathcal{C}(E_m)$, причём $diam_{E_m}\widetilde{C}_{mn} = diam_m B_m = 2$ ($n \in \mathbb{N}$). Далее, поскольку

$$\|f_n(t)\|_{C_{mn}} = \|f_n(t)\|_m \quad (\forall t \in S, n \in \mathbb{N}),$$

то $\alpha_{mn} = \|\nu_n\|^{C_{mn}} = \int\limits_S \|f_n(t)\|_{C_{mn}} d\mu(t) = \int\limits_S \|f_n(t)\|_m d\mu(t) = \|\nu_n\|^m \to 0$ при $n \to \infty$.

Положим

$$\widetilde{C}_m = \overline{co}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_{mn}} \cdot C_{mn}\right) \quad (\widetilde{C}_m \searrow).$$

Согласно лемме 1, $\widetilde{C}_m \in \mathcal{C}(E_m)$. При этом:

$$\|\nu_n\|^{\widetilde{C}_m} \leqslant \|\nu_n\|^{\sqrt{\alpha_{mn}}C_{mn}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{mn}}}\|\nu_n\|^{C_{mn}} = \frac{\alpha_{mn}}{\sqrt{\alpha_{mn}}} = \sqrt{\alpha_{mn}} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

3). Рассмотрим E как плотное подпространство произведения $\widetilde{E} = \prod\limits_m \widetilde{E}_m$. Тогда $\widetilde{C} = \prod\limits_m \widetilde{C}_m$ — абсолютно выпуклый компакт в $\widetilde{E}$ по теореме Тихонова ([21], п. VI.8.1).

При этом

$$\widetilde{E}_{\widetilde{C}} \supset \prod_m \widetilde{E}_{m,\,\widetilde{C}_m},$$

откуда $C = \widetilde{C} \bigcap E \neq \varnothing$, $C \in \mathcal{C}(E)$ и

$$\varprojlim_m E_{m,\,\widetilde{C}_m} \cong \left(\prod_m \widetilde{E}_{m,\,\widetilde{C}_m} \right) \bigcap E \hookrightarrow \widetilde{E}_{\widetilde{C}} \bigcap E = E_C.$$

Таким образом,

$$\left(\nu_n \xrightarrow{Y_m^{\widetilde{C}_m}} 0 \ (\forall m) \right) \Longleftrightarrow \left(\nu_n \xrightarrow{\varprojlim_m Y_m^{\widetilde{C}_m}} 0 \right) \Longrightarrow \left(\nu_n \xrightarrow{Y^C} 0 \right) \Longrightarrow \left(\nu_n \xrightarrow{Y^{\mathcal{C}}} 0 \right).$$

Отсюда

$$\left(\nu_n \xrightarrow{Y} 0 \right) \Longrightarrow \left(\nu_n \xrightarrow{Y^{\mathcal{C}}} 0 \right).$$

4). Следовательно, вложение $Y \hookrightarrow Y^{\mathcal{C}}$ непрерывно на плотном подмножестве $\{\nu \in Y \mid f$ — простые $\}$ пространства Y, а значит, и на всём Y. Из непрерывности вложений $Y^{\mathcal{C}} \hookrightarrow Y$ и $Y \hookrightarrow Y^{\mathcal{C}}$ следует изоморфизм

$$Y \cong Y^{\mathcal{C}}, \tag{14}$$

т.е. (2) верно. Теорема доказана. □

Отметим, что изоморфизм (2) можно переформулировать для пространства интегрируемых по Бохнеру отображений $L_1(S, E)$.

Теорема 9. *В любом пространстве Фреше E справедлива предельная форма свойства Радона-Никодима:*

$$L_1(S,E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C \in \mathcal{C}(E)} L_1(S, E_C) \overset{top}{=} \varinjlim_{C' \in \mathcal{C}(E)} AC(S, E_{C'}) \quad (\forall\ (S,\mu)). \tag{15}$$

3. Некоторые приложения

3.1. **Новый критерий непрерывности линейных операторов.** Отметим приложение, вытекающее из известного критерия непрерывности линейных операторов, заданных на индуктивном пределе ([23], II.6.1).

Теорема 10. *Пусть E — пространство Фреше, X — произвольное ЛВП, $A : W_1^1(S,E) \to X$ — линейный оператор. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) A непрерывен на $W_1^1(S,E)$;
(ii) A непрерывен на каждом $W_1^1(S, E_C)$, $C \in \mathcal{C}(E)$;
(iii) A непрерывен на каждом $AC(S, E_{C'})$, $C' \in \mathcal{C}(E)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для линейных операторов $A : L_1(S,E) \to X$.

3.2. **Теорема о среднем для векторных зарядов с компактной выпуклой оценкой.** В качестве второго приложения докажем обобщённую теорему Лагранжа с компактной оценкой для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше.

Теорема 11. *Пусть E — пространство Фреше, а заряд $\nu : S \to E$ представим в виде интеграла Бохнера:*

$$\nu(Q) = \int\limits_Q f(t)d\mu(t) \quad \forall Q \in \Sigma \quad (f : S \to E).$$

Если $f(t) \in \varphi(t) \cdot B$ при $t \in S\backslash e$, где множество $\nu(e)$ имеет скалярную μ-меру нуль, $\varphi(t)$ неотрицательна и суммируема на $S\backslash e$, а множество B замкнуто и абсолютно выпукло в E, то существует такой абсолютно выпуклый компакт $C \subset B$, что функция $\|f(t)\|_C$ μ-суммируема и

$$\nu(Q) \in \left(\int\limits_{Q\backslash e} \|f(t)\|_C d\mu(t) \right) \cdot C \quad \forall Q \in \Sigma. \tag{16}$$

Доказательство. Заметим, что из равенства $\ell(\nu(e)) = \ell\left(\int\limits_e f(t)d\mu(t)\right) = 0$ $\forall \ell \in E^*$ легко вытекает $\int\limits_e f(t)d\mu(t) = 0$. По стандартной схеме [28] с использованием теоремы о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества можно проверить оценку

$$\nu(Q) \in \left(\int\limits_{Q\backslash e} \varphi(t)d\mu(t) \right) \cdot B \quad \forall Q \in \Sigma. \tag{17}$$

Тогда, по теореме 7, f μ-интегрируемо по Бохнеру в некотором пространстве $E_{\widetilde{C}}$, $\widetilde{C} \in \mathcal{C}(E)$. При этом можно считать, что $f(t) \in \varphi(t) \cdot C$ для всякого $t \in S\backslash e$, где $C = B \bigcap \widetilde{C}$.

3). Теперь остаётся применить формулу конечных приращений (17) с заменой множества B на C. □

Следствие 1. *(***Теорема о среднем.***) В условиях теоремы 11 существует такое компактное множество $C \in \mathcal{C}(E)$, что*

$$\nu(Q) \in \mu(Q\backslash e) \cdot \overline{co}_{E_C} f(S\backslash e) \quad \forall Q \in \Sigma.$$

Если $\mu(e) = 0$, $\mu(Q) > 0$, то

$$\frac{\nu(Q)}{\mu(Q)} \in \overline{co}_{E_C} f(S\backslash e) \quad \forall Q \in \Sigma.$$

3.3. **Усиленная теорема Березанского-Гельфанда-Костюченко (БГК) о дифференцируемости операторных мер в сепарабельных гильбертовых пространствах.** В теории операторов весомую роль играет теорема БГК о дифференцируемости операторных мер в сепарабельном гильбертовом пространстве [21, 24, 25]. Построенная на базе теоремы БГК теория спектральных операторных мер используется и в современных исследованиях [26, 27].

С использованием результатов настоящей работы, эту теорему можно несколько усилить, заменив дифференцируемость операторной меры в исходном гильбертовом (сепарабельном) пространстве H на более сильную дифференцируемость в пространстве H_C для некоторого компактного множества $C \in \mathcal{C}(H)$. Под дифференцируемостью операторной меры здесь понимается её представимость в виде интеграла Бохнера. Приведём ряд известных вспомогательных определений и фактов из [21]. Зафиксируем цепочку сепарабельных гильбертовых пространств с непрерывными плотными вложениями:

$$H_- \supseteq H \supseteq H_+. \tag{18}$$

Определение 4. Линейный оператор $A : H_+ \to H_-$ называется *неотрицательным*, если $(Au, u)_H \geqslant 0$ $(u \in H^+)$. *След* неотрицательного оператора по определению равен $Tr(A) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)_H$, где $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H_+.

Теперь приведём определение операторной меры с конечным следом (см. [21], с. 517).

Определение 5. Пусть R — некоторое множество; $\mathcal{R}$ — некоторая σ-алгебра множеств из R. Операторнозначную функцию $\mathcal{R} \ni \alpha \mapsto \theta(\alpha)$ будем называть *операторной мерой с конечным следом*, если выполнены следующие требования:

a) для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \theta(\alpha)$ — неотрицательный оператор из H_+ в H_-, $\theta(\varnothing) = 0$, $Tr(\theta(R)) < \infty$;

b) выполняется свойство счётной аддитивности: если множества $\alpha_j \in \mathcal{R}$ $(j \in \mathbb{N})$ попарно не пересекаются, то $\theta\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \theta(\alpha_j)$, где ряд сходится в слабом смысле.

Известно (см. [21]), что функция $\mathcal{R} \ni \alpha \mapsto \rho(\alpha) = Tr(\theta(\alpha))$ является числовой неотрицательной конечной мерой.

Определение 6. Функция $\mathcal{R} \ni \alpha \mapsto \rho(\alpha) = Tr(\theta(\alpha))$ называется *следовой мерой* для операторной меры θ.

Сформулируем классическую теорему о дифференцируемости операторных мер (см., например, теорему XV.1.1 из [21]). Будем обозначать через $\boldsymbol{\sigma}_2(H)$ (гильбертово) пространство операторов Гильберта-Шмидта $A : H \to H$ с нормой $|\cdot|$.

Теорема 12. *Операторную меру θ с конечным следом можно продифференцировать по её следовой мере ρ. Это означает, что существует слабо измеримая относительно $\mathcal{R}$ определённая для ρ-почти всех $\lambda \in R$ операторнозначная функция $\Psi(\lambda) : H_+ \to H_-$, $\Psi(\lambda) \geqslant 0$, $|\Psi(\lambda)| \leqslant Tr(\Psi(\lambda)) = 1$ такая, что*

$$\theta(\alpha) = (B)\int\limits_{\alpha} \Psi(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (\forall \alpha \in \mathcal{R}), \tag{19}$$

где интегрирование производится в пространстве $\boldsymbol{\sigma}_2(H)$. Функция Ψ определяется однозначно с точностью до её значений на множестве нулевой меры ρ и называется производной Радона-Никодима операторной меры θ по её следовой мере ρ $(d\theta/d\rho)(\lambda) = \Psi(\lambda)$.

Воспользовавшись справедливостью K-свойства Радона-Никодима для всякого пространства Фреше (теорема 6), предыдущую теорему можно усилить, заменив интегрируемость $\Psi(\cdot)$ в пространстве $E = \boldsymbol{\sigma}_2(H)$ на интегрируемость в некотором пространстве E_C, порождённом абсолютно выпуклым компактом $C \in \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}_2(H))$.

Теорема 13. *Для произвольной операторной меры θ с конечным следом существует абсолютно выпуклый компакт $C \in \mathcal{C}(\boldsymbol{\sigma}_2(H))$ такой, что производная Радона-Никодима операторной меры θ по её следовой мере ρ интегируема по Бохнеру в пространстве E_C для всех $\Delta \in \Sigma$.*

Из предыдущей теоремы, а также теоремы о среднем для векторных зарядов с компактной выпуклой оценкой (следствие 1) вытекает

Следствие 2. *(***Теорема о среднем для операторных мер в гильбертовых пространствах.***) В условиях теоремы 12 существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ и такое множество $e \subset R$ ρ-меры нуль, что*

$$\frac{\theta(\alpha)}{\rho(\alpha)} \in \overline{co}_{E_C}\Psi(R\backslash e) \quad (\forall \alpha \in \mathcal{R},\ \rho(\alpha) > 0).$$

3.4. **Усиленная теорема БГК о дифференцируемости операторных мер со значениями в сепарабельных банаховых пространствах.** В работе [29] была получена теорема о дифференцировании операторных мер со значениями в сепарабельных банаховых пространствах. В классической монографии Ю.М. Березанского [24] рассмотрены приложения этой теоремы к разложениям по обобщённым собственным векторам самосопряжённого оператора. Под операторной мерой здесь понимается векторный заряд вида $\Theta : \Sigma \to \mathcal{B}(E_1, E_2')$, где Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого множества S, E_2' — пространство антилинейных непрерывных функционалов над банаховым пространством E_2, а $\mathcal{B}(E_1, E_2')$ — пространство ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2', со стандартной нормой.

Теорема 14. *Пусть Σ — σ-алгебра борелевских подмножеств некоторого множества $S \subset \mathbb{R}$, $\rho(\Delta) = |\Theta|(\Delta)$ — полная вариация операторной меры Θ на множестве $\Delta \in \Sigma$. Если E_1 и E_2' — сепарабельные банаховы пространства, то для ρ-почти всех λ существует операторнозначная функция $\Psi(\lambda)$, $\|\Psi(\lambda)\| = 1$ такая, что*

$$\Theta(\Delta) = (B)\int\limits_{\Delta} \Psi(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (\forall \Delta \in \Sigma). \tag{20}$$

Отметим, что данная теорема даёт новую информацию не только в банаховом случае, но и весьма полезна при исследовании «незнакопостоянных» операторных мер в гильбертовых пространствах. В частности, теорема 14 была использована в [26] для уточнения одного из основных результатов этой работы — теоремы 2.14 — в случае операторных мер локально ограниченной вариации.

Ввиду справедливости K-свойства Радона-Никодима для всякого пространства Фреше (теорема 6), предыдущую теорему можно усилить, заменив интегрируемость $\Psi(\cdot)$ в пространстве $E = \mathcal{B}(E_1, E_2')$ на интегрируемость в некотором пространстве E_C, порожденном абсолютно выпуклым компактом $C \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(E_1, E_2'))$.

Теорема 15. *Пусть Σ — σ-алгебра борелевских подмножеств некоторого множества $S \subset \mathbb{R}$, $\rho(\Delta) = |\Theta|(\Delta)$ — полная вариация операторной меры Θ на множестве $\Delta \in \Sigma$. Если E_1 и E_2' — сепарабельные банаховы пространства, то для ρ-почти всех λ существует операторнозначная функция $\Psi(\lambda)$, $\|\Psi(\lambda)\| = 1$ и абсолютно выпуклый компакт $C \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(E_1, E_2'))$ такие, что интеграл Бохнера* (20) *сходится в пространстве E_C для всех $\Delta \in \Sigma$.*

Для операторных мер со значениями в сепарабельных банаховых пространствах справедлив также аналог теоремы о среднем с компактной выпуклой оценкой (теоремы 11 и следствия 1).

Следствие 3. *В условиях теоремы 14 существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(E_1, E_2'))$ и такое множество $e \subset S$ ρ-меры нуль, что*

$$\frac{\Theta(\Delta)}{\rho(\Delta)} \in \overline{co}_{E_C} \Psi(S \backslash e) \quad (\forall \Delta \in \Sigma,\ \rho(\Delta) > 0).$$

3.5. **Дифференцируемость операторных мер со значениями в несепарабельных ЛВП.** В заключение мы рассмотрим также одно приложение теоремы 1. Из теоремы 14 вытекает, что для сепарабельных банаховых пространств E_1 и E_2' пространство $\mathcal{B}(E_1, E_2')$ обладает свойством Радона-Никодима. Отметим, что доказательство данного результата существенно опирается на сепарабельность пространств E_1 и E_2'. Легко видеть, что для несепарабельных банаховых пространств E_1 теорема 14, вообще говоря, уже не верна. Действительно, положим $E_2 = \mathbb{R}$. Тогда $E_2' = \mathbb{R}$ и $\mathcal{B}(E_1, E_2') \supset \mathcal{L}(E_1, E_2') = E_1'$ (здесь $\mathcal{L}(E_1, E_2')$ — пространство линейных ограниченных операторов). Хорошо известно, что пространство $\mathcal{L}(E_1, E_2') = E_1'$

может и не обладать свойством Радона-Никодима, что в свою очередь влечёт $\mathcal{B}(E_1, E_2') \notin (RNP)$ (см. [2], следствие 3, стр. 220).

Итак, для несепарабельных пространств возникает задача поиска достаточных условий дифференцируемости операторных мер (т.е. представимости в виде интеграла Бохнера). Под операторной мерой мы понимаем векторный заряд вида $\Theta : \Sigma \to \mathcal{B}(E_1, E_2')$, где Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого множества S, E_2' — пространство антилинейных непрерывных функционалов над ЛВП E_2, наделённое некоторой (отделимой) локально выпуклой топологией, а $\mathcal{B}(E_1, E_2')$ — пространство ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2', также наделённое некоторой (отделимой) локально выпуклой топологией. Опираясь на доказанную выше теорему 1, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 16. *Пусть Θ — операторная мера на σ-алгебре Σ подмножеств некоторого множества S, $\rho(\Delta) = |\Theta|(\Delta)$ — полная вариация операторной меры Θ на множестве $\Delta \in \Sigma$. Если $\Theta \in AC_K(S, \mathcal{B}(E_1, E_2'))$, то существует операторнозначная функция $\Psi(\lambda)$, определённая для ρ-почти всех λ и такая, что имеет место равенство*

$$\Theta(\Delta) = (B)\int\limits_{\Delta} \Psi(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (\forall \Delta \in \Sigma). \tag{21}$$

Заметим, что в случае, когда E_1, E_2' и $\mathcal{B}(E_1, E_2')$ — пространства Фреше, справедливо и обратное утверждение (см. теорему 6).

По аналогии с предыдущими пунктами, сформулируем теорему о среднем для операторных мер с компактной оценкой в несепарабельных пространствах Фреше.

Следствие 4. *(***Теорема о среднем для операторных мер со значениями в пространствах Фреше.***) Если, в условиях теоремы 16, E_1, E_2' и $\mathcal{B}(E_1, E_2')$ — пространства Фреше, то существуют компакт $C \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(E_1, E_2'))$ и множество $e \subset S$ ρ-меры нуль такие, что*

$$\frac{\Theta(\Delta)}{\rho(\Delta)} \in \overline{co}_{E_C} \Psi(S \backslash e) \quad (\forall \Delta \in \Sigma,\ \rho(\Delta) > 0).$$

Список литературы

[1] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле , Р. Филлипс. — М: ИЛ, 1962. — 829 с.

[2] Diestel J. Geometry of Banach Spaces — Selected Topics / J. Diestel. — Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag, 1975.

[3] Diestel J. Vector Measures / J. Diestel, J.J. Uhl. — Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[4] Barcenas D. The Radon-Nikodym Theorem for reflexive Banach spaces / D. Barcenas // Divulgaciones Matematicas. — 2003. — vol. 11, № 1. — P. 55 – 59.

[5] Cheeger J. Characterization of the Radon-Nikodym property in terms of inverse limits / J. Cheeger, B. Kleiner // arXiv:0706.3389v3 [math.FA]. — 11 Jan 2008. — P. 1 — 12.

[6] Cheeger J. Differentiability of Lipschitz maps from metric measure spaces to Banach spaces with the Radon-Nikodym property / J. Cheeger, B. Kleiner // arXiv:0808.3249v1 [math.MG]. — 24 Aug 2008. — P. 1 — 17.

[7] Chakraborty N. D. Type II-Λ-Weak Radon-Nikodym Property in a Banach Space Associated with a Compact Metrizable Abelian Group / N. D. Chakraborty, Sk. Jaker Ali // Extracta Mathematicae. — 2008. — Vol. 23, no. 3. — P. 201 — 216.

[8] Bu Q. The Radon-Nikodym Property for Tensor Products of Banach Lattices II / Q. Bu, G. Buskes and Wei-Kai Lai // Positivity. — 2008. — Vol. 12. — P. 45 -— 54.

[9] De Kock Mienie. Absolute continuity and the range of a vector measure / Mienie de Kock // Ph. D. Theses, Kent State University, 2008.

[10] Arvanitakis A. D. Some examples of continuous images of Radon-Nikodym compact spaces / A. D. Arvanitakis, A. Aviles // arXiv:0903.0653v1 [math.GN]. — 3 Mar 2009. — P. 1 — 11.

[11] Bongiorno B. A variational Henstock integral characterization of the Radon-Nikodym property / B. Bongiorno, L.D. Piazza, K. Musial // Illinois Journal of Mathematics. — 2009. — vol. 53, № 1. — P. 87 – 99.

[12] Moedomo S. Radon – Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals / S. Moedomo, J.J. Uhl // Pacific J. of Math. — 1971. — Vol. 38, no. 2. — P. 531 — 536.

[13] Chi G. A geometric characterization of Frechet spaces with the RNT / G. Chi // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 48. — P. 371 — 380.

[14] Gilliam D. Geometry and the Radon-Nikodym theorems in strict Mackey convergence spaces / D. Gilliam // Pacific J. of Math. — 1976. — Vol. 65, no. 2. — P. 353 — 364.

[15] Orlov I. V. Strong compact properties of the mappings and K-Radon-Nikodym property / I. V. Orlov, F. S. Stonyakin // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2010. — Vol. 16, no. 2. — P. 183 — 196.

[16] Стонякин Ф. С. K-свойство Радона-Никодима для пространств Фреше / Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия « Математика. Механика. Информатика и кибернетика. » — 2009. — т. 22(61), № 1. — С. 102 – 113.

[17] Орлов И. В. Предельная форма свойства Радона-Никодима справедлива в любом пространстве Фреше / И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — В печати.

[18] Вахания Н. Н. Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян. — М.: Наука, 1985. — 368 с.

[19] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$ / М. Гусман. — М.: Мир, 1978. — 153с.

[20] Edwards R. Functional Analysis. Theory and applications / Edwards R. — New York – London: Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[21] Березанский Ю.М. Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. — К: Выща шк., 1990. — 600 с.

[22] Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория. / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М.: ИЛ, 1962. — 896с.

[23] Shaefer H. H. Topological Vector Spaces / H. H. Shaefer. — New York – London: McMillan, 1966.

[24] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов / Ю. М. Березанский. — К.: Наукова думка, 1965. — 800 с.

[25] Гельфанд И. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных и других операторов / И. М. Гельфанд, А. Г. Костюченко // Доклады АН СССР. — 1955. — т.103, № 3. — С. 349 – 352.

[26] Malamud M. M. Spectral theory of operator measures in Hilbert space / M. M. Malamud, S. M. Malamud // St. Petersburg Math J. — 2004. — Vol.15, № 3. — P. 323 – 373.

[27] Berezansky Yu. M. The integration of Double-Infinite Toda Lattice by terms of Inverse Spectral Problem and related questions / Yu. M. Berezansky // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol.15, № 2. — P. 101 – 136.

[28] Орлов И. В. Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств / И. В. Орлов // Мат. физика, анализ, геометрия. — 2001. — Т. 8, № 4. — С. 419 — 439.

[29] Dinculeani N. Sur la representation de certaines operations linearies. III / N. Dinculeani // Proc. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol.10. — P. 59 – 68.

Сильні компактні характеристики та гранична форма властивості Радона-Нікодима для векторних зарядів. *У цій роботі досліджено нові характеристики векторних зарядів зі значеннями у локально опуклих просторах: сильна компактна вариація, сильна компактна абсолютна неперервність, універсальна компактна та гранична форми властивості Радона-Нікодима. Доведено, що довільний простір Фрєше має універсальну компактну та граничну форму властивості Радона-Нікодима для векторних зарядів. Розглянуто деякі застосування.*

Ключові слова: локально опуклий простір, простір Фрєше, векторний заряд, інтеграл Бохнера, сильна компактна вариація, сильна компактна абсолютна неперервність, універсальна K-властивість Радона-Нікодима, гранична форма властивості Радона-Нікодима, операторна міра.

Strong compact properties and limit form of Radon-Nikodym property for vector measures. *In this paper new properties for vector measures with values in locally convex spaces, namely the strong compact variation, the strong compact absolute continuity, the universal compact and limit forms of the Radon-Nikodym property are investigated. It is proved that each Frechet space possesses the universal compact and limit forms of the Radon-Nikodym property for vector measures. Some applications are considered.*

Keywords: locally convex space, Frechet space, vector measure, strong compact variation, strong compact absolute continuity, universal K-property of Radon-Nikodym, limit form of the Radon-Nikodym property, operator measure.

Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 151–158.

УДК 517.98

Д. Л. Тышкевич

О СОРАЗМЕРНОСТИ БИМОДУЛЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

В работе сформулированы условия соразмерности (т.е. совпадение левой и правой размерностей) для свободных бимодулей специального типа над IBN–кольцами. Данные результаты могут быть полезными при изучении бимодулей над алгебрами гиперкомплексных чисел.

Ключевые слова: кватернионы, гиперкомплексные числа, кольцо, IBN–кольцо, модуль, свободный модуль, бимодуль

Введение

В работе [6] были рассмотрены и определены базовые понятия, необходимые для работы с кватернионными бимодулями (размерность, топологии, спектр и др.). Простейшее из них — размерность — допускает непосредственное обобщение на бимодули более общего типа. Дело в том, что a priori в бимодуле определены две размерности — левая и правая (понятие линейной размерности имеет смысл лишь для свободных (би)модулей с инвариантным базисным числом, см. ниже), поэтому возникает необходимость выяснить при каких условиях левая и правая размерности совпадают — чему и посвящена данная работа.

Некоторые из таких условий носят общеалгебраический характер (см. ниже теорему 1), другие выявляются на основе алгебраического анализа специфических, на первый взгляд, свойств кватернионных бимодулей (см. определения 3, 4, разложение (5); условие (KhK) на с. 157 и предложение 3).

Нацеленность данных обобщений направлена, в первую очередь, на перспективу изучения бимодулей над (ассоциативными) алгебрами гиперкомплексных чисел (среди которых — бикомплексные числа, бикватернионы, алгебры Клиффорда и др., см., например, [5]).

Некоторые определения и обозначения. Приведём здесь некоторые необходимые нам определения и обозначения. Всюду в работе под "кольцом" подразумевается *ассоциативное* кольцо. $\mathbb{H}$ обозначает тело кватернионов.

Модуль H над кольцом K называется *свободным*, если в H существует K–полная K–линейно независимая система[1] (K–базис). В общем случае мощности различных K–базисов могут различаться. Кольцо K, для которого в любом K–модуле H мощности всех K–базисов совпадают, называется *IBN–кольцом* или кольцом *с инвариантным базисным числом*; все тела а также коммутативные кольца являются IBN–кольцами (см. [2]). В этом случае мощность K–базиса в H мы будем называть *K–размерностью* H и обозначать[2] через $\dim(H : K)$.

*K–би*модуль H будем называть свободным, если он является свободным и как левый и как правый K–модуль. Соответственно размерности в этом случае будем обозначать через $\dim_l(H : K),\ \dim_r(H : K)$.

1. $(K, \mathcal{Z})$–бимодули

Пусть K — кольцо, $Z(K)$ — центр K; $\mathcal{Z} \subseteq Z(K)$ — подкольцо, H — аддитивная абелева группа.

Определение 1. Назовём H $(K, \mathcal{Z})$–*бимодулем*, если

a) H — K–бимодуль;

b) $\forall\, z \in \mathcal{Z}\ \ \forall\, h \in H \quad zh = hz$.

Пример 1. Пусть $\mathcal{Z}$ — коммутативное кольцо, K — $\mathcal{Z}$–алгебра. Если отождествить $\mathcal{Z}$ с подмножеством коммутанта алгебры K, то "$(K, \mathcal{Z})$–бимодуль" в терминах определения 1 есть "K–бимодуль" в терминах [3, гл. 1, §1.1] (ср. ниже с примером 4). Также произвольный *кватернионный бимодуль* в терминах [6, п. 2.1] является $(\mathbb{H}, \mathbb{R})$–бимодулем.

Пример 2. $H := K^I$, где K — произвольное кольцо, а I — произвольное непустое множество. Левое и правое действия K задаются покомпонентно умножением компонент соответственно слева или справа на элемент. H является $\big(K, Z(K)\big)$–бимодулем, в котором левое и правое действие совпадают, если K коммутативно.

Пример 3. Пусть M — произвольный правый $\mathbb{C}$–модуль, и $H := M^2$ (как кольцо). Определим левое и правое действия $\mathbb{C}$ на H, полагая

$$i \cdot \langle a, b\rangle := \langle ai, bi\rangle; \quad \langle a, b\rangle \cdot i := \langle bi, ai\rangle;$$
$$r \cdot \langle a, b\rangle = \langle a, b\rangle \cdot r := \langle ar, br\rangle \quad (r \in \mathbb{R})$$

с дальнейшим доопределением по $\mathbb{R}$–линейности. Прямая проверка показывает, что H является $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$–бимодулем с несовпадающими левым и правым действием $\mathbb{C}$.

---

[1] Это — одно из эквивалентных определений, см. [2, гл. 3]

[2] Допуская, быть может, некоторую вольность речи.

Пример 4. Пусть K — произвольное кольцо, $\mathcal{Z} \subseteq Z(K)$ — подкольцо и M — произвольный правый K–модуль. Положим $H := \mathrm{End}_{\mathcal{Z}} M$ (совокупность соответствующих эндоморфизмов). Определим левое и правое действие K на H:

$$\lambda \cdot a := R_\lambda a; \quad a \cdot \lambda := a R_\lambda \quad (\lambda \in K,\ a \in H),$$

где $R_\lambda x := x\lambda,\ x \in M$. Прямая проверка показывает, что H является $\big(K, \mathcal{Z}\big)$–бимодулем с несовпадающими (за исключением специальных случаев) левым и правым действием K.

Пусть K — IBN–кольцо.

Определение 2. K–бимодуль H назовём *соразмерным*, если его левая размерность над K совпадает с правой: $\dim_l(H : K) = \dim_r(H : K)$.

Пусть H — $(K, \mathcal{Z})$–бимодуль. Тогда на H естественно задана структура $\mathcal{Z}$–модуля (всё равно — левого или правого, в силу коммутативности $\mathcal{Z}$).

Замечание 4. Так как $\mathcal{Z}$ коммутативно, то $\mathcal{Z}$ — IBN–кольцо.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия.*

1) K — *свободный $\mathcal{Z}$–модуль.*
2) K — *IBN–кольцо.*
3) H — *свободный K–бимодуль.*

Тогда

a) H — *свободный $\mathcal{Z}$–модуль.*
b) $\dim_l(H : K)\dim(K : \mathcal{Z}) = \dim_r(H : K)\dim(K : \mathcal{Z}) = \dim(H : \mathcal{Z})$

Доказательство. Пусть $\mathcal{H} = \{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — правый K–базис в H и $\mathcal{K} = \{k_\beta\}_{\beta \in B}$ — $\mathcal{Z}$–базис в K, существующие в силу условий 1) — 3) теоремы (см. замечание 4). Тогда

$$|A| = \dim_r(H : K), \quad |B| = \dim(K : \mathcal{Z}) \tag{1}$$

Положим $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta}\}_{\langle\alpha,\beta\rangle \in A \times B}$, $\quad g_{\alpha\beta} := h_\alpha k_\beta$. Докажем, что

$$\mathcal{G} \text{ — } \mathcal{Z}\text{–линейно независимая система.} \tag{2}$$

Действительно, пусть $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ — конечные подмножества, и

$$\sum_{\langle\alpha,\beta\rangle \in A' \times B'} g_{\alpha\beta} z_{\alpha\beta} = 0. \tag{3}$$

для некоторой системы $\{z_{\alpha\beta}\}_{\langle\alpha,\beta\rangle \in A' \times B'}$ элементов $\mathcal{Z}$. Положим

$$\theta_\alpha := \sum_{\beta \in B'} k_\beta z_{\alpha\beta}, \quad \alpha \in A' \quad (\theta_\alpha \in K).$$

Тогда

$$0 \overset{(3)}{=} \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle\in A'\times B'} g_{\alpha\beta}z_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\in A'} h_\alpha\Big(\sum_{\beta\in B'} k_\beta z_{\alpha\beta}\Big) = \sum_{\alpha\in A'} h_\alpha\theta_\alpha$$

Так как система $\mathcal{H}$ K–линейно независима, то для всех $\alpha \in A'$ $\theta_\alpha = 0$. В свою очередь, в силу $\mathcal{Z}$–линейной независимости системы $\mathcal{K}$ для всех $\alpha \in A'$ и $\beta \in B'$ $z_{\alpha\beta} = 0$. Итак, (2) доказано. Покажем теперь, что

$$\mathcal{G} \text{ — } K\text{–}\textit{полна}. \tag{4}$$

Пусть $h \in \mathcal{H}$ — произвольный фиксированный элемент. Так как система $\mathcal{H}$ K–полна, то существует такое конечное множество $A' \subseteq A$ и система $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in A}$ элементов из K, что $h = \sum\limits_{\alpha\in A'} h_\alpha\theta_\alpha$. В свою очередь, в силу $\mathcal{Z}$–полноты системы $\mathcal{K}$ для всякого $\alpha \in A'$ существует такое конечное множество $B_\alpha \subseteq B$ и система $\{z_{\alpha\beta}\}_{\beta\in B_\alpha}$, что $\theta_\alpha := \sum\limits_{\beta\in B_\alpha} k_\beta z_{\alpha\beta}$. Отсюда, полагая $B' := \bigcup\limits_{\alpha\in A'} B_\alpha$, получим

$$h = \sum_{\alpha\in A'} h_\alpha\theta_\alpha = \sum_{\alpha\in A'} h_\alpha\Big(\sum_{\beta\in B_\alpha} k_\beta z_{\alpha\beta}\Big) = \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle\in A'\times B'} h_\alpha k_\beta z_{\alpha\beta} = \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle\in A'\times B'} g_{\alpha\beta}z_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, (4) доказано. Из (2) и (4) следует цепочка:

$$\dim(H:\mathcal{Z}) = |\mathcal{G}| = |A\times B| = |A||B| \overset{(1)}{=} \dim_r(H:K)\dim(K:\mathcal{Z}).$$

Равенство $\dim_l(H : K)\dim(K : \mathcal{Z}) = \dim(H : \mathcal{Z})$ доказывается двойственным образом. □

Следствие 1. *Пусть $(K, \mathcal{Z})$–бимодуль H удовлетворяет условиям 1) — 3) теоремы 1, и выполняется одно из условий*[3] *:*

a) $\dim(K : \mathcal{Z}) \leqslant \min\{\dim_l(H : K), \dim_r(H : K)\}$

b) $\dim(K : \mathcal{Z})$ — *конечное число.*

Тогда H является соразмерным.

Доказательство. Следует из b) теоремы 1 и обычной арифметики кардинальных чисел (см., например, [1, § 6.4, сл. 4; § 6, упр. 2]) . □

2. Центрально разложимые бимодули

Определение 3. Элемент $h \in H$ назовём *центральным*, если для любого $k \in K$ $hk = kh$. Совокупность всех центральных векторов H обозначим через $H^{Z(K)}$. Очевидно, $H^{Z(K)}$ является $Z(K)$–модулем (точнее, бимодулем с совпадающими правым и левым действиями центра $Z(K)$).

[3]Естественно, не взаимоисключающих. Оба эти условия нарушаются, если в качестве H рассмотреть, например, $\mathbb{H}^n$ как $(\mathbb{H}, \mathbb{Q})$–бимодуль.

Определение 4. K–бимодуль H назовём *центрально разложимым*, если $H^{Z(K)}$ является K–полным множеством, причём разложение любого элемента из H по $H^{Z(K)}$ *однозначно*.

Иллюстрации. *По примеру 1.* Каждый вектор x кватернионного бимодуля H допускает однозначное разложение вида $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ (см. [6], ср. [4, Ch. 1, §2.1]), где

$$\begin{array}{ll} x_0 = 1/4(x - ixi - jxj - kxk), & x_1 = -1/4(xi + ix - jxk + kxj), \\ x_2 = -1/4(xj + ixk + jx - kxi), & x_3 = -1/4(xk - ixj + jxi + kx); \end{array} \tag{5}$$

x_s ($s \in \overline{0,3}$) — центральные элементы в терминах определения 3 (в [6] такие элементы называются вещественными векторами). Таким образом, произвольный кватернионный бимодуль согласно определению 4 является центрально разложимым.

По примеру 2. В этом случае, очевидно, $H^{Z(K)} = Z(K)^I$, и H центрально разложим в частности, когда K — свободный $Z(K)$–модуль с конечным $Z(K)$–базисом.

По примеру 3. Простая проверка показывает, что $H^{Z(K)}$ состоит из всех пар вида $\langle a, a\rangle$. Ни при каком M бимодуль H не является центрально разложимым.

По примеру 4. В этом случае $H^{Z(K)} = \mathrm{End}_K M$. Если *a)* K коммутативно и $\mathcal{Z} \subset K$ (строго), то H не является центрально разложимым (K–линейная оболочка элементов из $\mathrm{End}_K M$ снова будет лежать в $\mathrm{End}_K M$). Если же *b)* K — некоммутативно, то в общем случае ситуация представляется сложной, и зависит, надо полагать, от строения как самого K так и модуля M. В важном частном случае, когда $K = \mathbb{H}$, $\mathcal{Z} = \mathbb{R}$ (и M представляет собой кватернионный модуль), ответ для H даётся выше в иллюстрации к примеру 1; разложение (5) при этом обеспечивает представление произвольного $\mathbb{R}$–линейного оператора через $\mathbb{H}$–линейные операторы (см. [4, Ch. 1, §2.1]).

Случаи, описанные в иллюстрациях к примерам 3, 4.*a*) находят своё объяснение в следующем простом утверждении общего характера.

Предложение 1. *Если кольцо K коммутативно, то K–бимодуль H является центрально разложимым тогда и только тогда, когда H свободен, и левое действие K совпадает с правым.*

Доказательство. Пусть H — центрально разложимый K–бимодуль, $k \in K$, $h \in H$ — произвольные фиксированные элементы, и $h = \sum\limits_{\beta \in B'} h_\beta k_\beta$ — разложение h по центральным элементам h_β ($k_\beta \in K$, $\beta \in B'$). Тогда

$$kh = \sum_{\beta \in B'} k h_\beta k_\beta \overset{h_\beta\ -\ \text{центр.}}{=} \sum_{\beta \in B'} h_\beta k k_\beta \overset{K\ -\ \text{комм.}}{=} \sum_{\beta \in B'} h_\beta k_\beta k = hk.$$

Обратная импликация тривиальна, так как в этом случае $H = H^{Z(K)}$. $\square$

В силу предложения 1 определение 4 имеет значение лишь для некоммутативных колец K.

Предложение 2. *Пусть H — центрально разложимый K–бимодуль, и $\mathcal{G}$ — некоторая система элементов из $H^{Z(K)}$. Система $\mathcal{G}$ $Z(K)$–линейно независима тогда и только тогда, когда она K–линейно независима.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{G} = \{g_\gamma\}_{\gamma\in C}$ — $Z(K)$–линейно независима, и для некоторого конечного множества $C' \subseteq C$, некоторой системы $\{c_\gamma\}_{\gamma\in C'}$ элементов K выполняется равенство $\sum\limits_{\gamma\in C'} g_\gamma c_\gamma = 0$. Тогда, в свою очередь, для всякого $\gamma \in C'$ существует такое конечное множество $C_\gamma \subseteq C$ и такая система $\{\xi_{\gamma\delta}\}_{\delta\in C_\gamma}$ элементов $Z(K)$, что $c_\gamma = \sum\limits_{\delta\in C_\gamma} k_\delta \xi_{\gamma\delta}$. Положим $E_\delta := \{\gamma \in C' \mid \delta \in C_\gamma\}$. Тогда

$$0 = \sum_{\gamma\in C'} g_\gamma c_\gamma = \sum_{\gamma\in C'} g_\gamma \Big(\sum_{\delta\in C_\gamma} k_\delta \xi_{\gamma\delta}\Big) = \sum_{\delta\in \bigcup\limits_{\gamma\in C'} C_\gamma} \Big(\sum_{\gamma\in E_\delta} g_\gamma \xi_{\gamma\delta}\Big) k_\delta.$$

Так как каждый элемент $\sum\limits_{\gamma\in E_\delta} g_\gamma \xi_{\gamma\delta}$ является центральным, то в силу требования однозначности в определении 4 $\sum\limits_{\gamma\in E_\delta} g_\gamma \xi_{\gamma\delta} = 0$ для каждого δ; в свою очередь, в силу $Z(K)$–линейной независимости $\mathcal{G}$ $\xi_{\gamma\delta} = 0$ для любых $\gamma \in C'$, $\delta \in \bigcup\limits_{\gamma\in C'} C_\gamma$; таким образом, $c_\gamma = 0$ ($\gamma \in C'$). Система $\mathcal{G}$ — K–линейно независима.

Обратная импликация тривиальна. □

Теорема 2. *Пусть кольцо K удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 1, и $H^{Z(K)}$ является свободным $\mathcal{Z}$–модулем. Тогда всякий центрально разложимый $(K, \mathcal{Z})$–бимодуль H является соразмерным. При этом*

$$\dim_l(H : K) = \dim_r(H : K) = \dim(H^{Z(K)} : \mathcal{Z}).$$

Доказательство. В силу замечания 4 и условий теоремы существует $\mathcal{G} = \{g_\gamma\}_{\gamma\in C}$ — некоторый $\mathcal{Z}$–базис в $H^{Z(K)}$ и $\mathcal{K} = \{k_\beta\}_{\beta\in B}$ — $\mathcal{Z}$–базис в K. Пусть $h \in H$ — произвольный фиксированный элемент; тогда

$$h = \sum_{\beta\in B'} h_\beta k_\beta \tag{6}$$

для некоторого конечного $B' \subseteq B$ и некоторой системы центральных элементов $\{h_\beta\}_{\beta\in B'}$. Но для каждого $\beta \in B'$ существует такое конечное множество C_β и такая система $\{\zeta_{\beta\gamma}\}_{\alpha\in C_\beta}$, что

$$h_\beta := \sum_{\gamma\in C_\beta} g_\gamma \zeta_{\beta\gamma}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует K–полнота системы $\mathcal{G}$, откуда в силу предложения 2 следует равенство

$$\dim_r(H : K) = \dim(H^{Z(K)} : \mathcal{Z}).$$

Равенство $\dim_l(H:K) = \dim(H^{Z(K)}:\mathcal{Z})$ получается двойственными рассуждениями. $\square$

Разложение (5) для кватернионных бимодулей наводит на мысль рассматривать более узкий класс центрально разложимых бимодулей H, удовлетворяющих условию:

(KhK) *Для каждого* $h \in H$ *и всякого центрального элемента* h'*, участвующего в разложении* h *(согласно определению 4)* $h' \in KhK$.

В частности, данное условие позволяет сформулировать критерий для свойства левого или правого подмодуля "быть двусторонним" (обобщение [6, пр. 6]).

Предложение 3. *Пусть центрально разложимый* K*–бимодуль* H *удовлетворяет условию* (KhK)*. Тогда свободный правый (левый) подмодуль* M *является подбимодулем* H *в том и только том случае, если* M *имеет* K*–базис, состоящий из центральных элементов.*

Доказательство. Пусть правый подмодуль M имеет K–базисом систему центральных элементов $\{h_\beta\}_{\beta\in B}$; $h \in M$ — произвольный фиксированный элемент, и $h = \sum\limits_{\beta\in B'} h_\beta k_\beta$ для некоторого конечного $B' \subseteq B$ и некоторой системы $\{k_\beta\}_{\beta\in B'}$ элементов K. Тогда для любого $k \in K$

$$kh = \sum_{\beta\in B'} kh_\beta k_\beta \overset{h_\beta\ -\ \text{центр.}}{=} \sum_{\beta\in B'} h_\beta k k_\beta \in M$$

(здесь не понадобилось условие (KhK)).

Обратно, пусть M — подбимодуль, и $\mathcal{M}$ — совокупность всех центральных элементов, входящих в разложение элементов из M. Пусть $g \in \mathcal{M}$, и $h \in M$ — некоторый элемент, в разложение которого входит g. Тогда согласно (KhK)

$$g \in KhK \subseteq KMK \subseteq M.$$

Таким образом, $\mathcal{M} \subseteq M$, при этом K–линейная оболочка $\mathcal{M}$ совпадает с M. Выбирая из $\mathcal{M}$ полную в M K–линейно независимую систему, получим K–базис из центральных элементов в M.

Двойственное предложение доказывается аналогично. $\square$

Список литературы

[1] Бурбаки Н. *Теория множеств.* — М.: Мир. — 1965. — 454 с.

[2] Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории. 1.* — М.: Мир. — 1977. — 688 с.

[3] Пирс Р. *Ассоциативные алгебры.* — М.: Мир. — 1986. — 543 с.

[4] Adler S. L. *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields.* — New York: Oxford University Press. — 1995. — 586 p.

[5] Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. *Кватернионы в релятивистской физике.* — М.: Едиториал УРСС — 2003. — 198 с.

[6] Карпенко И. И., Тышкевич Д. Л. *Спектральные свойства линейных операторов над гильбертовыми кватерниионными бимодулями* // Математичні Студії. — 2008. — Т. 30, №1. — С. 67–82

О сорозмірі бімодулей спеціального типу

У роботі сформульовано умови сорозміру (тобто збіг лівої та правої розмірності) для свободних бімодулей спеціального типу над IBN–кільцями. Дані результати можуть бути корисними при вивченні бімодулей над алгебрами гіперкомплексних чисел.

Ключові слова: кватерніони, гіперкомплексні числа, кільце, IBN–кільце, модуль, свободний модуль, бімодуль

On commensurability of bimodules of the special types

In the paper the conditions for commensurability (i.e. coincidence of the left and right dimensions) of free bimodules of the special types over IBN–rings. The results may be useful for studying of bimodules over algebras of hypercomplex numbers.

Keywords: quaternions, hypercomplex numbers, ring, IBN–ring, module, free module, bimodule

Содержание

О. В. Анашкин, А. В. Шульгин
ВЛИЯНИЕ ЗАПАЗДЫВАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ КВАДРАТИЧНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ 1

М. В. Ахрамович, И. В. Орлов
ВАРИАНТ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ ТИПА БАНАХА-ШТЕЙНГАУЗА В ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫХ ПРОСТРАНСТВАХ 8

Э. И. Батыр
МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ТРЕХ СОЧЛЕНЕННЫХ ТЕЛ С ПОЛОСТЯМИ, ЗАПОЛНЕННЫМИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ 19

Е. В. Божонок
УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ КОМПАКТНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА H^1 40

Б. М. Вронский, Н. Д. Копачевский
ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ 52

В. И. Донской
ОЦЕНКИ ЕМКОСТИ ОСНОВНЫХ КЛАССОВ АЛГОРИТМОВ ЭМПИРИЧЕСКОГО ОБОБЩЕНИЯ, ПОЛУЧЕННЫЕ pVCD МЕТОДОМ 56

О.А. Дудик
О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННОГО МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЕННОЙ КАПИЛЛЯРНОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ 66

И. И. Карпенко
НЕЭРМИТОВО САМОСОПРЯЖЕННЫЕ МАТРИЦЫ НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОНОВ 78

Ю. Л. Кудряшов
σ–СИММЕТРИЧЕСКАЯ ДИЛАТАЦИЯ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА 92

М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн
ПОРЯДКОВАЯ СХОДИМОСТЬ В ЭРГОДИЧЕСКИХ ТЕОРЕМАХ В ПРОСТРАНСТВАХ ОРЛИЧА 97

А. М. Погребицкая, С. И. Смирнова
ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ГИБРИДНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА 113

О. И. Рудницкий, И. А. Романенко
АЛГЕБРЫ МНОГОЧЛЕНОВ ПОГОРЕЛОВА ОКТАЭДРАЛЬНЫХ ГРУПП 124

Ф. С. Стонякин
СИЛЬНЫЕ КОМПАКТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА СВОЙСТВА РАДОНА-НИКОДИМА ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ЗАРЯДОВ 132

Д. Л. Тышкевич
О СОРАЗМЕРНОСТИ БИМОДУЛЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА 151

Адрес редакции dmath@list.ru