Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 1–13.

О. А. Андронова

НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С ПОВЕРХНОСТНОЙ И ВНУТРЕННЕЙ ДИССИПАЦИЕЙ ЭНЕРГИИ

Рассмотрено обобщение начально-краевой задачи математической физики с поверхностной и внутренней диссипацией энергии. Сформулирована абстрактная проблема на основе использования абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и оператора следа. Доказана теорема о сильной разрешимости исследуемой задачи. Обсуждаются спектральные проблемы с внутренней диссипацией энергии при различной интенсивности внутренней диссипации энергии. Приведены простейшие свойства решений данной задачи. Для случая малой и средней внутренней диссипации получены утверждения о локализации спектра и полноте и базисности системы корневых элементов.

Введение

В работе рассмотрено операторное обобщение начально-краевой задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии. Здесь использовались пространства и операторы, фигурирующие в абстрактной формуле Грина (см. [3]), а также оператор, задающий внутреннюю диссипацию энергии в исследуемой динамической системе. Итогом рассмотрения указанной задачи является теорема о ее сильной разрешимости на произвольном отрезке времени. Рассмотрены некоторые вопросы, связанные с исследованием спектральных проблем с внутренней диссипацией энергии при ее различной интенсивности.

Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств

Впервые абстрактная формула Грина появилась в монографии [1], (см. с. 46-47), и идея ее получения принадлежит С. Г. Крейну. Затем появились работы [2]-[4], где соответствующее утверждение было получено в наиболее общей формулировке. Другой вариант абстрактной формулы Грина получен в [5], (см с.187-189). Приведем формулировку соответствующего результата из [3].

Теорема 1. *Пусть для тройки гильбертовых пространств*

$$\{E,\,(\cdot,\cdot)_E\},\,\{F,\,(\cdot,\cdot)_F\},\,\{G,\,(\cdot,\cdot)_G\}$$

выполнены условия:

1. Пространство F плотно вложено в E, $F \subset_{\rightarrow} E$, т.е. F плотно в E и

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1}$$

2. На пространстве F определен оператор γ (абстрактный оператор следа), ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+$ пространства G, $G_+ \subset_{\rightarrow} G$, и

$$\|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{2}$$

Тогда существуют операторы $L : F \to F^*$ и $\partial : F \to G_- := (G_+)^*$, определяемые по E, F и G (с введенными скалярными произведениями), а также по оператору γ единственным образом, такие, что имеет место следующая формула Грина

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \qquad \forall \eta, u \in F. \tag{3}$$

Здесь символами $\langle \eta, \psi\rangle_E$ и $\langle \xi, \varphi\rangle_G$ обозначены линейные функционалы, построенные на элементах $\eta \in F$, $\psi \in F^*$, $\xi \in G_+$ и $\varphi \in G_-$ соответственно. Они являются соответствующими расширениями (по непрерывности) функционалов $(\eta, \psi)_E$ и $(\xi, \varphi)_G$ при переходе от $\psi \in E$ к $\psi \in F^* \supset E$, а также от $\varphi \in G$ к $\varphi \in (G_+)^* = G_-$, соответственно.

Начально-краевая задача с поверхностной и внутренней диссипацией энергии

Пусть пространства E, F и G, а также оператор $\gamma : F \to G$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и потому существуют операторы $L : F \to F^*$ и $\partial : F \to (G_+)^*$ такие, что справедлива формула Грина (3).

Постановка начально-краевой задачи с поверхностной и внутренней диссипацией энергии такова: необходимо найти функцию $u = u(t)$ со значениями в F такую, для которой выполнено уравнение

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \beta K\frac{du}{dt} + Lu = f(t) \quad (\text{в}\, E), \quad K = K^* \geqslant 0,\ \overline{\mathcal{D}(K)} = E, \tag{4}$$

"граничное" условие

$$\partial u + \alpha\frac{d}{dt}(\gamma u) = 0 \quad (\text{в}\, G), \quad \alpha > 0, \tag{5}$$

а также начальные условия

$$u(0) = u^0,\, u'(0) = u^1. \tag{6}$$

Здесь функция $u(t)$ является искомой, функция $f(t)$ и элементы u^0, u^1 – заданными. Слагаемое $\beta K du/dt$ в уравнении (4) при $\beta > 0$ порождает внутреннюю диссипацию полной энергии динамической системы, а слагаемое $\alpha d/dt(\gamma u)$ в граничном условии (5) при $\alpha > 0$ – поверхностную диссипацию энергии.

Замечание. Следует отметить, что ранее исследовалась абстрактная начально-краевая задача с поверхностной диссипацией энергии (см. [8]). Итоговый результат рассмотрения задачи – доказательство теоремы о существовании и единственности ее решения.

Абстрактная задача (4) – (6) с поверхностной и внутренней диссипацией энергии исследована методами функционального анализа. Для исследования задачи использован метод введения вспомогательных краевых задач. Он основан на возможности отыскания решения $u(t) \in F$ задачи (4) – (6) в виде суммы

$$u(t) = v(t) + w(t), \tag{7}$$

где $v(t)$ — решение первой вспомогательной задачи, а $w(t)$ — второй вспомогательной задачи. Доказательство этого факта можно найти в [3], см. теорему 2 и замечание 1 этой работы.

Сформулируем первую вспомогательную задачу. По элементу $\hat{f}$ необходимо найти решение v задачи

$$Lv = \hat{f} := f(t) - \frac{d^2u}{dt^2} - \beta K \frac{du}{dt} \quad (\text{в } E), \quad \partial v = 0 \quad (\text{в } G). \tag{8}$$

Определение 1. Будем говорить, что элемент $v \in F$ является слабым решением задачи (8), если имеет место тождество

$$(\eta, v)_F = \langle \eta, \hat{f} \rangle_E, \quad \forall \eta \in F. \tag{9}$$

Лемма 1. *Если выполнено условие $\hat{f} \in F^*$, то задача* (8) *имеет единственное слабое решение $v \in F$, выражаемое формулой*

$$v = A^{-1}\hat{f}, \quad \mathcal{D}(A) = F, \quad \mathcal{R}(A) = F^*.$$

Сужение A оператора A на E, такое что $\mathcal{D}(A) \subset E$, $\mathcal{R}(A) \subset E$, обладает свойством $A = A^* \gg 0$ в E. Если $F \subset\!\!\!\to\!\subset\!\!\!\to E$, то A^{-1} — компактный положительный оператор.

Доказательство. Оно приведено в работе [2], см. также [3]. $\square$

Рассмотрим теперь вторую вспомогательную задачу. По элементу ψ найти решение $w \in F$ задачи:

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \qquad \partial w = \psi := -\alpha \frac{d}{dt}(\gamma u) \quad (\text{в } G). \tag{10}$$

Определение 2. Говорят, что элемент $w \in F$ является слабым решением задачи (10), если для него выполнено тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma\eta, \psi \rangle_G, \quad \forall \eta \in F. \tag{11}$$

Лемма 2. *При любом элементе $\psi \in (G_+)^*$ существует единственное слабое решение $w = V\psi \in F$. При этом оператор V ограниченно действует из $(G_+)^*$ в подпространство $M \subset F$ элементов, которые назовем L-гармоническими (для них $Lw = 0$).*

Доказательство. Оно основано на неравенстве

$$|\langle \gamma\eta, \psi \rangle_G| \leqslant \|\gamma\eta\|_{G_+} \cdot \|\psi\|_{(G_+)^*} \leqslant \Big(b\,\|\psi\|_{(G_+)^*} \Big) \cdot \|\eta\|_F$$

и на лемме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве F. $\square$

Лемма 3. *Любой элемент $u \in F$ может быть представлен в виде суммы решений первой и второй вспомогательных задач* (8) *и* (10), *т.е. в виде*

$$u = v + w = A^{-1}\hat{f} + V\psi, \quad \hat{f} = Lu \in F^*, \quad \psi = \partial u \in (G_+)^*. \tag{12}$$

С учетом лемм 1, 2, 3 осуществим переход к задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка

$$A^{-1}\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\alpha V \frac{d}{dt}(\gamma u) + u \right) + \beta A^{-1}K\frac{du}{dt} = A^{-1}f(t) \quad (\text{в } F), \tag{13}$$

$$u(0) = u^0,\, u'(0) = u^1. \tag{14}$$

Будем считать, что в уравнении (13) все слагаемые, в том числе и выражение в скобках, являются функциями переменной t со значениями в $\mathcal{D}(A) \subset F \subset E$. Тогда это уравнение равносильно уравнению

$$\frac{d^2u}{dt^2} + A^{1/2}\left(\alpha Q^* \frac{d}{dt}(\gamma u) + A^{1/2}u \right) + \beta K \frac{du}{dt} = f(t) \quad (\text{в } E), \tag{15}$$

где $Q := \gamma A^{-1/2} : E \to G_+$ и $Q^* := A^{1/2}V : (G_+)^* \to E$ взаимно сопряжены и ограничены.

Введем новую искомую функцию соотношениями $-i\eta = d\zeta/dt$, $\zeta(0) = 0$. После взятия ее производной по t приходим вместо (15),(14) к следующей задаче Коши:

$$\begin{gathered} \frac{d^2u}{dt^2} + A^{1/2}\left(\alpha Q^* \frac{d}{dt}(\gamma u) + A^{1/2}u \right) + \beta K \frac{du}{dt} = f(t), \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + iA^{1/2}\frac{du}{dt} = 0, \end{gathered} \tag{16}$$

$$u(0) = u^0,\, u'(0) = u^1,\, \zeta(0) = 0,\, \zeta'(0) = -iA^{1/2}u^0. \tag{17}$$

В векторно-матричной форме систему операторных уравнений (16) можно переписать в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha B + \beta C_0 & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{18}$$

$$C_0 := A^{-1/2}KA^{-1/2} =: S^+S, \quad S := K^{1/2}A^{-1/2}, \quad S^+ := A^{-1/2}K^{1/2}, \tag{19}$$

и оператор $B := Q^*Q$ является неотрицательным самосопряженным оператором. Если $G_+ \subset_{\to}\subset_{\to} G$, то $B : E \to E$ – компактный неотрицательный оператор.

Дальнейшее исследование задачи основано на предположении

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K) \subset E, \tag{20}$$

т.е. оператор A гильбертовой пары $(F; E)$ "не слабее" оператора K внутренней диссипации энергии в изучаемой динамической системе. Если выполнено свойство (20), то из известного неравенства Гайнца (см. [7], с. 254), будем иметь:

$$\mathcal{D}(K^{1/2}) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}) = F.$$

Лемма 4. *Оператор C_0 с областью определения $\mathcal{D}(K^{1/2})$ может быть расширен по непрерывности до ограниченного самосопряженного и неотрицательного оператора $C = S^*S \in \mathcal{D}(E)$.*

С учетом этих рассуждений приходим к задаче Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dy}{dt} = -\mathcal{A}_{\alpha,\beta} y + \hat{f}(t), \tag{21}$$

$$\mathcal{A}_{\alpha,\beta} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha B + \beta C & iI \\ iI & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$y(t) := (du/dt; d\zeta/dt))^t\,, \quad \hat{f}(t) := (f(t); 0)^t, \quad y(0) = (u_1; -iA^{1/2}u^0), \tag{22}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_{\alpha,\beta}) := \left\{ u = (u_1; u_2)^t : \, u_1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})\,,\, (\alpha B + \beta C)A^{1/2}u_1 + iu_2 \in \mathcal{D}(A^{1/2}) \right\}.$$

Можно показать, что операторный коэффициент $-\mathcal{A}_{\alpha,\beta}$ является максимальным диссипативным оператором, тогда (см. [6]) этот оператор — генератор сжимающей полугруппы операторов. Это позволяет, с использованием теории полугрупп, доказать теорему о существовании сильного решения исходной задачи (4) – (6).

Здесь сформулируем лишь итоговый результат рассмотрения абстрактной начально-краевой задачи (4) – (6) с поверхностной и внутренней диссипацией энергии. Однако сначала дадим определение сильного решения задачи Коши (4) – (6).

Определение 3. Будем говорить, что функция $u(t)$ является сильным решением задачи Коши (4) – (6) на отрезке $[0, T]$, если

$$u(t) \in C^2([0, T]; E) \cap C^1([0, T]; F) \cap C([0, T]; \mathcal{D}(A)), \tag{23}$$

и для нее выполнено уравнение (4), где каждое слагаемое является элементом из $C([0, T]; E)$, граничное условие (5), где каждое слагаемое является элементом из $C([0, T]; G_+)$, а также начальные условия (6).

Теорема 2. *Если выполнены условия*

1. $f(t) \in C^1([0,T];E)$;

2. $u^1 \in \mathcal{D}(A), \quad u^0 = v^0 + w^0,\ v^0 \in \mathcal{D}(A),\ w^0 = -\alpha V \gamma u^1$,

а также свойство дополнительной гладкости

$$u(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(K)),$$

то задача Коши (4) – (6) *имеет единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$ *в смысле определения 3.*

Спектральные проблемы с внутренней диссипацией энергии

Исследование спектральных задач как с поверхностной, так и с внутренней диссипацией энергии представляет собой пока нерешенную проблему. Поэтому исследование этих задач осуществляется поэтапно. Так, в работе [8] были изучены спектральные задачи, порожденные начально-краевыми задачами только с поверхностной диссипацией энергии. Рассмотрены простейшие свойства спектра, а затем на примерах — одномерном, двумерном и в цилиндрических областях — обнаружено, что спектр рассматриваемых задач достаточно своеобразен. Выясняется, как этот спектр мигрирует в комплексной плоскости при изменении параметра диссипации от нуля до бесконечности. Приводятся примеры численных расчетов спектра на основе метода итераций. Далее, в общей постановке исследована спектральная задача с поверхностной диссипацией энергии. На основе одного общего результата, полученного Т. Я. Азизовым, доказано, что в случае общего положения спектр задачи является дискретным с предельной точкой на бесконечности.

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с исследованием спектральных задач с внутренней диссипацией энергии. Так, рассмотрим изменение абстрактной начально-краевой задачи (4) – (6) с поверхностной и внутренней диссипацией энергии на тот случай, когда в динамической системе отсутствует поверхностная диссипация ($\alpha = 0$), но присутствует внутренняя диссипация энергии. Ее соответствующая формулировка такова. Пусть пространства E, F и G, а также оператор $\gamma : F \to G$ удовлетворяют условиям теоремы 1 и справедлива абстрактная формула Грина (3). Требуется найти элемент $u \in F$ такой, что выполнены уравнение, граничное и начальные условия:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \beta K \frac{du}{dt} + Lu = f(t)\ (\text{в } E), \quad \partial u = 0\ (\text{в } G\,), \quad u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1. \tag{24}$$

Далее будем изучать нормальные движения системы, т.е. такие решения однородной задачи (24) без начальных условий, для которых

$$u(t) = exp(-\lambda t)u,\ x \in F,\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{25}$$

Тогда для амплитудных элементов $u \in F$ возникает спектральная задача

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u + L u = 0 \text{ (в } E), \quad \partial u = 0 \text{ (в } G). \tag{26}$$

Введем оператор A гильбертовой пары $(F; E)$,

$$Au := Lu,\ \mathcal{D}(A) := \{u \in F : \partial u = 0 \text{ (в } G),\ \mathcal{R}(L) = E\} \subset F. \tag{27}$$

Напомним, что $A = A^* \gg 0$.

Тогда приходим к проблеме

$$L_\beta(\lambda)u := (\lambda^2 I - \lambda\beta K + A)u = 0, \tag{28}$$

рассматриваемой в пространстве F. Здесь $L_\beta(\lambda)$ — квадратичный операторный пучок с операторными коэффициентами A и K. Далее будем считать, что $K = K^* \gg 0$ — неограниченный положительно определенный оператор, область определения которого "сравнима" с $\mathcal{D}(A)$, т.е. выполнено одно из условий

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K) \quad \text{либо} \quad \mathcal{D}(A) \supset \mathcal{D}(K). \tag{29}$$

Итак, далее будем рассматривать абстрактную спектральную проблему

$$\lambda^2 u - \lambda\beta K u + A u = 0 \text{ (в } E), \quad u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K) \subset F. \tag{30}$$

Так как $A \gg 0$, то число $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (30). Отсюда следует, что эту задачу можно привести к исследованию спектральной задачи для линейного по λ операторного пучка. Именно, введем в (30) новый искомый элемент ζ по закону $iA^{1/2}u = \lambda\zeta$. Тогда задача (30) будет равносильна проблеме

$$\begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} u \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad u \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(K),\ \zeta \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \tag{31}$$

или

$$\mathcal{A}_\beta z = \lambda z, \quad z := (u; \zeta)^t \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta), \quad \mathcal{A}_\beta := \begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{32}$$

которые рассматриваются в пространстве $E^2 := E \oplus E$.

Отметим для задач (31),(32) простейшие свойства решений.

1^0. Собственные значения задач (31),(32) расположены в правой комплексной полуплоскости симметрично относительно вещественной оси.

2^0. При $\beta = 0$ спектр задачи (31),(32) дискретен, расположен на мнимой оси, его собственные значения $\{\lambda_j^\pm\}_{j=1}^\infty$ конечнократны и вычисляются по формуле

$$\lambda_j^\pm = \pm i\lambda_j^{1/2}(A), \quad j = 1, 2 \ldots, \tag{33}$$

где $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^\infty \subset \mathbb{R}_+$ — собственные значения оператора $A \gg 0$. При этом предполагается, что пространство F компактно вложено в E и потому оператор $A^{-1} > 0$ компактен. Собственные элементы $(u_j^\pm; \zeta_j^\pm)^t$ задачи, отвечающие собственным значениям (33), образуют ортонормированный базис в пространстве E^2.

Дальнейшее изучение задач (31),(32) связано с уточнением взаимосвязей областей определения операторов задачи A и K и рассмотрением трех случаев различной интенсивности внутренней диссипации энергии. Здесь рассмотрим лишь случай малой и средней внутренней диссипации энергии. Случай большой интенсивности внутренней диссипации требует дополнительных исследований и будет отражен в последующих публикациях автора.

1. В случае малой интенсивности внутренней диссипации имеет место следующее вложение областей определения операторов задачи A и K:

$$\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(K). \tag{34}$$

Тогда в задаче (32) операторная матрица $\mathcal{A}_\beta$ корректно определена, если $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta) := \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Лемма 5. *Оператор $\mathcal{A}_\beta$ допускает факторизацию вида*

$$\mathcal{A}_\beta = \begin{pmatrix} \beta K & iA^{1/2} \\ iA^{1/2} & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} I & -i\beta K A^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \\ A^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

где $KA^{-1/2}$ — ограниченный оператор, действующий в E. Соответственно обратный оператор $\mathcal{A}_\beta^{-1}$ также допускает факторизацию

$$\mathcal{A}_\beta^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -iA^{-1/2} \\ -iA^{-1/2} & \beta A^{-1/2} K A^{-1/2} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2} \\ A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\beta K A^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Из (35) следует, что оператор $\mathcal{A}_\beta$ на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta)$ является замкнутым и область его значения, т.е. область определения $\mathcal{A}_\beta^{-1}$ есть всё пространство E^2. Введем обозначения

$$\mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} 0 & A^{1/2} \\ A^{1/2} & 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{J} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}, \ \mathcal{T} := \begin{pmatrix} I & i\beta K A^{-1/2} \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Тогда в силу (35),(37) задачу (32) можно переписать в виде

$$(\mathcal{J} - \mathcal{T})\mathcal{A}_0 z = \nu z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A^{1/2}) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad \nu := i\lambda. \tag{38}$$

Эта задача, в свою очередь, равносильна проблеме

$$(\mathcal{J} + \mathcal{T})\mathcal{A}_0^{-1} w = \mu w, \quad w := \mathcal{A}_0 z \in E^2, \quad \mu := i\lambda^{-1}. \tag{39}$$

Далее, будем предполагать, что $F \subset\!\!\!\to\subset\!\!\!\to E$ и $KA^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty(E)$. Заметим, что первое условие обычно выполнено в задачах математической физики, а второе условие — это условие общего положение, говорящее о том, что в динамической системе мала интенсивность внутренней диссипации (по сравнению с упругими консервативными силами, связанными с потенциальной энергией системы и колебательными режимами в ней).

Если $F \subset\!\!\to\!\!\subset\!\!\to E$, то порождающий оператор A гильбертовой пары $(F;E)$ имеет положительный компактный обратный оператор A^{-1}, а потому и оператор

$$\mathcal{A}_0^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2} \\ A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \operatorname{Ker} \mathcal{A}_0^{-1} = \{0\}, \tag{40}$$

является самосопряженным компактным оператором в E^2. Далее, если $KA^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty(E)$, то $\mathcal{T} \in \mathcal{S}_\infty(E^2)$, и (39) есть задача на собственные значения слабо возмущенного компактного самосопряженного оператора.

Определение 4. Будем говорить, что система корневых элементов $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ задачи (30) двукратно полна в норме графика оператора $A^{1/2}$, если система корневых элементов

$$w_j := \left(A^{1/2}\zeta_j; A^{1/2}u_j\right)^t = \left(i\lambda_j^{-1}Au_j; A^{1/2}u_j\right)^t, \quad j = 1, 2 \ldots, \tag{41}$$

задачи (39) полна в пространстве E^2.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия:*

$$KA^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty(E), \quad A \in \mathcal{S}_p(E). \tag{42}$$

Тогда имеют место следующие свойства:

(1) *Система корневых элементов $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ задачи (30) двукратно полна в норме графика оператора $A^{1/2}$.*

(2) *Сколь бы ни было мало $\varepsilon > 0$, все собственные значения $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ задачи (30), отвечающие корневым элементам $\{u_j\}_{j=1}^\infty$, нормальны, имеют предельную точку $\lambda = \infty$, расположены в правой комплексной полуплоскости и кроме, быть может, конечного их числа, находятся в полусекторах*

$$\begin{aligned} \Lambda^+(\varepsilon) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \pi/2 - \varepsilon < \arg\lambda < \pi/2\}, \\ \Lambda^-(\varepsilon) &:= \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad -\pi/2 < \arg\lambda < -\pi/2 + \varepsilon\}. \end{aligned} \tag{43}$$

Доказательство. Оно основано на теореме М.В. Келдыша о полноте системы корневых элементов и локализации спектра слабовозмущенного самосопряженного компактного оператора (см. [9] и [10]), на свойствах компактного оператора, а также на свойстве 1^0 решений спектральных задач.

В задачах математической физики собственные значения $\lambda_j(A)$ оператора A гильбертовой пары $(F;E)$, как правило, имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_j(A) = c_A j^a[1 + o(1)],\ j \to \infty,\ c_A > 0,\ a > 0. \tag{44}$$

Если учесть это обстоятельство, то можно усилить результат теоремы 3.

Теорема 4. *Если собственные значения оператора A имеют асимптотическое поведение (44) и $KA^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty(E)$, то справедливы следующие утверждения:*

(1) *собственные значения задачи* (30) *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_j = \lambda_j^{\pm} = \pm i\lambda_j^{1/2}(A)[1+o(1)],\ j \to \infty; \tag{45}$$

(2) *корневые элементы* $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ *задачи* (39) *образуют базис Абеля-Лидского (в пространстве* E^2*) с суммированием порядка, большего* $a/2$.

2. В случае средней интенсивности внутренней диссипации будут иметь место включения

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(K) \subset \mathcal{D}(A^{1/2}). \tag{46}$$

В этом случае оператор $\mathcal{A}_\beta$ задачи (32) корректно определен на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_\beta) := \mathcal{D}(K) \oplus \mathcal{D}(A^{1/2})$.

Можно проверить непосредственно, что оператор $\mathcal{A}_\beta$ допускает следующую факторизацию в форме Шура-Фробениуса

$$\mathcal{A}_\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\beta^{-1}Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta K & 0 \\ 0 & \beta^{-1}VV^{+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\beta^{-1}Q^{+} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{47}$$

$$Q := A^{1/2}K^{-1} \in \mathcal{L}(E), \quad Q^{+} := K^{-1}A^{1/2}, \quad \mathcal{D}(Q^{+}) = \mathcal{D}(A^{1/2}), \tag{48}$$

$$V^{-1} := K^{1/2}A^{-1/2} \in \mathcal{L}(E), \quad (V^{+})^{-1} := A^{-1/2}K^{1/2}, \quad \mathcal{D}((V^{+})^{-1}) = \mathcal{D}(K^{1/2}). \tag{49}$$

Лемма 6. *Оператор* Q^{+} *обладает свойствами:*

$$\overline{Q^{+}} = Q^{*}, \quad Q^{*}|_{\mathcal{D}(A^{1/2})} = Q^{+}. \tag{50}$$

Лемма 7. *Для оператора* $(V^{+})^{-1}$ *справедливы равенства:*

$$\overline{(V^{+})^{-1}} = (V^{*})^{-1}, \quad (V^{*})^{-1}|_{\mathcal{D}(K^{1/2})} = (V^{+})^{-1}. \tag{51}$$

Следствием лемм 6 и 7 является такое утверждение.

Теорема 5. *Оператор* $\mathcal{A}_\beta$ *допускает замыкание до оператора*

$$\widetilde{\mathcal{A}_\beta} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\beta^{-1}Q & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta K & 0 \\ 0 & \beta^{-1}VV^{*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\beta^{-1}Q^{*} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{52}$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}_\beta}) := \left\{ (u;\zeta)^t \in E^2 :\ u + i\beta^{-1}Q^{*}\zeta \in \mathcal{D}(K),\ \zeta \in \mathcal{D}(VV^{*}) \right\}. \tag{53}$$

Если выполнено условие $V^{-1} = K^{1/2}A^{-1/2} \in \mathcal{S}_\infty(E)$, *то* $\mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{A}_\beta}) = E^2$ *и тогда* $\widetilde{\mathcal{A}_\beta}$ *является максимальным аккретивным оператором, действующим в* E^2.

Рассмотрим задачу на собственные значения оператора $\widetilde{\mathcal{A}_\beta}$:

$$\widetilde{\mathcal{A}_\beta} z = \lambda z, \quad z = (u;\zeta)^t \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}_\beta}). \tag{54}$$

Введем обозначения

$$\mathcal{S}_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ iQ & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S}_2 := \begin{pmatrix} 0 & iQ^* \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_0 := \begin{pmatrix} \beta K & 0 \\ 0 & VV^* \end{pmatrix}. \tag{55}$$

Тогда имеем задачу

$$(\mathcal{J} + \mathcal{S}_1)\mathcal{A}_0(\mathcal{J} + \mathcal{S}_2)z = \lambda z, \quad z \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}_\beta}), \tag{56}$$

где $\mathcal{S}_1$ и $\mathcal{S}_1$ — треугольные операторные матрицы (55), и потому существуют ограниченные обратные операторы $(\mathcal{J} + \mathcal{S}_1)^{-1} = (\mathcal{J} - \mathcal{S}_1)$, $(\mathcal{J} + \mathcal{S}_2)^{-1} = (\mathcal{J} - \mathcal{S}_2)$.

Далее будем предполагать, что выполнены следующие условия:

$$Q = A^{1/2}K^{-1} \in \mathcal{S}_\infty(E), \quad K^{-1} \in \mathcal{S}_{p_K}, \quad (VV^*)^{-1} \in \mathcal{S}_{p_V}. \tag{57}$$

Тогда (56) преобразуется в следующую задачу на собственные значения для слабовозмущенного самосопряженного компактного оператора:

$$(\mathcal{J} - \mathcal{S}_2)\mathcal{A}_0^{-1}(\mathcal{J} - \mathcal{S}_1)z = \mu z, \quad \mu = \lambda^{-1}, \quad \mathcal{A}_0^{-1} = \operatorname{diag}(K^{-1}; (VV^*)^{-1}). \tag{58}$$

В силу предположения (57) будем иметь

$$\mathcal{S}_1,\, \mathcal{S}_2 \in \mathcal{S}_\infty(E), \quad \mathcal{A}_0^{-1} \in \mathcal{S}_{p_0}, \quad p_0 = \max(p_K; p_V). \tag{59}$$

Тогда к задаче (58) снова применима первая теорема М.В. Келдыша из [9], (см. с. 314 – 315, теорема 8.1 и замечание 8.1 к ней). Учитывая еще, что $\mathcal{A}_0^{-1} > 0$, приходим к следующему выводу.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия* (57)*. Тогда:*

(1) *Система корневых элементов задачи* (54) *полна в гильбертовом пространстве* $E^2 = E \oplus E$.

(2) *Сколь бы ни было мало* $\varepsilon > 0$, *все собственные значения* λ_j *задачи* (54), *кроме, быть может, конечного их числа лежат в секторе*

$$\Lambda_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} :\, |\arg \lambda| < \varepsilon\}, \tag{60}$$

и имеют в качестве предельной точку $\lambda = \infty$.

Уточним теперь условия (57). Именно, будем считать, что имеют место следующие асимптотические формулы для собственных значений операторов K^{-1} и $(VV^*)^{-1}$:

$$\lambda_j(K) = (c_K)^{-a} j^a [1 + 0(1)], \quad \lambda_j(VV^*) = (c_V)^{-b} j^b [1 + 0(1)], \tag{61}$$

$$c_K > 0,\ c_V > 0,\ a > 0,\ b > 0.$$

Наличие асимптотических формул помогает установить дополнительные свойства к тем, которые были доказаны в теореме 6.

Теорема 7. *Если выполнено условие* (57), *а также условия* (61), *то система корневых элементов задачи* (54) *образует базис Абеля-Лидского порядка* $\alpha > \alpha_0$,

$$\alpha_0 = b \ (a > b), \quad \alpha_0 = a \ (a \leqslant b), \tag{62}$$

а собственные значения λ_j *имеют асимптотическое поведение*

$$\lambda_j = \lambda_j(\mathcal{A}_0)[1 + 0(1)] \quad (j \to \infty), \tag{63}$$

$$\lambda_j(\mathcal{A}_0) = \begin{cases} (c_V)^{-b} j^b [1 + 0(1)] \quad (a > b); \\ (c_K)^{-a} j^a [1 + 0(1)] \quad (a < b); \\ (c_K + c_V)^{-a} j^a [1 + 0(1)] \quad (a = b). \end{cases} \tag{64}$$

Доказательство. Первое и второе утверждение данной теоремы получаем соответственно из утверждения 1^0 и 2^0 на стр. 292 монографии [11].

Таким образом, если диссипация в динамической системе достаточно мала, то спектр локализован в окрестности мнимой оси, дискретен и имеет предельную точку $\lambda = \infty$, а корневые элементы имеют свойства двукратной полноты и двукратной базисности по Абелю-Лидскому. Далее, для случая средней интенсивности внутренней диссипации энергии установлено, что при сформулированных выше предположениях спектр задачи локализован в окрестности положительной полуоси, дискретен и имеет предельную точку $\lambda = \infty$, а корневые элементы задачи образуют полную систему либо базис Абеля-Лидского в пространстве E^2.

Автор благодарит проф. Н.Д. Копачевского за руководство написанием статьи.

Список литературы

[1] Копачевский Н.Д. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[2] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн // Украинский математический вестник. — 2004. — Т. 1, № 1— С. 69–97.

[3] Копачевский Н.Д. Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложения к задаче Стокса / Н.Д. Копачевский // Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ). — Симферополь, 2004. — №2 — С. 52–80.

[4] Kopachevsky N.D. Abstract Creen's Formula. Abstract Spectral and Evolution Problems / N.D. Kopachevsky // The Fourth Intern. Conf. on Diff. and Functional-Diff. Eqs (Moscow, Russia, August 14-21, 2005): Abstracts. — P. 48-49.

[5] Обен Ж.-П. Приближенные решения эллиптических краевых задач / Ж.-П. Обен. — М.: Мир, 1977. — 384 с.

[6] Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.

[7] Крейн С.Г. Функциональный анализ. Серия "Справочная математическая библиотека / С.Г. Крейн. — М.:Наука, 1972. — 544 с.

[8] Андронова О.А. О линейных задачах с поверхностной диссипацией энергии / О.А. Андронова, Н.Д. Копачевский // Современная математика. Фундаментальные направления. — Москва: Рос. инст. дружбы народов, 2008. — Том 29. — С. 11–28.

[9] Гохберг И.Ц. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве / И.Ц. Гохберг, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1965. — 448 с.

[10] Маркус А.С. Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков / А.С. Маркус. — Кишинев:Штиинца, 1986. — 260 с.

[11] Agranovich M.S. Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory / M.S. Agranovich, B.Z. Katsenelenbaum, A.N. Sivov, N.N. Voitovich. — Berlin, Toronto: Wiley — VCH, 1999. — 380 p.

Розглянуто узагальнення початково-крайової задачі математичної фізики з поверхневою і внутрішньою дисипацією енергії. Сформульована абстрактна проблема на основі використання абстрактної формули Гріна для трійки гільбертових просторів і оператора сліду. Доведена теорема про сильну розв'язність досліджуваної задачі. Розглянуті спектральні проблеми з внутрішньою дисипацією енергії при різній інтенсивності внутрішній дисипації. Наведені простіщі властивості рішень даної задачі. Для випадку малої та середньої внутрішньої дисипації отримані твердження про локалізацію спектру та про повноту та базисність кореневих функцій.

There was considered generalization of the initial-boundary value problem with surface and internal dissipation of an energy. There was formulated the abstract problem on the basis of the abstract Green formula for the triple of Hilbert spaces and the trace operator. We proved the theorem on strong solvability of the considered problem. There were discussed spectral problems with internal dissipation of an energy at its different intensity. The elementary properties of the solutions of the problem were presented.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 14–25.

С. Ю. Артамонов

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА НА ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕ

В работе показана применимость метода множителей Лагранжа к вариационным задачам с условием изопериметрического типа на подвижной границе. Полученные результаты применены при нахождении пика энергетической формы интегрального оператора с подвижной границей.

Введение и постановка задачи

В вариационном исчислении хорошо известны и находят широкое применение два типа экстремальных задач [1]-[3]:
а) изопериметрические задачи на условный экстремум с неподвижной границей

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx \to extr, \tag{1}$$

где уравнение связи задаётся с помощью второго вариационного функционала

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x, y(x), y'(x))dx = 0,$$

либо системы таких функционалов;
б) вариационные задачи на экстремум с подвижной границей типа (1) при условии связи $y(x_1) = \varphi(x_1)$, где $\varphi(x)$ - заданная функция, $y(x_0) = y_0$ — заданное значение.

Задачи второго типа также можно записать в виде задач на условный экстремум с условием связи вида

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi'(x) - y'(x))dx = 0.$$

Это приводит нас к следующей более общей постановке вариационной задачи на условный экстремум, объединяющей в себе задачи типов (а) и (б):

$$\begin{cases} \Phi(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx \to extr, \\ G(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} g(x, y(x), y'(x))dx = 0, \quad y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Задачи типа (2) мы будем называть *задачами с условием изопериметрического типа на подвижной границе.*

Приведём точную постановку более общей, чем (2), задачи: среди всех функций $y(\cdot)$, принадлежащих классу $C^1([x_0, x_1], E)$ при любом $x_1 \geq x_0$, где E — банахово пространство, и таких, что $y(x_0) = y_0$ и при любом $x_1 \geq x_0$ выполнено соотношение

$$G(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} g(x_1, x, y(x), y'(x))dx = 0, \tag{3}$$

найти ту, для которой основной вариационный функционал

$$\Phi(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x_1, x, y(x), y'(x))dx \tag{4}$$

достигает экстремума.

Здесь, в отличие от классической изопериметрической задачи, предполагается наличие следующих дополнительных условий:

а) верхний предел интегрирования является переменным;

б) верхний предел интегрирования содержится также и под знаком интегралов (3) и (4);

в) искомая функция $y(x)$ принадлежит банахову пространству $C^1([x_0, x_1], E)$ при любом $x_1 \geq x_0$.

Кроме того, будем считать, что функции f и g имеют непрерывные частные производные Фреше первого и второго порядков.

Важным частным случаем общей задачи (3) - (4) является задача, где условие связи имеет следующий вид:

$$G(x_1, y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1, t, s)y(s)ds - \lambda(x_1)y(t) = 0, \tag{5}$$

т.е. $G(x_1, y)(t) = 0$ представляет собой задачу на собственное значение и собственную функцию соответствующего интегрального оператора при нелинейной зависимости ядра от x_1. Таким образом, экстремум вариационного функционала в задаче (4)-(5) ищется на собственных функциях интегрального оператора $(K^{x_1}y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)y(s)ds$.

Применение метода множителей Лагранжа к решению задач с условием изопериметрического типа на подвижной границе.

Наша цель в этом разделе — применить известную модификацию метода множителей Лагранжа для случая банаховых пространств [4] к задаче (3)-(4). Как известно, необходимым условием условного экстремума является обращение в нуль частных производных функции Лагранжа $F = \Phi + \lambda(G)$, где $\lambda \in E^*$.

А. Скалярный случай. В этом случае $\lambda \in \mathbb{R}, (y \in C^1([x_0,x_1],\mathbb{R}))$.

Рассмотрим вариационную задачу на условный экстремум изопериметрического типа (3)-(4), где

$$\Phi:\ I_{x_1} \times C^1(I_{x_1}) \to \mathbb{R}, \quad G:\ I_{x_1} \times C^1(I_{x_1}) \to \mathbb{R}, \quad I_{x_1} = [x_0,x_1]$$

Предположим, что выполнено условие $\frac{\partial g}{\partial y'}\Big|_{x_1} \neq 0$. Составляя функцию Лагранжа $F = \Phi + \lambda \cdot G$ и применяя метод множителей Лагранжа, приходим к необходимому условию экстремума в виде системы

$$\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \lambda \cdot \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0;\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial G}{\partial y} = 0;\ G = 0.\right\} \tag{6}$$

Соответствующие дифференциалы Фреше имеют вид:

$$\left\{\begin{array}{l} d\Phi(x_1,y)(\Delta x_1,h) = (f\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1} dx) \cdot \Delta x_1 + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y} h + \frac{\partial f}{\partial y'} h'\right] dx; \\ \\ dG(x_1,y)(\Delta x_1,h) = (g\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial g}{\partial x_1} dx) \cdot \Delta x_1 + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial g}{\partial y} h + \frac{\partial g}{\partial y'} h'\right] dx. \end{array}\right. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), приходим к следующей системе:

$$\left\{\begin{array}{l} (f+\lambda g)\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}(f+\lambda g)\, dx = 0, \quad h(x_0) = 0; \\ \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial y}(f+\lambda g)h + \frac{\partial}{\partial y'}(f+\lambda g)h'\right] dx = 0. \end{array}\right. \tag{8}$$

Проведем локализацию свободной переменной h во втором уравнении (8) двумя способами. Первый способ: считаем, что $h(x_0) = h(x_1) = 0$. В этом случае, локализуя h вблизи произвольной точки $x \in I_{x_1}$ стандартным способом [2], приходим к уравнению Эйлера-Лагранжа для $(f + \lambda g)$:

$$L(f+\lambda g) = L(f) + \lambda \cdot L(g) = 0, \tag{9}$$

где $L = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}\right)$. Второй способ: допуская, что $h(x_1) \neq 0$, локализуем h "вблизи x_1 т.е. полагаем

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in [x_0, x_1 - 1/n], \\ \\ nx + (1 - n \cdot x_1), \quad x \in [x_1 - 1/n, x_1], \end{cases} \tag{10}$$

Здесь подразумевается, что h_n "сглажены"на достаточно малых участках вблизи точки $(x_1 - \frac{1}{n})$.

В этом случае

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda g)h_n \longrightarrow 0, \text{ при } n \to \infty,$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial y'}(f + \lambda g)h'_n dx = \frac{1}{n} \cdot n\left(\frac{\partial}{\partial y'}(f + \lambda g)\right)\big|_{\xi_1} \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial y'}(f + \lambda g)\right)\big|_{x_1}, \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда уравнение для λ будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, уравнения $(8), (9), (11)$ образуют систему:

$$\begin{cases} (f + \lambda g)\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}(f + \lambda g)\, dx = 0; \\ \\ L(f) + \lambda \cdot L(g) = 0, (\lambda \in \mathbb{R}); \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Из последнего уравнения (12) легко выражается $\lambda = -(\frac{\partial f}{\partial y'})/(\frac{\partial g}{\partial y'})\big|_{x_1}$. Далее, подставляя λ в первое уравнение (12), получаем *обобщённое условие трансверсальности:*

$$\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial y'} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial y'}\right)\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) dx = 0.$$

После подстановки λ во второе уравнение (12), приходим к уравнению Эйлера-Лагранжа для $f + \lambda g$, которое мы назовём *совместным уравнением Эйлера-Лагранжа:*

$$\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} \cdot L(f) - \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \cdot L(g) = 0.$$

Б. Векторный случай. В этом случае $y \in C^1([x_0, x_1], E)$. Рассмотрим вновь вариационную задачу на условный экстремум изопериметрического типа (3)-(4), где

$$\Phi: \ I_{x_1} \times C^1(I_{x_1}, E) \to \mathbb{R}, \quad G: \ I_{x_1} \times C^1(I_{x_1}, E) \to C^1(I_{x_1}, E), \ \ I_{x_1} = [x_0, x_1]$$

Здесь $y(\cdot) \in \mathbb{C}^1(I_{x_1}, E) = Y$, и так как E — банахово пространство, то Y — также банахово пространство. Считаем, что выполнено условие $\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} \in Isom(Y)$.

Применяя метод множителей Лагранжа к функции $F = \Phi + \lambda(G)$, где уже $\lambda(\cdot) \in Y^*$, приходим к системам уравнений типа $(6) - (7)$, откуда получаем аналог системы (8):

$$\begin{cases} (f + \lambda(g))\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}(f + \lambda(g))\, dx = 0, \ (h(x_0) = 0); \\ \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda(g))h + \frac{\partial}{\partial y'}(f + \lambda(g))h'\right] dx = 0, \ (\lambda \in Y^*). \end{cases} \tag{13}$$

Проведем локализацию $h(x_1)$ как и в скалярном случае двумя способами: сначала считаем, что $h(x_0) = h(x_1) = 0$. В этом случае, аналогично случаю А), получим уравнение Эйлера-Лагранжа для $(f + \lambda g)$:

$$L(f + \lambda(g)) = L(f) + \lambda[L(g)] = 0. \tag{14}$$

Во втором случае, допуская, что $h(x_1) \neq 0$, и используя последовательность скалярных функций (10), выберем произвольно вектор $\widetilde{h_0} \in E$ такой, что $\|\widetilde{h_0}\| = 1$ и полагаем $\widetilde{h_n}(x_1) = h_n(x_1) \cdot \widetilde{h_0}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Выкладки, аналогичные случаю А), приводят к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right) = 0. \tag{15}$$

Уравнения $(13) - (15)$ образуют систему:

$$\begin{cases} (f|_{x_1} + \lambda(g|_{x_1})) + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}(f + \lambda(g))\, dx = 0, \\ \\ L(f + \lambda(g)) = L(f) + \lambda[L(g)] = 0, \ (\lambda \in Y^*) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Из последнего уравнения (16) находим

$$\lambda = -\frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \circ \left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right)^{-1}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в первое и второе уравнения системы (16) приходим, соответственно к *обобщённому условию трансверсальности в несимметричной форме:*

$$\left[f\big|_{x_1} - \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \circ \left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right)^{-1} \circ g\big|_{x_1}\right] + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \circ \left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right)^{-1} \circ \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) dx = 0 \tag{18}$$

и совместному уравнению Эйлера-Лагранжа в несимметричной форме:

$$L(f) - \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \circ \left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right)^{-1} \circ L(g) = 0 \tag{19}$$

Отметим, что основная сложность в применении уравнений (18)-(19) составляет вычисление обратного оператора $\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right)^{-1}$.

Применение полученных результатов к интегральным операторам с подвижной границей.

Как известно ([5], гл. 4, §6), для самосопряженного интегрального оператора $(K^{x_1}y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(t,s)y(s)ds$ в $L_2[x_0,x_1]$ его энергетическая форма $< K^{x_1}y, y >$ достигает по модулю максимума на собственной функции $y(\cdot), \|y\| = 1$, отвечающей наибольшему по модулю собственному числу оператора K. При этом с увеличением x_1 величина $| < K^{x_1}y, y >_{max} |$ меняется монотонно [6]. Эти факты имеют большие применения в задачах математической физики.

Однако, если ядро k зависит и от x_1, т.е. $k = k(x_1,t,s)$, то максимум энергетической формы $| < K^{x_1}y, y >_{max} |$ может меняться достаточно произвольно. Естественным является вопрос о значении x_1 и собственной функции y, для которых достигается локальный $\underset{x_1}{max}| < K^{x_1}y, y >_{max} |$. Эту величины мы назовём *пиком энергетической формы* интегрального оператора K^{x_1}.

Случай одномерного ядра. Прямое решение. Пусть

$$(K^{x_1}y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t)k(x_1,s)y(s)ds.$$

Тогда

$$< K^{x_1}y, y >_{L_2} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t)k(x_1,s)y(s)ds\right) y(t)dt = \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,s)y(s)ds\right)^2.$$

Таким образом, мы приходим к вариационной задаче на условный экстремум

$$\Phi(x_1,y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,s)y(s)ds \to \max, \tag{20}$$

при условии связи

$$G(x_1, y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1, t)k(x_1, s)y(s)ds - \lambda(x_1)y(t) = 0. \tag{21}$$

Вариационную задачу (20)-(21) мы рассматриваем при переменном $x_1 \geq x_0$ уже в пространстве $y(\cdot) \in C^1([x_0, x_1])$, которое плотно вложено в $L_2([x_0, x_1])$.

Прежде всего, из (21) находим:

$$\lambda(x_1)y(t) = \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k(t, s)y(s)ds \right) \cdot k(x_1, t).$$

Следовательно,

$$y(t) = \gamma(x_1) \cdot k(x_1, t). \tag{22}$$

Из условия нормировки $\|y\|_{L_2[x_0,x_1]} = |\gamma| \cdot \|k\|_{L_2[x_0,x_1]} = 1$ получаем

$$|\gamma(x_1)| = \frac{1}{\|k\|_{L_2}} = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_{x_0}^{x_1} k^2(x_1, s)ds}}.$$

Подставляя (22) снова в (21), получаем:

$$\lambda(x_1) = \|k\|^2_{L_2}. \tag{23}$$

Подставляя теперь (23) в (20), и возводя полученные выражения для удобства дифференцирования в квадрат, мы приводим задачу на условный экстремум (20)-(21) к задаче на безусловный локальный экстремум:

$$\Phi^2(x_1, y(x_1)) = \|k(x_1, \cdot)\|^2_{L_2[x_0,x_1]} \to \max. \tag{24}$$

Таким образом, необходимое условие экстремума в задаче (20)-(21), согласно лемме Ферма, есть равенство

$$\left(\|k(x_1, \cdot)\|^2\right)' = 0, \tag{25}$$

а достаточное условие максимума — неравенство

$$\left(\|k(x_1, \cdot)\|^2\right)'' < 0. \tag{26}$$

Здесь и далее под $\|\cdot\|$ мы понимаем норму в L_2.

Примеры.

1. Пусть $(K^{x_1}y)(t) = \frac{1}{x_1}\int\limits_0^{x_1} \cos t \cdot \cos s \ y(s)ds$, т.е. K^{x_1} есть оператор чезаровского типа. Здесь

$$k(x_1, s) = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \cdot \cos s,$$

$$\|k\|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin 2x_1}{2x_1}\right).$$

Таким образом, вариационный функционал (20) принимает вид:

$$\Phi(x_1, y) = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int\limits_0^{x_1} \cos sy(s)ds.$$

Отсюда получаем, что

$$\left(\|k\|^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x_1 \cos 2x_1 - 2\sin 2x_1}{4x_1^2}.$$

Необходимое условие экстремума (25) принимает вид

$$2x_1 = tg2x_1,$$

т.е. получаем хорошо известное в теории дифференциальных уравнений уравнение $tgt = t$.

Простейшая ассимптотика решений этого уравнения имеет вид:

$$x_1^k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} - o(1), \quad k \to \infty.$$

Далее, достаточное условие максимума (26) принимает вид:

$$\left(\|k\|^2\right)'' = -\frac{\sin 2x_1 + \cos 2x_1}{x_1} + \frac{\sin 2x_1}{2x_1^2} < 0.$$

Отсюда

$$\left(\|k\|^2\right)''\big|_{x_1^k} \cong \frac{(-1)^{k+1}}{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}\ .$$

Следовательно,

$$\left(\|k\|^2\right)''\big|_{x_1^k} < 0, \text{ при } k = 2m.$$

При этом

$$\Phi^2(x_1^k) = \|k\|^2\big|_{x_1^k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin 2x_1^{2m}}{2x_1^{2m}}\right).$$

Из последнего равенства очевидно, что $\Phi^2(x_1^k)$ достигает пика при $m = 1$. Итак, пиковое значение для энергетической формы имеет вид:

$$\max_{x_1} < K^{x_1}y, y >= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin 2x_1^2}{2x_1^2}\right)} \sim \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi}\right)}.$$

2. Пусть $(K^{x_1}y)(t) = \frac{1}{x_1}\int\limits_0^{x_1} cht \cdot chs \cdot y(s)ds$. В этом случае, как легко убедиться с помощью аналогичных выкладок, зависимость максимума энергетической формы $< K^{x_1}y, y >$ от x_1 является монотонной.

Случай n-мерного ядра. Прямое решение. Пусть

$$(K^{x_1}y)(t)=\int\limits_{x_0}^{x_1}k(x_1,t,s)y(s)ds,$$

где

$$k(x_1,t,s)=\sum_{i=1}^{n}k_i(x_1,t)k_i(x_1,s).$$

Тогда энергетическая форма интегрального оператора принимает вид:

$$<K^{x_1}y,y>=\left(\int\limits_{x_0}^{x_1}k_1(x_1,s)y(s)ds\right)^2+\ldots+\left(\int\limits_{x_0}^{x_1}k_n(x_1,s)y(s)ds\right)^2.$$

Таким образом, мы приходим к n однотипным вариационным задачам на условный экстремум:

$$\begin{cases}\Phi_i(x_1,y)=\int\limits_{x_0}^{x_1}k_i(x_1,s)y(s)ds\to\max,\\ G(x_1,y)(t)=\int\limits_{x_0}^{x_1}k(x_1,t,s)y(s)ds-\lambda(x_1)y(t)=0.(i=1..n)\end{cases}\tag{27}$$

Найдя $\underset{x_1}{max}\Phi_i,\quad i=1..n$, получаем оценку

$$\underset{x_1}{max}|<K^{x_1}y,y>|\le\left(\underset{x_1}{max}\Phi_1\right)^2+\ldots+\left(\underset{x_1}{max}\Phi_n\right)^2.$$

Для определенности рассмотрим задачу (27) при $i=1$ (для остальных $i=2..n$ задача решается аналогично).

Из второго уравнения (27) получаем

$$\lambda(x_1)y(t)=\left(\int\limits_{x_0}^{x_1}k_1(x_1,s)y(s)ds\right)\cdot k_1(x_1,t)+\ldots+\left(\int\limits_{x_0}^{x_1}k_n(x_1,s)y(s)ds\right)\cdot k_n(x_1,t).$$

Вводя обозначения

$$\alpha_1(x_1)=\int\limits_{x_0}^{x_1}k_1(x_1,s)y(s)ds\quad,...,\quad\alpha_n(x_1)=\int\limits_{x_0}^{x_1}k_n(x_1,s)y(s)ds,$$

получаем выражение для $y(t)$:

$$y(t)=\frac{\alpha_1(x_1)}{\lambda(x_1)}k_1(x_1,t)+\ldots+\frac{\alpha_n(x_1)}{\lambda(x_1)}k_n(x_1,t).\tag{28}$$

Подставляя (28) во второе уравнение (27), будем иметь:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\alpha_1(x_1)}{\lambda(x_1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} k_1^2(x_1,s)ds + \ldots + \frac{\alpha_n(x_1)}{\lambda(x_1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} k_1(x_1,s)k_n(x_1,s)ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = \frac{\alpha_1(x_1)}{\lambda(x_1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} k_n(x_1,s)k_1(x_1,s)ds + \ldots + \frac{\alpha_n(x_1)}{\lambda(x_1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} k_n^2(x_1,s)ds, \end{cases} \tag{29}$$

или, обозначая соответствующие интегралы через скалярные произведения в L_2, систему (29) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda = \alpha_1 < k_1, k_1 > +\alpha_2 < k_1, k_2 > + \ldots + \alpha_n < k_1, k_n > \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n\lambda = \alpha_1 < k_n, k_1 > +\alpha_2 < k_n, k_2 > + \ldots + \alpha_n < k_n, k_n > \end{cases} \tag{30}$$

Учитывая условие нормировки $\|y\|^2 = 1$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 < k_i, k_i > +2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_i\alpha_j < k_i, k_j >= \lambda^2. \tag{31}$$

Уравнения (30) и (31) образуют систему:

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda = \alpha_1 < k_1, k_1 > +\alpha_2 < k_1, k_2 > + \ldots + \alpha_n < k_1, k_n > \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n\lambda = \alpha_1 < k_n, k_1 > +\alpha_2 < k_n, k_2 > + \ldots + \alpha_n < k_n, k_n > \\ \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 < k_i, k_i > +2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_i\alpha_j < k_i, k_j >= \lambda^2. \end{cases} \tag{32}$$

Из (32) получаем следующее выражение для λ:

$$\lambda = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2.$$

Случай невырожденного ядра. Применение метода множителей Лагранжа. Пусть

$$(K^{x_1}y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)y(s)ds,$$

и $\{k_n(x_1,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторый ортонормированный базис в $L_2[x_0,x_1]$. Тогда, как известно ([5] гл. 7 §3 теорема 1), система $\{k_m(x_1,t)k_n(x_1,s)\}_{m,n=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис в $L_2([x_0,x_1]\times[x_0,x_1])$. Разложим функцию $k(x_1,t,s)$ в двойной ряд Фурье по данному базису:

$$k(x_1,t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot k_m(x_1,t)k_n(x_1,s).$$

При этом $\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}^2 < \infty$, ввиду $k(x_1, \cdot, \cdot) \in L_2$. Теперь энергетическая форма оператора K^{x_1} принимает вид

$$< K^{x_1}y, y >= \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot \left(\int_{x_0}^{x_1} k_m(x_1,t)y(t)dt \right) \cdot \left(\int_{x_0}^{x_1} k_n(x_1,s)y(s)ds \right).$$

Таким образом, наша задача сводится к решению последовательности вариационных задач на условный экстремум $(n = 1, 2, ...)$:

$$\begin{cases} \Phi_n(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k_n(x_1,s)y(s)ds \to \max, \\ \\ G(x_1,y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)y(s)ds - \lambda(x_1)y(t) = 0, \end{cases} \tag{33}$$

с последующей глобальной оценкой

$$< K^{x_1}y, y >= \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot \underset{x_1}{max} | < K^{x_1}y, y > | \leq \sum_{m,n=1}^{\infty} |c_{mn}| \cdot \left(\underset{x_1}{max} \Phi_m \right) \cdot \left(\underset{x_1}{max} \Phi_n \right).$$

Перейдём к решению системы (33) при фиксированном $n = N$. Применяя метод множителей Лагранжа, составляем функцию Лагранжа $F = \Phi_N + l(G)$,
$l \in \left(C^1([x_0, x_1]) \right)^*$, и приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \left((k_N y)\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial k_N}{\partial x_1} y(s)ds \right) + l \left((k(x_1,t,s)y(s)\big|_{x_1}) + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial k(x_1,t,s)}{\partial x_1} y(s)ds \right) - \\ \qquad -\lambda'(x_1)l(y) = 0, \\ \\ \frac{\partial F}{\partial y} h = \int\limits_{x_0}^{x_1} k_N(x_1,s)h(s)ds + l \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)h(s)ds - \lambda(x_1)h(t) \right) = 0, \\ \\ G(x_1,y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)y(s)ds - \lambda(x_1)y(t) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Задача сводится к вычислению функционала l. Подставляя во второе уравнение (34) $h = k_p,\ p = 1, 2, ...$, приходим к системе:

$$< k_N, k_p > + \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} l(k_m(x_1,t)) \cdot < k_n(x_1,s), k_p(x_1,s) > -\lambda l(k_p(x_1,t)) = 0; \quad (p \in \mathbb{N})$$

или, с учётом ортонормированности:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} c_{mN} l(k_m(x_1,t)) - \lambda \cdot l(k_N(x_1,t)) = -1, \quad (p = N) \\ \\ \sum_{m=1}^{\infty} c_{mp} l(k_m(x_1,t)) - \lambda \cdot l(k_p(x_1,t)) = 0. \quad (p \in \mathbb{N},\ p \neq N) \end{cases} \tag{35}$$

Как известно ([7], Ch. II.9) , ввиду условия $\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}^2 < \infty$, система (35) решается методом последовательных конечномерных аппроксимаций, т.е. ищутся пределы решений "обрезанной системы"$p \times p$ при $p \to \infty$.

Находя все $l(k_p)$, мы тем самым полностью определим l. В (35) предполагается, что собственное значение λ известно.

Выводы

В работе показана применимость метода множителей Лагранжа к вариационным задачам изопериметрического типа с подвижной границей. Продемонстрирована полезность полученных результатов при нахождении пика энергетической формы интегрального оператора с подвижной границей.

Список литературы

[1] Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 С.

[2] Гельфанд И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление.* – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 228 С.

[3] Dacorogna B. *Introduction to the calculus of variations.* – Imperial College Press, 2004. – 228 p.

[4] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. *Математический анализ.* – Издательство Московского университета, 2004. Ч.1. – 660 С.

[5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1981. – 544 С.

[6] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике.* – М., Наука, 1989. – 416 С.

[7] Gohberg I., Goldberg S. *Basic Operator Theory.* – Birkhäuser, 1981. – 304 p.

В роботі показана застосовність методу множників Лагранжа до варіаційних задач ізопериметричного типа на рухомої границі. Отримані результати застосовані при знаходженні піку енергетичної форми інтегрального оператора з рухомою границею.

In this paper the applicability of Lagrange's multipliers method for isoperimetric type variational problems with movable boundary is shown. The obtained results are applied for finding the peak of energy form of integral operator with movable boundary.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 26–35.

Е. В. Божонок

ПРОСТЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ K–ГЛАДКОСТИ ОСНОВНОГО ВАРИАЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА W_2^1

Получены простые достаточные условия K–гладкости основного вариационного функционала в пространстве Соболева W_2^1. Исследована их связь с классическими условиями на рост интегранта. Рассмотрены примеры.

Введение. Предварительные сведения

Активно ведущиеся в последние десятилетия исследования по экстремумам вариационных функционалов в пространствах Соболева показали, что в пространствах с гильбертовой интегральной метрикой основной вариационный функционал обладает значительно худшими аналитическими свойствами, чем в случае банаховых пространств типа C^k. Так, в частности, в ([1]) установлено, что вариационный функционал не является дважды дифференцируемым по Фреше в пространстве Соболева W_2^1. В работах ([2], [3], [4]) установлены некоторые варианты слабой непрерывности и слабой дифференцируемости в пространствах с интегральной метрикой. В работах ([5], [6]) было показано, что в пространстве Соболева W_2^1 вариационный функционал обладает более сильным свойством повторной компактной дифференцируемости.

В работе [7] введено понятие псевдоквадратичного функционала и показано, что требование псевдоквадратичности по y' интегранта обеспечивает корректную определенность вариационного функционала в пространстве Соболева W_2^1. Далее введены вейерштрассовские классы псевдоквадратичных функционалов $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$ и показано, что попадание интегранта в подходящий вейерштрассовский класс гарантирует, соответственно, K–непрерывность, K–дифференцируемость и повторную K–дифференцируемость основного вариационного функционала в пространстве W_2^1.

В данной статье установлены простые достаточные условия принадлежности интегранта подходящим вейерштрассовским классам и исследована их связь с классическими оценками роста интегранта. Рассмотрены конкретные примеры.

Приведем необходимые определения и результаты ([5]–[8]).

Определение 1. Говорят, что борелевское отображение $f : \Omega \times Y \times Z =: T \to F$, где Ω—компактное пространство с конечной борелевской мерой, Y, Z, F—вещественные банаховы пространства, *псевдоквадратичное по* z ($f \in K_2(z)$), если f можно представить в виде:

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z) \cdot \|z\| + R(x, y, z) \cdot \|z\|^2, \tag{1}$$

где для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ борелевские отображения P, Q, и R существенно по $x \in \Omega$ ограничены на $T_C = \Omega \times C_Y \times Z$.

Определение 2. Говорят, что отображение f *вейерштрассовское псевдоквадратичное*: $f \in WK_2(z)$, если представление (1) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ отображения P, Q и R равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Определение 3. Говорят, что отображение f *принадлежит классу* $W^1K_2(z)$, если представление (1) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ не только P, Q и R, но также и градиенты $\nabla P := \nabla_{yz} P$, $\nabla Q := \nabla_{yz} Q$, $\nabla R := \nabla_{yz} R$ равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Определение 4. Говорят, что отображение f *принадлежит классу* $W^2K_2(z)$, если представление (1) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ не только P, Q, R, их градиенты ∇P, ∇Q, ∇R, но и гессианы $H(P) := H_{yz}(P)$, $H(Q) := H_{yz}(Q)$, $H(R) := H_{yz}(R)$ равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Замечание 1. Отметим, что представление $f = P + Q \cdot \|z\| + R \cdot \|z\|^2$ функции $f \in K_2(z)$ ($f \in WK_2(z)$, $f \in W^1K_2(z)$, $f \in W^2K_2(z)$) можно, не меняя общности рассуждений, заменить представлением

$$f = \widetilde{P} + \widetilde{R} \cdot \|z\|^2 \tag{2}$$

при сохранении требований определений 1, 2, 3, 4.

Определение 5. Пусть E—вещественное банахово пространство, $\Phi : E \to \mathbb{R}$—функционал на E. Говорят, что функционал Φ *компактно непрерывен* (*K–непрерывен*) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + span\, C)$ непрерывно в y относительно банаховой нормы $\|\cdot\|_C$ в $span\, C$, порожденной C.

Аналогично, говорят, что Φ *компактно (дважды) дифференцируем* (*K–дифференцируем, дважды K–дифференцируем*) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + span\, C)$ (дважды) дифференцируем по Фреше в y относительно $\|\cdot\|_C$.

Обозначим через $\Phi'_K(y)$ и $\Phi''_K(y)$ первую и вторую K–производные Ψ, соответственно.

В [7] были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\Omega = [a;b]$, E—банахово пространство, $u = f(x,y,z)$, $f : \Omega \times E^2 \to \mathbb{R}$. Тогда при $f \in K_2(z)$ вариационный функционал Эйлера-Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_{\Omega} f(x,y,y')dx, \quad y(\cdot) \in W_2^1(\Omega, E), \tag{3}$$

определен всюду на $W_2^1(\Omega, E)$.

Теорема 2. *Пусть $\Omega = [a;b]$, H—вещественное гильбертово пространство, $u = f(x,y,z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. Если $f \in WK_2(z)$, то функционал Эйлера-Лагранжа (3) K–непрерывен всюду на $W_2^1(\Omega, H)$.*

Теорема 3. *Пусть $\Omega = [a;b]$, H—вещественное гильбертово пространство, $u = f(x,y,z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. Если $f \in W^1K_2(z)$, то функционал Эйлера-Лагранжа (3) K–дифференцируем всюду на $W_2^1(\Omega, H)$; при этом*

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right] dx \tag{4}$$

Теорема 4. *Пусть $\Omega = [a;b]$, H—вещественное гильбертово пространство, $u = f(x,y,z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. Если $f \in W^2K_2(z)$, то функционал Эйлера-Лагранжа (3) дважды K–дифференцируем всюду на $W_2^1(\Omega, H)$; при этом*

$$\Phi''_K(y)(h,k) = \int\limits_{\Omega} \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,y')(h,k) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,y')((h',k) + (h,k')) + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')(h',k')\Big] dx. \tag{5}$$

Замечание 2. Отметим, что K–аналитические свойства слабее классических. В [9] рассмотрен пример интегрального функционала, который является K–непрерывным в W_2^1, но при этом разрывным в нуле в обычном смысле. Кроме того, в [1] было впервые доказано, что вариационный функционал (3) в пространстве W_2^1 в общем случае не является дважды сильно дифференцируемым (за исключением чисто квадратичного случая по y'). Нами получено в теореме 4 условие более слабого свойства повторной K-дифференцируемости для более широкого класса псевдоквадратичных интегрантов (см. примеры 1, 2).

1. Достаточные условия принадлежности интегранта классам $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$

Как было выяснено выше, достаточными условиями K–непрерывности, K–дифференцируемости, повторной K–дифференцируемости функционала Эйлера–Лагранжа (3) являются условия попадания интегранта $f(x,y,z)$ в классы $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$ соответственно. В данном пункте мы опишем условия на коэффициенты P и R в представлении $f = P + R\cdot\|z\|^2$, при которых f попадает в указанные классы.

Сначала выясним необходимые и достаточные условия попадания функции f в класс $WK_2(z)$. Для этого введем вспомогательное понятие.

Определение 6. Борелевское отображение $G:\Omega\times Y\times Z =: T\to F$, где Ω—компактное пространство с конечной борелевской мерой, Y, Z, F—вещественные банаховы пространства, назовем *вейерштрассовским по* y ($G\in W_K(y)$), если для любого абсолютно выпуклого компакта $C = C_Y\subset Y$ G равномерно непрерывно и ограничено на $T_C = \Omega\times C_Y\times Z$.

Из определения 1 немедленно следует

Предложение 1. *Пусть, в обозначениях определения 1 функция f представима в виде*

$$f = P + R\cdot\|z\|^2. \tag{6}$$

Тогда $f\in WK_2(z)$ в том и только в том случае, когда $P\in W_K(y)$, $R\in W_K(y)$.

Для описания достаточных условий попадания функции f в класс $W^1K_2(z)$, введем следующее

Определение 7. Пусть, в обозначениях определения 6, Y, Z—гильбертовы пространства и функция G непрерывно дифференцируема в $\Omega\times Y\times Z$ по (y,z). Будем говорить, что $G\in W^1_K(y)$ (C^1*–вейерштрассовская по* y), если $(G,\nabla_{yz}G)\in W_K(y)$, или, что равносильно, $\partial^k_i G\in W_K(y)$, $k=0,1$; $i=y,z$.

Справедливо следующее

Предложение 2. *Пусть, в обозначениях определения 1, функция f представлена в виде* (6). *Если $P,R\in W^1_K(y)$, то $f\in W^1K_2(z)$.*

Доказательство. Из определения 7 следует, что $W^1_K(y)\subset W_K(y)$, откуда, по предложению 1, $f\in WK_2(z)$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\nabla_{yz}f = \nabla_{yz}P + [2(0,R)\cdot\langle z,\cdot\rangle + \nabla_{yz}R\cdot\|z\|^2]. \tag{7}$$

Пусть $1 = \psi_1(\|z\|) + \psi_2(\|z\|)$—разложение единицы в $\mathbb{R}$, ψ_i равномерно непрерывны и ограничены, $0\le\psi_i\le 1$ $(i=1,2)$, $supp\,\psi_1\subset[0;M]$, $supp\,\psi_2\subset[M-\delta;\infty)$ $(M<\infty)$.

Перепишем (7) в виде:

$$\nabla_{yz}f = \Big[\nabla_{yz}P + 2(0,R)\cdot\psi_1(\|z\|)\cdot\langle z,\cdot\rangle\Big] +$$

$$+\Big[2(0,R)\cdot\psi_2(\|z\|)\cdot\frac{\langle z,\cdot\rangle}{\|z\|^2} + \nabla_{yz}R\Big]\cdot\|z\|^2 =: \widetilde{P} + \widetilde{R}\cdot\|z\|^2.$$

При этом

a) $\nabla_{yz}P \in W_K(y)$, $(0,R)\in W_K(y)$, $\psi_1(\|z\|)$ равномерно непрерывна и ограничена, $\|\langle z,\cdot\rangle\| \le M$ при $\|z\| \in \mathit{supp}\,\psi_1$, откуда $\widetilde{P}\in W_K(y)$.

b) $(0,R)\in W_K(y)$, $\psi_2(\|z\|)$ равномерно непрерывна и ограничена, $\langle z,\cdot\rangle/\|z\|^2$ равномерно непрерывна и ограничена при $\|z\|\in[M-\delta;\infty)$, $\nabla_{yz}R\in W_K(y)$, откуда $\widetilde{R}\in W_K(y)$.

Следовательно, по предложению 1, $\nabla_{yz}f \in WK_2(z)$, откуда, по определению 1, $f\in W^1K_2(z)$. □

Теперь рассмотрим достаточные условия попадания функции f в класс $W^2K_2(z)$. Для этого введем следующее

Определение 8. Пусть, в обозначениях определения 6, Y, Z—гильбертовы пространства и функция G дважды непрерывно дифференцируема в $\Omega\times Y\times Z$ по (y,z). Будем говорить, что $G\in W_K^2(y)$ (C^2*–вейерштрассовская по* y), если $(G,\nabla_{yz}G,H_{yz}G)\in W_K(y)$, или, что равносильно, $\partial_{ij}^k G\in W_K(y)$, $k=0,1,2$; $i,j=y,z$.

Справедливо следующее

Предложение 3. *Пусть, в обозначениях определений 1, функция f представлена в виде* (6). *Если $P,R\in W_K^2(y)$, то $f\in W^2K_2(z)$.*

Доказательство. Из определения 8 следует, что $W_K^2(y)\subset W_K^1(y)$, откуда, по предложению 2, $f\in W^1K_2(z)$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$H_{yz}f = [H_{yz}P + 2(0,R)\cdot\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle] + [4(0,\nabla_{yz}R)\cdot\langle z,\cdot\rangle + H_{yz}R\cdot\|z\|^2]. \tag{8}$$

Используем снова разложение единицы в $\mathbb{R}$: $1=\psi_1(\|z\|)+\psi_2(\|z\|)$, где ψ_i равномерно непрерывны и ограничены, $0\le\psi_i\le1$ $(i=1,2)$, $\mathit{supp}\,\psi_1\subset[0;M]$, $\mathit{supp}\,\psi_2\subset[M-\delta;\infty)$ $(M<\infty)$.

Тогда (8) перепишется в виде:

$$H_{yz}f = \Big[H_{yz}P + 2(0,R)\cdot\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle + 4(0,\nabla_{yz}R)\cdot\psi_1(\|z\|)\cdot\langle z,\cdot\rangle\Big] +$$

$$+\Big[4(0,\nabla_{yz}R)\cdot\psi_2(\|z\|)\cdot\frac{\langle z,\cdot\rangle}{\|z\|^2} + H_{yz}R\Big]\cdot\|z\|^2 =: \widetilde{P} + \widetilde{R}\cdot\|z\|^2.$$

При этом

a) $H_{yz}P \in W_K(y)$, $(0,R) \in W_K(y)$, $\psi_1(\|z\|)$ равномерно непрерывна и ограничена, $\|\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle\| \le 1$, $(0,\nabla_{yz}R) \in W_K(y)$, $\|\langle z,\cdot\rangle\| \le M$ при $\|z\| \in supp\,\psi_1$, откуда $\widetilde{P} \in W_K(y)$.

b) $(0,\nabla_{yz}R) \in W_K(y)$, $\psi_2(\|z\|)$ равномерно непрерывна и ограничена, $\langle z,\cdot\rangle/\|z\|^2$ равномерно непрерывна и ограничена на $\|z\| \in [M-\delta;\infty)$, $H_{yz}R \in W_K(y)$, откуда $\widetilde{R} \in W_K(y)$.

Следовательно, по предложению 2, $H_{yz}f \in WK_2(z)$, откуда, по определению 1, $f \in W^2K_2(z)$. □

Пример 1. Рассмотрим, как частный случай, интегрант вида $f(x,y,z) = \varphi(z)\cdot\|z\|^2 + \psi(x,y)$. Если $\varphi,\psi \in W_K^2(y)$, то, в силу предложения 3, $f \in W^2K_2(z)$. Эти достаточные условия легко записать на языке джетов второго порядка функций φ и ψ :

a) джет $J^2\varphi(z) = (\varphi(z),\varphi'(z),\varphi''(z))$ равномерно непрерывен и ограничен на Z,

b) джет $J_y^2\psi(x,y) = (\psi(x,y),\psi_y'(x,y),\psi_{y^2}''(x,y))$ равномерно непрерывен и ограничен на $\Omega \times C_Y$ для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset Y$.

Пример 2. Рассмотрим интегрант вида $f(x,y,z) = \varphi(x,y)\cdot\|z\|^2 + \psi(x,y,z)$. Тогда $f \in W^2K_2(z)$, если джеты второго порядка функций φ и ψ :

$$J^2\varphi(x,y) = (\varphi(x,y),\varphi_y'(x,y),\varphi_{y^2}''(x,y))$$

и

$$J_{yz}^2\psi(x,y,z) = \left(\psi,(\psi_y',\psi_z'),\begin{pmatrix}\psi_{y^2}'' & \psi_{yz}'' \\ \psi_{zy}'' & \psi_{z^2}''\end{pmatrix}\right)$$

равномерно непрерывны и ограничены на $\Omega \times C_Y$ для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset Y$.

Замечание 3. Отметим, что в приведенных примерах отсутствует, вообще говоря, чистая квадратичность интегранта по z. Тем самым, по теореме Скрыпника (см. [1]), отсутствует повторная сильная дифференцируемость $\Phi(y)$. В тоже время, в силу теоремы 3, $\Phi(y)$ является дважды K-дифференцируемым.

2. Сравнение полученных условий с классическими оценками роста интегранта

Во многих работах по абсолютным экстремумам вариационных функционалов в пространствах Соболева $W_p^1([a;b],\mathbb{R})$ на интегрант $f(x,y,z)$ налагается так называемое *условие роста по z* ([10], [11])

$$f(x,y,z) \ge \alpha|z|^p + \beta, \quad \text{где } \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

В частности, при $p = 2$ условие роста принимает вид:

$$f(x, y, z) \geq \alpha z^2 + \beta.$$

Напомним, что классическая *теорема Тонелли* ([10]) утверждает, что, в предположениях гладкости по x и y, гладкости и выпуклости по z интегранта, выполнении условия p–роста и корректной определенности всюду в $W_p^1([a;b], \mathbb{R})$ основной вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y(x), y'(x))dx, \quad \text{где } y(\cdot) = W_p^1([a;b], \mathbb{R}), \tag{9}$$

достигает абсолютного минимума в $W_p^1([a;b], \mathbb{R})$. При этом $\Phi(y)$ слабо полунепрерывен снизу (проверка чего является ядром доказательства теоремы).

Условие же корректной определенности $\Phi(y)$ в W_p^1 обеспечивается, как правило, *ограничением на рост сверху (условием роста не выше p-ой степени)* ([10], [12], [13]):

$$f(x, y, z) \leq \gamma |z|^p + \delta, \quad \text{где } \gamma > 0,\ \delta \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, условие p–роста вместе с условием роста не выше p-ой степени приводит, в случае W_2^1, к условию двойной оценки:

$$\alpha z^2 + \beta \leq f(x, y, z) \leq \gamma z^2 + \delta \tag{10}$$

(как правило, вместе с условием выпуклости по z).

Сравним найденные в теоремах 1, 2, 3 и 4 условия на интегрант f с условием (10) (в случае $W_2^1([a;b], \mathbb{R})$).

1) Условие $f \in K_2(z)$ в теореме 1 о корректной определенности $\Phi(y)$ в W_2^1 означает, по определению 1, представимость f в виде

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + R(x, y, z) \cdot z^2, \tag{11}$$

где для любого компакта $C = C_Y \subset \mathbb{R}$ отображения P, R существенно по $x \in [a;b]$ ограничены на $[a;b] \times C_Y \times \mathbb{R}$. Следовательно, оценка сверху $f(x, y, z) \leq \gamma z^2 + \delta$ требуется лишь локально по y, квадратичная оценка снизу из (10) вообще не требуется.

2) Условие $f \in WK_2(z)$ в теореме 2 о K–непрерывности $\Phi(y)$ выполнено, согласно предложению 1, если в представлении (11) $P, R \in W_K(y)$.

Здесь также, переходя к супремумам на каждом компакте по y, мы получаем локальное по y условие роста не выше квадратичного:

$$f(x, y, z) \leq \sup_{\substack{x \in [a;b], \\ z \in \mathbb{R}, y \in C_Y}} P(x, y, z) + \left(\sup_{\substack{x \in [a;b], \\ z \in \mathbb{R}, y \in C_Y}} R(x, y, z) \right) \cdot z^2,$$

где $\delta = \sup\limits_{\substack{x\in[a;b],\\ z\in\mathbb{R}, y\in C_Y}} P(x,y,z)$ и $\gamma = \sup\limits_{\substack{x\in[a;b],\\ z\in\mathbb{R}, y\in C_Y}} R(x,y,z)$ зависят от компакта C_Y. Сформулируем полученный результат в виде предложения.

Предложение 4. *Если $f(x,y,z) = P(x,y,z) + R(x,y,z)\cdot z^2$, где $P, R \in W_K(y)$ на $[a;b]\times\mathbb{R}_Y\times\mathbb{R}_Z$, то f локально по y имеет рост по z не выше квадратичного: для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset \mathbb{R}_Y$ существуют такие $\gamma > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, зависящие от C_Y, что*

$$f(x,y,z) \le \gamma z^2 + \delta,$$

для любых $x \in [a;b]$, $z \in \mathbb{R}_Z$.

Условие квадратичного роста (квадратичная оценка снизу) будет иметь место локально лишь при $R \ge r^2_{C_Y} > 0$ и $P \ge p_{C_Y}$ на каждом компакте C_Y:

$$f(x,y,z) \ge \inf_{\substack{x\in[a;b],\\ z\in\mathbb{R}, y\in C_Y}} P(x,y,z) + \left(\inf_{\substack{x\in[a;b],\\ z\in\mathbb{R}, y\in C_Y}} R(x,y,z)\right)\cdot z^2.$$

В частности, если R и P не зависят от z, и R положительно, то по теореме Вейерштрасса, для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset \mathbb{R}_Y$ $\inf\limits_{\substack{x\in[a;b],\\ y\in C_Y}} R(x,y) > 0$, $\inf\limits_{\substack{x\in[a;b],\\ y\in C_Y}} P(x,y) > -\infty$.

Сформулируем полученный результат в виде предложения.

Предложение 5. *Если $f(x,y,z) = P(x,y) + R(x,y)\cdot z^2$, где $P, R \in W_K(y)$ на $[a;b]\times\mathbb{R}_Y$ и $R(x,y) > 0$, то для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset \mathbb{R}_Y$ существуют такие $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, зависящие от C_Y, что*

$$f(x,y,z) \ge \alpha z^2 + \beta,$$

для любых $x \in [a;b]$, $z \in \mathbb{R}_Z$.

Заметим, что в условиях последнего предложения f является выпуклой по z для любых $x \in [a;b]$, $y \in \mathbb{R}_Y$.

Рассмотрим некоторые конкретные примеры

Пример 3. Функция

$$f_1(x,y,z) = e^y \cdot z^2 + \sin(x+y+z)$$

локально по y удовлетворяет оценке (10):

$$(y \in [m;M]) \Rightarrow (e^m \cdot z^2 - 1 \le f_1(x,y,z) \le e^M \cdot z^2 + 1).$$

Пример 4. Функция

$$f_2(x,y,z) = e^y \sin^2(x+y+z)\cdot z^2$$

локально по y удовлетворяет только верхней оценке (10):

$$(y \in [m; M]) \Rightarrow (f_2(x, y, z) \leq e^M \cdot z^2),$$

так как при любом $y \in \mathbb{R}: \; f_2(x, y, z) = 0$ при некоторых $x, z \in \mathbb{R}$.

Отметим, что обе рассматриваемые функции принадлежат классу $WK_2(z)$ (и даже $W^2K_2(z)$), при этом ни одна из них не удовлетворяет оценкам (10) глобально по y. Заметим также, что как $f_1(x, y, z)$, так и $f_2(x, y, z)$ не являются выпуклыми по z. Таким образом, полученные условия на f являются более общими, чем соответствующие классические двухсторонние оценки роста интегранта в W_2^1.

Замечание 4. Условие $f \in WK_2(z)$, разумеется, не гарантирует слабой полунепрерывности снизу функционала $\Phi(y)$. Однако, согласно теореме 2, $\Phi(y)$ будет при этом условии K–непрерывным. В случае же $f \in W^2K_2(z)$ (как в рассмотренных выше примерах) $\Phi(y)$ будет дважды K–дифференцируемым. Кроме того, можно отметить, что Φ может достигать компактного минимума ([5]), который при этом не является локальным (а тем более, абсолютным), без двойной квадратичной оценки (10) и без условия выпуклости по z.

Выводы

В работе получены простые достаточные условия принадлежности интегранта вейерштрассовским классам $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$, что, в свою очередь, гарантирует, соответственно, K–непрерывность, K–дифференцируемость и повторную K–дифференцируемость вариационного функционала в пространстве Соболева W_2^1. Исследована их связь с классическими условиями на рост интегранта. Рассмотрены примеры.

Автор выражает благодарность И.В. Орлову за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] Скрыпник И.В. *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.* – К.: Наукова думка, 1973. – 219 С.

[2] Згуровский М.З., Мельник В.С. *Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами.* – К.: Наукова думка, 1999. – 630 С.

[3] Hencl S., Kolář J., Pangrác O. *Integral functionals that are continuous with respect to the weak topology on* $W_0^{1,p}(0; 1)$ // Preprint submitted to Elsevier Science 3 May 2005. – 8 P.

[4] Marcellini P., Sbordone C. *Semicontinuity Problems in the Calculus of Variations* // Nonlinear Anal. – 1980. – Vol. 4. – P. 241–257.

[5] Орлов И.В. *K–дифференцируемость и K–экстремумы* // Украинский математический вестник. – 2006. – Т. 3, № 1. – С. 97–115.

[6] Orlov I. V. *Extreme Problems and Scales of the Operator Spaces* // North–Holland Math Studies., Functional Analysis and its Applications. — Amsterdam–Boston–...: Elsevier. – 2004. – Vol. 197. – P. 209–228.

[7] Орлов И.В., Божонок Е.В. *Условия существования, K–непререрывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1* // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2006. – Т. 19(58), № 2. – С. 63–78.

[8] Орлов И.В. *Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2008. – Т. 29. – С. 165–175.

[9] Божонок Е.В. *Пример K-непрерывного, разрывного вариационного функционала в пространстве Соболева* // Динамические системы (межвед. науч. сб.). – Симферополь: ТНУ, 2007. – Вып. 22. – С. 140–144.

[10] Тихомиров В.М., Фурсиков А.В. *Существование решений экстремальных задач.* – http://lib.mexmat/ru/books/9645. – 39 С.

[11] Dacorogna B. *Direct methods in the calculus of variations.* – New York: Springer–Verlag, 1989. – 228 P.

[12] Ambrosio L., Fonseca I., Marcellini P. and Tartar L. *On a volume–constrained variational problem* // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1999. – Vol. 149(1). – P. 21—47.

[13] Mosconi S., Tilli P. *Variational problems with several volume constraints on the level sets* // Calc. Var. Partial Differential Equations. – 2002. – Vol. 14. – P. 233–247

Отримано прості достатні умови K–гладкості основного варіаційного функціонала в просторі Соболєва W_2^1. Досліджений їх зв'язок із класичними умовами на ріст інтегранта. Розглянуто приклади.

The simple sufficient conditions of K–smoothness of the basic variational functional in Sobolev space W_2^1 are obtained. The connection between these conditions and the classical growth conditions for integrand is investigated. The examples are considered.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 36–52.

О. А. Дудик

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ И НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ СИСТЕМОЙ ИЗ КАПИЛЛЯРНЫХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В работе рассматривается задача о малых движениях и нормальных колебаниях маятника с полостью, заполненной системой из капиллярных вязких жидкостей. Доказана сильная разрешимость исследуемой гидросистемы. Приведена асимптотика собственных значений и доказана теорема о базисности Абеля–Лидского системы корневых элементов. Доказано также обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

В работе рассматривается пространственная задача о малых движениях и нормальных колебаниях тела с полостью, заполненной системой из капиллярных вязких жидкостей. Доказана сильная разрешимость исследуемой начально–краевой задачи. Приведена асимптотика собственных значений и доказана теорема о базисности Абеля–Лидского системы собственных и присоединенных элементов. Получено также обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

1. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии системы

Будем считать, что пространственный маятник с полостью, заполненной системой из $m+1$ капиллярных вязких жидкостей, совершает малые движения относительно неподвижной точки O, являющейся точкой подвеса. Наряду с неподвижной системой координат $Oy_1y_2y_3$ введем подвижную систему $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с телом и расположенную так, что ось Ox_3 проходит через центр масс C в состоянии покоя.

Учитывая действие однородного гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, малого момента внешних сил $\vec{M}(t)$ и малого внешнего поля массовых сил $\vec{f}_k(t,x)$, а также используя введенные в [1], [2] обозначения, сформулируем полную математическую постановку исследуемой задачи:

$$\rho_k \frac{\partial \vec{u}_k}{\partial t} + \rho_k \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} \right) + \nabla p_k = \nu \rho_k^0 \triangle \vec{u}_k + \rho_k \vec{f}_k, \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k;\ k = \overline{1, m+1}), \tag{1}$$

$$\vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k;\ k = \overline{1, m+1}), \quad \vec{u}_{j+1} = \vec{u}_j \quad (\text{на } \Gamma_j;\ j = \overline{1, m}), \tag{2}$$

$$\begin{gathered} p_j - p_{j+1} + 2\nu \left(\rho_j^0 u_{3,3}^j - \rho_{j+1}^0 u_{3,3}^{j+1} \right) = -\mathcal{L}_j \zeta_j - (\rho_j - \rho_{j+1})\, g \left[\left(P_2 \vec{\delta} \times \vec{r} \right) \cdot \vec{e}_3 \right] := \\ := \sigma_j \triangle_{\Gamma_j} \zeta_j - \sigma_j \left((k_j^1)^2 + (k_j^2)^2 \right) \zeta_j + (\rho_j - \rho_{j+1})\, g \cos \widehat{(\vec{n}_j, \vec{e}_3)}\, \zeta_j - \\ - (\rho_j - \rho_{j+1})\, g \left[\left(P_2 \vec{\delta} \times \vec{r} \right) \cdot \vec{e}_3 \right] \quad (\text{на } \Gamma_j;\ j = \overline{1, m}), \end{gathered} \tag{3}$$

$$\frac{\partial \zeta_j}{\partial t} = u_n^j := \vec{u}_j \cdot \vec{n}_j = \vec{u}_{j+1} \cdot \vec{n}_j \quad (\text{на } \Gamma_j;\ j = \overline{1, m}), \tag{4}$$

$$\int_{\Gamma_j} \zeta_j d\Gamma_j = 0, \quad \zeta_j = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_j;\ j = \overline{1, m}), \tag{5}$$

$$\nu \rho_j^0 \left(u_{i,3}^j + u_{3,i}^j \right) - \nu \rho_{j+1}^0 \left(u_{i,3}^{j+1} + u_{3,i}^{j+1} \right) = 0 \quad (\text{на } \Gamma_j;\ j = \overline{1, m};\ i = 1, 2), \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \sum_{k=1}^{m+1} \rho_k \frac{d}{dt} \int_{\Omega_k} (\vec{r} \times \vec{u}_k) d\Omega_k + \vec{J} \frac{d\vec{\omega}}{dt} + \alpha \vec{\omega} + mgl P_2 \vec{\delta} - \\ - g \sum_{j=1}^{m} (\rho_j - \rho_{j+1}) \int_{\Gamma_j} (\vec{e_3} \times \vec{r}) \zeta_j d\Gamma_j = \vec{M}(t), \end{gathered} \tag{7}$$

$$\frac{dP_2 \vec{\delta}}{dt} = P_2 \vec{\omega}, \quad \frac{d}{dt} \delta_3 = \omega_3, \tag{8}$$

$$\vec{u}_k(0, x) = \vec{u}_k{}^0(x) \quad (x \in \Omega_k;\ k = \overline{1, m+1}), \quad \zeta_j(0, \xi) = \zeta_j^0(\xi) \quad (\xi \in \Gamma_j;\ j = \overline{1, m}), \tag{9}$$

$$\vec{\omega}(0) = \vec{\omega}^0, \quad \vec{\delta}(0) = \vec{\delta}^0, \quad \vec{u}_j^0 = \vec{u}_{j+1}^0 \quad (\text{на } \Gamma_j;\ j = \overline{1, m}). \tag{10}$$

Здесь ρ_k — плотность жидкости, занимаемой область Ω_k, $k = \overline{1, m+1}$; ρ_k^0 — фиксированная величина размерности плотности; $\nu > 0$ — средняя кинематическая вязкость системы; $\vec{u}_k(t, x)$ — поля скоростей жидкостей, $p_k(t, x)$ — динамические давления, $u_{i,k}^j$ — ковариантная производная вектора u_i^j по переменной ξ^k; $\sigma_j > 0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе двух соседних жидкостей; k_j^1, k_j^2 — главные кривизны равновесной поверхности Γ_j ($j = \overline{1, m}$); $P_2 \vec{\delta} = \sum_{k=1}^{2} \delta_k \vec{e}_k$ — проекция вектора $\vec{\delta}$ на плоскость Ox_1x_2 ($\vec{\delta} = P_2 \vec{\delta} + \vec{\delta}_3$, $\vec{\delta}_3 = \delta_3 \vec{e}_3$); $\vec{r} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$ — радиус–вектор точки области Ω_k, $S = \bigcup_{k=1}^{m+1} S_k$ — твердая стенка сосуда Ω; $\zeta_j(t, \xi)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \Gamma_j$, — функции, заданные на Γ_j и определяющие отклонения вдоль нормалей $\vec{n}_j$ к Γ_j возмущенных движущихся поверхностей $\Gamma_j(t)$ от невозмущенных поверхностей Γ_j; $\quad m := m_{\text{т}} + \sum\limits_{k=1}^{m+1} (m_{\text{ж}})_k$ — масса всей системы, равная сумме массы тела $m_{\text{т}}$ и массы всех жидкостей $\sum\limits_{k=1}^{m+1} (m_{\text{ж}})_k$, $(m_{\text{ж}})_k = \rho_k |\Omega_k|$; $\vec{J} := \vec{J}_{\text{т}} + \sum\limits_{k=1}^{m+1} (\vec{J}_{\text{ж}})_k > 0$ — тензор инерции тела $\vec{J}_{\text{т}}$ и тензор инерции жидкостей $(\vec{J}_{\text{ж}})_k \quad (k = \overline{1, m+1})$, $\quad \vec{\omega} = \sum\limits_{i=1}^{3} \omega_i \vec{e}_i$ — вектор угловой скорости всей системы.

Таким образом, задача о малых движениях маятника с полостью, заполненной системой из капиллярных вязких жидкостей, состоит в решении уравнений Навье–Стокса (1), уравнения момента количества движения (7) при краевых условиях (2)–(6), а также кинематических связей (8) и начальных условиях (9), (10).

Прежде чем исследовать задачу (1)–(10), установим закон баланса полной энергии для ее классического решения. С этой целью умножим обе части уравнения (7) на $\vec{\omega}$ (скалярно в $\mathbb{R}^3$), а обе части (1) на $\vec{u}_k$ и проинтегрируем по Ω_k, приходим к закону баланса полной энергии в дифференциальной форме:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=k}^{m+1} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} |\vec{u}_k|^2 d\Omega_k + 2\sum_{i=k}^{m+1} \rho_k \int\limits_{\Omega_k} (\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{u}_k d\Omega_k + \vec{J}|\vec{\omega}|^2\right\} + \\
+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_j}\left[\sigma_j|\nabla_{\Gamma_j}\zeta_j|^2 + a_{\Gamma_j}|\zeta_j|^2\right] d\Gamma_j + mgl|P_2\vec{\delta}|^2 + \right. \\
\left. +2g\sum_{j=1}^{m}(\rho_j-\rho_{j+1})\int\limits_{\Gamma_j}\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\zeta_j d\Gamma_j\right\} = \qquad (11) \\
= \sum_{i=k}^{m+1}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_k d\Omega_k + \vec{M}(t)\cdot\vec{\omega} - \left[\sum_{i=k}^{m+1}\mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k) + \alpha|\vec{\omega}|^2\right],
\end{gathered}
$$

где билинейный функционал

$$
\widehat{E}\left(\widehat{u},\widehat{v}\right) := \sum_{k=1}^{m} \mu_k E_k\left(\vec{u}_k, \vec{v}_k\right), \tag{12}
$$

$$
E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{q,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_q^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_q}\right)^2 d\Omega_k. \tag{13}
$$

В (11) первое слагаемое слева в фигурных скобках есть удвоенная кинетическая энергия системы, а слагаемое во вторых скобках — ее потенциальная энергия.

Справа стоит выражение, равное мощности внешних сил, действующих на систему, и скорости диссипации энергии за счет вязкости жидкости и трения в шарнире.

2. Переход к задаче Коши для системы дифференциально–операторных уравнений

Исследование задачи (1)–(10) будем проводить методами функционального анализа, в частности, методами теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, теории полугрупп операторов.

Будем считать, что наборы векторных полей скоростей жидкостей $\widehat{u} = \{\vec{u}_k(t,x)\}_{k=1}^{m+1}$ при каждом t являются элементами гильбертова пространства $\widehat{L}_2(\Omega)$, ортогональное разложение которого аналогично разложению пространства вектор–функций $\vec{L}_2(\Omega)$ (см. [3], с. 106):

$$\widehat{L}_2(\Omega) := \widehat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{14}$$

$$\widehat{J}_{0,S}(\Omega) := \Big\{\widehat{v} \in \widehat{L}_2(\Omega): \quad \operatorname{div} \vec{v}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k),$$
$$\vec{v}_k \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \vec{v}_j \cdot \vec{n}_j = \vec{v}_{j+1} \cdot \vec{n}_j \quad (\text{на } \Gamma_j)\Big\}, \tag{15}$$

$$\widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \Big\{\widehat{w} = \{\vec{w}_k\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{L}_2(\Omega): \quad \vec{w}_k = \nabla\varphi_k \quad (\text{в } \Omega_k),$$
$$k = \overline{1, m+1}, \quad \rho_j\,\varphi_j - \rho_{j+1}\,\varphi_{j+1} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_j), \quad j = \overline{1,m}\Big\}. \tag{16}$$

При исследовании проблемы малых движений рассматриваемой гидромеханической системы нам понадобится плотное в $\widehat{J}_{0,S}(\Omega)$ пространство

$$\widehat{J}^1_{0,S}(\Omega) := \Big\{\widehat{u} = \{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^{m+1}: \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k),$$
$$E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k) < \infty \quad (k = \overline{1, m+1}), \quad \vec{u}_j = \vec{u}_{j+1} \quad (\text{на } \Gamma_j;\ j = \overline{1,m})\Big\} \tag{17}$$

со скалярным произведением

$$(\widehat{u}, \widehat{v})_{\widehat{J}^1_{0,S}(\Omega)} := \sum_{k=1}^{m+1} \mu_k E_k(\vec{u}_k, \vec{v}_k). \tag{18}$$

Далее, введем ортопроекторы $\theta_j: L_2(\Gamma_j) \to L_{2,\Gamma_j}$ $\big(L_{2,\Gamma_j} := \{\varphi_j \in L_2(\Gamma_j): (\varphi_j, 1_{\Gamma_j})_0 = 0\}\big)$ и операторы $B_j := \theta_j \mathcal{L}_j \theta_j$, $\mathcal{D}(B_j) = H^2(\Gamma_j) \cap H^1_0(\Gamma_j) \cap L_{2,\Gamma_j}$. С учетом соотношения

$$p_j - p_{j+1} = \varphi_j - \varphi_{j+1} \quad (\text{на } \Gamma_j), \quad \int\limits_{\Gamma_j} (p_j - p_{j+1})\, d\Gamma_j = 0 \quad (j = \overline{1,m}), \tag{19}$$

преобразуем группу динамических условий (3):

$$\varphi_j - \varphi_{j+1} + 2\nu\left[\rho_j^0 u^j_{3,3} - \rho^0_{j+1} u^{j+1}_{3,3}\right] = -B_j\zeta_j - (\rho_j - \rho_{j+1}) g \theta_j \left[(P_2\vec{\delta} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3\right] \quad (\text{на } \Gamma_j). \tag{20}$$

Будем считать, как и в [2], что наборы функций $\widehat{u} := \{\vec{u}_k(t,x)\}_{k=1}^{m+1}$, $\widehat{\nabla_\rho p} = \widehat{\nabla_\rho p}(t,x) = \big\{\rho_k^{-1}\,\nabla p_k\big\}_{k=1}^{m+1}$, т.е. решения задачи (1)–(10), при каждом t являются элементами гильбертова пространства (14). Тогда уравнения (1) можно записать в виде одного уравнения в гильбертовом пространстве $\widehat{L}_2(\Omega)$:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} = -\widehat{\bigtriangledown_\rho\, p} + \nu \left(\widehat{\triangle u}\right) + \widehat{f}, \tag{21}$$

где

$$\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} := \left\{ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\Big|_{\Omega_k} \right\}_{k=1}^{m+1}, \quad \nu \left(\widehat{\triangle u}\right) := \nu \left\{ \frac{\rho_k^0}{\rho_k}\, \vec{u}_k \right\}_{k=1}^{m+1}, \tag{22}$$

$$\widehat{f} := \left\{ \vec{f}_k(t,\, x) \right\}_{k=1}^{m+1}, \qquad \widehat{\bigtriangledown_\rho\, p} := \left\{ \rho_k^{-1}\, \nabla p_k(t,x) \right\}_{k=1}^{m+1}. \tag{23}$$

Далее предполагаем, что все слагаемые в (21) являются функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $\widehat{L}_2(\Omega)$.

Как следует из уравнений и граничных условий проблемы (1)–(10), а также определений подпространств (15), (16), для ее решений выполнены свойства

$$\widehat{u}(t,x) \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{\bigtriangledown_\rho\, p} \in \widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \widehat{G}_{h,S}(\Omega) =: \widehat{G}(\Omega), \tag{24}$$

где

$$\widehat{G}_{h,S}(\Omega) = \{\widehat{v} = \{\vec{v}_k(x)\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{L}_2(\Omega):\ \vec{v}_k = \nabla\varphi_k,\ \Delta\varphi_k = 0\ (\Omega_k),\ k = \overline{1, m+1},$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial n} = 0\ (S_k),\ \frac{\partial\varphi_j}{\partial n_j} = \frac{\partial\varphi_{j+1}}{\partial n_j}\ (\Gamma_j),\ \int\limits_{\Gamma_j} (\rho_j\varphi_j - \rho_{j+1}\varphi_j) d\Gamma_j = 0,\ \int\limits_{\Gamma_m} \rho_{m+1}\varphi_{m+1} d\Gamma_j = 0\}. \tag{25}$$

Представим потенциальное поле $\widehat{\bigtriangledown_\rho\, p}$ в виде

$$\widehat{\bigtriangledown_\rho\, p} = \widehat{\bigtriangledown_\rho\, \varkappa} + \widehat{\bigtriangledown_\rho\, \varphi}, \qquad \widehat{\bigtriangledown_\rho\, \varkappa} = \left\{ \frac{1}{\rho_k}\, \nabla\varkappa_k(t,x) \right\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{26}$$

$$\widehat{\bigtriangledown_\rho\, \varphi} = \left\{ \frac{1}{\rho_k}\, \nabla\varphi_k(t,x) \right\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{G}_{h,S}(\Omega), \tag{27}$$

и введем ортопроекторы $\widehat{P}_{0,S}$ и $\widehat{P}_{0,\Gamma}$ на подпространства $\widehat{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ соответственно (см. (14)–(16)). В результате действия этими ортопроекторами на обе части уравнения (21) имеем:

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} + \widehat{P}_{0,S} \left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} \right) = -\widehat{\bigtriangledown_\rho\, \varphi} + \nu\widehat{P}_{0,S} \left(\widehat{\triangle u}\right) + \widehat{P}_{0,S}\widehat{f}, \tag{28}$$

$$\widehat{P}_{0,\Gamma} \left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} \right) = -\widehat{\bigtriangledown_\rho\, \varkappa} + \nu\widehat{P}_{0,\Gamma} \left(\widehat{\triangle u}\right) + \widehat{P}_{0,\Gamma}\widehat{f}. \tag{29}$$

Отсюда следует, что если поля $\widehat{u}$, $\widehat{f}$ и вектор $\vec{\omega}$ известны, то поле $\widehat{\bigtriangledown_\rho\, \varkappa}$ находится непосредственно из (29); в то же время это поле не входит в (28), а также в условия (20). Поэтому в дальнейшем рассматриваем начально–краевую задачу (7), (28), (20), (2), (4)–(10).

Воспользуемся теперь методом вспомогательных задач С.Г. Крейна (см., например, [3], с. 277–280). Представим решение исследуемой задачи в виде

$$\widehat{u} = \widehat{v} + \widehat{w}, \tag{30}$$

где функция $\widehat{v} = \{\vec{v}_k\}_{k=1}^{m+1} = \nu^{-1}\widehat{A}^{-1}\widehat{f}_u$, $\widehat{f}_u := -d\widehat{u}/dt - \widehat{P}_{0,S}\left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}\right) + \widehat{P}_{0,S}\widehat{f}$, и функция $\widehat{w} = \{\vec{w}_k\}_{k=1}^{m+1} = \nu^{-1}\widehat{V}\widehat{\psi}$, $\widehat{\psi} := \left\{-B_j\zeta_j - (\rho_j-\rho_{j+1})g\theta_j\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\right\}_{k=1}^{m+1}$, являются решениями первой и второй вспомогательных задач С.Г. Крейна соответственно.

Отметим, что оператор $\widehat{V}$ второй вспомогательной задачи С.Г. Крейна ограниченно действует из $\left(\widehat{H}^{1/2}(\Gamma)\cap\widehat{L}_{2,\Gamma}\right)^* =: \left(\widehat{H}_\Gamma^{1/2}\right)^* = \widehat{H}_\Gamma^{-1/2}$ в $\widehat{M}_1(\Omega)\subset\widehat{J}_{0,S}^1(\Omega)$.

Отметим также, что оператор $\widehat{A}$ первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна является оператором гильбертовой пары пространств $\left(\widehat{J}_{0,S}^1(\Omega);\widehat{J}_{0,S}(\Omega)\right)$; при этом $0<\widehat{A}^{-1}$ — компактный оператор, а собственные значения $\left\{\lambda_k(\widehat{A})\right\}_{k=1}^\infty$ положительны и имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k(\widehat{A}) = c_{\widehat{A}}^{-2/3}k^{2/3}[1+o(1)] \quad (k\to\infty), \quad c_{\widehat{A}} := \frac{1}{3\pi^2}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\frac{\rho_\alpha^0}{\rho_\alpha}|\Omega_\alpha| > 0. \tag{31}$$

Введем в пространстве $\widehat{J}_{0,S}^1(\Omega)$ его подпространство

$$\widehat{N}_1(\Omega) := \left\{\widehat{v}\in\widehat{J}_{0,S}^1(\Omega): \quad \widehat{\gamma}_n\widehat{v} = \left\{(\vec{v}_j\cdot\vec{n}_j)_{\Gamma_j}\right\}_{j=1}^m = 0\right\}, \tag{32}$$

а также ортогональное дополнение $\widehat{M}_1(\Omega)$:

$$\widehat{J}_{0,S}^1(\Omega) = \mathcal{D}(\widehat{A}^{1/2}) = \widehat{N}_1(\Omega)\oplus\widehat{M}_1(\Omega),\ \dim\widehat{N}_1(\Omega) = \infty. \tag{33}$$

Опираясь на (33), введем ортогональное разложение

$$\widehat{J}_{0,S}(\Omega) = \widehat{A}^{1/2}\widehat{J}_{0,S}^1(\Omega) = \widehat{N}_0(\Omega)\oplus\widehat{M}_0(\Omega) := \widehat{A}^{1/2}\widehat{N}_1(\Omega)\oplus\widehat{A}^{1/2}\widehat{M}_1(\Omega). \tag{34}$$

Далее введем обозначения:

$$\widehat{\rho} := \operatorname{diag}\left(\rho_k\, I_k\right)_{k=1}^{m+1}, \quad \widehat{\triangle\rho} := \operatorname{diag}\left(\left(\rho_j-\rho_{j+1}\right)I_j\right)_{j=1}^m,$$

$$\widehat{\zeta} := \{\zeta_j(t)\}_{j=1}^m \in \widehat{L}_{2,\Gamma} := \oplus_{j=1}^m L_{2,\Gamma_j}, \quad \widehat{\theta} := \operatorname{diag}\{\theta_j\}_{j=1}^m, \quad \widehat{B}_\sigma := \operatorname{diag}\{B_j\}_{j=1}^m.$$

Тогда взамен задачи (7), (28), (20), (2), (4)–(10) возникает задача Коши для следующей системы дифференциально–операторных уравнений:

$$\frac{d\widehat{v}}{dt} + \frac{d\widehat{w}}{dt} + \widehat{P}_{0,S}\left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}}\right) + \nu\widehat{A}\widehat{v} = \widehat{P}_{0,S}\widehat{f}, \tag{35}$$

$$\frac{d\widehat{w}}{dt} + \frac{1}{\nu}\widehat{V}\widehat{B}_\sigma\widehat{\gamma}_n(\widehat{v}+\widehat{w}) + \frac{g}{\nu}\widehat{\triangle\rho}\widehat{V}\widehat{\theta}\left[(P_2\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right] = \vec{0}, \tag{36}$$

$$\widehat{\rho}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}\left[\vec{r}\times(\widehat{v}+\widehat{\omega})\right]d\Omega+\vec{J}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}-g\widehat{\triangle\rho}\int\limits_{\Gamma}(\vec{e_3}\times\vec{r})\widehat{\zeta}d\Gamma=\vec{M}(t), \tag{37}$$

$$\frac{d\widehat{\zeta}}{dt}-\widehat{\gamma}_n\left(\widehat{v}+\widehat{w}\right)=0,\quad \frac{dP_2\vec{\delta}}{dt}=P_2\vec{\omega},\quad \frac{d}{dt}\delta_3=\omega_3, \tag{38}$$

$$\widehat{w}(0)=\widehat{w}^0,\quad \widehat{v}(0)=\widehat{v}^0,\quad \widehat{\zeta}(0)=\widehat{\zeta}^0,\quad \vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^0,\quad \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0. \tag{39}$$

3. Теорема о сильной разрешимости

Введем в рассмотрение следующие операторы

$$\widehat{Q}:=\widehat{\gamma}_n\widehat{A}^{-1/2}:\ \widehat{J}_{0,S}(\Omega)\to\widehat{H}_{\Gamma}^{1/2},\ \widehat{Q}^*:=\widehat{A}^{1/2}\widehat{V}:\ \widehat{H}_{\Gamma}^{-1/2}\to\widehat{M_0}(\Omega)\subset\widehat{J}_{0,S}(\Omega), \tag{40}$$

а также неограниченный положительно определенный оператор

$$\widehat{B}:=\widehat{Q}^*\widehat{B}_\sigma Q\mid_{\widehat{M_0}(\Omega)},\quad \mathcal{D}(\widehat{B})=\mathcal{R}(\widehat{B}^{-1})\subset\widehat{M_0}(\Omega),\quad \mathcal{R}(\widehat{B})=\widehat{M_0}(\Omega). \tag{41}$$

Отметим, что оператор $\widehat{B}$ имеет дискретный спектр и его собственные значения $\left\{\lambda_k(\widehat{B})\right\}_{k=1}^{\infty}$ имеют степенную асимптотику (см. [4]):

$$\lambda_k(\widehat{B})=\left(\sum_{j=1}^{m}\sigma_j\frac{|\Gamma_j|}{\pi}\right)^{-1/2}k^{1/2}[1+o(1)]\quad (k\to\infty). \tag{42}$$

Известно, что операторы $\widehat{Q}$ и $\widehat{Q}^*$ взаимно сопряжены и компактны (см., например, [3], с. 282), оператор $\widehat{B}_\sigma$ положительно определен в $\widehat{L}_{2,\Gamma}$, а оператор $\widehat{B}_1:=\widehat{A}^{-1/2}\widehat{B}\widehat{A}^{1/2}:\ \widehat{M_1}(\Omega)\to\widehat{M_1}(\Omega)$ “подобен” оператору $\widehat{B}$.

Введем также ортопроектор $\widehat{P}:\ \widehat{J}_{0,S}(\Omega)\to\widehat{M_0}(\Omega)$ и операторы

$$\widehat{R}:=\widehat{B}^{1/2}\widehat{P}\widehat{A}^{-1/2}:\ \widehat{J}_{0,S}(\Omega)\to\widehat{M_0}(\Omega),\ \widehat{R}^+:=\widehat{A}^{-1/2}\widehat{P}\widehat{B}^{1/2}:\ \mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2})\to\widehat{M_1}(\Omega). \tag{43}$$

Операторы $\widehat{R}$ и $\widehat{R}^+$ обладают свойствами (см. [4]):

$$\widehat{R}\in\mathfrak{S}_\infty(\widehat{J}_{0,S}(\Omega);\widehat{M_0}(\Omega)),\quad \widehat{R}^+=\widehat{R}^*\mid\mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2}),\quad \overline{\widehat{R}^+}=\widehat{R}^*. \tag{44}$$

С помощью введенных операторов осуществим в задаче (35)–(39) следующие формальные преобразования, позволяющие перейти от нее к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения. Осуществим в этой задаче замену

$$\widehat{w}=\nu^{-1}\widehat{R}^+\widehat{z},\quad \widehat{z}\in\mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2})\subset\widehat{M_0}(\Omega), \tag{45}$$

и учтем соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{R}^+\widehat{z}\right)=\widehat{R}^*\frac{d\widehat{z}}{dt}. \tag{46}$$

В итоге приходим вместо (35)–(39) к системе уравнений и начальных условий, которые для искомого объекта

$$x=(\widehat{v};\widehat{z};\vec{\omega};\widehat{\zeta};P_2\vec{\delta})^t\in\widehat{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\widehat{M_0}(\Omega)\oplus\mathbb{C}^3\oplus\widehat{L}_{2,\Gamma}\oplus\mathbb{C}^2=:\widehat{\mathcal{H}} \tag{47}$$

можно представить в виде задачи Коши

$$\widetilde{A}\frac{dx}{dt}+\widetilde{B}x=\tilde{f}(t),\quad x(0)=x^0,\quad \widetilde{f}(t):=\left(\widehat{P}_{0,S}\widehat{f};\widehat{0};\vec{M}(t);0;\vec{0}\right)^t,\tag{48}$$

$$\widetilde{A}x=\begin{pmatrix}\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{R}^*\widehat{z}+\widehat{P}_{0,S}(\vec{\omega}\times\vec{r})\\ \widehat{z}\\ \widehat{\rho}\int\limits_{\Omega}\vec{r}\times\left(\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{R}^*\widehat{z}\right)d\Omega+\vec{J}\vec{\omega}\\ \widehat{\zeta}\\ P_2\vec{\delta}\end{pmatrix},\tag{49}$$

$$\widetilde{B}x=\begin{pmatrix}\nu\widehat{A}\widehat{v}\\ \widehat{B}^{1/2}\widehat{A}^{1/2}\left(\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{A}^{-1/2}\widehat{B}^{1/2}\widehat{z}\right)+g\widehat{\rho}\widehat{B}^{-1/2}\widehat{P}\widehat{Q}^*\left[\widehat{\theta}\left(P_2\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e}_3\right]\\ \alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}-g\widehat{\rho}\int\limits_{\Gamma}(\vec{e}_3\times\vec{r})\widehat{\zeta}d\Gamma\\ -\widehat{\gamma}_n\left(\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{R}^+\widehat{z}\right)\\ -P_2\vec{\omega}\end{pmatrix}.\tag{50}$$

Приведем теперь свойства операторных коэффициентов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ задачи (48).

Лемма 1. *Оператор* $\widetilde{A}$ *является обратимым и*

$$\widetilde{A}=A_0+R_1,\quad A_0=\mathrm{diag}(\widehat{I};\,\widehat{I};\,\vec{J};\,\widehat{I};\,I)\gg 0,\quad R_1\in\mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}).\tag{51}$$

Доказательство. Оно проводится по схеме, изложенной в работе [1]. В самом деле, достаточно рассмотреть следующую однородную систему уравнений:

$$\left\{\begin{aligned}\widehat{A}_{11}\,\widehat{v}+\widehat{A}_{12}\,\widehat{z}+A_{13}\vec{\omega}&=\vec{0},\\ \widehat{A}_{22}\,\widehat{z}&=\vec{0},\\ \widehat{A}_{31}\widehat{v}+\widehat{A}_{32}\,\widehat{z}+A_{33}\,\vec{\omega}&=\vec{0},\end{aligned}\right.\quad\Leftrightarrow\left\{\begin{aligned}\widehat{v}+\nu^{-1}\,R^*\,\widehat{z}+\widehat{A}_{13}\vec{\omega}&=\vec{0},\\ \widehat{z}&=\vec{0},\\ \widehat{A}_{31}\widehat{v}+\nu^{-1}\,\widehat{A}_{31}\,R^+\,\widehat{z}+\vec{J}\,\vec{\omega}&=\vec{0}.\end{aligned}\right.$$

Отсюда имеем

$$\left\{\begin{aligned}\widehat{z}&=\vec{0},\\ \widehat{v}+\widehat{A}_{13}\vec{\omega}&=\vec{0},\\ \widehat{A}_{31}\widehat{v}+\vec{J}\,\vec{\omega}&=\vec{0}.\end{aligned}\right.\tag{52}$$

Как было доказано в [1], получаем, что оператор $\begin{pmatrix}\widehat{A}_{11}&A_{13}\\ \widehat{A}_{31}&A_{33}\end{pmatrix}$ положителен в $\widehat{J}_{0,S}(\Omega)\oplus\mathbb{C}^3$. Далее, согласно определению (49), для оператора $\widetilde{A}$ следуют утверждения леммы. $\square$

Лемма 2. *Оператор* $\widetilde{B}$ *можно представить в виде:*

$$\widetilde{B}=(I+R_2)\,\widetilde{B}_0+\widetilde{B}_1,\ \widetilde{B}_0=\mathrm{diag}(\nu\widehat{A};\nu^{-1}\widehat{B};\alpha;\widehat{I};I),\ \widetilde{B}_1\in\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}}),\ R_2\in\mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}).\tag{53}$$

Доказательство. Оно проводится аналогично доказательству соответствующей леммы для случая, когда плоский маятник заполнен одной капиллярной вязкой жидкостью (см. [1]).

В самом деле, оператор $\widetilde{B}$ можно представить в виде суммы $\widetilde{B} = \widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2$, где

$$\widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\widehat{\Delta\rho}\widehat{B}^{-1/2}\widehat{Q}^*[\widehat{\theta}((...) \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g\widehat{\Delta\rho}\int\limits_\Gamma(\vec{e}_3 \times \vec{r})(\ldots)d\Gamma & mgl \\ 0 & 0 & 0 & -\widehat{I} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -I \end{pmatrix} \tag{54}$$

является ограниченным оператором, а оператор

$$\widetilde{B}_2 = \begin{pmatrix} \nu\,\widehat{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{R}\widehat{A} & \nu^{-1}\,\widehat{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\widehat{\gamma}_n & -\nu^{-1}\,\widehat{\gamma}_n R^+ & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\widetilde{B}_2) = \mathcal{D}(\widehat{A}) \oplus \mathcal{D}(\widehat{B}) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \widehat{L}_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2. \tag{55}$$

Далее, оператор $\widetilde{B}_2$ представим в виде:

$$\widetilde{B}_2 = (I + R_2)\widetilde{B}_0, \tag{56}$$

где

$$\widetilde{B}_0 = \mathrm{diag}(\nu\,\widehat{A};\, \nu^{-1}\,\widehat{B};\, \alpha;\, \widehat{I};\, I), \quad \mathcal{D}(\widetilde{B}_0) = \mathcal{D}(\widehat{A}) \oplus \mathcal{D}(\widehat{B}) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \widehat{L}_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2, \tag{57}$$

и

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu^{-1}\,\widehat{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu^{-1}\,\widehat{Q}\widehat{A}^{-1/2} & \widehat{Q}\widehat{B}^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

является компактным оператором. $\Box$

С учетом лемм 1 и 2 задача (48) принимает вид

$$(A_0 + R_1)\,\frac{dx}{dt} + (I + R_2)\widetilde{B}_0 x + \widetilde{B}_1 x = \tilde{f}(t), \quad x(0) = x^0, \tag{59}$$

$$x(t) = (\widehat{v}; \widehat{z}; \vec{\omega}; \widehat{\zeta}; P_2\vec{\delta})^t \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \widehat{M}_0(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \widehat{L}_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2 := \widehat{\mathcal{H}}. \tag{60}$$

Далее, задача (59)–(60) равносильна задаче Коши:

$$\frac{dy}{dt} = -(I + T)\widehat{B}_0 y - \widehat{C}_0 y + \widehat{f}_0, \quad y(0) = y^0, \tag{61}$$

$$y := A_0^{1/2} x = (A_0^{1/2}\widehat{v};\, A_0^{1/2}\widehat{z};\, A_0^{1/2}\vec{\omega};\, P_2 A_0^{1/2}\widehat{\zeta};\, A_0^{1/2}\vec{\delta})^t, \tag{62}$$

$$I + T := (I + \widehat{R}_1)^{-1}(I + \widehat{R}_2), \quad T \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}), \quad \widehat{f}_0 := (I + \widehat{R}_1)^{-1} A_0^{-1/2}\widetilde{f}, \tag{63}$$

$$\widehat{B}_0 := A_0^{-1/2}\widetilde{B}_0 A_0^{-1/2}, \quad \widetilde{B}_0 = \mathrm{diag}(\nu\,\widehat{A};\ \nu^{-1}\widehat{B};\ \alpha;\ \widehat{I};\ I), \tag{64}$$

$$\widehat{C}_0 = (I+\widehat{R}_1)^{-1}A_0^{-1/2}\widetilde{B}_1 A_0^{-1/2}, \quad \widehat{R}_1 = A_0^{-1/2}R_1A_0^{-1/2}, \quad \widehat{R}_2 = A_0^{-1/2}R_2A_0^{1/2}. \tag{65}$$

Здесь оператор $-(I+T)\widehat{B}_0-\widehat{C}_0$ является генератором аналитической полугруппы, так как $\widehat{B}_0=\widehat{B}_0^*\gg 0,\ T\in\mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}),\ \widehat{C}_0\in\mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}})$.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1)–(10) *выполнены условия*

$$\vec{M}(t)\in C^\alpha([0,T];\mathbb{C}), \quad 0<\alpha\le 1, \tag{66}$$

$$\widehat{f}(t,x)=\{f_k(t,x)\}_{k=1}^{m+1}\in C^\alpha([0,T];\widehat{L}_2(\Omega)), \quad \widehat{u}^{\,0}\in\widehat{J}_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{u}^{\,0}=\widehat{v}^{\,0}+\widehat{w}^{\,0}, \tag{67}$$

$$\widehat{v}^0\in\mathcal{D}(\widehat{A})\subset\widehat{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{w}^{\,0}\in\widehat{M_1}(\Omega)\subset\widehat{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{\gamma}_n\,\widehat{w}^{\,0}\in\mathcal{D}\left(\widehat{B}_\sigma^{1/2}\right),$$

$$\widehat{\zeta}^0\in\mathcal{D}(\widehat{B}_\sigma)\subset\widehat{L}_{2,\Gamma}, \quad \vec{\omega}^0\in\mathbb{C}^3,\ \vec{\delta}^0\in\mathbb{C}^3.$$

Тогда задача Коши (61)*, а также задача* (48) *имеют единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$*, т.е. все слагаемые в* (61)*,* (48) *являются непрерывными функциями* $t\in[0,T]$ *и выполнены начальные условия.* □

Замечание 5. Пусть решение задачи (48) обладает следующими дополнительными свойствами гладкости по t:

$$\widehat{B}\widehat{z}(t)\in C\left([0,T];\mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2})\right), \quad \widehat{P}\widehat{A}\widehat{v}(t)\in C\left([0,T];\mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2})\right), \tag{68}$$

тогда задача (35)–(39) также имеет сильное решение на $[0,T]$. □

Опираясь на замечание 5, можно доказать, что при определенных условиях гладкости, накладываемых на $\widehat{\zeta}^0,\ \widehat{w}^0,\ \widehat{v}^0,\ \vec{\omega}^0,\ \vec{\delta}^0,\ \widehat{f}(t),\ \vec{M}(t)$, исходная начально–краевая задача (1)–(10) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

4. Нормальные колебания исследуемой гидросистемы

Назовем нормальными колебаниями решения однородной задачи (1)–(10), зависящие от t по закону $\exp(-\lambda t)$, $\lambda\in\mathbb{C}$. Для амплитудных элементов, т.е. для множителей при $\exp(-\lambda t)$, получим из (35)–(39) систему уравнений, которую удобно записать в виде

$$\begin{pmatrix}\nu\widehat{u}\\ \alpha\vec{\omega}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\widehat{V} & 0\\ 0 & P_2\end{pmatrix}\widehat{\mathcal{B}}_\sigma\begin{pmatrix}\widehat{\zeta}\\ P_2\vec{\delta}\end{pmatrix}= \tag{69}$$

$$=\lambda\begin{pmatrix}\widehat{A}^{-1} & 0\\ 0 & I\end{pmatrix}\widehat{\mathcal{C}}\begin{pmatrix}\widehat{u}\\ \vec{\omega}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}\widehat{\gamma}_n\widehat{u}\\ P_2\vec{\omega}\end{pmatrix}=-\lambda\begin{pmatrix}\widehat{\zeta}\\ P_2\vec{\delta}\end{pmatrix},$$

где $\widehat{u}=\widehat{v}+\widehat{w}$, а $\widehat{\mathcal{B}}_\sigma$ и $\widehat{\mathcal{C}}$ — операторные матрицы, квадратичные формы которых равны удвоенным потенциальной и кинетической энергии системы соответственно.

Кроме того, имеет место также тривиальное соотношение

$$\omega_3=-\lambda\delta_3. \tag{70}$$

Приведем некоторые свойства решений спектральной задачи (69)–(70).

1^0. Число $\lambda = 0$ всегда является собственным значением рассматриваемой задачи. Если выполнено условие $\ker \widehat{\mathcal{B}}_\sigma = \{0\}$, то это нулевое собственное значение однократно, а соответствующий собственный элемент отвечает нулевому решению задачи (69) и произвольному значению $\delta_3 \in \mathbb{C}$. Такие тривиальные решения связаны с переходом маятника от исходного состояния покоя к новому состоянию покоя, полученному из исходного путем произвольного поворота на угол $\vec{\delta} = \delta_3 \vec{e}_3$.

2^0. Если выполнено условие

$$\ker \widehat{\mathcal{B}}_\sigma \neq \{0\}\,, \quad \dim \ker \widehat{\mathcal{B}}_\sigma = q > 0, \tag{71}$$

то задача (69)–(70) имеет $(q{+}1)$–кратное нулевое собственное значение. Условие (71) выполнено, в частности, тогда, когда исследуемая гидромеханическая система находится на границе области устойчивости, т.е. $\lambda_{\min}\left(\widehat{\mathcal{B}}_\sigma\right) = 0$.

3^0. Все невещественные собственные значения λ, а также те вещественные, которым отвечают присоединенные элементы, расположены в полуплоскости

$$Re\lambda \geq \min(\mu;\, \alpha)/\left(2\|\widehat{\mathcal{C}}^{1/2}\,\mathrm{diag}\left(\widehat{A}^{-1/2};\, I\right)\|^2\right) > 0. \tag{72}$$

Следует отметить, что при непрерывном изменении физических параметров исследуемой гидромеханической системы собственные значения λ задачи могут непрерывно переходить из правой комплексной полуплоскости в левую лишь по вещественной оси через нуль комплексной плоскости, причем в момент перехода должно выполняться условие (71).

Как следует из рассмотрений [7], [2], эту задачу можно записать в виде, следующем из (48)–(50):

$$-\omega_3 = \lambda\delta_3,\ \widetilde{B}x = \lambda\widetilde{A}x,\ x = \left(\widehat{v}; \widehat{z}; \vec{\omega}; \widehat{\zeta}; P_2\vec{\delta}\right)^t \in \widehat{\mathcal{H}} = \widehat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \widehat{M_0}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \widehat{L}_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2, \tag{73}$$

где, в частности, операторная матрица $\widetilde{B}$ имеет структуру (53).Отметим, однако, что оператор $\widetilde{B}_0 = \mathrm{diag}(\nu\,\widehat{A};\, \nu^{-1}\,\widehat{B};\, \alpha;\, \widehat{I};\, I) = \widetilde{B}_0^* \gg 0$ неограничен, но не имеет компактного обратного, так как единичный оператор $\widehat{I}$ действует в бесконечномерном пространстве $\widehat{L}_{2,\Gamma}$. Это не позволяет в задаче (73) использовать результаты М.С. Аграновича и др., связанные со свойством базисности Абеля–Лидского и получением асимптотики собственных значений (см. [5], с. 292).

Данную трудность можно преодолеть, исключая переменную $\widehat{\zeta}$. Тогда для амплитудных элементов

$$y := \left(\widehat{v};\, \widehat{z};\, \vec{\omega};\, P_2\vec{\delta}\right)^t \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \widehat{M_0}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2 =: \widehat{\mathcal{H}}_0 \tag{74}$$

возникает проблема

$$\begin{pmatrix} \nu\widehat{A}\widehat{v} \\ \widehat{B}^{1/2}\widehat{A}^{1/2}\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{B}\widehat{z}+\widehat{\rho}g\widehat{B}^{-1/2}\,\widehat{P}\widehat{Q}^{*}\widehat{\theta}\left[(P_2\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right] \\ \alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta} \\ -P_2\vec{\omega} \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{\widehat{\rho}g}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int\limits_{\Gamma}(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\widehat{\gamma}_n\left(\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{R}^{+}\widehat{z}\right)d\Gamma \\ \vec{0} \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} \widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{R}^{*}\widehat{z}+\widehat{P}_{0,S}\,(\vec{\omega}\times\vec{r}) \\ \widehat{z} \\ \vec{J}\vec{\omega}+\widehat{\rho}\int\limits_{\Omega}\vec{r}\times\left(\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{R}^{+}\widehat{z}\right)d\Omega \\ P_2\vec{\delta} \end{pmatrix}, \tag{75}$$

а также связи

$$-\widehat{\gamma}_n\left(\widehat{v}+\nu^{-1}\,\widehat{R}^{+}\widehat{z}\right)=\lambda\widehat{\zeta},\quad -\omega_3=\lambda\delta_3. \tag{76}$$

Коротко задачу (75) можно переписать в виде:

$$\mathcal{A}y+\widehat{\rho}g\lambda^{-1}\mathcal{F}y=\lambda\mathcal{Z}y,\quad y\in\mathcal{D}(\mathcal{A})=\mathcal{D}(\widehat{A})\oplus\mathcal{D}(\widehat{B})\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}^2, \tag{77}$$

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Z}$ определяются соответствующими столбцами из (75). Приведем свойства этих операторных матриц.

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{Z}$ обратим и имеет структуру*

$$\mathcal{Z}=\mathcal{Z}_0+\mathcal{J}_1,\quad \mathcal{Z}_0=\operatorname{diag}\left(\rho I;\,\rho I;\,\vec{J};\,I\right),\quad \mathcal{J}_1\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0).\quad\square \tag{78}$$

Лемма 4. *Оператор $\mathcal{A}$ из* (77), (75) *обратим и имеет структуру*

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1,\quad \mathcal{A}_0=\operatorname{diag}\left(\nu\widehat{A};\,\nu^{-1}\widehat{B};\,\alpha;\,I\right),\quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)=\mathcal{D}(\widehat{A})\oplus\mathcal{D}(\widehat{B})\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}^2, \tag{79}$$

где $\mathcal{A}_1$ вполне подчинен $\mathcal{A}_0$, т.е.

$$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0). \tag{80}$$

Доказательство. Уравнение $\mathcal{A}y=0$ приводит к системе уравнений

$$\nu\widehat{A}\widehat{v}=0,\quad \widehat{B}^{1/2}\widehat{A}^{1/2}\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{B}\widehat{z}+\widehat{\rho}g\widehat{B}^{-1/2}\,\widehat{P}\widehat{Q}^{*}\widehat{\theta}\left[(P_2\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]=0,$$

$$\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}=\vec{0},\quad -P_2\vec{\omega}=\vec{0}.$$

Отсюда следует, что $\widehat{v}=0$, $P_2\vec{\omega}=\vec{0}$, а потому (из второго уравнения) и $\widehat{z}=0$, так как $\widehat{B}\gg 0$. Тогда из соотношений $\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}=\vec{0},\quad P_2\vec{\omega}=\vec{0}$, приходим к выводу, что $\vec{\omega}=\vec{0}$, так как $P_2\vec{\delta}=\sum\limits_{k=1}^{2}\delta_k\vec{e}_k$, а $\vec{\omega}=\omega_3\vec{e}_3$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ обратим.

Вычисляя $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} - \mathcal{A}_0$, а затем $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1}$, находим, что

$$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1}y = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu^{-1}\widehat{R}\widehat{v} + \widehat{\rho}g\alpha^{-1}\widehat{B}^{-1/2}\,\widehat{P}\widehat{Q}^*\widehat{\theta}\,[(P_2\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3] \\ mglP_2\vec{\delta} \\ -\alpha^{-1}P_2\vec{\omega} - P_2\vec{\delta} \end{pmatrix}, \tag{81}$$

откуда следует, что $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0)$, так как $\widehat{R} = \widehat{B}^{1/2}\widehat{P}\widehat{A}^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty\left(\widehat{J}_{0,S}(\Omega);\, \widehat{M}_0(\Omega)\right)$, $\widehat{B}^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{M}_0(\Omega))$, а остальные операторы ограничены либо конечномерны. $\square$

Лемма 5. *Оператор $\mathcal{F}$ из* (77)*, определенный вторым столбцом слева в* (75) *на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ (см.* (79)*), вполне подчинен оператору $\mathcal{A}_0$:*

$$\mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0). \tag{82}$$

Доказательство. Оно проводится прямым вычислением:

$$\mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1}y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int\limits_\Gamma (\vec{e}_3\times\vec{r})\,\widehat{\gamma}_n\left(\nu^{-1}\widehat{A}^{-1}\widehat{v} + \nu^{-1}\widehat{A}^{-1/2}\widehat{P}\widehat{B}^{-1/2}\widehat{z}\right)d\Gamma \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad \forall y \in \widehat{\mathcal{H}}_0. \tag{83}$$

Так как здесь $\widehat{A}^{-1}\widehat{v} \in \mathcal{D}(\widehat{A}) \subset \mathcal{D}(\widehat{A}^{1/2}) = \widehat{J}^1_{0,S}(\Omega)$, $\widehat{A}^{-1/2}\widehat{P}\widehat{B}^{-1/2}\widehat{z} \in \widehat{M_1}(\Omega) \subset \widehat{J}^1_{0,S}(\Omega)$, а $\widehat{\gamma}_n$ компактно (по теореме вложения С.Л. Соболева) действует из $\widehat{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в $\widehat{L}_{2,\Gamma}$, то $\mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1}$ — компактный оператор в $\widehat{\mathcal{H}}_0$. $\square$

Используя леммы 3–5, перепишем задачу (77) в виде

$$\left(I + \mathcal{J}_0 + \widehat{\rho}g\lambda^{-1}\mathcal{J}_{-1}\right)\mathcal{A}_0 y = \lambda\left(\mathcal{Z}_0 + \mathcal{J}_1\right)y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \tag{84}$$

$$\mathcal{J}_0 := \mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0), \quad \mathcal{J}_{-1} := \mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0), \quad \mathcal{J}_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0), \tag{85}$$

$$\mathcal{A}_0 := \operatorname{diag}\left(\nu\widehat{A};\, \nu^{-1}\widehat{B};\, \alpha;\, I\right), \quad \mathcal{Z}_0 := \operatorname{diag}\left(\widehat{I};\, \widehat{I};\, \vec{J};\, I\right). \tag{86}$$

Теорема 2. *Задача* (84)*, а потому и исходная спектральная задача о нормальных колебаниях исследуемой гидромеханической системы имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = \infty$ и асимптотическим поведением*

$$\lambda_j = \nu^{-1}\left(\sum_{k=1}^m \sigma_k\frac{|\Gamma_k|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty). \tag{87}$$

Доказательство. Рассмотрим невозмущенную задачу на собственные значения для оператора $\mathcal{A}_0$:

$$\mathcal{A}_0 y = \lambda\mathcal{Z}_0 y. \tag{88}$$

Отсюда и из определений (86) операторов $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{C}_0$ получаем совокупность распавшихся задач:

$$\nu\widehat{A}\widehat{v} = \lambda\widehat{v} \quad \left(\widehat{v} \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega)\right), \quad \nu^{-1}\widehat{B}\widehat{z} = \lambda\widehat{z} \quad \left(\widehat{z} \in \widehat{M_0}(\Omega)\right), \tag{89}$$

$$\alpha\vec{\omega} = \lambda\vec{J}\vec{\omega} \quad \left(\vec{\omega} \in \mathbb{C}^3\right), \quad P_2\vec{\delta} = \lambda P_2\vec{\delta} \quad \left(P_2\vec{\delta} \in \mathbb{C}^2\right). \tag{90}$$

Конечномерные задачи (90), очевидно, не влияют на характер асимптотики, а задачам (89) отвечают две ветви собственных значений. С учетом асимптотических формул (31) и (42) для собственных значений операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ имеем

$$\lambda_{j1} = \nu\lambda_j(\widehat{A}) = \nu\left(\frac{1}{3\pi^2}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\frac{\rho_\alpha^0}{\rho_\alpha}|\Omega_\alpha|\right)^{-2/3} j^{2/3}[1+o(1)] \quad (j\to\infty), \tag{91}$$

$$\lambda_{j2} = \nu^{-1}\lambda_j(\widehat{B}) = \nu^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\frac{|\Gamma_k|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1+o(1)] \quad (j\to\infty). \tag{92}$$

Введем в рассмотрение функции распределения (с учетом кратностей) собственных значений операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$:

$$N_{\widehat{A}}(\lambda) := \sum_{\lambda_j(\widehat{A})<\lambda} 1, \quad N_{\widehat{B}}(\lambda) := \sum_{\lambda_j(\widehat{B})<\lambda} 1. \tag{93}$$

Из (91), (92) следует, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} N_{\widehat{A}}(\lambda)\lambda^{-3/2} = \frac{\nu^{-3/2}}{3\pi^2}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\frac{\rho_\alpha^0}{\rho_\alpha}|\Omega_\alpha|, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} N_{\widehat{B}}(\lambda)\lambda^{-2} = \frac{\nu^2}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k|\Gamma_k|. \tag{94}$$

Так как задача (88) равносильна совокупности задач (89), (90), то функция распределения $N(\lambda)$ собственных значений задачи (88) равна сумме функций распределения собственных значений бесконечномерных задач (89) и конечномерных задач (90). Отсюда и из (94) получаем, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} N(\lambda)\lambda^{-2} = \lim_{\lambda\to+\infty} N_{\widehat{B}}(\lambda)\lambda^{-2} = \frac{\nu^2}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k|\Gamma_k|, \tag{95}$$

откуда следует, что для оператора $\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{Z}_0^{-1/2}$ в соответствующей задаче, полученной из (84), имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_j(\widetilde{\mathcal{A}}_0) = \nu^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\frac{|\Gamma_k|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1+o(1)] \quad (j\to\infty). \quad \square \tag{96}$$

Получим свойства полноты и базисности Абеля–Лидского системы корневых элементов гидромеханической задачи (84)–(86) о нормальных колебаниях маятника с капиллярной вязкой жидкостью. Предварительно введем такие обозначения:

$$\widetilde{\mathcal{J}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{F}_0\mathcal{Z}_0^{1/2}, \quad \widetilde{\mathcal{J}}_{-1} := \widehat{\rho}g\mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{J}_{-1}\mathcal{Z}_0^{1/2}, \quad \widetilde{\mathcal{J}}_1 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{J}_1\mathcal{Z}_0^{-1/2}, \tag{97}$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{Z}_0^{-1/2}, \quad \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_0) = \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1}) = \mathcal{R}(\mathcal{Z}_0^{1/2}\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{Z}_0^{1/2}),$$

Здесь в силу предыдущих построений операторы $\widetilde{\mathcal{J}}_0$, $\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}$ и $\widetilde{\mathcal{J}}_1$ компактные, оператор $\widetilde{\mathcal{A}}_0 = \widetilde{\mathcal{A}}_0^* \gg 0, \quad 0 < \widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0)$.

Для исследуемой задачи приходим из (84) к уравнению

$$\left(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_0 + \lambda^{-1}\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}\right)\widetilde{\mathcal{A}}_0 v = \lambda(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_1)v, \quad v = \mathcal{Z}_0^{1/2}y \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_0). \tag{98}$$

Осуществляя здесь замены

$$\lambda = \widetilde{\lambda}^{-1}, \quad \mathcal{I} + \widehat{S}_0 := (\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_1)^{-1}(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_0), \quad (\mathcal{I} + \widehat{S}_0)\widetilde{\mathcal{A}}_0 v = w, \tag{99}$$

получаем уравнение вида

$$\mathcal{L}(\widetilde{\lambda})w := \left(\mathcal{I} + \widetilde{\lambda}\widehat{\mathcal{B}} - \widetilde{\lambda}^{-1}\widehat{\mathcal{A}}\right)w = 0, \quad w \in \widehat{\mathcal{H}}_0, \tag{100}$$

$$\widehat{\mathcal{B}} := (\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_1)^{-1}\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_0)^{-1}(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_1) \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0), \tag{101}$$

$$\widehat{\mathcal{A}} := \widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1}(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_0)^{-1}(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_1) \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0). \tag{102}$$

Напомним, что собственные значения $\lambda_j(\widetilde{\mathcal{A}}_0)$ оператора $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ имеют асимптотическое поведение (96), и тогда $\widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_0), \quad p > 2$. Приведенные свойства операторов задачи (100) показывают, что для этой задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть геометрические и физические параметры исследуемой гидромеханической системы таковы, что выполнено условие*

$$4\|\widehat{\mathcal{A}}\| \cdot \|\widehat{\mathcal{B}}\| < 1. \tag{103}$$

Тогда система корневых элементов задачи (84)–(86) *является полной в пространстве с нормой графика оператора* $\widetilde{\mathcal{A}}_0$*:*

$$\|\widetilde{\mathcal{A}}_0 v\|^2_{\widehat{\mathcal{H}}_0} = \left(\mathcal{Z}_0^{-1}\mathcal{A}_0 y, \mathcal{A}_0 y\right)_{\widehat{\mathcal{H}}_0} = \nu^2\|\widehat{A}\widehat{v}\|^2_{\widehat{J}_{0,S}(\Omega)} + \nu^{-2}\|\widehat{B}\widehat{z}\|^2_{\widehat{M}_0(\Omega)} + \alpha^2\left(\vec{J}^{-1}\vec{\omega}\right)\cdot\vec{\omega} + |P_2\vec{\delta}|^2. \tag{104}$$

Если условие (103) *не выполнено, то система корневых элементов задачи* (84)–(86)*, отвечающая собственным значениям* λ_j *с* $|\lambda_j| > R$ *при любом* $R > 0$*, является полной с точностью до конечного дефекта по норме* (104). □

Более того, если выполнено условие (103), то система корневых элементов задачи образует базис Абеля–Лидского порядка $\alpha_0 > 2$ в пространстве с нормой графика (104). Если условие (103) не выполнено, то система корневых элементов задачи (84)–(86), отвечающая собственным значениям λ_j с $|\lambda_j| > R$ при любом $R > 0$, образует базис Абеля–Лидского порядка $\alpha_0 > 2$ с точностью до конечного дефекта в пространстве с нормой (104).

Таким образом, итогом рассмотрения спектральной задачи (69)–(70) является следующий вывод: при выполнении условия статической устойчивости по линейному приближению все нормальные движения капиллярных вязких жидкостей в маятнике являются асимптотически устойчивыми, а спектр и корневые функции обладают доказанными выше свойствами.

В самом деле, в условиях, близких к невесомости, одна жидкость в сосуде может не обязательно заполнять нижнюю его часть. В частности, она может находиться в верхней части сосуда и удерживаться в состоянии покоя капиллярными силами (жидкость в пробирке). При этом статическая устойчивость либо неустойчивость такой системы в состоянии покоя зависит от того, насколько интенсивным является гравитационное поле по отношению к капиллярным силам, действующим на систему. Если жидкость поднята к верхней части полости, а сила тяжести действует сверху и является достаточно большой, то оператор потенциальной энергии $\widehat{\mathcal{B}}_\sigma$ может не быть положительно определенным и может иметь по необходимости конечное число отрицательных собственных значений. В этом случае гидромеханическая система является динамически неустойчивой и имеет место утверждение, называемое обращением теоремы Лагранжа об устойчивости: *если потенциальная энергия гидросистемы не имеет минимума в состоянии равновесия и минимальное собственное значение* $\lambda_{\min}\left(\widehat{\mathcal{B}}_\sigma\right)$ *оператора потенциальной энергии* $\widehat{\mathcal{B}}_\sigma$ *отрицательно, то по крайней мере одно собственное значение* λ *задачи* (69)–(70) *расположено в левой полуплоскости.* Доказательство этого утверждения для системы жидкостей, заполняющих пространственный маятник, проводится по схеме, изложенной в [7], где изучались нормальные колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью при условии статической неустойчивости.

Список литературы

[1] *Дудик О.А.* Малые колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью // Труды ИПММ НАН Украины. 2008. — Том 16. — С. 67–79.

[2] *Дудик О.А.* Малые движения и нормальные колебания плоского маятника с полостью, заполненной несколькими капиллярными вязкими жидкостями // Труды ИПММ НАН Украины. 2009. (в печати)

[3] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[4] *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптического уравнения в области с кусочно–гладкой границей / Т.А. Суслина. — Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. 1985.— Т. 147 - с. 179-183. — Деп. в ВИНИТИ 21.11.85, № 8058. —В.

[5] *Arganovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich. N.N.* Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. WILEY–VCH, Berlin, 1999. — 380 pp.

[6] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

[7] *Дудик О.А.* Нормальные колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, при условии статической неустойчивости // Ученые Записки ТНУ им. В.И. Вернадского — Т. 20 (59) № 1, 2007, с. 57–64.

У роботі розглядається задача про малі рухи і нормальні коливання маятника із полосттю, заповненою системою з капілярних в'язких рідин. Доведена сильна розрішучість досліджуваної гідросистеми. Зведена асимптотика власних значень і доведена теорема про базисність за Абелем–Лідським системи кореневих елементів. Доведене також обернення теореми Лагранжа про стійкіть.

In the work, we consider the problem on small motions and normal oscillations of a pendulum with a cavity fully filled with a system of capillary viscous fluids. The theorem on strong solvability of the investigated hydrosystem is proved. Asymptotic behavior of eigenvalues is established. The theorem on basisity by Abel–Lidsky of the system of root functions and the inversion of Lagrange theorem on stability are proved.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 53–76.

Д. А. Закора

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ИДЕАЛЬНОЙ РЕЛАКСИРУЮЩЕЙ ЖИДКОСТИ

В работе исследована спектральная задача о нормальных колебаниях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости. В начале работы приведена постановка задачи, а также выведен операторный пучок, ассоциированный с исследуемой задачей. Для этого пучка исследованы вопросы локализации, дискретности и асимптотики спектра. Доказаны утверждения о двукратной полноте (с дефектом или без дефекта) для системы собственных и присоединенных элементов, получено утверждение о существенном спектре задачи.

Введение

Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области без учета вращения, а также при отсутствии силы тяжести и при некоторых модельных ограничениях на граничные условия для динамической плотности изучалась в [1], с. 390-410 (см. также [2]). В указанной монографии доказана теорема о сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи, а также исследована спектральная задача о нормальных колебаниях. В работе [3] изучена задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей ограниченную область и находящейся под действием гравитационного поля.

Настоящая работа посвящена общей модели, учитывающей вращение тела, гравитационное поле, а так же зависимость параметров модели от различных точек среды. Оказывается, что учет гравитационных сил приводит к нарушению симметрии в задаче (в предположении постоянства стационарной плотности), а также к некомпактным возмущениям в операторном пучке, отвечающем спектральной задаче. Тем не менее, в работе доказаны утверждения о расположении и структуре спектра, а также установлены асимптотические формулы для различных ветвей собственных значений. Доказано, что в случае переменных параметров модели в спектре задачи возникает несколько отрезков, расположенных на действительной положительной полуоси, существенного спектра. В случае постоянных параметров модели эти отрезки схлопываются в несколько различных точек, которые становятся предельными для некоторых ветвей собственных значений. Эти части спектра не возникают в модели баротропной жидкости и целиком связаны с эффектами памяти в релаксирующей жидкости. Кроме того в исследуемой модели доказано существование двух серий собственных значений, связанных со звуковыми волнами в среде. В случае, когда система вращается, доказано наличие отрезка существенного спектра, расположенного на мнимой оси и связанного с внутренними инерционными волнами в среде.

1. Малые движения вращающейся идеальной релаксирующей жидкости

1.1. **Постановка задачи.** Рассмотрим контейнер, равномерно вращающийся вокруг оси, сонаправленной с действием силы тяжести, и полностью заполненный идеальной неоднородной жидкостью. Будем считать, что жидкость занимает ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим через $\vec{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $S := \partial\Omega$ и направленный вне области Ω. Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с контейнером, таким образом, что ось Ox_3 совпадает с осью вращения и направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится в области Ω. В этом случае равномерная скорость вращения контейнера запишется в виде $\vec{\omega}_0 := \omega_0\vec{e}_3$, где $\vec{e}_3$ — орт оси вращения Ox_3, а $\omega_0 > 0$, для определенности. Будем считать также, что внешнее стационарное поле сил $\vec{F}_0$ является гравитационным и действует вдоль оси вращения, то есть $\vec{F}_0 = -g\vec{e}_3$, $g > 0$.

Задача о малых движениях идеальной сжимаемой жидкости, заполняющей равномерно вращающееся твердое тело, описывается следующей системой уравнений и граничных условий:

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{w}}{\partial t^2} - 2\omega_0\rho_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{w}\times\vec{e}_3) = -\nabla p - \rho g\vec{e}_3 + \rho_0\vec{f} \quad (\text{в } \Omega), \tag{1}$$

$$\rho + \rho_0 \operatorname{div}\vec{w} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \qquad \vec{w}\cdot\vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \tag{2}$$

где $\vec{w}(t,x)$ — поле смещений в жидкости, $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ — динамическое давление и плотность в жидкости, $\vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних сил, наложенное на гравитационное поле.

Релаксирующая жидкость моделируется следующим дополнительным уравнением состояния, связывающим динамическое давление $p(t,x)$ и динамическую плотность $\rho(t,x)$:

$$p(t,x) = a_\infty^2(x)\rho(t,x) - \int_0^t K(t-s,x)\rho(s,x)\,ds, \tag{3}$$

где положительная функция $K(t,x)$ определяет ядро интегрального оператора Вольтерра, а $a^2_\infty(x)$ — квадрат скорости звука в неоднородной жидкости. Важный частный случай получается, если определить ядро в форме

$$K(t,x)=\sum_{l=1}^{m}k_l(x)\exp(-b_l(x)t), \tag{4}$$

где $k_l(x)$ и $b_l(x)$ ($l=\overline{1,m}$) положительные ограниченные функции в области Ω.

Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости заключается в отыскании полей $\vec{w}(t,x)$, $p(t,x)$ и $\rho(t,x)$ из уравнений и граничного условия (1)- (2), соотношения (3), и при начальных условиях

$$\vec{w}(0,x)=\vec{w}^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{w}(0,x)=\vec{w}^1(x). \tag{5}$$

1.2. **Проектирование уравнений движения.** Для перехода к операторному уравнению в изучаемой задаче применим метод ортогонального проектирования уравнений движения на специальные подпространства [4]. Для этого воспользуемся разложением Г. Вейля пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega)$ в ортогональную сумму (см. [4], с. 103):

$$\vec{L}_2(\Omega)=\vec{J}_0(\Omega)\oplus\vec{G}(\Omega), \tag{6}$$

$$\vec{J}_0(\Omega):=\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega)| \quad \operatorname{div}\vec{v}=0 \text{ (в } \Omega), \quad v_n:=\vec{v}\cdot\vec{n}=0 \text{ (на } S)\},$$

$$\vec{G}(\Omega):=\{\vec{v}\in\vec{L}_2(\Omega)| \quad \vec{v}=\nabla\Phi, \quad \int_\Omega \Phi\, d\Omega=0\},$$

Здесь операции $\operatorname{div}\vec{v}$ и v_n понимаются в смысле теории обобщенных функций (распределений), см. [4], с. 100-102. Введем ортопроекторы P_0 и P_G пространства $\vec{L}_2(\Omega)$ на $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$ соответственно. Будем разыскивать поле $\vec{w}$ в виде:

$$\vec{w}=\vec{v}+\nabla\Phi, \quad \text{где} \quad \vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega), \quad \nabla\Phi\in\vec{G}(\Omega). \tag{7}$$

Подставим представление (7) в уравнение (1) и применим к его правой и левой частям ортопроекторы P_0 и P_G, отвечающие разложению (6). Получим систему уравнений:

$$\frac{\partial^2\vec{v}}{\partial t^2}-2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_0(\vec{v}\times\vec{e}_3)+P_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big]=-g\rho_0^{-1}P_0(\rho\vec{e}_3)+P_0\vec{f}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi-2\omega_0\frac{\partial}{\partial t}\Big[P_G(\vec{v}\times\vec{e}_3)+P_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big]=$$
$$=-\rho_0^{-1}\nabla p-g\rho_0^{-1}P_G(\rho\vec{e}_3)+P_G\vec{f} \quad (\text{в } \Omega). \tag{9}$$

Подставим представление (7) в уравнение и граничное условие из (2). Получим:

$$\rho=-\rho_0\operatorname{div}\nabla\Phi \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n}=0 \quad (\text{на } S). \tag{10}$$

С помощью соотношений (3) и (10) в уравнениях (8), (9) можно исключить функции $p(t,x)$, $\rho(t,x)$ и прийти к следующей системе уравнений, заданных в области Ω, и граничному условию:

$$\frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t}\Big[P_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = gP_0(\vec{e}_3\,\mathrm{div}\nabla\Phi) + P_0\vec{f}, \tag{11}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\Phi - 2\omega_0 \frac{\partial}{\partial t}\Big[P_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) + P_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\Big] = -\Big[-\nabla(a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi)\Big] +$$
$$+\int_0^t \Big[-\nabla(K(t-s,x)\mathrm{div}\nabla\Phi)\Big]\,ds + gP_G(\vec{e}_3\,\mathrm{div}\nabla\Phi) + P_G\vec{f}, \tag{12}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S). \tag{13}$$

Начальные условия для уравнений (11), (12) имеют вид:

$$\vec{v}(0,x) = P_0\vec{w}^0(x) =: \vec{v}^0(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}\vec{v}(0,x) = P_0\vec{w}^1(x) =: \vec{v}^1(x), \tag{14}$$
$$\nabla\Phi(0,x) = P_G\vec{w}^0(x) =: \nabla\Phi^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi(0,x) = P_G\vec{w}^1(x) =: \nabla\Phi^1(x).$$

1.3. **Вспомогательные операторы и их свойства.** Для перехода к операторной формулировке задачи (11)-(14) введем ряд операторов и изучим их свойства. Введем гильбертово пространство $\mathcal{H} := \vec{J}_0(\Omega)\oplus\vec{G}(\Omega)$, состоящее из пар $\xi := (\vec{v};\nabla\Phi)^t$ (здесь символ t обозначает операцию транспонирования), где $\vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega)$, $\nabla\Phi\in\vec{G}(\Omega)$. Скалярное произведение и норма в $\mathcal{H}$ определяются следующим образом:

$$(\xi_1,\xi_2)_{\mathcal{H}} := \int_\Omega (\vec{v}_1\cdot\overline{\vec{v}_2} + \nabla\Phi_1\cdot\overline{\nabla\Phi_2})\,d\Omega, \quad \|\xi\|^2_{\mathcal{H}} := \int_\Omega (|\vec{v}|^2 + |\nabla\Phi|^2)\,d\Omega.$$

Введем операторы $S_{1,1}$, $S_{1,2}$, $S_{2,1}$, $S_{2,2}$ и операторный блок $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}\xi := \begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,2} \\ S_{2,1} & S_{2,2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\vec{v}\\ \nabla\Phi\end{pmatrix} := \begin{pmatrix} iP_0(\vec{v}\times\vec{e}_3) & iP_0(\nabla\Phi\times\vec{e}_3) \\ iP_G(\vec{v}\times\vec{e}_3) & iP_G(\nabla\Phi\times\vec{e}_3)\end{pmatrix}. \tag{15}$$

Лемма 1. *(см. [5]) Оператор $\mathcal{S}$ является самосопряженным и ограниченным в $\mathcal{H}$: $\mathcal{S}=\mathcal{S}^*$, $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$; более того, $\|\mathcal{S}\|=1$. Спектр оператора $S_{1,1}$ существенный (см. [6]) и заполняет отрезок $[-1,1]$: $\sigma(S_{1,1}) = \sigma_{ess}(S_{1,1}) = [-1,1]$ (здесь через $\sigma_{ess}(S_{1,1})$ обозначен существенный (предельный) спектр оператора $S_{1,1}$).*

Будем считать далее, что функции $a_\infty^2(x)$ и $K(t,x)$ непрерывно дифференцируемы по пространственным переменным, а граница S области Ω — класса C^2.

Лемма 2. *(см. [5]) Введем пространство*

$$H_A := \{\nabla\Phi\in\vec{W}_2^1(\Omega)| \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ (\textit{на } S), \quad \int_\Omega \Phi\,d\Omega = 0\}$$

с нормой, порожденной скалярным произведением следующего вида:

$$(\nabla\Phi_1, \nabla\Phi_2)_A := \int\limits_\Omega a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi_1\overline{\mathrm{div}\nabla\Phi_2}\,d\Omega.$$

Пространство H_A *является гильбертовым; оно компактно вложено в пространство* $\vec{G}(\Omega)$*:* $H_A \subset\to\subset\to \vec{G}(\Omega)$*. Порождающий оператор* A *гильбертовой пары* $(H_A;\vec{G}(\Omega))$*, являющийся самосопряженным и положительно определенным в* $\vec{G}(\Omega)$*, обладает дискретным спектром. Для каждого поля* $\nabla q \in \vec{G}(\Omega)$ *существует и единственно обобщенное решение задачи*

$$-\nabla(a_\infty^2(x)\mathrm{div}\nabla\Phi) = \nabla q \ \ (\textit{в } \Omega), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial n} = 0 \ \ (\textit{на } S), \quad \int\limits_\Omega \Phi\, d\Omega = 0,$$

выражаемое формулой $\nabla\Phi = A^{-1}\nabla q$*. Более того,* $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\vec{G}(\Omega))$ *при* $p > 3/2$ *и справедлива следующая асимптотическая формула:*

$$\lambda_k(A) = \Big(\frac{1}{6\pi}\int\limits_\Omega a_\infty^{-3}(x)\,d\Omega\Big)^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Аналогично оператору A, заменяя $a_\infty^2(x)$ на $K(t,x)$, введем оператор-функцию $K(t)$, при этом $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(K(t))$ для каждого $t \geq 0$.

Определим операторы B_0 и B_G следующим образом:

$$B_0\nabla\Phi := P_0(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi), \quad B_G\nabla\Phi := P_G(\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi), \quad \mathcal{D}(B_0) = \mathcal{D}(B_G) = H_A. \tag{16}$$

О свойствах операторов B_0 и B_G говорит следующая лемма.

Лемма 3. *Для операторов* B_0 *и* B_G *выполнены свойства*

$$B_0A^{-1/2} =: Q_0 \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega), \vec{J}_0(\Omega)),\ B_GA^{-1/2} =: Q_G \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega)). \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $\nabla\Phi \in \mathcal{D}(B_0) = H_A$, тогда

$$\|B_0\nabla\Phi\|^2_{\vec{J}_0(\Omega)} \leq \|\vec{e}_3\mathrm{div}\nabla\Phi\|^2_{\vec{J}_0(\Omega)} \leq \Big(\min_{x\in\overline{\Omega}} a_\infty^2(x)\Big)^{-1}\|A^{1/2}\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)}.$$

Отсюда, после замены $A^{1/2}\nabla\Phi = \nabla\Psi$, следует, что $B_0A^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega), \vec{J}_0(\Omega))$. Аналогично доказывается, что $B_GA^{-1/2} \in \mathcal{L}(\vec{G}(\Omega))$. □

1.4. **Переход к операторному уравнению. Исследование интегродифференциального уравнения второго порядка. Разрешимость исходной начально-краевой задачи.** С использованием введенных операторов задачу (11)-(14) запишем в виде задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\omega_0 i\mathcal{S}\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{Q}\mathcal{A}\xi + \int\limits_0^t \mathcal{K}(t-s)\xi(s)\,ds + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0, \quad \xi'(0) = \xi^1. \tag{18}$$

Здесь введены обозначения: $\mathcal{A} := \operatorname{diag}(I, A)$, $\mathcal{K}(t) := \operatorname{diag}(0, K(t))$,

$$\mathcal{Q} := \begin{pmatrix} 0 & -gQ_0 A^{-1/2} \\ 0 & I - gQ_G A^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{F}(t) := (P_0 \vec{f}(t); P_G \vec{f}(t))^t,$$

$$\xi(0) = \xi^0 := (\vec{v}^0; \nabla\Phi^0)^t = (P_0 \vec{w}^0; P_G \vec{w}^0)^t, \quad \xi'(0) = \xi^1 := (\vec{v}^1; \nabla\Phi^1)^t = (P_0 \vec{w}^1; P_G \vec{w}^1)^t.$$

Таким образом, если $\vec{w}$, ρ, ∇p — такое решение задачи (1)-(5) о малых движениях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области, что все проведенные до сих пор рассуждения законны, тогда функция ξ является решением задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка (18).

Дадим следующее определение.

Определение 1. Назовем сильным решением исходной начально-краевой задачи (1)-(5) такие функции $\vec{w}$, ρ, ∇p для которых функция ξ является сильным решением задачи Коши (18). В свою очередь сильным решением задачи Коши (18) (см. [7], с. 291) назовем функцию $\xi(t)$ такую, что $\xi(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi'(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}^{1/2})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\xi(t)$, $\mathcal{A}^{1/2}\xi'(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнены начальные условия и уравнение из (18) для любого $t \in \mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

Осуществим в задаче (18) замену $\mathcal{A}^{1/2}\xi(t) = \eta'(t)$, $\eta(0) = 0$ и преобразуем ее к системе двух уравнений с начальными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} = -2\omega_0 i \mathcal{S} \dfrac{d\xi}{dt} - \mathcal{Q}\mathcal{A}^{1/2} \dfrac{d\eta}{dt} + \displaystyle\int_0^t \mathcal{K}(t-s)\mathcal{A}^{-1/2} \dfrac{d\eta(s)}{ds}\, ds + \mathcal{F}(t), \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} = \mathcal{A}^{1/2} \dfrac{d\xi}{dt}, \qquad \xi'(0) = \xi^1, \quad \eta'(0) = \mathcal{A}^{1/2}\xi^0. \end{cases} \tag{19}$$

Просто проверяется, что $\mathcal{Q}\mathcal{A}^{1/2} = \mathcal{A}^{1/2} + \mathcal{R}$, $\mathcal{K}(t)\mathcal{A}^{-1/2} = \mathcal{K}_b(t)\mathcal{A}^{1/2}$, где $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{K}_b(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$. С использованием проведенных преобразований запишем систему (19) в виде одного интегродифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(2)} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$\frac{dy}{dt} = \widehat{\mathcal{A}} y + \widehat{\mathcal{R}} y + \int_0^t \widehat{\mathcal{K}}(t-s)\widehat{\mathcal{C}} y(s)\, ds + \widehat{\mathcal{F}}(t), \quad y(0) = y^0, \text{ где} \tag{20}$$

$$y := (\xi'; \eta')^t,\ y^0 := (\xi^1; \mathcal{A}^{1/2}\xi^0)^t,\ \widehat{\mathcal{C}} := \operatorname{diag}(0, \mathcal{A}^{1/2}),\ \widehat{\mathcal{F}}(t) := (\mathcal{F}(t); 0)^t,$$

$$\widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} -2\omega_0 i\mathcal{S} & -\mathcal{A}^{1/2} \\ \mathcal{A}^{1/2} & 0 \end{pmatrix},\ \widehat{\mathcal{R}} := \begin{pmatrix} 0 & -\mathcal{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \widehat{\mathcal{K}}(t) := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K}_b(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

при этом $\widehat{\mathcal{R}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)})$ и $\widehat{\mathcal{K}}(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)})$ при каждом $t \in \mathbb{R}_+$, а области определения операторов $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{C}}$, очевидно, связаны включением $\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}) \subset \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{C}})$.

Определение 2. (см. [7], с. 38) Сильным решением задачи Коши (20) назовем функцию $y(t)$ такую, что $y(t) \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ для любого t из $\mathbb{R}_+$, $\widehat{\mathcal{A}}y(t) \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, $y(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, $y(0) = y^0$ и выполнено уравнение из (20) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Имеют место следующие теоремы.

Теорема 1. *(см.* [5]*) Пусть* $\widehat{\mathcal{K}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{H}^{(2)}))$, $\widehat{\mathcal{F}}(t) \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H}^{(2)})$, *тогда для любого* $y^0 \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}})$ *существует и единственно сильное решение задачи Коши* (20).

Теорема 2. *(см.* [5]*) Пусть ядро интегрального оператора Вольтерра* $K(t,x)$ *из* (3) *и поле* $\vec{f}(t,x)$ *непрерывно дифференцируемы по переменной* $t \in \mathbb{R}_+$ *со значениями в* $C^1(\overline{\Omega})$ *и* $\vec{L}_2(\Omega)$ *соответственно, тогда для любых* $\vec{w}^0(x)$ *и* $\vec{w}^1(x)$ *таких, что* $P_0\vec{w}^0$, $P_0\vec{w}^1 \in \vec{J}_0(\Omega)$, $P_G\vec{w}^0 \in \mathcal{D}(A)$, $P_G\vec{w}^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, *существует и единственно сильное (в смысле определения 1) решение начально-краевой задачи* (1)-(5).

2. Нормальные колебания вращающейся идеальной релаксирующей жидкости

2.1. **Вывод основного операторного пучка.** Задача (1)-(5) о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей вращающееся твердое тело, приводится к задаче Коши (18). Будем считать далее, что ядро $K(t,x)$ определяется по формуле (4), где $b_l(x) = b_l = \text{const}$ $(l = \overline{1,m})$. Тогда однородное уравнение из (18), записанное в виде системы, примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{1,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{1,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = gQ_0A^{1/2}\nabla\Phi, \\ \dfrac{d^2\nabla\Phi}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{2,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{2,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = -A\nabla\Phi+ \\ \qquad\qquad +gQ_GA^{1/2}\nabla\Phi + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\int_0^t \exp\left(-b_l(t-s)\right)K_l\nabla\Phi(s)\,ds, \end{cases} \tag{21}$$

где K_l $(l = \overline{1,m})$ — операторы, которые строятся аналогично оператору A (заменой $a^2_\infty(x)$ на $k_l(x)$ в лемме 2).

Систему интегродифференциальных операторных уравнений (21) можно свести к системе дифференциально-операторных уравнений второго порядка. А именно, осуществим в системе (21) следующие замены:

$$\nabla\Phi_l := \int_0^t \exp\left(-b_l(t-s)\right)K_l\nabla\Phi(s)\,ds \quad (l = \overline{1,m}). \tag{22}$$

Рассматривая продифференцированные соотношения (22) как систему дифференциальных уравнений, присоединенных к системе (21), получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{1,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{1,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = gQ_0A^{1/2}\nabla\Phi, \\ \dfrac{d^2\nabla\Phi}{dt^2} + 2\omega_0 i\Big(S_{2,1}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + S_{2,2}\dfrac{d\nabla\Phi}{dt}\Big) = -A\nabla\Phi + gQ_GA^{1/2}\nabla\Phi + \sum_{l=1}^{m}\nabla\Phi_l, \\ \dfrac{d\nabla\Phi_l}{dt} = K_l\nabla\Phi - b_l\nabla\Phi_l \quad (l=\overline{1,m}). \end{cases} \tag{23}$$

Разыскивая решения системы (23) в виде:

$$(\vec{v}(t);\nabla\Phi(t);\nabla\Phi_1(t);...;\nabla\Phi_m(t))^t = \exp(-\lambda t)(\vec{v};\nabla\Phi;\nabla\Phi_1;...;\nabla\Phi_m)^t,$$

получим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \lambda^2\vec{v} - 2\omega_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + S_{1,2}\nabla\Phi) = gQ_0A^{1/2}\nabla\Phi, \\ \lambda^2\nabla\Phi - 2\omega_0 i\lambda(S_{2,1}\vec{v} + S_{2,2}\nabla\Phi) = -A\nabla\Phi + gQ_GA^{1/2}\nabla\Phi + \sum_{l=1}^{m}\nabla\Phi_l, \\ (b_l-\lambda)\nabla\Phi_l = K_l\nabla\Phi \quad (l=\overline{1,m}), \end{cases} \tag{24}$$

где $\vec{v}\in\vec{J}_0(\Omega)$, $\nabla\Phi\in\mathcal{D}(A)=\mathcal{D}(K_l)$, $\nabla\Phi_l\in\vec{G}(\Omega)$ $(l=\overline{1,m})$.

Всюду далее будем считать, что $b_1<...<b_m$. Покажем, что числа $\lambda=b_l$ $(l=\overline{1,m})$ не являются собственными значениями задачи (24). В самом деле, положим $\lambda=b_k$ в системе (24). Тогда, в силу положительной определенности оператора K_k, получим, что $\nabla\Phi=0$. Отсюда следует, что $\nabla\Phi_l=0$ $(l\neq k)$. При этих условиях из первого уравнения системы (24) следует, что $\vec{v}=0$. Тогда из второго уравнения системы (24) получим, что $\nabla\Phi_k=0$. Полученные равенства противоречат тому, что $\lambda=b_k$ собственное значение задачи (24). Учитывая это обстоятельство, преобразуем систему (24) к эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \lambda^2\vec{v} - 2\omega_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + S_{1,2}\nabla\Phi) = gQ_0A^{1/2}\nabla\Phi, \\ \lambda^2\nabla\Phi - 2\omega_0 i\lambda(S_{2,1}\vec{v} + S_{2,2}\nabla\Phi) = -A\nabla\Phi + gQ_GA^{1/2}\nabla\Phi + \sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}K_l\nabla\Phi. \end{cases}$$

Осуществим здесь замену $A^{1/2}\nabla\Phi=\varphi$ (здесь и далее для краткости опущен знак градиента). В результате придем к следующей системе операторных уравнений:

$$\begin{cases} \lambda^2 I_0\vec{v} - 2\omega_0 i\lambda(S_{1,1}\vec{v} + \widehat{S}_{1,2}\varphi) - gQ_0\varphi = 0, \\ \lambda^2 A^{-1}\varphi - 2\omega_0 i\lambda(\widehat{S}_{2,1}\vec{v} + \widehat{S}_{2,2}\varphi) + \Big(I_G - gA^{-1/2}Q_G - \sum_{l-1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}\widehat{K}_l\Big)\varphi = 0, \end{cases} \tag{25}$$

где $\widehat{S}_{1,2}:=S_{1,2}A^{-1/2}$, $\widehat{S}_{2,1}:=A^{-1/2}S_{2,1}$, $\widehat{S}_{2,2}:=A^{-1/2}S_{2,2}A^{-1/2}$, $\widehat{K}_l:=A^{-1/2}K_lA^{-1/2}$ $(l=\overline{1,m})$. Операторы $\widehat{S}_{1,2}$, $\widehat{S}_{2,1}$ и $\widehat{S}_{2,2}$ компактны, а I_0, I_G — единичные операторы в $\vec{J}_0(\Omega)$ и $\vec{G}(\Omega)$ соответственно.

Для вывода окончательной системы операторных уравнений получим удобное для дальнейшего представление для операторов $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$. С этой целью рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций суммируемых со своими квадратами по области Ω и его подпространство $L_{2,a}(\Omega):=\{f\in L_2(\Omega)|\,(f,a_\infty^{-1})_{L_2(\Omega)}=0\}$.

Определим операторы

$$\Pi f:=f-\int\limits_\Omega a_\infty^{-1}(x)f(x)\,d\Omega\Big(\int\limits_\Omega a_\infty^{-1}(x)\,d\Omega\Big)^{-1},\quad \Pi^\perp:=I-\Pi,$$

где I — единичный оператор в $L_2(\Omega)$. Несложно проверить, что введенные операторы Π и $\Pi^\perp$ являются ортопроекторами пространства $L_2(\Omega)$ на $L_{2,a}(\Omega)$ и $L_{2,a}^\perp(\Omega)$ соответственно. Размерность образа оператора $\Pi^\perp$ равна единице, а потому $\Pi^\perp\in\mathfrak{S}_\infty(L_2(\Omega),L_{2,a}^\perp(\Omega))$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 4. *Для операторов $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$ справедливо представление*

$$\widehat{K}_l=U^*M_\Pi(p_l)U,\quad p_l(x):=k_l(x)a_\infty^{-2}(x)\quad(l=\overline{1,m}),$$

где $U:\vec{G}(\Omega)\to L_{2,a}(\Omega)$ — некоторый унитарный оператор, а $M_\Pi(p_l)$ — сужение на подпространство $L_{2,a}(\Omega)$ оператора умножения на функцию $p_l(x)$ в пространстве $L_2(\Omega)$. Операторы $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$ являются ограниченными, самосопряженными в $\vec{G}(\Omega)$ и

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}p_l(x)\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)}\geq(\widehat{K}_l\nabla\Phi,\nabla\Phi)_{\vec{G}(\Omega)}\geq\min_{x\in\overline{\Omega}}p_l(x)\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)}\tag{26}$$

Доказательство. Определим оператор $T\nabla\Phi:=a_\infty\mathrm{div}\nabla\Phi$, $\mathcal{D}(T)=\mathcal{D}(A^{1/2})=H_A$ (см. лемму 2). Оператор T замкнут из $\vec{G}(\Omega)$ в $L_{2,a}(\Omega)$. Сопряженный к T оператор $T^*\varphi=-\nabla(a_\infty\varphi)$ задан на плотном множестве $\mathcal{D}(T^*)\subset L_{2,a}(\Omega)$ и имеет нулевое ядро. Отсюда следует, что замыкание образа оператора T совпадает со всем пространством $L_{2,a}(\Omega)$. Из этих рассуждений и равенства $A=T^*T$ на $\mathcal{D}(A)$ следует, что имеет место полярное представление $T=UA^{1/2}$ (см. [8], с. 420), где $U:\vec{G}(\Omega)\to L_{2,a}(\Omega)$ — унитарный оператор.

Теперь операторы K_l $(l=\overline{1,m})$ с помощью введенных операторов T и U могут быть представлены в форме: $K_l=T^*\Pi M(p_l)\Pi T=A^{1/2}U^*\Pi M(p_l)\Pi UA^{1/2}$. Следовательно, $\widehat{K}_l=A^{-1/2}K_lA^{-1/2}=U^*\Pi M(p_l)\Pi U=U^*M_\Pi(p_l)U$, где $M_\Pi(p_l):=\Pi M(p_l)\Pi$ — сужение на подпространство $L_{2,a}(\Omega)$ оператора умножения на функцию $p_l(x)$ в пространстве $L_2(\Omega)$.

Ограниченность и самосопряженность операторов $\widehat{K}_l$ $(l=\overline{1,m})$ очевидна. Докажем оценки (26). Пусть $\nabla\Phi\in\vec{G}(\Omega)$, тогда

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}p_l(x)\|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)}=\max_{x\in\overline{\Omega}}p_l(x)\|U\nabla\Phi\|^2_{L_{2,a}(\Omega)}\geq$$
$$\geq(M(p_l)U\nabla\Phi,U\nabla\Phi)_{L_{2,a}(\Omega)}=(M(p_l)\Pi U\nabla\Phi,\Pi U\nabla\Phi)_{L_{2,a}(\Omega)}=$$

$$= (\widehat{K}_l \nabla\Phi, \nabla\Phi)_{\vec{G}(\Omega)} \geq \cdots \geq \min_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x) \|\nabla\Phi\|^2_{\vec{G}(\Omega)}.$$

Здесь была использована унитарность оператора U, свойство ортогональности проектора Π, а также равенство $U = \Pi U$. $\square$

С помощью полученного представления для операторов $\widehat{K}_l$ $(l = \overline{1,m})$ преобразуем систему (25). В результате придем к следующей основной спектральной задаче, записанной в векторно-матричной форме в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$:

$$\mathcal{L}(\lambda)\xi := \lambda^2 \mathcal{A}\xi - 2\omega_0 i\lambda \mathcal{S}\xi + \mathcal{Q}(\lambda)\xi = 0, \text{ где } \xi := (\vec{v};\varphi)^t \in \mathcal{H}, \tag{27}$$

$\mathcal{A} := \mathrm{diag}(I_0, A^{-1})$, $\mathcal{S}_{1,1} := S_{1,1}$, $\mathcal{S}_{1,2} := \widehat{S}_{1,2}$, $\mathcal{S}_{2,1} := \widehat{S}_{2,1}$, $\mathcal{S}_{2,2} := \widehat{S}_{2,2}$, $\mathcal{Q}_{1,1}(\lambda) := 0$, $\mathcal{Q}_{2,1}(\lambda) =: 0$, $\mathcal{Q}_{1,2}(\lambda) := -gQ_0$, $\widehat{Q}_G := A^{-1/2}Q_G$, $\mathcal{Q}_{2,2}(\lambda) := I_G - g\widehat{Q}_G - \sum_{l=1}^m (b_l - \lambda)^{-1} U^* M_\Pi(p_l) U$.

Задача (27), которую мы назовем спектральной задачей ассоциированной с задачей о нормальных колебаниях идеальной релаксирующей жидкости, заполняющей вращающееся твердое тело, и будет предметом дальнейших исследований.

2.2. **О существенном спектре задачи и локализации спектра.** Определим вспомогательную оператор-функцию $M(\lambda)$ и функцию $p_\lambda(x)$ $(x \in \Omega)$ по формулам:

$$M(\lambda) := I_G - \sum_{l=1}^m \frac{U^* M_\Pi(p_l) U}{b_l - \lambda}, \;\; p_\lambda(x) := 1 - \sum_{l=1}^m \frac{p_l(x)}{b_l - \lambda} \;\; (x \in \Omega). \tag{28}$$

Введем следующие условия на физические параметры системы:

$$(a): \; p_0(x) = 1 - \sum_{l=1}^m \frac{k_l(x)}{b_l a_\infty^2(x)} > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}; \tag{29}$$

$$(b): \; \exists\, a_l > 0\, (l = \overline{1,m}): \sum_{l=1}^m a_l = 1, \; a_l - \frac{k_l(x)}{b_l a_\infty^2(x)} > 0 \;\forall x \in \overline{\Omega}. \tag{30}$$

Очевидно, что из условия (30) следует (29), а значит условие (b) более жесткое. Эти ограничения предполагают, что времена релаксации b_l^{-1} в системе и корректирующие функции $k_l(x)$ достаточно малы в сравнении с квадратом скорости звука $a_\infty^2(x)$. Отметим здесь также, что функции $a_\infty^2(x)$ и $k_l(x)$ $(l = \overline{1,m})$ предполагаются непрерывно дифференцируемыми в $\overline{\Omega}$.

Пусть выполнено условие (29). Рассмотрим уравнение $p_\lambda(x) = 0$. При каждом фиксированном $x \in \overline{\Omega}$, как несложно проверить, это уравнение имеет ровно m действительных положительных корней, которые разделены числами b_l $(l = \overline{1,m})$ (напомним, что $b_1 < \ldots < b_m$). В силу непрерывности функции $p_\lambda(x)$ по пространственным переменным при изменении $x \in \overline{\Omega}$ корни уравнения будут меняться непрерывно и в совокупности образовывать ровно m отрезков $\Delta_l \subset (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 := 0,\ l = \overline{1,m})$.

Лемма 5. *Весь спектр оператор-функции $M(\lambda)$ существенный и состоит из объединения отрезков Δ_l $(l=\overline{1,m})$: $\sigma(M(\lambda))=\sigma_{ess}(M(\lambda))=\cup_{l=1}^m\Delta_l$.*

Доказательство. Рассмотрим спектральную задачу $M(\lambda)\varphi=0$. Осуществляя замену $U\varphi=:f\in L_{2,a}(\Omega)$ преобразуем ее к эквивалентной спектральной задаче $M_\Pi(p_\lambda)f=\Pi M(p_\lambda)\Pi f=0$. Дальнейшее доказательство основано на построении некомпактной последовательности Вейля для последней задачи.

Отметим, что совокупность тех значений λ для которых функция $p_\lambda(x)$ имеет нули в Ω является плотным множеством в $\cup_{l=1}^m\Delta_l$. Пусть теперь λ_0 из этого плотного в $\cup_{l=1}^m\Delta_l$ множества и $x_0\in\Omega$ — один из нулей функции $p_{\lambda_0}(x)$. Рассмотрим шар $S_r:=\{x\in\mathbb{R}^3|\ |x-x_0|\le r\}$ и $S_{r,+}:=\{|x-x_0|\le r,\ x_3>x_{0,3}\}$, $S_{r,-}:=\{|x-x_0|\le r,\ x_3\le x_{0,3}\}$ — верхнюю и нижнюю его половины. Определим функцию

$$f_r(x):=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-1}a_\infty(x)(\chi_{S_{r,+}}(x)-\chi_{S_{r,-}}(x)),\quad r>0, \tag{31}$$

где $\chi_S(x)$ — индикатор множества S. Пусть r таково, что $S_r\subset\Omega$, тогда построенная функция обладает свойствами:

$$(f_r,a_\infty^{-1})_{L_2(\Omega)}=\int\limits_\Omega a_\infty^{-1}(x)f_r(x)\,d\Omega=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-1}\int\limits_\Omega(\chi_{S_{r,+}}(x)-\chi_{S_{r,-}}(x))\,d\Omega=0,$$

$$\|f_r\|^2=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-2}\int\limits_\Omega|a_\infty(x)\chi_{S_r}(x)|^2\,d\Omega=1.$$

Это означает, что $f_r\in L_{2,a}(\Omega)$, $\|f_r\|=1$ (при достаточно малых r).

Из вида построенных функций следует, что множество $\{f_r\}$ некомпактно в $L_{2,a}(\Omega)$. Осуществим следующие оценки

$$\begin{aligned}\|\Pi M(p_{\lambda_0})\Pi f_r\|^2_{L_{2,a}(\Omega)}&\le\|M(p_{\lambda_0})\Pi f_r\|^2_{L_2(\Omega)}=\|M(p_{\lambda_0})f_r\|^2_{L_2(\Omega)}=\\ &=\int\limits_\Omega|p_{\lambda_0}(x)f_r(x)|^2\,d\Omega=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-2}\int\limits_\Omega a_\infty^2(x)p_{\lambda_0}^2(x)\chi_{S_r}(x)\,d\Omega=\\ &=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-2}\int\limits_{S_r}a_\infty^2(x)p_{\lambda_0}^2(x)\,dS_r=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-2}\int\limits_{S_r}a_\infty^2(x)\,dS_r\cdot p_{\lambda_0}^2(y)|_{y\in S_r}=\\ &=\|a_\infty\chi_{S_r}\|^{-2}\int\limits_\Omega a_\infty^2(x)\chi_{S_r}(x)\,d\Omega\cdot p_{\lambda_0}^2(y)|_{y\in S_r}=p_{\lambda_0}^2(y)|_{y\in S_r}\to0\ \ (r\to0),\end{aligned}$$

где последнее соотношение следует из непрерывности функции $p_{\lambda_0}(x)$ и равенства $p_{\lambda_0}(x_0)=0$. Таким образом $\lambda_0\in\sigma_{ess}(M(\lambda))$. Из свойства замкнутости спектра следует утверждение леммы. $\square$

Для дальнейших рассуждений понадобится следующая лемма (см. [9]).

Лемма 6. *(Г.В. Радзиевский* [9], *см. также* [10]*) Пусть H — гильбертово пространство, $0 \le A = A^*$, $B \in \mathfrak{S}_\infty$, $0 \le \beta < 1$, тогда*

$$\|(I-\lambda A)^{-1}A^\beta\| \le C(\beta, \arg\lambda)|\lambda|^{-\beta}, \quad \lambda \in \Lambda_\varepsilon := \{\lambda \in \mathbb{C} | \ |\arg\lambda| > \varepsilon\},$$
$$\lim_{\eta\to\infty} \sup_{\{|\lambda|>\eta,\ |\arg\lambda|>\varepsilon\}} |\lambda|^\beta \|(I-\lambda A)^{-1}A^\beta B\| = 0. \tag{32}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon) > 2\omega_0$ такое, что весь спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ принадлежит множеству $\sigma_R := \Lambda^+_{R,\varepsilon} \cup \Lambda^-_{R,\varepsilon} \cup C_R$, где*

$$\Lambda^\pm_{R,\varepsilon} := \{\lambda \in \mathbb{C} | \ \ |\lambda| > R, \ |\arg\lambda \mp \pi/2| < \varepsilon\}, \ -\pi < \arg\lambda \le \pi, \tag{33}$$

C_R — круг радиуса R с центром в начале координат. Спектр, лежащий вне множества $\Lambda := [-2\omega_0 i, 2\omega_0 i] \cup \{\cup_{l=1}^m \Delta_l\}$, состоит из изолированных конечнократных собственных значений (дискретный). Возможными предельными точками спектра могут быть только точки указанного множества и бесконечно удаленная точка.

Доказательство. Установим прежде, что точки $\lambda = b_l$ $(l = \overline{1,m})$, которые не являются собственными значениями $\mathcal{L}(\lambda)$, не являются также и предельными точками спектра пучка $\mathcal{L}(\lambda)$. Для этого достаточно доказать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой окрестности этих точек. Рассмотрим уравнение $\mathcal{L}(\lambda)\xi_1 = \xi_2$, где $\xi_2 := (\vec{v}_2; \varphi_2)^t \in \mathcal{H}$ — заданный элемент, а $\xi_1 := (\vec{v}_1; \varphi_1)^t$ — искомый. Если λ близко к b_{l_0} то из первого соотношения системы, через которую можно записать последнее уравнение, можно с помощью ограниченных оператор-функций выразить $\vec{v}_1$ через φ_1 и $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_1 = \lambda^{-1}S(\lambda)\Big((2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gQ_0)\varphi_1 + \vec{v}_2\Big), \tag{34}$$

где $S(\lambda) := (\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1})^{-1}$. Подставим это представление во второе уравнение системы:

$$\Big(\lambda^2 A^{-1} - 2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} + M(\lambda) - g\widehat{Q}_G\Big)\varphi_1 -$$
$$- 2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)\Big((2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gQ_0)\varphi_1 + \vec{v}_2\Big) = \varphi_2. \tag{35}$$

Учитывая вид оператор-функции $M(\lambda)$ из последнего соотношения можно с помощью ограниченных оператор-функций выразить φ_1 через φ_2 и $\vec{v}_2$, если только λ достаточно близко к b_{l_0}. Это означает, что точка b_{l_0} не является предельной для спектра пучка $\mathcal{L}(\lambda)$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и покажем, что существует $R > 2\omega_0$ такое, что $\sigma(\mathcal{L}(\lambda)) \subset \sigma_R$. Для этого достаточно показать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$. В связи с этим опять рассмотрим уравнение $\mathcal{L}(\lambda)\xi_1 = \xi_2$. Будем считать, что $|\lambda| > 2\omega_0 = \|2\omega_0 i S_{1,1}\|$, тогда в последней задаче можно с помощью ограниченных оператор-функций исключить $\vec{v}_1$ и прийти к задаче (35), которую представим в форме:

$$l(\lambda)\varphi_1 = 2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)\vec{v}_2 + \varphi_2,\ \ l(\lambda) := I_G + \lambda^2 A^{-1} + G(\lambda), \tag{36}$$

$$G(\lambda) := -\sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}U^* M_\Pi(p_l)U - 2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{2,2} - g\widehat{Q}_G - \\ - 2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)(2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gQ_0).$$

Нужно показать, что оператор-функция $l(\lambda)$ непрерывно обратима при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$ (при достаточно большом $R > 2\omega_0$), тогда из (34)- (36) будет следовать, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$. В самом деле, представим оператор-функцию $l(\lambda)$ в виде

$$l(\lambda) = (I_G + i\lambda A^{-1/2})\left(I_G + (I_G + i\lambda A^{-1/2})^{-1}G(\lambda)(I_G - i\lambda A^{-1/2})^{-1}\right)(I_G - i\lambda A^{-1/2}).$$

Здесь крайние скобки — непрерывно обратимые при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$ операторы. Таким образом, для непрерывной обратимости $l(\lambda)$ достаточно показать, что

$$\|(I_G + i\lambda A^{-1/2})^{-1}G(\lambda)(I_G - i\lambda A^{-1/2})^{-1}\| \to 0 \quad (\lambda \to \infty,\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R). \tag{37}$$

Несложно проверить, что $\|S(\lambda)\| = O(|\lambda|^{-1})$ при $\lambda \to \infty$. Отсюда и из оценки (32) (при $\beta = 0$) следует, что в (37) в оценке нуждается лишь следующее выражение:

$$\|(I_G + i\lambda A^{-1/2})^{-1}\widehat{S}_{2,2}(I_G - i\lambda A^{-1/2})^{-1}\| = \\ = \|(I_G + i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/2}S_{2,2}A^{-1/2}(I_G - i\lambda A^{-1/2})^{-1}\| \le \\ \le \|(I_G + i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/4}(A^{-1/4}S_{2,2}A^{-1/4})\| \times \\ \times \|(I_G - i\lambda A^{-1/2})^{-1}A^{-1/4}\| = o(|\lambda|^{-1}) \quad (\lambda \to \infty,\ \lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R). \tag{38}$$

Здесь использованы оценки из леммы 6. Из (38) и предыдущих рассуждений следует, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon) > 2\omega_0$ такое, что пучок $\mathcal{L}(\lambda)$ непрерывно обратим при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma_R$, а значит $\sigma(\mathcal{L}(\lambda)) \subset \sigma_R = \Lambda^+_{R,\varepsilon} \cup \Lambda^-_{R,\varepsilon} \cup C_R$.

Перейдем от задачи (27) к задаче для фредгольмовой оператор-функции:

$$\mathcal{L}_F(\lambda)\xi := \begin{pmatrix} \lambda(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1}) & -gQ_0 \\ 0 & M(\lambda) \end{pmatrix}^{-1} \mathcal{L}(\lambda)\xi =: (\mathcal{I} + \mathcal{F}(\lambda))\xi = 0, \tag{39}$$

где $\mathcal{I}$ — это единичный оператор в $\mathcal{H}$, а оператор-функция $\mathcal{F}(\lambda)$, как несложно проверить, принимает компактные значения при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Lambda$. На множестве $\mathbb{C}\backslash\Lambda$ спектры пучков $\mathcal{L}_F(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$ совпадают. Поскольку точки, достаточно близкие к числам b_l являются регулярными точками для $\mathcal{L}(\lambda)$, то из (39) заключаем, что они же будут регулярными и для $\mathcal{L}_F(\lambda)$, а значит пучок $\mathcal{L}_F(\lambda)$ является регулярным в $\mathbb{C}\backslash\Lambda$. Отсюда следует (см. [11], а также [4], с. 74), что все точки спектра, не принадлежащие множеству Λ, являются изолированными собственными значениями оператор-функции задачи (39), а значит и $\mathcal{L}(\lambda)$. Собственные элементы, отвечающие этим собственным значениям, имеют конечные кратности. Точками сгущения могут являться только особенности оператор-функции $\mathcal{F}(\lambda)$, то есть множество Λ и бесконечно удаленная точка. □

Основываясь на доказанном утверждении установим теорему о дискретном и существенном спектре задачи (27).

Теорема 4. *Предельный (существенный) спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ совпадает с множеством Λ: $\sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda)) = \Lambda$.*

Доказательство. Пусть λ принимает значения из окрестности множества $\cup_{l=1}^m \Delta_l$, тогда в уравнении $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$ с помощью ограниченных оператор-функций можно исключить $\vec{v}$ и прийти к задаче

$$\Big(M(\lambda) + F_1(\lambda)\Big)\varphi := \Big(\lambda^2 A^{-1} - 2\omega_0 i\lambda \widehat{S}_{2,2} + M(\lambda) - g\widehat{Q}_G - \\ - 2\omega_0 i \widehat{S}_{2,1}(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1})^{-1}(2\omega_0 i\lambda \widehat{S}_{1,2} + gQ_0)\Big)\varphi = 0, \quad (40)$$

где $F_1(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$. Пусть $\lambda_0 \in \cup_{l=1}^m \Delta_l$, тогда $\{\lambda = 0\} \subset \sigma_{ess}(M(\lambda_0))$. Оператор $M(\lambda_0)$ самосопряжен, а $F_1(\lambda_0) \in \mathfrak{S}_\infty$. По теореме Вейля $\{\lambda = 0\} \subset \sigma_{ess}(M(\lambda_0) + F_1(\lambda_0))$. Следовательно, существует некомпактная последовательность Вейля $\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ такая, что $\|M(\lambda_0)\varphi_n + F_1(\lambda_0)\varphi_n\|_{\vec{G}(\Omega)} \to 0$ при $n \to \infty$. Это означает, что $\lambda_0 \in \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$, а значит $\cup_{l=1}^m \Delta_l \subset \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$.

Для дальнейшего рассмотрим операторный пучок

$$l_1(\lambda) := I_G + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^m (b_l - \lambda)^{-1} U^* M_\Pi(p_l) U - 2\omega_0 i\lambda \widehat{S}_{2,2} - g\widehat{Q}_G.$$

Пучок $M^{-1}(\lambda) l_1(\lambda)$ имеет вид фредгольмовой оператор-функции, регулярной в $\mathbb{C} \setminus \cup_{l=1}^m \Delta_l$, а значит в некоторой окрестности отрезка $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ может иметь лишь конечное количество изолированных собственных значений конечной кратности. Это же утверждение верно и для пучка $l_1(\lambda)$.

Пусть теперь λ принимает значения из некоторой окрестности отрезка $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ и не совпадает ни с одним собственным значением пучка $l_1(\lambda)$. Тогда в уравнении $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$ с помощью ограниченных оператор-функций можно исключить φ и прийти к задаче

$$\Big(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1} + F_2(\lambda)\Big)\vec{v} := \Big(\lambda I_0 - 2\omega_0 i S_{1,1} - (2\omega_0 i\lambda \widehat{S}_{1,2} + gQ_0) 2\omega_0 i l_1^{-1}(\lambda) \widehat{S}_{2,1}\Big)\vec{v} = 0,$$

где $F_2(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$. Осуществим в этой задаче замену спектрального параметра $\lambda = i\mu$ и умножим обе части уравнения на мнимую единицу: $(2\omega_0 S_{1,1} - \mu I_0 + iF_2(i\mu))\vec{v} = 0$. Применяя к этой задаче рассуждения из первой части теоремы и используя свойство замкнутости спектра получим, что $[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i] \subset \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$.

Из проведенных рассуждений следует, что $\Lambda \subset \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$. В силу теоремы 3 вне множества Λ спектр пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ — дискретен, следовательно, имеет место не включение, а равенство $\Lambda = \sigma_{ess}(\mathcal{L}(\lambda))$. □

2.3. **Об асимптотике собственных значений.** Из теоремы 3 следует, что бесконечно удаленная точка является возможной предельной точкой для некоторых ветвей собственных значений пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, локализованных у мнимой оси. Для доказательства существования этих ветвей и отыскания асимптотических формул понадобится следующий абстрактный результат (см. [10]), опирающийся на результаты работы [12].

Лемма 7. *(см. [10]) Пусть $0 < C = C^* \in \mathfrak{S}_\infty$, причем собственные значения оператора C имеют степенную асимптотику. Введем обозначения:*

$$l(\lambda) := I + \lambda^2 C + G(\lambda), \quad T(\lambda) := (I - \lambda C^{1/2})^{-1} G(\lambda)(I + \lambda C^{1/2})^{-1}.$$

Пусть оператор-функция $G(\lambda)$ аналитична в секторах $\Lambda^+_{R,\varepsilon}$ и $\Lambda^-_{R,\varepsilon}$, а оператор-функция $T(\lambda)$ удовлетворяет следующему условию: $T(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Lambda^\pm_{R,\varepsilon})$. Тогда

$$\lambda_k^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i \lambda_k^{1/2}(C^{-1})(1 + o(1)) \quad (k \to \infty).$$

Для исследуемой задачи имеет место теорема.

Теорема 5. *Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ и достаточно большого $R = R(\varepsilon)$ задача (27) имеет две ветви $\{\lambda_k^{(\pm i)}\}_{k=1}^\infty$ собственных значений, расположенных в секторах $\Lambda^+_{R,\varepsilon}$ и $\Lambda^-_{R,\varepsilon}$, со следующей асимптотикой: $\lambda_k^{(\pm i)}(\mathcal{L}(\lambda)) = \pm i \lambda_k^{1/2}(A)(1 + o(1))$ $(k \to \infty)$.*

Доказательство. Будем считать, что $|\lambda| > 2\omega_0$ и исключим $\vec{v}$ из задачи $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$, в результате получим задачу $l(\lambda)\varphi = 0$, где пучок $l(\lambda)$ определен в (36). Из леммы 2 следует, что оператор $A^{-1} > 0$ имеет степенную асимптотику собственных значений. Для пучка $l(\lambda)$ построим оператор-функцию $T(\lambda)$ из леммы 7. При помощи оценок, аналогичных тем, что были проведены в (38), можно убедиться, что $T(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Lambda^\pm_{R,\varepsilon})$. □

2.4. **О двукратной полноте с дефектом части собственных и присоединенных элементов.** Дадим определение собственного значения оператор-функции, а также собственного и присоединенных элементов.

Определение 3. (см. [13], с. 61) Число λ_0 называется собственным значением оператор-функции $\mathcal{L}(\lambda)$, если уравнение $\mathcal{L}(\lambda_0)\xi_0 = 0$ имеет ненулевое решение ξ_0. При этом ξ_0 называют собственным элементом $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающим числу λ_0.

Элементы ξ_1, ξ_2, ..., ξ_{n-1} называют присоединенными к собственному элементу ξ_0, если $\sum_{k=0}^{j}(k!)^{-1}\mathcal{L}^{(k)}(\lambda_0)\xi_{j-k} = 0$ $(j = 1, 2, ..., n-1)$. Число n называют длиной цепочки ξ_0, ξ_1,..., ξ_{n-1} из собственного и присоединенных элементов.

Поступим далее, как в теореме 3 при выводе задачи (35) (или (36)). А именно, будем считать, что $\lambda \in \mathbb{C}\backslash[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$ и исключим $\vec{v}$ из задачи $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$. В результате получим задачу

$$l(\lambda)\varphi = 0, \;\; \varphi \in \vec{G}(\Omega), \quad l(\lambda) := I_G + \lambda^2 A^{-1} - 2\omega_0 i\lambda \widehat{S}_{2,2} + G_1(\lambda), \tag{41}$$

$$G_1(\lambda) : -\sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}U^* M_\Pi(p_l)U - g\widehat{Q}_G - 2\omega_0 i\widehat{S}_{2,1}S(\lambda)(2\omega_0 i\lambda\widehat{S}_{1,2} + gQ_0).$$

В задаче (41) осуществим замену $\lambda A^{-1/2}\varphi = \widehat{\varphi}$. Полученную систему запишем в векторно-матричной форме: $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$, где $\eta := (\varphi; \widehat{\varphi})^t \in \vec{G}^{(2)} := \vec{G}(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$,

$$\mathcal{M}(\lambda) := \begin{pmatrix} I_G & 0 \\ 0 & I_G \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -2\omega_0 i\widehat{S}_{2,2} & A^{-1/2} \\ -A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_1(\lambda) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно пучков $\mathcal{M}(\lambda)$ и $l(\lambda)$ имеет место лемма.

Лемма 8. *Набор элементов $\eta_k := (\varphi_k; \widehat{\varphi}_k)^t$ $(k = \overline{0, n-1})$ является цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающей собственному значению $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash[-2\omega_0 i, 2\omega_0 i]$, тогда и только тогда, когда φ_k $(k = \overline{0, n-1})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $l(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 и*

$$\widehat{\varphi}_0 = \lambda_0 A^{-1/2}\varphi_0, \quad \widehat{\varphi}_k = \lambda_0 A^{-1/2}\varphi_k + A^{-1/2}\varphi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{42}$$

Опираясь на лемму 8 докажем теорему о двукратной полноте с дефектом части системы собственных и присоединенных элементов операторного пучка $l(\lambda)$.

Теорема 6. *Пусть $\varphi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $l(\lambda)$ из* (41)*, отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $\eta_k^{(l)} := (\varphi_k^{(l)}; \widehat{\varphi}_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где индекс l пробегает все собственные значения λ_l пучка $l(\lambda)$, лежащие вне круга радиуса R $(R > \max\{2\omega_0, b_m\})$, а $\varphi_k^{(l)}$ и $\widehat{\varphi}_k^{(l)}$ связаны соотношениями* (42) *для каждого l, образует полную в $\vec{G}^{(2)}$ систему с точностью до конечного дефекта.*

Доказательство. В силу леммы 8 нужно доказать, что система собственных и присоединенных элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающая собственным значениям лежащим вне круга радиуса R $(R > \max\{2\omega_0, b_m\})$, полна в $\vec{G}^{(2)}$ с точностью до конечного дефекта. Осуществим в задаче $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$ замену спектрального параметра: $\lambda = -i\mu^{-1}$, где μ — новый спектральный параметр. Умножив правую и левую части полученного выражения на $-\mu$, придем к следующей спектральной задаче:

$$-\mu\mathcal{M}(-i\mu^{-1})\eta = \left(\widehat{\mathcal{A}} - \mu\widehat{\mathcal{I}} - \mu\widehat{\mathcal{G}}(\mu)\right)\eta = 0, \tag{43}$$

где $$\widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} 2\omega_0\widehat{S}_{2,2} & iA^{-1/2} \\ -iA^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{G}}(\mu) := \begin{pmatrix} G_1(-i\mu^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а $\widehat{\mathcal{I}}$ — единичный оператор в $\vec{G}^{(2)}$. Здесь $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}^* \in \mathfrak{S}_p(\vec{G}^{(2)})$ $(p > 3)$, $\mathrm{Ker}\widehat{\mathcal{A}} = 0$, а $\widehat{\mathcal{G}}(\mu)$ — голоморфная в круге $|\mu| < R^{-1}$ оператор-функция, принимающая значения из $\mathcal{L}(\vec{G}^{(2)})$. По теореме из [4], с. 78 получаем, что система собственных и присоединенных элементов оператор-функции $-\mu\mathcal{M}(-i\mu^{-1})$, отвечающих собственным значениям из круга $|\mu| < R^{-1}$, имеет не более конечного дефекта в $\vec{G}^{(2)}$. После обратной замены спектрального параметра получим, что система собственных и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающих собственным значениям, лежащим вне круга $|\lambda| < R$, имеет не более конечного дефекта в $\vec{G}^{(2)} = \vec{G}(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$. □

Из леммы 8 и теоремы 6 как следствие получаем следующее главное утверждение о двукратной полноте с дефектом для исходного операторного пучка $\mathcal{L}(\lambda)$.

Теорема 7. *Обозначим через $\mathcal{P}_G$ ортопроектор пространства $\mathcal{H}$ на $\vec{G}(\Omega)$. Пусть $\xi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $\eta_k^{(l)} := (\mathcal{P}_G \xi_k^{(l)}; \widehat{\xi}_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где индекс l пробегает все собственные значения λ_l пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, лежащие вне круга радиуса R $(R > \max\{2\omega_0, b_m\})$, а $\xi_k^{(l)}$ и $\widehat{\xi}_k^{(l)}$ связаны соотношениями*

$$\widehat{\xi}_0 = \lambda_0 A^{-1/2} \mathcal{P}_G \xi_0, \quad \widehat{\xi}_k = \lambda_0 A^{-1/2} \mathcal{P}_G \xi_k + A^{-1/2} \mathcal{P}_G \xi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, k(\lambda_l),$$

для каждого l, образует полную в $\vec{G}(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$ систему с точностью до конечного дефекта.

Отметим здесь, что если $\omega_0 = 0$, $g = 0$ то, как будет показано далее, при некоторых условиях система элементов $\eta_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ из теоремы 7, где индекс l пробегает все собственные значения λ_l пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, лежащие у мнимой оси будет образовывать полную в $\vec{G}(\Omega) \oplus \vec{G}(\Omega)$ систему.

2.5. **О локализации спектра в случае $g = 0$.** Здесь будет установлено, что если $g = 0$, то спектр задачи (27) лежит в правой замкнутой полуплоскости. Итак, пусть $g = 0$, запишем задачу $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$, где $\xi := (\vec{v}; \varphi)^t \in \mathcal{H}$, в виде

$$\mathcal{L}(\lambda)\xi := \Big(\lambda^2 \mathcal{A} - 2\omega_0 i \lambda \mathcal{S} + \mathcal{P} - \sum_{l=1}^{m} (b_l - \lambda)^{-1} \mathcal{K}_l\Big)\xi = 0, \tag{44}$$

$\mathcal{P} := \mathrm{diag}(0, I_G)$, $\mathcal{K}_l := \mathrm{diag}(0, U^* M_\Pi(p_l) U) = \mathrm{diag}(0, \widehat{K}_l)$.

Теорема 8. *Пусть выполнено условие* (b) *(см.* (30)*), тогда весь спектр задачи* (44) *лежит в полосе* $\{0 \le \mathrm{Re}\lambda < b_m\}$.

Доказательство. Из теоремы 4 следует, что существенный спектр задачи (44) попадает в указанную полосу. Осталось доказать, что все изолированные собственные значения задачи попадают туда же. Пусть $\lambda \neq 0$ — собственное значение задачи (44), а $\xi = (\vec{v};\varphi)^t$ — отвечающий ему собственный элемент, тогда

$$\lambda(\mathcal{A}\xi,\xi) - 2\omega_0 i(\mathcal{S}\xi,\xi) + \frac{1}{\lambda}(\mathcal{P}\xi,\xi) - \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\lambda(b_l-\lambda)}(\mathcal{K}_l\xi,\xi) = 0. \tag{45}$$

Выделив действительную часть из (45) получим, что

$$\mathrm{Re}\lambda\left[(\mathcal{A}\xi,\xi) + \frac{(\mathcal{P}\xi,\xi)}{|\lambda|^2} + \sum_{l=1}^{m}\frac{|\lambda|^2-|b_l-\lambda|^2}{|\lambda|^2|b_l-\lambda|^2}\cdot\frac{(\mathcal{K}_l\xi,\xi)}{b_l}\right] = \sum_{l=1}^{m}\frac{(\mathcal{K}_l\xi,\xi)}{|b_l-\lambda|^2}. \tag{46}$$

Выберем теперь положительные числа a_l $(l=\overline{1,m})$, как в условии (b) (см. (30)), тогда из леммы 4 получим, что

$$(\mathcal{P}\xi,\xi)a_lb_l - (\mathcal{K}_l\xi,\xi) = \|\varphi\|^2_{\vec{G}(\Omega)}a_lb_l - (\widehat{K}_l\varphi,\varphi)_{\vec{G}(\Omega)} \geq \|\varphi\|^2_{\vec{G}(\Omega)}(a_lb_l - \max_{x\in\overline{\Omega}}p_l(x)) \geq 0 \quad \text{и}$$

$$\sum_{l=1}^{m}\left[\frac{|\lambda|^2-|b_l-\lambda|^2}{|\lambda|^2|b_l-\lambda|^2}\cdot\frac{(\mathcal{K}_l\xi,\xi)}{b_l} + \frac{a_l(\mathcal{P}\xi,\xi)}{|\lambda|^2}\right] =$$
$$= \sum_{l=1}^{m}\frac{(\mathcal{K}_l\xi,\xi)|\lambda|^2 + |b_l-\lambda|^2((\mathcal{P}\xi,\xi)a_lb_l - (\mathcal{K}_l\xi,\xi))}{b_l|\lambda|^2|b_l-\lambda|^2} \geq 0.$$

Отсюда и из (46) следует, что $\mathrm{Re}\lambda \geq 0$. Если $\mathrm{Re}\lambda > 0$, то из последнего неравенства и из (46) можно вывести, что $\mathrm{Re}\lambda < b_m$. □

2.6. **Свойства спектральной задачи в случае, когда $g = 0$, $\omega_0 = 0$.** Если $g=0$, $\omega_0 = 0$, то учитывая, что $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи и рассуждая как в теореме 8 можно показать, что спектр задачи (27) лежит в правой открытой полуплоскости. Далее будет показано, что справедливо более сильное утверждение. В этом случае удается также доказать двукратную полноту без дефекта для некоторой системы, построенной по собственным и присоединенным элементам задачи. Пусть $g=0$, $\omega_0=0$, в этом случае задача $\mathcal{L}(\lambda)\xi = 0$, где $\xi := (\vec{v};\varphi)^t \in \mathcal{H} = \vec{J}_0(\Omega)\oplus\vec{G}(\Omega)$, принимает вид

$$l(\lambda)\varphi = 0,\ \ l(\lambda) := I_G + \lambda^2A^{-1} - \sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda)^{-1}U^*M_\Pi(p_l)U. \tag{47}$$

В задаче (47) осуществим замену $\lambda A^{-1/2}\varphi = \widehat{\varphi}$. Полученную систему запишем в векторно матричной форме: $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$, где $\eta := (\varphi;\widehat{\varphi})^t \in \vec{G}^{(2)}$, $\mathcal{M}(\lambda) := \widehat{\mathcal{I}} + \lambda\widehat{\mathcal{A}} + \sum_{l=1}^{m}(\lambda - b_l)^{-1}\widehat{\mathcal{K}_l}$,

$$\widehat{\mathcal{A}} := \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2} \\ -A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\mathcal{K}_l} := \begin{pmatrix} U^*M_\Pi(p_l)U & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Относительно связи собственных и присоединенных элементов пучков $\mathcal{M}(\lambda)$ и $l(\lambda)$ имеет место утверждение, аналогичное лемме 8 с очевидными изменениями. А также справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть существует* r: $b_m < r < b_1 + a^{-1}(1 - 2\sqrt{ab})$, *где* $a := \|A^{-1/2}\|$, $b := m \max_{l=\overline{1,m},\, x\in\overline{\Omega}} p_l(x)$, *и* $\varphi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ — *цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка* $l(\lambda)$ *из* (47), *отвечающая собственному значению* λ_l. *Тогда система элементов* $\eta_k^{(l)} := (\varphi_k^{(l)}; \widehat{\varphi}_k^{(l)})^t$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, *где индекс* l *пробегает все собственные значения* λ_l *пучка* $l(\lambda)$, *лежащие вне круга* $|\lambda - r| \le r$, *а* $\varphi_k^{(l)}$ *и* $\widehat{\varphi}_k^{(l)}$ *связаны соотношениями* (42) *для каждого* l, *образует полную в* $\vec{G}^{(2)}$ *систему.*

Доказательство. Как и в теореме 6 здесь нужно доказать, что система собственных и присоединенных элементов пучка $\mathcal{M}(\lambda)$, отвечающая собственным значениям лежащим вне некоторого круга $|\lambda - r| \le r$, полна в $\vec{G}^{(2)}$. Осуществим в задаче $\mathcal{M}(\lambda)\eta = 0$ замену спектрального параметра: $\lambda = r^2\mu^{-1} + r$, где $r > b_m$ пока произвольно, а μ — новый спектральный параметр. Умножив правую и левую части полученного выражения на μ, придем к следующей спектральной задаче:

$$\mu\mathcal{M}(\frac{r^2}{\mu} + r)\eta = \left[\mu(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}}) + r^2\widehat{\mathcal{A}} + \sum_{l=1}^{m} \frac{\mu^2}{r^2 + \mu(r - b_l)}\widehat{\mathcal{K}_l}\right]\eta = 0. \tag{48}$$

Применив к правой и левой части (48) оператор $(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}$ и проведя несложные преобразования придем к спектральной задаче

$$\mu(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}(\frac{r^2}{\mu} + r)\eta = \Big[\mu\mathcal{I} + r^2(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\widehat{\mathcal{A}} +$$
$$+ (\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\frac{\mu^2}{r^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mu^n\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{r - b_l}{r^2}\right)^n\widehat{\mathcal{K}_l}\right)\Big]\eta = 0 \tag{49}$$

в области $|\mu| < r^2(r - b_1)^{-1}$.

Наша цель — установить, что пучок задачи (49) допускает факторизацию. Используя оценку $\|(\mathcal{I} + r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\| \le 1$ запишем условие, достаточное для факторизации пучка задачи (49):

$$\exists t \in (0, \frac{r^2}{r - b_1}): \quad \frac{r^2}{t}\|\widehat{\mathcal{A}}\| + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{t^{n+1}}{r^2}\|\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{r - b_l}{r^2}\right)^n\widehat{\mathcal{K}_l}\| < 1. \tag{50}$$

Учитывая, что $\|\widehat{\mathcal{A}}\| \le a$, $\|\widehat{\mathcal{K}_l}\| = \|\widehat{K}_l\| = \max_{x\in\overline{\Omega}} p_l(x)$ $(l = \overline{1, m})$, условие (50) будет выполнено, если

$$\exists t \in (0, \frac{r^2}{r - b_1}): \quad \frac{r^2 a}{t} + \frac{b}{r^2}\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1}\left(\frac{r - b_1}{r^2}\right)^n < 1. \tag{51}$$

Просуммировав в (51) геометрическую прогрессию и проделав простые алгебраические преобразования найдем, что условие (51) эквивалентно следующему:

$$\exists t \in (0, \frac{r^2}{r - b_1}): \quad t^2(b + (r - b_1)) - tr^2(1 + a(r - b_1)) + ar^4 < 0, \tag{52}$$

Дискриминант в квадратичном выражении из (52) будет положительным, если $(r-b_1) \notin [a^{-1}(1-2\sqrt{ab}), a^{-1}(1+2\sqrt{ab})]$. В этом случае меньший корень квадратичного выражения будет меньше, чем $r^2(r-b_1)^{-1}$, если $a(r-b_1)<1$. Отсюда получаем, вспомнив условие $r>b_m$, что r должно удовлетворять неравенствам $b_m<r<b_1+a^{-1}(1-2\sqrt{ab})$. В силу условий теоремы такое число r существует, а значит условие (50) выполнено.

По теореме 23.4 из [13], с. 130, пучок задачи (49) допускает факторизацию в форме $\mu(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}(r^2\mu^{-1}+r) =: (\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu) = A_+(\mu)(\mu I-Z)$, где оператор-функция $A_+(\mu)$ — голоморфна и голоморфно обратима при $|\mu|<t$. При этом спектр оператора Z лежит в круге $|\mu|<t$. В этой области задача для операторного пучка $(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu)$ сводится к задаче на собственные значения для оператора Z. Из равенства

$$\mu(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}(r^2\mu^{-1}+r) = \left(A_+(0)+\frac{A'_+(0)\mu}{1!}+\dots\right)\cdot(\mu I-Z), \tag{53}$$

приравнивая коэффициенты при нулевой степени μ, получим, что $r^2(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\widehat{\mathcal{A}} = -A_+(0)Z$, откуда следует, что $Z=-r^2A_+^{-1}(0)(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\widehat{\mathcal{A}} \in \mathfrak{S}_p(\vec{G}^{(2)})$ $(p>3)$. Приравнивая в (53) коэффициенты при первой степени μ получим, что $\mathcal{I}=A_+(0)-A'_+(0)Z$, откуда следует, что $A_+(0)=\mathcal{I}+A'_+(0)Z$. Из проведенных рассуждений следует, что $Z=(\mathcal{I}+\mathcal{T})\widehat{\mathcal{A}}$, где $\mathcal{T}\in\mathfrak{S}_\infty(\vec{G}^{(2)})$. Таким образом, оператор Z есть слабое возмущение оператора $\widehat{\mathcal{A}}$. Учитывая, что $\mathrm{Ker}\widehat{\mathcal{A}}=\{0\}$ и $\widehat{\mathcal{A}}$ — нормальный оператор со спектром на двух лучах по теореме 4.2 из [13], с. 20, получаем, что система корневых элементов оператора Z, а следовательно и пучка $(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu)$ в указанной области, полна в гильбертовом пространстве $\vec{G}^{(2)}$. Остается заметить, что собственные и присоединенные элементы пучков $(\mathcal{I}+r\widehat{\mathcal{A}})^{-1}\mathcal{M}_r(\mu)$ и $\mathcal{M}_r(\mu)$, отвечающие одному и тому же собственному значению, совпадают. □

Установим теперь локализацию спектра задачи в случае, когда $g=0$, $\omega_0=0$.

Теорема 10. *Пусть выполнено условие* (b) *(см.* (30)*), тогда спектр задачи* (47)*, лежащий в окрестности множества* $\cup_{l=1}^m(b_{l-1},b_l)$ *действительный, а две комплексно сопряженные ветви попадают в полосу* $\{\alpha_1\le\mathrm{Re}\lambda\le\alpha_2\}$*, где* $0<\alpha_1<\alpha_2<b_m$.

Доказательство. Для пучка $M(\lambda)$ (см. (28)), в силу леммы 5 и свойств функции $p_\lambda(x)$, справедливы свойства $M(\lambda)\gg 0$ при $\lambda\in(b_{l-1},\inf\Delta_l)$ и $M(\lambda)\ll 0$ при $\lambda\in(\sup\Delta_l,b_l)$ $(l=\overline{1,m},\ b_0:=0)$.

Рассмотрим уравнение $p_l(x)+\lambda^2\|A^{-1}\|=0$. Если выполнено условие (30), то при каждом фиксированном $x\in\overline{\Omega}$, как несложно проверить, это уравнение имеет два комплексно сопряженных корня и ровно m действительных положительных корней, которые разделены числами b_l $(l=\overline{1,m})$. В силу непрерывности функции $p_\lambda(x)$ по пространственным переменным при изменении $x\in\overline{\Omega}$

действительные корни уравнения будут меняться непрерывно и в совокупности образовывать ровно m отрезков $\Delta_{l,a} \subset (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 := 0,\ l = \overline{1,m})$. При этом $\inf \Delta_l \le \inf \Delta_{l,a}$, $\sup \Delta_l \le \sup \Delta_{l,a}$. Отсюда следует, что $\lambda^{-2} l(\lambda) \gg 0$ при $\lambda \in (b_{l-1}, \inf \Delta_l)$ и $\lambda^{-2} l(\lambda) \ll 0$ при $\lambda \in (\sup \Delta_{l,a}, b_l)$ $(l = \overline{1,m},\ b_0 := 0)$.

Докажем теперь, что $[\lambda^{-2} l(\lambda)]' \ll 0$ при $\lambda > 0$, $\lambda \ne b_l$ $(l = \overline{1,m})$. Этот факт, вместе со сказанным выше, позволит применить утверждение о факторизации к пучку $-\lambda^{-2} l(\lambda)$. В самом деле, выберем, согласно условию (b) (см. (30)), числа a_l $(l = \overline{1,m})$ и проведем вычисления:

$$[\lambda^{-2} l(\lambda)]' = \sum_{l=1}^{m} \lambda^{-3} (b_l - \lambda)^{-2} \left[(2b_l - 3\lambda) \widehat{K}_l - 2(b_l - \lambda)^2 a_l I_G \right].$$

Если $\lambda > 2b_l/3$, то $[\lambda^{-2} l(\lambda)]' \ll 0$, очевидно. Если $\lambda \in (0, 2b_l/3]$, то достаточным условием для того, чтобы $[\lambda^{-2} l(\lambda)]' \ll 0$, как несложно установить, будет свойство $\widehat{K}_l - b_l a_l I_G \ll 0$, которое справедливо в силу условия (b). Таким образом, согласно следствию 30.8 из [13], с. 179, для каждого $l = \overline{1,m}$ рассматриваемый пучок допускает факторизацию $-\lambda^{-2} l(\lambda) = l_{l,+}(\lambda)(\lambda I_G - Z_l)$, где Z_l ограничен и подобен самосопряженному оператору, $\sigma(Z_l) \subset (\inf \Delta_l - \varepsilon, \sup \Delta_{l,a} + \varepsilon)$ для любого $0 < \varepsilon < \min\{\inf \Delta_l - b_{l-1}, b_l - \sup \Delta_{l,a}\}$, а $l_{l,+}(\lambda)$ голоморфна и голоморфно обратима в некоторой окрестности отрезка $[b_{l-1} + \varepsilon, b_l - \varepsilon]$. Отсюда следует, что спектр задачи (47), лежащий в окрестности множества $\cup_{l=1}^{m} (b_{l-1}, b_l)$ $(b_0 := 0)$ действительный.

Пусть теперь $\lambda^{(\pm i)}$ — пара комплексно сопряженных собственных значений пучка $l(\lambda)$ и $\varphi^{(\pm i)}$ $(\|\varphi^{(\pm i)}\|_{\vec{G}(\Omega)} = 1)$ — отвечающие им собственные элементы. Тогда $\lambda^{(+i)}$ является корнем уравнения

$$1 + \lambda^2 (A^{-1} \varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})_{\vec{G}(\Omega)} - \sum_{l=1}^{m} \frac{(\widehat{K}_l \varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})_{\vec{G}(\Omega)}}{b_l - \lambda} = 0, \tag{54}$$

которое можно переписать в форме

$$\Big(\lambda^2 + (A^{-1} \varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})^{-1}_{\vec{G}(\Omega)}\Big) \prod_{l=1}^{m} (b_l - \lambda) - (A^{-1} \varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})^{-1}_{\vec{G}(\Omega)} \times$$
$$\times \sum_{l=1}^{m} (\widehat{K}_l \varphi^{(+i)}, \varphi^{(+i)})_{\vec{G}(\Omega)} \prod_{j=1,\, j \ne l}^{m} (b_j - \lambda) = 0.$$

Раскроем здесь скобки и соберем слагаемые с λ^{m+2} и λ^{m+1}, получим

$$(-1)^m \lambda^{m+2} + (-1)^{m+1} \lambda^{m+1} \sum_{l=1}^{m} b_l + \ldots = 0. \tag{55}$$

Из геометрических соображений ясно, что уравнение (54), кроме числа $\lambda^{(+i)}$, имеет также корни $\lambda^{(-i)}$ и $\lambda^{(l)} \in \Delta_{l,A} := \Delta_l \cup \Delta_{l,a}$ $(l = \overline{1,m})$. Следовательно, оно может быть записано в форме:

$$(-1)^m\Big(\lambda-\lambda^{(+i)}\Big)\Big(\lambda-\lambda^{(-i)}\Big)\prod_{l=1}^{m}\Big(\lambda-\lambda^{(l)}\Big)=0.$$

Собрав здесь слагаемые с λ^{m+2} и λ^{m+1}, получим

$$(-1)^m\lambda^{m+2}+(-1)^{m+1}\lambda^{m+1}\Big(2\mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)}+\sum_{l=1}^{m}\lambda^{(l)}\Big)+\ldots=0. \tag{56}$$

Из (55) и (56) следует, что $\mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)}=2^{-1}\sum_{l=1}^{m}(b_l-\lambda^{(l)})$. Отсюда, учитывая, что $\lambda^{(l)}\in\Delta_{l,A}:=\Delta_l\cup\Delta_{l,a}$ $(l=\overline{1,m})$, следуют оценки $0<\alpha_1<\mathrm{Re}\lambda^{(\pm i)}<\alpha_2<b_m$, где $\alpha_1:=2^{-1}\sum_{l=1}^{m}(b_l-\sup\Delta_{l,a})$, $\alpha_2:=2^{-1}\sum_{l=1}^{m}(b_l-\inf\Delta_l)<b_m$. □

2.7. **Асимптотики всех ветвей собственных значений в случае, когда $g=0$, $\omega_0=0$ и характеристики модели постоянны.** Рассмотрим случай, когда $g=0$, $\omega_0=0$ и функции $a_\infty^2(x)$ и $k_l(x)$ $(l=\overline{1,m})$ постоянны. Тогда функции $p_l(x)$ постоянны и $p_l(x)\equiv p_l$, где $p_l>0$ — некоторые константы, удовлетворяющие условию (a) (см. (29)). В этом случае функция p_λ (см. (28)) будет зависеть только от λ. Обозначим корни уравнения $p_\lambda=0$ через γ_l $(l=\overline{1,m})$, при этом $\gamma_l\in(b_{l-1},b_l)$ $(l=\overline{1,m})$.

Из теоремы 10 следует, что в рассматриваемом случае спектр пучка $l(\lambda)$ из (47) попадает в некоторую вертикальную полосу, расположенную в правой полуплоскости и является действительным в некоторой окрестности действительной положительной полуоси. Из теоремы 3 следует, что возможными предельными точками спектральной задачи могут быть только бесконечно удаленная точка и точки γ_l $(l=\overline{1,m})$. Таким образом, спектр задачи (47) в рассматриваемом случае может состоять из $(m+2)$-х ветвей изолированных конечнократных собственных значений с предельными точками в бесконечности и в точках γ_l $(l=\overline{1,m})$. В самом деле, пусть $\{\lambda_k(A^{-1})\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность собственных значений оператора A^{-1}, занумерованных по убыванию и с учетом их кратности, а $\{\varphi_k(A^{-1})\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность соответствующих собственных элементов. Тогда все собственные значения пучка $l(\lambda)$ из (47) могут быть найдены как корни последовательности скалярных уравнений $p_\lambda+\lambda^2\lambda_k(A^{-1})=0$ $(k\in\mathbb{N})$. Для исследования асимптотики корней этих уравнений определим функции $f_l(\lambda):=(\lambda-\gamma_l)p_\lambda^{-1}$ $(l=\overline{1,m})$. Можно проверить, что функции $f_l(\lambda)$ голоморфны в некоторых окрестностях точек γ_l, $f_l(\gamma_l)\neq0$, $\mathrm{sign}f_l(\gamma_l)=-1$ $(l=\overline{1,m})$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть $p_l(x)\equiv p_l$, где $p_l>0$ — некоторые константы, удовлетворяющие условию (a) (см. (29)), а γ_l $(l=\overline{1,m})$ — корни уравнения $p_\lambda=0$ (при этом $\gamma_l\in(b_{l-1},b_l)$). Тогда спектр пучка $l(\lambda)$ из (47) состоит из $(m+2)$-х серий изолированных собственных значений; точнее — из двух комплексно сопряженных* *ветвей* $\{\lambda_k^{(\pm i)}(l)\}_{k=1}^{\infty}$ *и* m *действительных ветвей* $\{\lambda_k^{(l)}(l)\}_{k=1}^{\infty} \subset (\gamma_l, b_l)$ $(l = \overline{1,m})$ *для которых справедливы асимптотические формулы:*

$$\lambda_k^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i\lambda_k^{-1/2}(A^{-1}) + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} p_l \mp$$
$$\mp\, i\lambda_k^{1/2}(A^{-1})\Big[\frac{1}{4}\Big(\sum_{l=1}^{m} p_l\Big)^2 - \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m} p_l b_l\Big] + O(\lambda_k(A^{-1})) \quad (k \to \infty),$$
$$\lambda_k^{(l)}(l(\lambda)) = \gamma_l - \lambda_k(A^{-1})\gamma_l^2 f_l(\gamma_l) +$$
$$+\, 2\lambda_k^2(A^{-1})\gamma_l^3 f_l(\gamma_l)\Big(f_l(\gamma_l) + \gamma_l f_l'(\gamma_l)\Big) + O(\lambda_k^3(A^{-1})) \quad (k \to \infty),$$

где функции $f_l(\lambda)$ $(l = \overline{1,m})$ *определены перед теоремой.*

Для двух ветвей $\{\lambda_k^{(\pm i)}(l)\}_{k=1}^{\infty}$ *при каждом фиксированном* $k \in \mathbb{N}$ *справедлива также следующая асимптотическая формула:*

$$\lambda_k^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i\lambda_k^{-1/2}(A^{-1})\Big(1 - \sum_{l=1}^{m}\frac{p_l}{b_l}\Big)^{1/2} + o\Big(\frac{1}{b_1}\Big) \quad (b_1 \to +\infty).$$

Доказательство. Доказательство формул в теореме сводится к применению асимптотических методов к скалярным уравнениям $p_\lambda + \lambda^2\lambda_k(A^{-1}) = 0$ $(k \in \mathbb{N})$. □

Здесь можно отметить, что из последней формулы в теореме следует, что если наибольшее из времен релаксации b_1^{-1} стремится к нулю, то комплексно сопряженные ветви "садятся"в пределе на мнимую ось. Эта ситуация отвечает случаю баротропной жидкости. В рассматриваемой же ситуации спектр задачи смещен с мнимой оси в правую полуплоскость. Кроме того, в отличие от баротропной жидкости, здесь возникают ветви собственных значений с конечными предельными точками. Эти ветви и связаны с наличием памяти в системе.

Список литературы

[1] Kopachevsky N. D. *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2: Nonself – adjoint Problems for Viscous Fluids.* — Basel — Boston — Berlin: Birkhäuser Verlag, 2003, — 444 p. (Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 146.) (Kopachevsky N. D., Krein S. G.)

[2] Bolgova (Orlova) L. D. *Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations* // Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3: Тез. лекц. и докл. III Крымской осенней матем. школы-симпоз. Симферополь — 1994. — С. 41–42. (Bolgova (Orlova) L. D., Kopachevsky N. D.)

[3] Закора Д. А. *Задача о малых движениях идеальной релаксирующей жидкости* // Динамические системы. — 2006. — Вып. 20. — С. 104–112.

[4] Копачевский Н. Д. *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи.* — М.: Наука, 1989. — 416 с. (Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан)

[5] Закора Д. А. *Задача о малых движениях вращающейся идеальной релаксирующей жидкости* // Динамические системы. — 2009. — Вып. 26. — С. 31–42.

[6] Ralston J. V. *On stationary modes in inviscid rotating fluids* // J. Math. Analysis and Appl. — 1973. — V. 44. — P. 366–383.

[7] Крейн С. Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* — Москва: Наука, 1967, — 464 с.

[8] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов.* — М.: Мир, 1972. — 740 с.

[9] Радзиевский Г. В. *Квадратичный пучок операторов* — Киев, 1976. — (Препринт).

[10] Оразов М. Б. *Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи из механики*: Дис… д-ра. физ.-мат. наук: 01.01.02. — Ашхабат, 1982.

[11] Гохберг И. Ц. *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* — М.: Наука, 1965. — 448 с. (Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.)

[12] Авакян В. А. *Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией* // Функциональный анализ и его приложения. — 1978. — Т. 12, №2. — С. 66-67.

[13] Маркус А. С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.* — Кишинев: Штиинца, 1986. — 260 с.

В роботі досліджено спектральну задачу про нормальні коливання ідеальної релаксуючої рідини у твердому тілі, що обертається. На початку статті наведено постановку задачі, а також отримано операторний жмуток, відповідний спектральній задачі. Для цього пучка вивчені питання локалізації дискретності і асимптотики спектру. Доведено твердження про двократну повноту (з дефектом або без дефекта) для системи власних і приєднаних елементів, отримано твердження про істотний спектрі задачі.

The problem on normal oscillations of an ideal relaxing fluid filling a rotating container is investigated. The operator pencil corresponding to spectral problem is obtained. For this operator pencil localization of spectrum, discreteness of spectrum and essential spectrum are investigated. Asymptotic formulas for all branches of spectrum are obtained. The double completeness with finite defect for the system of an eigne elements and associate elements is proved.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 77–84.

А. И. Криворучко

О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ ОТРАЖЕНИЙ С ДВУМЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОБОЛОЧКАМИ ОРБИТ НАПРАВЛЕНИЙ СИММЕТРИИ

Найдены инварианты бесконечных групп отражений, имеющих две линейные оболочки орбит направлений симметрии. Получена линейная классификация бесконечных групп отражений, действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях и имеющих две линейные оболочки орбит направлений симметрии.

УДК 514.12

Введение. Теории инвариантов бесконечных групп отражений и связанной с ней задачей о строении алгебраических поверхностей с бесконечными множествами плоскостей симметрии посвящен целый ряд работ В.Ф.Игнатенко, А.Е.Залесского, А.Е.Велесько, Т.Ю.Сысоевой, О.И.Рудницкого и других авторов (см., например, обзорные статьи [1], [2] и библиографию к ним). В частности, в [3] показано, что задача о строении нецилиндрических алгебраических гиперповерхностей с бесконечным множеством гиперплоскостей симметрии в конечномерном вещественном векторном пространстве V сводится к вычислению базисных инвариантов бесконечной группы G, которая удовлетворяет следующим условиям:

(А) Группа порождается объединением образованных отражениями попарно непересекающихся множеств $M_1, \ldots, M_k$, причем для каждого $i = 1, \ldots, k$ множество M_i определяется некоторой лежащей в V плоскостью A_i и соответствующей квадратичной формой φ_i в следующем смысле: отражение (P, d) относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда $d \in A_i$, а гиперплоскость P сопряжена d относительно φ_i, но не содержит d.

(Б) Если два отражения принадлежат $M_1 \cup \cdots \cup M_k$ и не коммутируют между собой, то некоторое M_i содержит оба эти отражения.

Для $k \leq 3$ базисные инварианты такой группы известны. Получены отдельные результаты об инвариантах группы G для $k > 3$. (см. [3], [4]). Однако вопросы линейной классификации групп, удовлетворяющих условиям (А) и (Б), за исключением случая $k = 1$, не рассматривались. В связи с этим естественно возникает *постановка следующей задачи*:

Получить линейную классификацию групп, которые удовлетворяют условиям (А) и (Б), а также алгебр полиномиальных инвариантов этих групп, если

(В) $k = 2$.

Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

Цель работы – построение линейной классификации групп, действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях и удовлетворяющих условиям (А)–(В), а также алгебр полиномиальных инвариантов таких групп.

Основные результаты: Вычислены базисные полиномиальные инварианты групп, удовлетворяющих условиям (А)–(В), и для таких групп, действующих на нецилиндрических алгебраических гиперповерхностях, получена линейная классификация.

Построены удовлетворяющие условиям (А)–(В) линейные алгебраические группы, имеющие вырожденные алгебры инвариантов, но не содержащие при этом сдвигов. Показано также, что удовлетворяющая условиям (А)–(В) линейная алгебраическая группа может содержать сдвиги, но ни один из таких сдвигов не является произведением каких-либо двух отражений, принадлежащих этой группе (что противоречит соответствующей гипотезе А.Е.Залесского).

1^o. Пусть группа G удовлетворяет условиям (А)–(В). Используя результаты, полученные в работе [3], зафиксируем в пространстве V базис

$$(a_{ij},\ b_{il},\ c_q\ :\ 1 \le i \le 2;\ 1 \le j \le m_i;\ 1 \le l \le s_i;\ \ 1 \le q \le m)$$

с соответствующими координатными функциями

$$x_{ij} = a^*_{ij}, \quad y_{il} = b^*_{il}, \quad z_q = c^*_q \quad (1 \le i \le 2;\ 1 \le j \le m_i;\ 1 \le l \le s_i;\ \ 1 \le q \le m), \quad (1)$$

относительно которого

$$A_1 = \langle a_{1j},\ b_{1l}\ :\ j \le k_1;\ l \le s_1 \rangle\,,$$

$$A_2 = \langle a_{2j},\ b_{1p},\ b_{2l},\ :\ j \le k_2;\ p \le s;\ l \le s_2 \rangle\,,$$

а для каждого $i \le 2$ множество M_i определяется плоскостью A_i и квадратичной формой φ_i, где

$$\varphi_1 = \sum_j \varepsilon_{1,j}\, x^2_{1,j} + 2 \sum_l y_{1,l}\, \xi_{1,l},$$

$$\varphi_2 = \sum_j \varepsilon_{2,j}\, x^2_{2,j} + 2 \sum_l y_{2,l}\, \xi_{2,s+l} + 2 \sum_{p=1}^{s} y_{1,p}\, \xi_{2,p},$$

причем для всех $i,\ j,\ l$

$$\xi_{i,l} \in \langle z_1, \ldots,\, z_m \rangle\,, \quad \varepsilon_{i,j} \in \{-1,\ 1\}.$$

Положим

$$h_1 = \varphi_1, \quad h_2 = \sum_j \varepsilon_{2,j}\, x_{2,j}^2 + 2\sum_l y_{2,l}\, \xi_{2,s+l},$$

$$\Lambda_1 = \langle \xi_{1,j} \,:\, j \geq 1\rangle, \quad \Lambda_2 = \langle \xi_{2,j} \,:\, j \geq 1\rangle, \quad \sigma = \dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2;$$

$\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $\mathbf{K}$ – алгебра вещественных полиномиальных функций, а $\mathbf{K}_0$ – поле вещественных рациональных функций от переменных (1); $\mathbf{K}^G$ – алгебра полиномиальных инвариантов, а $\mathbf{K}_0^G$ – поле рациональных инвариантов группы G.

Подмножество X множества $\mathbf{K}_0$ называется невырожденным, если X не содержится в $\mathbb{R}(y_2, \dots, y_n)$ ни при каком выборе линейных координат $y_1, \dots, y_n$ пространства V.

Теорема 1. *Пусть либо $s > 0$ и $\xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,s}$, $\xi_{2,1}, \dots, \xi_{2,s}$ – нулевые формы, либо $s = 0$. Тогда*

$$\mathbf{K}_0^G = \mathbb{R}(h_1,\ h_2,\ z_1, \dots,\ z_m), \quad \mathbf{K}^G = \mathbb{R}[h_1,\ h_2,\ z_1, \dots,\ z_m]. \tag{2}$$

При этом если $\dim \Lambda_1 = s_1$, $\dim \Lambda_2 = s_2$, то алгебра $\mathbf{K}^G$ невырожденна, $M_1 \cup M_2$ – множество всех отражений, сохраняющих каждый полиномиальный инвариант группы G, и с точностью до линейной эквивалентности можно считать, что $\xi_{1,i} = z_i$ для всех $i \leq s_1$, $\xi_{2,j} = z_j$ для всех $j \leq \sigma$, $\xi_{2,l} = z_{l-\sigma+s_1}$ для всех $l \in \{\sigma+1, \dots, s_2\}$.

Теорема 2. *Пусть $s \geq 1$, $\xi_{2,1}$ – ненулевая форма, и найдется $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого*

$$\xi_{1,p} = \lambda\, \xi_{2,p} \quad (p = 1, \dots, s).$$

Тогда

$$\mathbf{K}_0^G = \mathbb{R}(h_1 + \lambda\, h_2,\ z_1, \dots,\ z_m), \quad \mathbf{K}^G = \mathbb{R}[h_1 + \lambda\, h_2,\ z_1, \dots,\ z_m], \tag{3}$$

т.е. каждый рациональный инвариант группы G является инвариантом группы, порожденной квадратичным множеством отражений M_0, определяемым плоскостью $A_1 + A_2$ и квадратичной формой $h_1 + \lambda\, h_2$. При этом если $\lambda \neq 0$ и $s = \sigma$, то алгебра $\mathbf{K}^G$ невырожденна, M_0 – множество всех отражений, сохраняющих каждый полиномиальный инвариант группы G, и с точностью до линейной эквивалентности можно считать, что $\xi_{1,i} = z_i$ для всех $i \leq s_1$, $\xi_{2,j} = z_j$ для всех $j \leq \sigma$, $\xi_{2,l} = z_{l-\sigma+s_1}$ для всех $l \in \{\sigma+1, \dots, s_2\}$.

Теорема 3. *Пусть $s = 1$, $\xi_{1,1} \nparallel \xi_{2,1}$. Тогда*

$$\mathbf{K}_0^G = \mathbb{R}(\xi_{2,1}\, h_1 + \xi_{1,1}\, h_2,\ z_1, \dots,\ z_m), \quad \mathbf{K}^G = \mathbb{R}[\xi_{2,1}\, h_1 + \xi_{1,1}\, h_2,\ z_1, \dots,\ z_m]. \tag{4}$$

При этом если $\dim \Lambda_1 = s_1$, $\dim \Lambda_2 = 1 + s_2$, то алгебра K^G является невырожденной, а $M_1 \cup M_2$ – множество всех отражений, сохраняющих каждый полиномиальный инвариант группы G, и с точностью до линейной эквивалентности можно считать, что выполняется одно из следующих условий:

1) $\xi_{1,1} \in \Lambda_2$, $\xi_{2,1} \in \Lambda_1$, $\xi_{1,1} = \xi_{2,2} = z_1$, $\xi_{1,2} = \xi_{2,1} = z_2$; *если* $\sigma > 2$, *то* $\xi_{1,j} = \xi_{2,j} = z_j$ *для всех* $j \in \{3, \ldots, \sigma\}$; *если* $\sigma < s_1$, *то* $\xi_{1,\sigma+j} = z_{\sigma+j}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, s_1 - \sigma\}$; *если* $\sigma < 1 + s_2$, *то* $\xi_{2,\sigma+j} = z_{s_1+j}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, s_2 - \sigma + 1\}$.

2) $\xi_{1,1} \notin \Lambda_2$, $\xi_{2,1} \notin \Lambda_1$, $\xi_{1,j} = z_j$ *для всех* $1 \in \{1, \ldots, s_1 - \sigma\}$, $\xi_{2,j} = z_{s_1-\sigma+j}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, s_2 - \sigma + 1\}$; *если* $\sigma > 0$, *то* $\xi_{1,s_1-\sigma+j} = \xi_{2,s_2-\sigma+1+j} = z_{s_1+s_2-2\sigma+j}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, \sigma\}$.

3) $\xi_{1,1} \in \Lambda_2$, $\xi_{2,1} \notin \Lambda_1$, $\xi_{1,1} = \xi_{2,2} = z_1$, $\xi_{2,1} = z_2$, $\xi_{2,\sigma+1+j} = z_{s_1+1+j}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, s_2 - \sigma\}$; *если* $\sigma > 1$, *то* $\xi_{1,j} = \xi_{2,j} = z_j$ *для всех* $j \in \{3, \ldots, \sigma + 1\}$; *если* $s_1 > \sigma$, *то* $\xi_{1,\sigma+j} = z_{\sigma+j+1}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, s_1 - \sigma\}$.

Теорема 4. *Пусть* $s > 1$ *и* $\xi_{1,1}\xi_{2,2} \neq \xi_{1,2}\xi_{2,1}$. *Тогда*

$$\mathbf{K}_0^G = \mathbb{R}(z_1, \ldots, z_m), \quad \mathbf{K}^G = \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m]. \tag{5}$$

2^o**.** Докажем сформулированные выше результаты.

Если P – гиперплоскость в V, $v \in V \setminus P$, то (P, v) будет обозначать отражение относительно P в направлении v.

Пусть $f \in \mathbf{K}_0^G$, $\xi \in V^*$,

$$d = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} a_{i,j} + \sum_{i,l} \beta_{i,l} b_{i,l} + \sum_p \gamma_p z_p,$$

где все $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,l}$, γ_p принадлежат $\mathbb{R}$. Если $f \in \mathbf{K}_0$, то f'_d обозначает производную функции f вдоль d.

Отметим, что

$$(h_1)'_d = 2 \sum_j \alpha_{1,j} \varepsilon_{1,j} x_{1,j} + 2 \sum_l \beta_{1,l} \xi_{1,l}, \tag{6}$$

$$(h_2)'_d = 2 \sum_j \alpha_{2,j} \varepsilon_{2,j} x_{2,j} + 2 \sum_l \beta_{2,l} \xi_{2,s+l}, \tag{7}$$

$$(z_1)'_d = \gamma_1, \ldots, (z_m)'_d = \gamma_m, \tag{8}$$

$z_1, \ldots, z_m$ – инварианты группы G.

Из ([5], предложения 1 и 2) следует, что $f \in \mathbb{R}(h_1, h_2, z_1, \ldots, z_m)$, причем если $f \in \mathbf{K}$, то $f \in \mathbb{R}[h_1, h_2, z_1, \ldots, z_m]$.

Рассмотрим теперь следующие случаи.

1. Если $s > 0$, то $\xi_{1,1}, \ldots, \xi_{1,s}$, $\xi_{2,1}, \ldots, \xi_{2,s}$ – нулевые формы.

Тогда из (6) и (7) следует, что если $\xi(d) \neq 0$ и отражение относительно гиперплоскости $\ker \xi$ в направлении d принадлежит $M_1 \cup M_2$, то $(h_1)'_d$ и $(h_2)'_d$ делятся на ξ. Поэтому h_1, h_2 принадлежат $\mathbf{K}^G$. Отсюда получаем (2).

Теперь предположим, что в рассматриваемом случае $\dim \Lambda_1 = s_1$, $\dim \Lambda_2 = s_2$ (и поэтому $s = 0$). Тогда из (6)–(8) следует, что если $(h_1)'_d$, $(h_2)'_d$, $(z_1)'_d, \ldots, (z_m)'_d$ – нулевые формы, то $d = \bar{0}$. Это значит, что K^G – невырожденная алгебра. Проверим, что всякое отражение, сохраняющее каждую из форм h_1, h_2, $z_1, \ldots, z_m$, принадлежит $M_1 \cup M_2$.

Пусть $\xi(d) \neq 0$, а отражение $(\ker\xi,\, d)$ сохраняет формы $h_1,\ h_2,\ z_1, \ldots,\ z_m$. Тогда $(h_1)'_d,\ (h_2)'_d,\ (z_1)'_d, \ldots,\ (z_m)'_d$ делятся на ξ, и из (8)

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0. \tag{9}$$

Кроме того, $(h_1)'_d \neq 0$ или $(h_2)'_d \neq 0$ (иначе, по доказанному выше, $d = \bar{0}$). Но тогда найдется $a_{i,j}$, для которого $\xi(a_{i,j}) \neq 0$, т.к. иначе из делимости $(h_1)'_d$ и $(h_2)'_d$ на ξ следует, что $\xi \in \langle z_1, \ldots, z_m\rangle$, т.е. что $\xi(d) = 0$.

Допустим, что $\xi(a_{1,1}) \neq 0$. Тогда из $(h_2)'_d(a_{1,1}) = 0$ следует, что $(h_2)'_d = 0$, и $(h_1)'_d = \lambda\xi$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Отсюда $d \in A_1$ и ξ сопряжена h_1 относительно d, т.е. $(\ker\xi,\, d) \in M_1$.

Аналогичным образом показывается, что если $\xi(a_{2,1}) \neq 0$, то $(\ker\xi,\, d) \in M_2$.

2. $s > 0$, $\xi_{2,1}$ – ненулевая форма.

По доказанному выше, $f \in \mathbb{R}(h_1,\, x_{2,1}^2, \ldots,\, y_{2,1}, \ldots,\, z_1, \ldots,\, z_m)$, и если $f \in \mathbf{K}$, то $f \in \mathbb{R}[h_1,\, x_{2,1}^2, \ldots,\, y_{2,1}, \ldots,\, z_1, \ldots,\, z_m]$. Но тогда из ([5], предложения 2 и 3) имеем:

$$f = g(h_1 + h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1},\, z_1, \ldots,\, z_m) \in \mathbb{R}(h_1 + h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1},\, z_1, \ldots,\, z_m), \tag{10}$$

причем если $f \in \mathbf{K}$, то $f \in \mathbb{R}[h_1 + h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1},\, z_1, \ldots,\, z_m]$.

2.1. $\xi_{1,p} = \lambda_p\xi_{2,p}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех $p \in \{1, \ldots,\, s\}$.

Тогда $h_1 + h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1} = h_1 + \lambda\, h_2$. Из (6) и (7) следует, что если $\xi(d) \neq 0$ и отражение $(\ker\xi,\, d)$ принадлежит $M_1 \cup M_2$, то форма $(h_1)'_d + \lambda\,(h_2)'_d$ делится на ξ. Поэтому $h_1 + \lambda\, h_2 \in \mathbf{K}^G$. Отсюда получаем (3).

2.2. $s = 1$, $\xi_{1,1} \nparallel \xi_{2,1}$.

В этом случае если $f \in \mathbf{K}$, то, полагая

$$F = \xi_{2,1}h_1 + \xi_{1,1}h_2,$$

имеем: $f \in \mathbb{R}[F,\, z_1, \ldots,\, z_m]$ (см. [6], лемма 1). Из (6) и (7) следует, что если $\xi(d) \neq 0$ и $(\ker\xi,\, d) \in M_1 \cup M_2$, то квадратичная форма $F'_d = \xi_{2,1}(h_1)'_d + \xi_{1,1}(h_2)'_d$ делится на ξ. Поэтому $F \in \mathbf{K}^G$, и получаем (4).

Предположим теперь, что $\dim\Lambda_1 = s_1$, $\dim\Lambda_2 = 1 + s_2$. Если при этом F'_d, $(z_1)'_d, \ldots,\ (z_m)'_d$ – нулевые формы, то из (8) следует (9), а из (6) и (7) получаем

$$\xi_{2,1}\Big(\sum_j \alpha_{1,j}\varepsilon_{1,j}x_{1,j} + \sum_l \beta_{1,l}\xi_{1,l}\Big) = -\xi_{1,1}\Big(\sum_j \alpha_{2,j}\varepsilon_{2,j}x_{2,j} + \sum_l \beta_{2,l}\xi_{2,1+l}\Big). \tag{11}$$

Но $\xi_{1,1} \nparallel \xi_{2,1}$. Поэтому найдется $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого линейная комбинация

$$\sum_j \alpha_{2,j}\varepsilon_{2,j}x_{2,j} + \sum_l \beta_{2,l}\xi_{2,1+l} + \lambda\,\xi_{2,1}$$

линейно независимых форм $x_{2,1}, \ldots,\, x_{2,m_2},\, \xi_{2,1}, \ldots,\, \xi_{2,1+s_2}$ является нулевой формой. Значит, все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0. Но тогда из (11) получаем, что все коэффициенты линейной комбинации

$$\sum_j \alpha_{1,j}\varepsilon_{1,j}x_{1,j} + \sum_l \beta_{1,l}\xi_{1,l}$$

линейно независимых форм $x_{1,1},\ldots,x_{1,m_1},\xi_{1,1},\ldots,\xi_{1,s_1}$ также равны 0. Следовательно, $d=\bar{0}$. Это значит, что K^G – невырожденная алгебра. Проверим, что всякое отражение, сохраняющее каждую из форм $F,\ z_1,\ldots,\ z_m$, принадлежит $M_1\cup M_2$.

Пусть $\xi(d)\neq 0$, а отражение $(\ker\xi,\,d)$ сохраняет формы $F,\ z_1,\ldots,\ z_m$. Тогда $F'_d,\ (z_1)'_d,\ldots,\ (z_m)'_d$ делятся на ξ, и из (8) получаем (9). Кроме того, $F'_d\neq 0$ (иначе, по доказанному выше, $d=\bar{0}$). Но тогда найдется $a_{i,j}$, для которого $\xi(a_{i,j})\neq 0$, т.к. иначе из делимости F'_d на ξ следует, что $\xi\in\langle z_1,\ldots,z_m\rangle$, т.е. что $\xi(d)=0$.

Допустим, что $\xi(a_{1,1})\neq 0$. Тогда $\alpha_{1,1}\neq 0$, и можно считать, что $\xi=\alpha_{1,1}\varepsilon_{1,1}x_{1,1}+\theta$, где $\theta(a_{1,1})=0$. Из последнего равенства и делимости F'_d на ξ следует, что $F'_d=\xi_{2,1}\xi$. Но тогда $\xi_{2,1}\left((h_1)'_d-\xi\right)+\xi_{1,1}\,(h_2)'_d=0$. Отсюда найдется $\lambda\in\mathbb{R}$, для которого $\lambda\,\xi_{2,1}+(h_2)'_d=0$. Учитывая линейную независимость форм $x_{2,1},\ldots,x_{2,m_2},\xi_{2,1},\ldots,\xi_{2,1+s_2}$, как и выше, получаем: $\lambda=0$, $d\in A_1$, $\xi=(h_1)'_d$, $(\ker\xi,\,d)\in M_1$.

Аналогичным образом показывается, что если $\xi(a_{2,1})\neq 0$, то $(\ker\xi,\,d)\in M_2$.

2.3. $s>1$, $\xi_{1,1}\xi_{2,2}\neq\xi_{1,2}\xi_{2,1}$.

Пусть t_1 и t_2 принадлежат $\mathbb{R}$. Отражения

$$T_1=(\ker(\varepsilon_{2,1}x_{2,1}+t_1\xi_{2,1}),\,a_{2,1}+t_1b_{1,1}),\quad T_2=(\ker(\varepsilon_{2,1}x_{2,1}+t_2\xi_{2,1}),\,a_{2,1}+t_2b_{1,1}),$$

$$T_3=(\ker(\varepsilon_{2,1}x_{2,1}-t_1\xi_{2,1}+t_2\xi_{2,2}),\,a_{2,1}-t_1b_{1,1}+t_2b_{1,2}),\quad T_0=(\ker x_{2,1},\,a_{2,1})$$

принадлежат M_2, и учитывая инвариантность f относительно произведения $T_0T_1T_2T_3$, из (10) для любого вещественного t получаем:

$$g(h_1+h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1},\,z_1,\ldots,\,z_m)=g(h_1+h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1}+t\,(\xi_{1,1}\xi_{2,2}-\xi_{1,2}\xi_{2,1}),\,z_1,\ldots,\,z_m).$$

Отсюда следует (5).

Утверждения о специальном базисе группы G с невырожденной алгеброй инвариантов непосредственно следуют из леммы, доказанной в [4].

3^o. Если $\dim\Lambda_1<s_1$ или $\dim\Lambda_2<s_2$, то G содержит сдвиги и имеет вырожденную алгебру инвариантов. В то же время из теорем 2–4 следует, что G может иметь вырожденную алгебру инвариантов и тогда, когда $\dim\Lambda_1=s_1$, а $\dim\Lambda_2=s_2$. Рассмотрим некоторые связанные с этой возможностью примеры. Будем при этом считать, что $m_1=m_2=1$, $s_1=s_2=2$.

Пример 1. В следующих четырех случаях G содержит сдвиги, но ни один из этих сдвигов не является произведением каких либо двух отражений, принадлежащих группе G.

1) $s=1$, $\xi_{1,1}=\xi_{2,1}=z_1+z_2$, $\xi_{1,2}=z_1$, $\xi_{2,2}=z_2$;

2) $s=2$, $\xi_{1,1}=\xi_{2,1}=z_1$, $\xi_{1,2}=z_2$, $\xi_{2,2}=z_1+z_2$;

3) $s = 2$, $\xi_{1,1} = \xi_{2,1} = z_1$, $\xi_{1,2} = z_2$, $\xi_{2,2} = z_3$;
4) $s = 2$, $\xi_{1,1} = \xi_{2,1} = z_1$, $\xi_{1,2} = z_2$, $\xi_{2,2} = \rho\, z_2$, $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$.

Пример 2. Пусть $s = 2$, $\xi_{1,1} = z_1$, $\xi_{1,2} = z_2$, $\xi_{2,1} = a\, z_1 - b\, z_2$, $\xi_{2,2} = b\, z_1 + a\, z_2$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда G не содержит сдвигов, но комплексификация группы G содержит сдвиги, причем ни один из этих сдвигов не является произведением каких либо двух отражений, принадлежащих комплексификации группы G.

Пример 3. Пусть $s = 2$, $\xi_{1,1} = z_1$, $\xi_{1,2} = z_2$. Тогда в следующих двух случаях группа G имеет вырожденную алгебру инвариантов, но при этом комплексификация группы G не содержит сдвигов.
1) $\xi_{2,1} = z_2$, $\xi_{2,2} = z_3$;
2) $\xi_{2,1} = z_3$, $\xi_{2,2} = z_4$.

Доказательство указанных свойств группы G использует то, что если квадратичное множество M_0 отражений в базисе $(a,\, b_1,\, b_2,\, c_1,\, c_2, \ldots,\, c_m)$ с координатными функциями $x,\, y_1,\, y_2,\, z_1,\, z_2, \ldots,\, z_m$ пространства V определяется плоскостью $\langle a,\, b_1,\, b_2\rangle$ и квадратичной формой $x^2 + 2\,(y_1 z_1 + y_2 z_2)$, то всякое несобственное преобразование, принадлежащее группе G_0, порожденной множеством M_0, представимо (и только одним способом) как произведение отражения, принадлежащего M_0, и преобразования, имеющего координатное представление

$$x' = x,\ y_1' = y_1 + t\, z_2,\ y_2' = y_2 - t\, z_1,\ z_1' = z_1, \ldots,\ z_m' = z_m,$$

где $t \in \mathbb{R}$. Это позволяет найти координатное представление каждого преобразования T, принадлежащего G и удовлетворяющего условию $\mathrm{rank}(T - \mathrm{Id}) = 1$.

Заключение. *Основные результаты работы*:

Получены линейная классификация и базисные инварианты бесконечных нерасширяемых групп отражений, действующих на нецилиндрических алгебраических гиперповерхностях и имеющих две линейные оболочки орбит направлений симметрии. Построены некоторые примеры групп с вырожденными алгебрами инвариантов.

Список литературы

[1] Игнатенко В.Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – М., 1989. – Т. 21. – С. 155–208.

[2] Игнатенко В.Ф. Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. III // Укр. математ. журн. – 1998. – Т. 50, № 10. – С. 1324–1340.

[3] Криворучко А.И. О строении множества орбит отражений бесконечной группы, порожденной отражениями // Таврический вестник информатики и математики. – 2003. – № 1. – С. 78–92.

[4] Криворучко А.И. О двойном отношении четверки линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы, порожденной отражениями // Ученые записки ТНУ. Сер. "Математика". – 2001.– Т.14, № 1. – С. 60–64.

[5] Криворучко А.И. О группах, порожденных двумя аффинными отражениями // Ученые записки ТНУ. Сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн.". – 2006. – Т.19, № 2. – С. 43–51.

[6] Криворучко А.И. О полиномиальных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями // Динамические системы. – 2000. – Вып. 16. С. 124–129.

Побудовани інваріанти нескінченних груп віддзеркалень, що мають дві лінійні оболонки орбіт напрямів симетрій. Знайдена лінійна класифікація нескінченних груп віддзеркалень, що діють на нециліндричних алгебраїчних поверхнях та мають дві лінійні оболонки орбіт напрямів симетрій.

The invariants of infinite reflection groups having two linear spans of orbits of symmetry directions are obtained. The linear classification of infinite reflection groups acting on non-cylindrical algebraic surfaces and having two linear spans of orbits of symmetry directions is given.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 85–91.

М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн

ДОМИНАНТНАЯ ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА В ПРОСТРАНСТВАХ ЛОРЕНЦА

В настоящей работе доказывается аналог доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в пространствах Лоренца измеримых функций на положительной полуоси. Используются методы теории симметричных пространств измеримых функций в пространствах с бесконечной мерой.

1. Введение

Одним из направлений исследования общей эргодической теории является изучение асимптотического поведения и условий сходимости Чезаровских средних для различных классов операторов в банаховых пространствах. Важнейшие из полученных результатов были названы эргодическими теоремами (см. например, [5], [7], [9] — [12], [15] — [17]). К числу таких теорем относится доминантная эргодическая теорема

Теорема 1. *(ДЕТ) Пусть $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ пространство с мерой и T — положительное $(L_1 - L_\infty)$-сжатие. Тогда для любой неотрицательной измеримой функции f имеет место неравенство*

$$\|B_T f\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p \quad (1 < p < \infty),$$

где $B_T f = \sup\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} T^k f$.

В работах [2] — [4] и [6] рассматривались аналоги доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в симметричных пространствах измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ и на полуоси $[0, +\infty)$.

В данной статье доказывается аналог доминантной эргодической теоремы для абсолютных сжатий в пространствах Лоренца.

Мы будем использовать обозначения и терминологию из [1], [6], [8], [13], [14].

2. Предварительные сведения

Пусть μ – мера Лебега на полупрямой $[0, \infty)$ и $S(0, \infty)$ пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на $(0, \infty)$.

Функцией распределения функции f называют функцию n_f, определяемую для любого $\tau \in (0, +\infty)$ равенством:

$$n_f(\tau) = n_{|f|}(\tau) = \mu\{t \in (0, \infty) : \ |f(t)| > \tau\}.$$

Обознчим через $S_0(0, +\infty)$ подпространство функций из $S(0, +\infty)$, для которых функция распределения $n_f(\tau) \not\equiv +\infty$.

Убывающей перестановкой функции $f \in S_0(0, +\infty)$ называется убывающая непрерывная справа функция f^*, равноизмеримая с функцией $f(t)$. Функция f^* имеет вид:

$$f^*(t) = \inf\{\tau \in (0, \infty) : \ n_{f(t)}(\tau) \leq t\}.$$

Определение 1. Банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ функций из $S_0(0, +\infty)$ называется перестановочно инвариантным или симметричным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$S1^o$. Если $f \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $|f(t)| \leq |g(t)|$ почти всюду на $(0, +\infty)$, то $f \in E$ и $\|f(t)\|_E \leq \|g(t)\|_E$.

$S2^o$. Если $f \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $f^*(t) = g^*(t)$, то $f \in E$ и $\|f(t)\|_E = \|g(t)\|_E$.

Как известно, симметричными пространствами являются пространства L_p, Орлича, Лоренца, Марцинкевича и многие другие.

Известно, что любое симметричное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ является промежуточным между $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$, то есть

$$L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty).$$

Для каждой $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ рассмотрим функцию

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*\, d\mu, \ t \in (0, +\infty).$$

Определение 2. Положительный линейный оператор

$$T : \ L_1 + L_\infty \longrightarrow L_1 + L_\infty$$

называется положительным $(L_1 - L_\infty)$-сжатием или абсолютным сжатием, если

1^o. T действует в $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$;

2^o. $\|T\|_{L_1 \to L_1} \leq 1$, $\|T\|_{L_\infty \to L_\infty} \leq 1$.

Обозначим, как и в [6], множество всех положительных $(L_1 - L_\infty)$-сжатий через $\mathcal{PC}$.

Для $T \in \mathcal{PC}$ положим:

$$B_T f = \sup_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k |f|.$$

Пусть $\psi(t)$ $(\neq 0)$ — возрастающая вогнутая функция на $[0,\ \infty)$ и $\psi(0) = 0$.

Множество

$$\Lambda_\psi = \left\{ f(t) \in S_0(0,\ \infty) :\ \|f\|_{\Lambda_\psi} = \int\limits_0^{+\infty} f^*(t) d\psi(t) < \infty \right\}$$

называется пространством Лоренца

Пространство Лоренца Λ_ψ является симметричным пространством.

Рассматривается и другой класс простанств Лоренца:

$$L_{p,q} = \left\{ f \in S_0(0,\infty) : \left(\int\limits_0^\infty t^{\frac{q}{p}} [f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty \right\},$$

с нормой:

$$\|f\|_{L_{p,q}} = \left(\int\limits_0^\infty t^{\frac{q}{p}} [f^*(t)]^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}},$$

где $1 \leq p \leq \infty,\ 1 \leq q < \infty,\ q \leqslant p.$

Пространства Лоренца $L_{p,q}$ также являются симметричными пространствами.

Заметим, что справедливо следующее соотношение:

$$L_{p,p} = L_p.$$

3. Доминантная эргодическая теорема

Рассмотрим для любого $\tau > 0$ оператор растяжения σ_τ: $S(0,\ \infty) \to S(0,\ \infty)$

$$\sigma_\tau f(t) = f\left(\frac{t}{\tau}\right),\ \tau > 0.$$

Как известно, операторы σ_τ ограниченно действуют в любом симметричном пространстве E ([1]).

Вычислим норму $\|\sigma_\tau\|_{E \to E}$ для пространств $E = L_{p,q}$ и $E = \Lambda_\psi$.

Напомним, что функцией растяжения положительной всюду конечной функции $\psi(t)$ на полуоси $(0,\ \infty)$ называется функция

$$M_\psi(s) = \sup_{0<t<\infty} \frac{\psi(st)}{\psi(t)},\ \ 0 < s < \infty.$$

- Вычислим $\|\sigma_\tau f\|_{L_{p,q}}$.

$$\|\sigma_\tau f\|_{L_{p,q}} = \left[\int\limits_0^\infty t^{\frac{q}{p}} \left[f^*\left(\frac{t}{\tau}\right)\right]^q \frac{dt}{\tau}\right]^{\frac{1}{q}} = \left|\frac{t}{\tau} = s, \quad t = \tau s\right| =$$

$$= \left[\int\limits_0^\infty (\tau s)^{\frac{q}{p}} [f^*(s)]^q \frac{\tau ds}{\tau s}\right]^{\frac{1}{q}} = \tau^{\frac{1}{p}} \left[\int\limits_0^\infty (s)^{\frac{q}{p}} [f^*(s)]^q \frac{ds}{s}\right]^{\frac{1}{q}} = \tau^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L_{p,q}}.$$

Следовательно

$$\|\sigma_\tau\|_{L_{p,q}} = \tau^{\frac{1}{p}}.$$

Отметим, что для $E = L_p \quad \|\sigma_\tau\|_{L_p} = \tau^{\frac{1}{p}}$.

- Рассмотрим теперь $\|\sigma_\tau f\|_{\Lambda_\psi}$:

$$\|\sigma_\tau f\|_{\Lambda_\psi} = \int\limits_0^\infty f^*\left(\frac{t}{\tau}\right) d\psi(t) = \left[\frac{t}{\tau} = s, \ \ t = \tau\, s\right] = \int\limits_0^\infty f^*(s) d\psi(\tau\, s).$$

Так как

$$\int\limits_0^\theta d\psi(\tau\, s) = \psi(\tau\,\theta), \quad \int\limits_0^\theta d\psi(s) = \psi(\theta),$$

то

$$\int\limits_0^\theta d\psi(\tau\, s) = \psi(\tau\,\theta) = \frac{\psi(\tau\,\theta)}{\psi(\theta)}\psi(\theta) =$$

$$= \frac{\psi(\tau\,\theta)}{\psi(\theta)} \int\limits_0^\theta d\psi(s) \leqslant \int\limits_0^\theta \sup_{\theta>0} \frac{\psi(\tau\,\theta)}{\psi(\theta)} d\psi(s).$$

По свойству перестановок (см. [1], гл. II, § 2.) имеем:

$$\|\sigma_\tau f\|_{\Lambda_\psi} \leqslant \sup_{0<\theta<\infty} \frac{\psi(\tau\,\theta)}{\psi(\theta)} \int\limits_0^\infty f^*(s) d\psi(s) = M_\psi(\tau) \|f\|_{\Lambda_\psi}.$$

С другой стороны,

$$\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} \geqslant \sup_{t>0} \frac{\|\sigma_\tau\, \chi_{(0,\,t)}\|_{\Lambda_\psi}}{\|\chi_{(0,\,t)}\|_{\Lambda_\psi}} = \sup_{t>0} \frac{\int_0^\infty \chi^*_{(0,\,t)}(s) d\psi(\tau\, s)}{\int_0^\infty \chi^*_{(0,\,t)}(s) d\psi(s)} =$$

$$= \sup_{t>0} \frac{\int\limits_0^t d\psi(\tau\, s)}{\int\limits_0^t d\psi(s)} = \sup_{t>0} \frac{\psi(\tau\, t)}{\psi(t)} = M_\psi(\tau).$$

Следовательно

$$\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} = M_\psi(\tau).$$

Для симметричного пространства E положим:

$$d_E = \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{E\to E}\, d\,\tau.$$

Для пространства Лоренца $L_{p,q}$ с $p>1$ имеем:

$$d_{L_{p,q}} = \int\limits_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{L_{p,q}}\, d\,\tau = \int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\tau}\right)^{\frac{1}{p}} d\,\tau =$$

$$= \int\limits_0^1 \tau^{-\frac{1}{p}}\, d\,\tau = \left.\frac{\tau^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}}\right|_0^1 = \frac{p}{p-1} - \lim_{\tau\to+0} \frac{\tau^{1-\frac{1}{p}}}{1-\frac{1}{p}}.$$

Так как $p>1$, то $1-\frac{1}{p}>0$, и

$$d_{L_{p,q}} = \frac{p}{p-1}.$$

Следующая теорема, представляет собой аналог доминантной эргодической теоремы в пространствах Лоренца Λ_ψ.

Теорема 2. *Если* $\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} = o(\tau)$, *при* $\tau\to\infty$, $T\in\mathcal{PC}$ *и* $f\in\Lambda_\psi$, *то* $B_T f\in\Lambda_\psi$ *и*

$$\|B_T f\|_{\Lambda_\psi} \leqslant \|f^{**}\|_{\Lambda_\psi} \leqslant d_{\Lambda_\psi}\|f\|_{\Lambda_\psi}.$$

Доказательство. Так как $\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} = o(\tau)$ при $\tau\to\infty$, то оператор Харди $Hf(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f(s)\, d\tau$ ограниченно действует в Λ_ψ ([1], теорема 6.6). Следовательно, если $f\in\Lambda_\psi$, то $f^{**} = Hf^* \in \Lambda_\psi$. Тогда, в силу теоремы 3 [2] $B_T f\in\Lambda_\psi$ и $\|B_T f\|_{\Lambda_\psi} \leqslant \|f^{**}\|_{\Lambda_\psi}$.

Далее,

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(s)ds = |\, s=\tau\, t\,| = \frac{1}{t}\int\limits_0^t f^*(\tau\, t)d(\tau\, t) =$$

$$= \frac{1}{t}\int\limits_0^1 f^*(\tau\, t)\, t\, d\tau = \int\limits_0^1 f^*(\tau\, t)d\tau = \int\limits_0^1 \sigma_{\frac{1}{\tau}} f^*(t)d\tau.$$

Следовательно

$$\|f^{**}\|_{\Lambda_\psi} \leqslant \int_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{\Lambda_\psi}\, d\tau \cdot \|f^*\|_{\Lambda_\psi} = \int_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{\Lambda_\psi}\, d\tau \cdot \|f\|_{\Lambda_\psi} = d_{\Lambda_\psi}\|f\|_{\Lambda_\psi}.$$

□

Заметим, что

$$d_{\Lambda_\psi} = \int_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{\Lambda_\psi}\, d\tau < \infty$$

при

$$\|\sigma_\tau\|_{\Lambda_\psi} = o(\tau), \quad \tau \to \infty.$$

Для пространства Лоренца $L_{p,q}$, имеет место аналогичный результат:

Теорема 3. *Если $p > 1$, $f \in L_{p,q}$, и $T \in \mathcal{PC}$, то $B_T f \in L_{p,q}$ и*

$$\|B_T f\|_{L_{p,q}} \leqslant \|f^{**}\|_{L_{p,q}} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{L_{p,q}}.$$

Доказательство. Пусть $f \in L_{p,q}$. Так как

$$\|f^{**}\|_{L_{p,q}} \leqslant \int_0^1 \|\sigma_{\frac{1}{\tau}}\|_{L_{p,q}}\, d\tau \cdot \|f^*\|_{L_{p,q}} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{L_{p,q}} < \infty,$$

то $f^{**} \in L_{p,q}$ и по [2]

$$\|B_T f\|_{L_{p,q}} \leqslant \|f^{**}\|_{L_{p,q}} \leqslant \frac{p}{p-1}\|f\|_{L_{p,q}} \ \ (\text{ при } \ p > 1\ ).$$

□

Отметим, что формулировка полученного результата согласуется с формулировкой классической доминантной эргодической теоремы в пространствах L_p, приведенной во введении.

Список литературы

[1] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов — Москва: Наука, 1978. — 400 с.

[2] Муратов М. А, Пашкова Ю. С., Рубштейн Б. А. Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий // Ученые записки ТНУ. — 2003. — Т. 17(56), № 2. — С. 36 – 48.

[3] Муратов М. А., Рубштейн Б. А. Аналоги доминантной эргодической теоремы в перестановочно-инвариантных пространствах // Ученые записки ТНУ. — 2004. — Т. 18(57), № 1. — С. 43 – 51.

[4] Муратов М. А., Пашкова Ю. С. Доминантная эргодическая теорема в пространствах Орлича измеримых функций на полуоси // Таврический вестник информатики и математики. — 2006. — № 2. — С. 47–59.

[5] Birkhoff G. D. Proof of the ergodic theorem // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1931. — No. 17. — P. 656–660.

[6] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces // Studia Mathem. — 1998. — No. 128. — P. 145–157.

[7] Dunford N., Schwarts J. T. Convergence almost everywhere of operator averages // J. Rat. Mech. Anal. — 1956. — No. 5. — P. 129–178.

[8] Edgar G.A., Sucheston L. Stopping times and directed processes — Cambridge: University press, 1992. — 430 p.

[9] Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretik application // Acta Math. — 1930. — No. 54. — P. 81–116.

[10] Hopf E. On the ergodic theorem for positive linear operators // J. Reinc. Ang. Math. — 1960. — No. 205. — P. 101–106.

[11] Hopf E. The general temporally descrete Markov process // J. Rat. Meca. Anal. — 1954. — No. 3. — P. 13–45.

[12] Kakutani S. Iteration of linear operations in complex Banach spaces // Proc. Imp. Acad. Yokyo. — 1938. — No. 14. — P. 295–300.

[13] Krengel U. Ergodic Theorems — Berlin: de Gruyter Stud. Math., 1985. — 357 p.

[14] Lindenstrauss J. and Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Function Spaces, Berlin: Springer, 1979. — 327 p.

[15] von Neumann J. Proof of the qlasiergodic hypothesis // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 1932. — No. 18. — P. 70–82.

[16] Weiner N. The ergodic theorem // Duke. Math. J. — 1939. — No. 5. — P. 1–18.

[17] Yosida K. Mean ergodic theorem in Banach Spaces // Proc. Imp. Acad. Yokyo. — 1938. — No. 14. — P. 292–294.

У даній роботі доведено аналог домінантної ергодичної теореми для абсолютних стисків у просторах Лоренца вимірніх функцій на додатній напівосі. Використовано методи теорії симетричних просторів вимірних функцій на просторах з необмеженной мірой.

In the present work we study conditions under which Dominated Ergodic Theorems hold in Lorenz spaces for a positive contraction on positive semiaxis. The method's of the rearrangements invariant spaces was used.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 92–101.

А. М. Погребицкая, С. И. Смирнова

К ВОПРОСУ О ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННОГО АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОИЗЛУЧЕНИЯ

В работе получена оценка части аналитического гибридного решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, возникающего при описании математической модели задачи теплоизлучения.

Введение

Большинство прикладных задач, описывающих реальные физические процессы, сводятся к системам нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами [1],[2]. К такому классу задач можно отнести задачу о теплоизлучении радиатора трапецеидального сечения (см. [3]). Данная конструкция используется в космических установках и описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varepsilon^2 U''(r) + a(r,\varepsilon)U'(r) - \beta b(r,\varepsilon)U^4(r) = 0, \tag{1}$$

$$U_0(d) = 1, \qquad U_0'(f) = 0 \tag{2}$$

где ε, β — малые параметры, $a(r,\varepsilon)$, $b(r,\varepsilon)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции.

Для получения замкнутого аналитического решения уравнения (1) используется метод двойного гибридного асимптотического разложения (см. [4]). Впервые гибридный ВКБ-Галеркин метод был предложен Грищаком В.З. (см. [5]). В результате применения данного подхода получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\varepsilon^2 U_0'' + a(r)U_0' = 0, \tag{3}$$

$$\varepsilon^2 U_1'' + a(r)U_1' = b(r)U_0^4. \tag{4}$$

1. Построение аналитического решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальное уравнение (3). Построим гибридное ВКБ-Галеркин решение этого уравнения для случая, когда функция $a(r)$ дифференцируема на отрезке $[d, f]$ и не обращается в нуль на этом отрезке. Пусть на концах отрезка выполняются условия (2).

В результате применения метода Бернулли, уравнение (3) примет вид:

$$\varepsilon^2 Z'' - g(r)Z = 0, \tag{5}$$

где

$$g(r) = \frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2} + \frac{a'(r)}{2}, \quad Y(r) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_d^r a(x)\,dx\right), \quad U_0(r) = Z(r)\cdot Y(r).$$

Однородное дифференциальное уравнение (5) содержит малый параметр ε^2, поэтому его общее решение будем искать с помощью гибридного ВКБ-Галеркин метода, согласно которому решение уравнения (5) описывается аналитическим выражением

$$Z^H(r,\varepsilon) = \exp\left(\int\limits_d^r (\delta_0\varphi_0 + \ldots)\,dx\right). \tag{6}$$

Ограничимся в разложении (6) одним членом. Для нахождения неизвестного значения функции φ_0 используем метод фазовых интегралов, а для нахождения значения параметра δ_0 — критерий ортогональности Галеркина. Подробное решение уравнения (3) ВКБ—методом, а также и вычисление функции φ_0 описано в работе [6].

Итак,

$$Z^H(r) = c_{1,2}\exp\left(\int\limits_d^r \delta_{0_{1,2}} g^{\frac{1}{2}}(x)\,dx\right),$$

где

$$\delta_{0_{1,2}} = \pm\frac{g(d)-g(f)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + \left(\frac{g(f)-g(d)}{4\int\limits_d^f \sqrt{g^3(x)}\,dx}\right)^2}.$$

Тогда

$$U_{0_H}(r) = c_{1,2}\exp\left(\int\limits_d^r (\delta_{0_{1,2}} g^{\frac{1}{2}}(x) - \frac{1}{2\varepsilon^2}a(x))\,dx\right)$$

является общим решением уравнения (3).

Обозначая

$$G_1(r)=\exp\left(\int\limits_d^r \delta_{01}g^{\frac{1}{2}}(x)\,dx\right),\quad G_2(r)=\exp\left(\int\limits_d^r \delta_{02}g^{\frac{1}{2}}(x)\,dx\right), \tag{7}$$

$$\delta_{01,2}=G\pm\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2},\qquad G=\frac{g(d)-g(f)}{4\int\limits_d^f\sqrt{g^3(x)}\,dx},$$

$$e(r)=\exp\left(\frac{1}{2\varepsilon^2}\int\limits_d^r a(x)\,dx\right),$$

получим следующий вид гибридного ВКБ-Галеркин решения уравнения (3):

$$U_{0_H}(r)=C_1\frac{G_1(r)}{e(r)}+C_2\frac{G_2(r)}{e(r)}. \tag{8}$$

Таким образом, с применением гибридного ВКБ-Галеркин подходом было получено аналитическое решение линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами, содержащими параметр при старшей производной.

2. Асимптотический характер гибридного ВКБ-Галеркин решения

Гибридное ВКБ-Галеркин решение строится на на основе развития метода фазовых интегралов. Поэтому можно ожидать, что при малых значениях параметра гибридное ВКБ-Галеркин решение имеет асимптотический характер.

Дадим следующее определение.

Определение 1. (см. [7], с. 291) Функцию $z(x,\varepsilon)$ назовем ε^r–асимптотическим решением, если для любого $x\in[a,b]$ искомое решение можно представить в виде

$$U(x,\varepsilon)=z(x,\varepsilon)+\nu(x,\varepsilon)\cdot\varepsilon^r, \tag{9}$$

где $\nu(x,\varepsilon)$ ограничена при $\varepsilon\to 0$.

Докажем асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения уравнения (3) отрезке $[d,f]$ с краевыми условиями

$$U_0(d)=U_d,\quad U_0'(f)=U_f. \tag{10}$$

Теорема. *Если существует единственное решение $U_0(x,\varepsilon)$ краевой задачи (3),(10), а функция $a(r)$ дифференцируема по r на отрезке $[d,f]$, не обращается в нуль на этом отрезке и удовлетворяет условию $\alpha\leqslant\sqrt{g(r)}\leqslant\beta$ на $[d,f]$, тогда для любого $r\in[d,f]$ функция (8) является ε–асимптотическим решением уравнения (3).*

Доказательство. Найдем первую и вторую производные гибридного ВКБ-Галеркин решения (8):

$$
\begin{aligned}
U'_{0_H} = -\frac{a(r)}{2\varepsilon^2 e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{\sqrt{g(r)}}{e(r)}G(C_1G_1 + C_2G_2) + \\
+ \frac{\sqrt{g(r)}}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2), \quad (11)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U''_{0_H} = &-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2 e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{a^2(r)}{4\varepsilon^4 e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) - \\
&- \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{\varepsilon^2 e(r)}G(C_1G_1 + C_2G_2) - \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{\varepsilon^2 e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \\
&+ \frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{g(r)G^2}{e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \\
&+ \frac{2g(r)G}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \\
&+ \frac{g(r)}{e(r)}\left(\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2\right)(C_1G_1 + C_2G_2). \quad (12)
\end{aligned}
$$

Подставив (11) и (12) в исходное уравнение (3), получим

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 U''_{0_H} + a(r)U'_{0_H} = &-\frac{a'(r)}{2e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2 e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) - \\
&- \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{e(r)}G(C_1G_1 + C_2G_2) - \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \\
&+ \frac{\varepsilon^2 g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{\varepsilon^2 g(r)G^2}{e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \\
&+ \frac{2\varepsilon^2 g(r)G}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \frac{\varepsilon^2 g'(r)}{2\sqrt{g(r)}e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) + \\
&+ \frac{g(r)}{e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{g(r)}{e(r)}\varepsilon^2 G^2(C_1G_1 + C_2G_2) - \frac{a^2(r)}{2\varepsilon^2 e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \\
&+ \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{e(r)}G(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{a(r)\sqrt{g(r)}}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) = \\
&= -\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2} + \frac{a'(r)}{2}\right)\frac{C_1G_1 + C_2G_2}{e(r)} + \frac{\varepsilon^2 g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \\
&+ \frac{2\varepsilon^2 g(r)G^2}{e(r)}(C_1G_1 + C_2G_2) + \frac{2\varepsilon^2 g(r)G}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}(C_1G_1 - C_2G_2) +
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\varepsilon^2 g'(r)}{2\sqrt{g(r)}e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}(C_1G_1-C_2G_2)+\frac{g(r)}{e(r)}(C_1G_1+C_2G_2)=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{e(r)}\left(\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}+2g(r)G\right)\left(G(C_1G_1+C_2G_2)+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}(C_1G_1-C_2G_2)\right)=$$

$$=\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\left(\varepsilon^2\left(\frac{\sqrt{g(r)}G}{e(r)}(C_1G_1+C_2G_2)+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{g(r)}}{e(r)}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}(C_1G_1-C_2G_2)-\frac{a(r)}{2e(r)\varepsilon^2}(C_1G_1+C_2G_2)\right)+$$

$$\left.+\frac{a(r)}{2}\frac{C_1G_1+C_2G_2}{e(r)}\right)=\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\left(\varepsilon^2U'_{0_H}+\frac{a(r)}{2}U_{0_H}\right).$$

Таким образом, U_{0_H} является общим решением уравнения

$$\varepsilon^2U''_{0_H}+\left(a(r)-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\right)U'_{0_H}-$$
$$-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_{0_H}=0. \quad (13)$$

Используя способ, основанный в [7], обозначим

$$D_0=U_0-U_{0_H} \quad (14)$$

и запишем уравнение (3) в виде

$$\varepsilon^2U''_0+\left(a(r)-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\right)U'_0-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_0=$$
$$=-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U'_0-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_0. \quad (15)$$

Обозначим

$$F=-\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right).$$

Находя разность уравнений (15) и (13), используя (14), получим уравнение, которому удовлетворяет функция D_0:

$$\varepsilon^2D''_0+(a(r)+\varepsilon^2F)D'_0+\frac{a(r)}{2}FD_0=\left(\varepsilon^2U'_0+\frac{a(r)}{2}U_0\right)F. \quad (16)$$

На концах отрезка $[d,f]$ функция D_0 удовлетворяет краевым условиям

$$D_0(d)=0, \qquad D'_0(f)=0. \quad (17)$$

Уравнение (16) можно рассматривать как неоднородное уравнение относительно D_0. Тогда, согласно [8], в случае, когда соответствующая линейная однородная задача (16)–(17) имеет только тривиальное решение (это выполняется кроме случая $\exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\int\limits_d^f\sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}=1$), интегральное представление решения линейной неоднородной задачи (16)–(17) имеет единственное решение

$$D_0=\int\limits_d^f Gr(r,s)\left(\varepsilon^2U_0'+\frac{a(s)}{2}U_0\right)F\,ds, \tag{18}$$

где $Gr(r,s)$ — функция Грина задачи (16)–(17).

Функция $Gr(r,s)$ определена при $r\in[d,f]$, $s\in(d,f)$ и при каждом $s\in(d,f)$ обладает следующими свойствами:

1) при $r\neq s$ функция $Gr(r,s)$ удовлетворяет соответствующему линейному однородному уравнению

$$\varepsilon^2D_0''+(a(r)+\varepsilon^2F)D_0'+\frac{a(r)}{2}FD_0=0; \tag{19}$$

2) при $r=d$ и $r=f$ функция $Gr(r,s)$ удовлетворяет краевым условиям (17);

3) при $r=s$ функция $Gr(r,s)$ непрерывна по r, а ее производная по r имеет разрыв первого рода со скачком, равным $1/\varepsilon^2$, т.е.

$$Gr(s+0,s)=Gr(s-0,s),\qquad Gr_r'(s+0,s)-Gr_r'(s-0,s)=1/\varepsilon^2.$$

Чтобы найти функцию Грина задачи (16)–(17), нужно построить решение $D_{0_1}(r)\neq 0$ уравнения (19), удовлетворяющее только первому ($r=d$) условию (17), и решение $D_{0_2}(r)\neq 0$, удовлетворяющее второму краевому условию.

Обозначим два линейно независимых решения уравнения (13) $U_{0_{H_1}}$ и $U_{0_{H_2}}$:

$$U_{0_{H_1}}=\frac{G_1(r)}{e(r)}=\frac{1}{e(r)}\exp\left((G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})\int\limits_d^r\sqrt{g(x)}\,dx\right), \tag{20}$$

$$U_{0_{H_2}}=\frac{G_2(r)}{e(r)}=\frac{1}{e(r)}\exp\left((G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})\int\limits_d^r\sqrt{g(x)}\,dx\right). \tag{21}$$

Тогда функции D_{0_1} и D_{0_2} могут быть определены как

$$D_{0_1}=U_{0_{H_1}}-U_{0_{H_2}}, \tag{22}$$

$$D_{0_2}=U_{0_{H_1}}-$$
$$-\exp\left(2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\int\limits_d^f\sqrt{g(x)}\,dx\right)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}U_{0_{H_2}}. \tag{23}$$

Функцию $Gr(r,s)$ будем искать в виде

$$Gr(r,s)=\begin{cases}\varphi(s)D_{0_1}(r), & d\leqslant r\leqslant s,\\ \psi(s)D_{0_2}(r), & s\leqslant r\leqslant f.\end{cases} \tag{24}$$

Функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ выбираются так, чтобы выполнялись условия, накладываемые на функцию Грина, т.е., чтобы

$$\begin{cases}\psi(s)D_{0_2}(r)=\varphi(s)D_{0_1}(r),\\ \psi(s)D'_{0_2}(r)-\varphi(s)D'_{0_1}(r)=1/\varepsilon^2.\end{cases} \tag{25}$$

Отсюда

$$\varphi(s)=\frac{D_{0_2}(s)}{\varepsilon^2(D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s)-D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s))}, \tag{26}$$

$$\psi(s)=\frac{D_{0_1}(s)}{\varepsilon^2(D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s)-D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s))}. \tag{27}$$

Обозначив

$$P^*=D_{0_1}(s)D'_{0_2}(s)-D'_{0_1}(s)D_{0_2}(s),$$

$$e^*=\exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\int\limits_d^f\sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2})-a(f)/2\varepsilon^2}\neq 1,$$

и учитывая (22)–(23), получим

$$P^*=(U_{0_{H_1}}-U_{0_{H_2}})(U'_{0_{H_1}}-e^*U'_{0_{H_2}})-(U'_{0_{H_1}}-U'_{0_{H_2}})(U_{0_{H_1}}-e^*U_{0_{H_2}})=$$
$$=(U_{0_{H_1}}U'_{0_{H_2}}-U'_{0_{H_1}}U_{0_{H_2}})(1-e^*).$$

Учитывая (20)–(21), и то, что

$$U'_{0_{H_1}}=U_{0_{H_1}}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(r)}\left(G+\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\right)\right),$$

$$U'_{0_{H_2}}=U_{0_{H_2}}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(r)}\left(G-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\right)\right),$$

имеем

$$P^*=-2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\sqrt{g(s)}U_{0_{H_1}}U_{0_{H_2}}(1-e^*)=$$
$$=-2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\frac{1}{e^2(s)}\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right). \tag{28}$$

Тогда функция Грина примет вид

$$Gr(r,s)=\begin{cases}\dfrac{D_{0_1}(r)D_{0_2}(s)}{\varepsilon^2P^*}, & d\leqslant r\leqslant s,\\ \dfrac{D_{0_1}(s)D_{0_2}(r)}{\varepsilon^2P^*}, & s\leqslant r\leqslant f.\end{cases} \tag{29}$$

Запишем решение задачи (16)–(17) с помощью функции Грина

$$D_0 = \int\limits_d^f Gr(r,s)\left(\varepsilon^2 U_0' + \frac{a(s)}{2}U_0\right) F\,ds =$$

$$= -(U_{0_{H_1}}(r) - U_{0_{H_2}}(r)) \int\limits_d^r \frac{(U_{0_{H_1}}(s) - e^* U_{0_{H_2}}(s)) e^2(s) \left(\varepsilon^2 U_0' + \frac{a(s)}{2}U_0\right) F\,ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right)} -$$

$$-(U_{0_{H_1}}(r) - e^* U_{0_{H_2}}(r)) \int\limits_r^f \frac{(U_{0_{H_1}}(s) - U_{0_{H_2}}(s)) e^2(s) \left(\varepsilon^2 U_0' + \frac{a(s)}{2}U_0\right) F\,ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right)}. \quad (30)$$

Сделаем некоторые оценки

$$|G_1| \leqslant \max\{G_1, G_2\} = L, \quad |G_2| \leqslant \max\{G_1, G_2\} = L, \quad (31)$$

$$\left|\frac{F}{\sqrt{g(r)}}\right| = \left|2G + \frac{g'(r)}{2g(r)\sqrt{g(r)}}\right| \leqslant 2|G| + \frac{|g'(r)|}{2\min|g^{3/2}(r)|} = K, \quad (32)$$

$$\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right) \geqslant \exp(2G\alpha(s-d)) \geqslant N, \quad (33)$$

где

$$N = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ \exp(2G\alpha(f-d)), & \alpha < 0. \end{cases} \quad (34)$$

Учитывая (31)–(34), можно записать

$$|D_0| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}|1-e^*|}\Big|(U_{0_{H_1}}(r) - U_{0_{H_2}}(r))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_d^r \frac{(U_{0_{H_1}}(s) - e^* U_{0_{H_2}}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right)} \frac{F}{\sqrt{g(s)}} e^2(s)\left(U_0' + \frac{a(s)}{2\varepsilon^2}U_0\right)ds +$$

$$+(U_{0_{H_1}}(r) - e^* U_{0_{H_2}}(r)) \int\limits_r^f \frac{(U_{0_{H_1}}(s) - U_{0_{H_2}}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right)} \frac{F}{\sqrt{g(s)}} e^2(s)\left(U_0' + \frac{a(s)}{2\varepsilon^2}U_0\right)ds\,\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(|G_1| + |G_2|)(|G_1| + e^*|G_2|)}{2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}|1-e^*|e^2(r)}\left|\int\limits_d^f \frac{F}{\sqrt{g(s)}} \frac{e(s)(e(s)U_0)'\,ds}{\exp\left(2G\int\limits_d^s \sqrt{g(t)}\,dt\right)}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{L^2\varepsilon}{N\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} \left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right| \frac{K}{e(r)} \left|\int\limits_d^f (e(s)U_0)'\, ds\right|.$$

Обозначив

$$C = \frac{L^2 K}{N}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|,$$

получим

$$|D_0| \leqslant \frac{C\varepsilon}{e(r)\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} \left|e(f)U_0(f) - e(d)U_0(d)\right|,$$

или

$$|D_0| \leqslant \frac{C\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} |U_0(f) - U_0(d)/e(f)|.$$

Функция

$$\mu(r) = \frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} |U_0(f) - U_0(d)/e(f)|$$

ограничена при $\varepsilon \to 0$.

Таким образом, обозначив

$$M = \frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2 G^2}} |U_0(f) - U_0(d)/e(f)|,$$

имеем оценку

$$|U_0 - U_{0_H}| \leqslant \varepsilon \cdot M,$$

что и доказывает ε–асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения (8)– (7) уравнения (3).

Теорема доказана. □

Выводы

Таким образом, показано, что часть гибридного ВКБ-Галеркин решения, возникающая при решении дифференциального уравнения (3), носит асимптотический характер. Это свидетельствует о высокой точности приближения его к точному решению уравнения (3). В дальнейшем предполагается рассмотрение точности оценки аналитического решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (4), что даст возможность оценить в целом точность приближенного гибридного асимптотического решения задачи (1), полученного в работе [4].

Список литературы

[1] Couto P. *Parametric analysis of heat transfer on muststage cryogenic radiator* /P. Couto, M. Mantelli // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. – 2002. – Vol.16. – No. 3. – P. 313–316.

[2] Schnurr N.M. *Radiation from an array of gray circular fins of trapezoidal profile* /N.M. Schnurr, C.A. Cothran // AIA Journal. – 1974. – Vol.12. – No.11. – P. 1476–1480.

[3] Келлер Х. *Лучистый теплообмен кольцевых ребер трапецеидальной формы* /Х. Келлер // Труды Амер. об-ва инженеров-механиков, сер.С, Теплопередача. – 1970. – № 2. – С. 118–121.

[4] Gristchak V.Z. *On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems* /V.Z. Gristchak, A.M. Pogrebitskaya // Technische mechanik (to appear).

[5] Грищак В.З. *Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування.* /Грищак В.З. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2009. – 226 с.

[6] Грищак В.З. *Подвійний асимптотичний розклад у проблемі променевого теплообміну кільцевих ребер трапецеідальної форми* /В.З. Грищак, Г.М. Погребицька // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – № 52. – Вип.3. – С. 93–99.

[7] Моисеев Н.Н. *Асимптотические методы нелинейной механики.* /Н.Н. Моисеев – Москва: Наука, 1982. – 400 с.

[8] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. *Диференціальні рівняння в задачах: Навчальний посібник.* /А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк – К.: Либідь, 2003. – 504 с.

В роботі отримано оцінку частини аналітичного гібридного розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що виникає при описанні математичної моделі задачі тепловипромінювання.

In this paper the estimate of the part of an analytical hybrid solution for the nonlinear second order differential equation, that arises while describing the mathematical model of the thermal emission problem, is obtained.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 102–113.

Ф. С. Стонякин

К-СВОЙСТВО РАДОНА-НИКОДИМА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ

В данной работе рассматриваются новые характеристики отображений в локально выпуклые пространства: сильная компактная абсолютная непрерывность и К-свойство Радона-Никодима. Доказано, что любое пространство Фреше обладает К-свойством Радона-Никодима. Установлена почти всюду дифференцируемость сильно компактно абсолютно непрерывного отображения в пространстве, порождённом абсолютно выпуклым компактным множеством. Получена обобщённая формула Лагранжа с компактной выпуклой оценкой для дифференцируемых отображений в пространства Фреше.

Введение

Хорошо известно, что для вещественнозначных функций множество всех неопределённых интегралов Лебега совпадает со множеством всех абсолютно непрерывных функций (с точностью до константы). Для отображений как в банаховы, так и в локально выпуклые пространства (ЛВП) имеется достаточно эффективный аналог интеграла Лебега — интеграл Бохнера. Подобно интегралу Лебега в вещественном случае, неопределённый интеграл Бохнера является абсолютно непрерывным отображением относительно нормы (AC^s). Однако, в отличие от классического случая, уже не всякое абсолютно непрерывное отображение представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера [1].

В связи с этим был выделен класс пространств, имеющих *свойство Радона-Никодима* (RNP), которые характеризуются тем, что всякое абсолютно непрерывное отображение представимо в виде интеграла Бохнера [2, 3]. (RNP) имеют, например, такие важные пространства, как ℓ_p ($1 \leqslant p < \infty$), $L_p[a;b]$ ($1 < p < \infty$). Однако к примеру пространства c_0, $L_1[a;b]$ и $C[a;b]$ не обладают (RNP) [2, 3].

Таким образом, класс пространств с (RNP) недостаточно широк. Ввиду этого возникает естественная задача описания множества абсолютно непрерывных отображений, представимых в виде интеграла Бохнера в общем случае для пространств без свойства Радона-Никодима.

Для отображений пространств с мерой в банаховы пространства, а также — в пространства Фреше, в качестве вариантов решения данной задачи были предложены так называемые теоремы типа Радона-Никодима [4] — [9]. Среди недавних исследований по данной проблематике следует отметить удобное проективное описание банаховых пространств [10, 11], разновидности слабого (RNP) [12], полезные результаты для специальных пространств последовательностей [13] и, особенно, разработки теории компактных множеств с (RNP) [14].

В статье [15] была рассмотрена задача описания интеграла Бохнера отображений вещественного отрезка $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ в произвольные отделимые ЛВП E и использованы для её решения новые выпуклые компактные характеристики таких отображений — *компактный субдифференциал* и *компактная вариация*. Среди основных результатов данной работы отметим достаточное условие представимости сильно абсолютно непрерывного отображения в виде неопределённого интеграла Бохнера для произвольных отделимых ЛВП ([15], теорема 3.1) и соответствующий критерий для пространств Фреше ([15], теорема 3.2).

Далее в [16] исследования [15] развиваются в новом направлении. В [16] вводятся новые сильные компактные характеристики ЛВП-значных отображений: *сильная K-вариация* (V_K^s) и *сильная K-абсолютная непрерывность* (AC_K^s), а также выделяется класс ЛВП, обладающих *K-свойством Радона-Никодима* $(RNP)_K$, которые характеризуются совпадением множества всех *сильно компактно абсолютно непрерывных отображений* $F : I = [a; b] \to E$ (AC_K^s) со множеством всех *неопределённых интегралов Бохнера отображений* $F : I = [a; b] \to E$ $(\mathcal{I}_B)$. Было показано также, что $(RNP)_K$ отличается от классического (RNP) и построен пример отделимого ЛВП, не являющегося пространством Фреше, которое не обладает $(RNP)_K$. В то же время остался открытым вопрос о характеризации пространств Фреше, имеющих свойство $(RNP)_K$.

В настоящей работе мы показываем, что любое пространство Фреше обладает $(RNP)_K$ (теорема 4). Более того, показана дифференцируемость почти всюду всякого отображения из AC_K^s в некотором пространстве $E_C = (spanC, \|\cdot\|_C)$ (теорема 8), где C является некоторым абсолютно выпуклым компактом в E, а $\|\cdot\|_C$ — функционалом Минковскго, порождённым C. Также получена теорема о конечных приращениях с компактной выпуклой оценкой для дифференцируемых отображений в пространства Фреше (теорема 9). Напомним, что пространством Фреше называется всякое полное ЛВП со счётной определяющей системой полунорм $\|\cdot\|_j$. Через $\mathcal{C}(E)$ будем обозначать множество всех абсолютно выпуклых компактов $C \subset E$.

1. Сильная K-абсолютная непрерывность и K-свойство Радона-Никодима для пространств Фреше

Введём понятие сильно компактно абсолютно непрерывного отображения $F : I \to E$. Через $AC^s(I, E)$ будем обозначать класс отображений $F : I \to E$, имеющих обычное свойство сильной абсолютной непрерывности (относительно каждой непрерывной полунормы на E).

Определение 1. Будем говорить, что отображение F *сильно компактно абсолютно непрерывно* на I, если для некоторого $C \in \mathcal{C}(E)$, $F : I \to F(a) + E_C$ и $F \in AC^s(I, E_C)$. Примем обозначение: $F \in AC^s_K(I, E)$.

Предлагаемое нами доказательство существенно опирается на следующий известный результат из [18].

Теорема 1. *Любое сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно некоторому замкнутому подпространству* $\widetilde{E}$ *пространства* $C[0;1]$ *всех вещественных непрерывных функций, заданных на отрезке* $[0;1]$ *с нормой*

$$\|\varphi\|_{C[0;1]} = \sup_{x\in[0;1]} |\varphi(x)|.$$

Будем рассуждать по схеме ([16], теорема 3.3), где рассмотрен случай $E = c_0$. Сначала введём понятие *эллипсоида* в $\widetilde{E} \subset C[0;1]$. Обозначим через

$$w_\varphi(\delta) := \sup_{|x_1-x_2|\leqslant\delta} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|,\ \delta > 0, \tag{1}$$

δ-модуль непрерывности функции $\varphi \in C[0;1]$. Фиксируем некоторую последовательность $\delta = (\delta_k)_1^\infty$, $\delta_k \to +0$.

Определение 2. Для произвольной числовой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^\infty$ назовём (невырожденным) *δ-эллипсоидом* в $\widetilde{E} \subset C[0;1]$ множество

$$C_\varepsilon = \left\{\varphi \in \widetilde{E} \;\middle|\; \max\left(|\varphi(0)|, \sup_k \frac{w_\varphi(\delta_k)}{\varepsilon_k}\right) \leqslant 1\right\}.$$

Отметим вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Если последовательность* ε *сходится к нулю, то множество* C_ε *является компактным в* $\widetilde{E}$.

Доказательство. Во-первых, $\forall\varphi \in C_\varepsilon$: $\|\varphi\| \leqslant |\varphi(0)| + \frac{w_\varphi(\delta_1)}{\delta_1\cdot\varepsilon_1}$, т.е. множество C_ε ограничено.

Во-вторых, т.к. $\varepsilon_k \to 0$, то $\forall\eta > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \geqslant k_0$ $(\eta > \varepsilon_k)$. Поэтому $\forall\eta > 0$ существует окрестность нуля $U(0) \subset \mathbb{R}$ такая, что

$$\sup_{\varphi\in C_\varepsilon}\ \sup_{t-s\in U(0)} |\varphi(s) - \varphi(t)| < \eta,$$

то есть множество C_ε *равностепенно непрерывно* и, следовательно, относительно компактно в $\widetilde{E}$ (см. [18], с. 289).

Покажем, что C_ε *замкнуто* в $\widetilde{E}$. Пусть $\varphi_m \in C_\varepsilon$, $\varphi_m \to \varphi$ при $m \to \infty$. В таком случае, если $x_1, x_2 \in [0;1]$ и $|x_1 - x_2| \leqslant \delta_k$, $k \in \mathbb{N}$, то $|\varphi_m(x_1) - \varphi_m(x_2)| \leqslant \varepsilon_k$. Отсюда в пределе, $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant \varepsilon_k$ при $|x_1 - x_2| \leqslant \delta_k$, то есть $\varphi \in C_\varepsilon$ и, следовательно, множество C_ε замкнуто.

Поскольку C_ε замкнуто и относительно компактно в $\widetilde{E}$, то C_ε компактно в $\widetilde{E}$. $\square$

Замечание 6. Ясно, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порождённая эллипсоидом в $E_{C_\varepsilon} = spanC_\varepsilon$, имеет вид $\|\varphi\|_{C_\varepsilon} := \max\left(|\varphi(0)|,\ \sup\limits_k \frac{w_\varphi(\delta_k)}{\varepsilon_k}\right)$.

Ранее в [16] было показано, что любое компактно абсолютно непрерывное отображение $F : I = [a;b] \to E$ представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера. Проверим теперь обратное утверждение для случая пространств Фреше. Для этого докажем вспомогательную теорему. Здесь и всюду далее условимся обозначать через S некоторое множество, Σ — σ-алгебру подмножеств S и μ — конечную меру на Σ. Напомним, что любое пространство Фреше E является проективным пределом банаховых пространств $\widehat{E}_j$, где E_j является пополнением пространства $E_j = E/ker\|\cdot\|_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$ по соответствующей фактор-норме. Отметим также, что интегрируемость отображений $f : S \to E$ по Бохнеру в E определяется как интегрируемость f в любом $\widehat{E}_j$.

Теорема 2. *Пусть E — пространство Фреше и $1 \leqslant p < \infty$. Если отображение $f : S \to E$ интегрируемо по Бохнеру, причём $\forall j \in \mathbb{N}$ $\int\limits_S \|f(t)\|_j^p \, d\mu(t) < \infty$, то существует такой компакт $C \subset E$, что $\int\limits_S \|f(t)\|_C^p \, d\mu(t) < \infty$.*

Доказательство. 1) Начнём доказательство со случая, когда пространство E банахово, то есть $\int\limits_S \|f(t)\|^p \, d\mu(t) < \infty$. Поскольку отображение f является интегрируемым по Бохнеру на S, то оно является μ-почти всюду сепарабельнозначным, то есть μ-почти все значения f на S содержатся в некотором замкнутом сепарабельном подпространстве $E_0 \subset E$ (см. [1], стр. 102). Пространство E_0, в свою очередь, изометрически изоморфно некоторому замкнутому подпространству $\widetilde{E} \subset C[0;1]$ [18]; пусть $\psi : E_0 \to \widetilde{E}$ — соответствующая изометрия.

Это означает, что множество $C \subset E_0$ компактно тогда и только тогда, когда компактно $\psi(C) \subset \widetilde{E}$. Более того, если C абсолютно выпукло, то

$$\|x\|_C = \|\psi(x)\|_{\psi(C)} \quad (\forall x \in spanC).$$

Поэтому, не уменьшая общности рассуждений, можно заменить E_0 на $\widetilde{E} \subset C[0;1]$ и рассуждать по аналогии с доказательством теоремы 3.3 из [16], привлекая понятие *эллипсоида* $C_\varepsilon \subset \widetilde{E}$.

2) Далее будем полагать, что $f : S \to \widetilde{E}$ и что отображение f является конечным на S (поскольку f μ-почти всюду конечно на S ввиду интегрируемости по Бохнеру). Покажем, что функционалы $w_\varphi(\delta_k) : \widetilde{E} \to \mathbb{R}$ из (1) непрерывны по φ. Действительно,

$$w_\varphi(\delta_k) = \sup_{|x_1-x_2|\leqslant\delta_k} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant 2 \sup_{x\in[0;1]} |\varphi(x)| = 2\|\varphi\|_E. \tag{2}$$

Поскольку f интегрируемо по Бохнеру на S, то существует последовательность простых отображений $f_m : S \to \widetilde{E}$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} \|f(t) - f_m(t)\|_{\widetilde{E}} = 0$ для μ-почти всех $t \in S$. Поэтому для μ-почти всех $t \in S$, в силу (2), верно

$$|w_{f(t)}(\delta_k) - w_{f_m}(\delta_k)| \leqslant w_{f(t)-f_m(t)}(\delta_k) \leqslant 2\|f(t) - f_m(t)\| \to 0 \quad \text{при } m \to \infty,$$

откуда ввиду измеримости простых функций $w_{f_m(\cdot)}(\delta_k)$ вытекает измеримость всех функций $w_{f(\cdot)}(\delta_k)$.

Итак, $w_{f(\cdot)}(\delta_k)$ измерима $\forall k \in \mathbb{N}$ и поэтому функция $\|f(\cdot)\|_{C_\varepsilon}$ (C_ε — произвольный невырожденный эллипсоид; см. определение 2) также является измеримой как супремум последовательности измеримых функций $w_{f(\cdot)}(\delta_k)$ и функции $\|f(\cdot)\|$, которая является измеримой в силу интегрируемости по Бохнеру f на S. По условию теоремы,

$$K_p := \int\limits_S \|f(t)\|^p_{\widetilde{E}} d\mu(t) = \int\limits_S \left(\sup_{s\in[0;1]} |f(t)(s)|\right)^p d\mu(t) < \infty$$

ввиду (B)-интегрируемости f в $\widetilde{E}$.

3) Подберём такую последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^\infty$, сходящуюся к нулю, чтобы

$$\int\limits_S \|f(t)\|^p_{C_\varepsilon} d\mu(t) < \infty.$$

Обозначим через $\varepsilon^k = (0, 0, ..., 0, \overbrace{1}^{k \text{ место}}, 1, 1, ...)$ и

$$I^k(f) = \int\limits_S \|f(t)\|^p_{C_{\varepsilon^k}} \, d\mu(t), \quad f : S \to \widetilde{E}.$$

Ясно, что $\forall t \in I$: $\|f(t)\|_{C_{\varepsilon^1}} \geqslant \|f(t)\|_{C_{\varepsilon^2}} \geqslant ... \geqslant 0$. Поэтому последовательность интегралов $\{I^k\}_{k=1}^\infty$ монотонно убывает при $k \to \infty$ и имеет верхнюю грань

$$I^1(f) = \int\limits_S \|f(t)\|^p_{C_{\varepsilon^1}} \, dt \leqslant 2^p \cdot K_p < \infty, \tag{3}$$

так как $\forall \varphi \in \widetilde{E}$

$$\|\varphi\|_{C_{\varepsilon^1}} = \max\left(|\varphi(0)|, \ \sup_k \ w_{\delta_k}(\varphi)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(|\varphi(0)|,\ \sup_k \sup_{|x_1-x_2|\leqslant\delta_k} |\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\right) \leqslant 2 \sup_{x\in[0;1]} |\varphi(x)| = 2\|\varphi\|,$$

т.е.

$$\|\varphi\|_{C_{\varepsilon^1}} \leqslant 2\|\varphi\| \qquad \forall \varphi \in \widetilde{E}. \tag{4}$$

Из (3) следует, что $\forall t \in I$ существует предел

$$\varphi_1(t) = \lim_{k\to\infty} \|f(t)\|_{C_{\varepsilon^k}} = 0, \tag{5}$$

поскольку $w_{f(t)}(\delta_k) \to 0$ при $k \to \infty$. По следствию из теоремы Б.Леви [17], ввиду (3) и (5) справедливо

$$\lim_{k\to\infty} I^k(f) = 0 \quad \forall f : I \to \widetilde{E}. \tag{6}$$

Воспользовавшись (6), построим последовательность $\{k_m\}_{m=1}^\infty$ так, чтобы $\forall m \in \mathbb{N}\ \exists k_m \in \mathbb{N}$:

$$I^k(f) < \frac{1}{2^m(m+1)^p} \quad \forall k \geqslant k_m.$$

Положим $\varepsilon = (\varepsilon_\ell)_{\ell=1}^\infty$:

$$\varepsilon = \left(1,\ \dots, 1;\ \overbrace{\frac{1}{2}}^{k_1 \text{ место}},\ \dots, \frac{1}{2};\ \overbrace{\frac{1}{3}}^{k_2 \text{ место}},\ \dots, \frac{1}{3}; \dots;\ \overbrace{\frac{1}{n+1}}^{k_n \text{ место}},\ \dots\ \frac{1}{n+1};\ \dots\right).$$

Последовательность ε сходится к нулю и поэтому множество C_ε является компактным в $\widetilde{E}$. Как показано ранее, функция $\|f(t)\|_{C_\varepsilon}$ измерима. Далее,

$$I(f) := \int_S \|f(t)\|_{C_\varepsilon}^p d\mu(t) = \int_S \max\left(|f(t)(0)|^p,\ \left(\sup_{\ell\in\mathbb{N}} \frac{w_{f(t)}(\delta_\ell)}{\varepsilon_\ell}\right)^p\right) d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int_S \|f(t)\|_{\widetilde{E}}^p d\mu(t) + \int_S \left(\sup_{\ell\in\mathbb{N}} \frac{w_{f(t)}(\delta_\ell)}{\varepsilon_\ell}\right)^p d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant K_p + \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{2^m} = K_p + 2 < \infty.$$

Для банаховых пространств теорема доказана.

4) Перейдём теперь к случаю, когда E — пространство Фреше. Поскольку теорема доказана для банаховых пространств, то $\forall j \in \mathbb{N}$ существует такой абсолютно выпуклый компакт $\widehat{C}_j \subset \widehat{E}_j$, что

$$\int_S \|f(t)\|_{\widehat{C}_j}^p d\mu(t) < \infty.$$

Заметим, что $\|\cdot\|_{\lambda C} = \frac{1}{\lambda}\|\cdot\|_{\lambda C}\ \forall \lambda > 0$ и подберём числа $n_j\ \forall j \in \mathbb{N}$ так, чтобы

$$\int_S \|f(t)\|_{n_j\widehat{C}_j}^p d\mu(t) < \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим множество

$$C = \left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x\|_{n_j \widehat{C}_j} \leqslant 1 \right\}.$$

Поскольку E является проективным пределом пространств $\widehat{E}_j$ и поэтому может быть плотно и непрерывно вложено в $\prod\limits_{j \in \mathbb{N}} \widehat{E}_j$, то C может быть инъективно (ввиду отделимости пространства E), непрерывно и плотно вложено в произведение $\prod\limits_{j \in \mathbb{N}} n_j \widehat{C}_j$, которое является компактным по теореме Тихонова. Следовательно, C является непустым абсолютно выпуклым компактом в E.

5) Функция $\|f(t)\|_C = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j}$ измерима как супремум последовательности измеримых функций $\|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j}$. Далее, воспользовавшись теоремой Б.Леви, имеем

$$\int\limits_S \|f(t)\|_C^p d\mu(t) = \int\limits_S \sup_{j \in \mathbb{N}} \|f(t)\|^p_{n_j \widehat{C}_j} d\mu(t) \leqslant \int\limits_S \sum_{j=1}^{\infty} \|f(t)\|^p_{n_j \widehat{C}_j} d\mu(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_S \|f(t)\|^p_{n_j \widehat{C}_j} d\mu(t) < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty.$$

$\square$

Далее, в [16] получен следующий критерий сильной компактной абсолютной непрерывности.

Теорема 3. *Пусть E — отделимое ЛВП. Тогда $F \in AC^s_K(I, E)$ если и только если*

(i) F представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера, т.е. $F(x) = F(a) + (B) \int\limits_a^x f(t) dt \quad (a \leqslant x \leqslant b)$;

(ii) $\int\limits_a^b \|f(t)\|_C dt < \infty$ для некоторого $C \in \mathcal{C}(E)$.

Из теорем 2 и 3 вытекает основной результат работы

Теорема 4. *Пусть E — пространство Фреше. Для любого интегрируемого по Бохнеру отображения $f : S \to E$ существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что*

$$F(x) = (B) \int\limits_a^x f(t) d\mu(t) \in AC^s_K(I, C), \text{ где } a \leqslant x \leqslant b,$$

то есть любое пространство Фреше обладает свойством $(RNP)_K$.

2. Дифференцируемость отображений из AC_K^s в подходящих пространствах E_C, $C \in \mathcal{C}(E)$

Возникает естественный вопрос: а не будет ли отображение f из теоремы 4 в общем случае интегрируемым по Бохнеру в E_C или, что то же самое, не обладает ли всякое E_C свойством Радона-Никодима? Это так в случае $E = \ell_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и $C = C_\varepsilon$ — компактного эллипсоида в E (см. [16]). Однако, если $E = C[0;1]$, то $E_{C_\varepsilon} \cong \ell_\infty$, а пространство ℓ_∞ не обладает свойством Радона-Никодима (см. [3]).

Однако, как оказалось, в данном направлении можно получить некоторый интересный результат.

Теорема 5. *Если E — пространство Фреше, то $\forall C' \in \mathcal{C}(E)$ $\exists C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что для любого $F \in AC(I, E_{C'})$ его производная $f = F'$ интегрируема по Бохнеру в пространстве E_C.*

Для доказательства теоремы нам потребуется ввести новое свойство для ЛВП и установить его справедливость для всех пространств Фреше. Далее символ $\hookrightarrow\hookrightarrow$ означает компактное вложение пространств, а $\overline{co}A$ — замкнутую выпуклую облочку множества A.

Определение 3. Будем говорить, что ЛВП E обладает *свойством компактной аппроксимации* ($E \in K_{ap}$), если $\forall C \in \mathcal{C}(E)$ $\exists C' \in \mathcal{C}(E)$ такое, что имеет место компактное вложение: $E_C \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C'}$.

Теорема 6. *Любое пространство Фреше E обладает свойством компактной аппроксимации. Точнее говоря, для всякого $C \in \mathcal{C}(E)$ существует непрерывное отображение $\varphi : E \to E$ такое, что:*

(i) для любого $C \in \mathcal{C}(E)$ вложение $E_C \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C_\varphi}$ компактно, где $C_\varphi = \overline{co}\ \varphi(C)$;

(ii) $\varphi(x) = x/\psi(x)$ (при $x \neq 0$), где $0 < \psi(x) < 1$, ψ непрерывна, $\psi(0) = 0$, $\psi(\infty) = 1$;

(iii)
$$\big(x \in C \Rightarrow (\|x\|_{C_\varphi} \leqslant \psi(x)\big)\,. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\{\|\cdot\|_j\}_{j=1}^\infty$ — определяющая система полунорм в E. Введём отображения ($\forall x \in E$):

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\sqrt{\|x\|_j}}{1+\sqrt{\|x\|_j}}, \quad \varphi(x) = \frac{x}{\psi(x)}\ (x \neq 0), \varphi(0) = 0. \quad \text{Имеем:}$$

1). Функция $\psi(x)$ непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций:

$$\left|\frac{1}{2^j} \cdot \frac{\sqrt{\|x\|_j}}{1+\sqrt{\|x\|_j}}\right| < \frac{1}{2^j}\ (\forall j \in \mathbb{N}), \quad 0 \leqslant \psi(x) < \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} = 1,\ \psi(0) = 0.$$

При этом $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 \geqslant \lim_{x\to\infty} \psi(x) \geqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \cdot \lim_{\|x\|_j\to\infty} \frac{\sqrt{\|x\|_j}}{1+\sqrt{\|x\|_j}} = 1 - \frac{1}{2^{N-1}}\right) \Rightarrow \Big(\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 1\Big).$$

2). Функция $\varphi(x) = \frac{x}{\psi(x)}$ непрерывна при $x \neq 0$. Проверим непрерывность при $x = 0$: $\forall j \in \mathbb{N}$ верно

$$\|\varphi(x)\|_j = \frac{\|x\|_j}{\psi(x)} \leqslant \frac{\|x\|_j}{\frac{1}{2^j}\cdot\frac{\sqrt{\|x\|_j}}{1+\sqrt{\|x\|_j}}} = 2^j \cdot \sqrt{\|x\|_j} \cdot \left(1 + \sqrt{\|x\|_j}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

3). Обозначим $C_\varphi = \overline{co}\,\varphi(C) \in \mathcal{C}(E)$ и докажем, что вложение $E_C \hookrightarrow E_{C_\varphi}$ является компактным.

a). Пусть $\widetilde{x} \in \partial^{co}C$ ($\partial^{co}C$ — выпуклая граница C). Тогда при некотором $\lambda \geqslant \frac{1}{\psi(\widetilde{x})}$ верно $\lambda \cdot x \in \partial^{co}C_\varphi$. Отсюда

$$\|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \leqslant \psi(\widetilde{x}). \tag{8}$$

Если же $x \in C$, $\widetilde{x} = \mu x$ (при некотором $\mu \geqslant 1$), то подставляя $\widetilde{x} = \mu x$ в (8), получаем: $\mu \cdot \|x\|_{C_\varphi} = \|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \leqslant \psi(\mu x)$, откуда

$$\|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \leqslant \frac{1}{\mu}\psi(\mu\widetilde{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{\|x\|_j}}{1+\sqrt{\mu}\sqrt{\|x\|_j}} \leqslant \psi(x), \tag{9}$$

т.е. (7) верно. Заметим также, что из (9) следует при $\mu \leqslant 1$: $\psi(x) \geqslant \psi(\mu x) \geqslant \mu\psi(x)$.

b). Пусть $\{x_k\}_1^\infty \subset C$. Тогда существует подпоследовательность x_{k_n} сходящаяся к некоторому $x_0 \in C$, т.е. $x_{k_n} - x_0 \xrightarrow{E} 0$. При этом $x_{k_n} - x_0 \in C - C = 2C$, т.е. $\frac{x_{k_n}-x_0}{2} \in C$ ($n \in \mathbb{N}$). Применяя (7) к $x = \frac{x_{k_n}-x_0}{2}$, получаем:

$$\left\|\frac{x_{k_n}-x_0}{2}\right\|_{C_\varphi} \leqslant \psi\left(\frac{x_{k_n}-x_0}{2}\right), \text{ откуда } \quad \|x_{k_n}-x_0\|_{C_\varphi} \leqslant 2\psi\left(\frac{x_{k_n}-x_0}{2}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$ ввиду непрерывности ψ. Таким образом, $x_{k_n} - x_0 \xrightarrow{E_{C_\varphi}} 0$, т.е. C предкомпактно в E_{C_φ} и, следовательно, вложение $E_C \hookrightarrow E_{C_\varphi}$ компактно. □

Теперь перейдём к доказательству теоремы 5.

Доказательство. По теореме 6, существует такой компакт $C = \varphi(C') \in \mathcal{C}(E)$, что $E_{C'} \hookrightarrow\hookrightarrow E_C$. Это позволяет нам рассмотреть банахово пространство E_C как основное; при этом $C' \in \mathcal{C}(E_C)$, $(E_C)_{C'} = E_{C'}$, $F \in AC(I, (E_C)_{C'}) = AC(I, E_{C'})$. Следовательно, по теореме 4, $f = F'$ интегрируемо по Бохнеру в E_C. □

Отметим пару следствий из теоремы 5.

Теорема 7. *Пусть E — пространство Фреше, и отображение $f : I \to E$ интегрируемо по Бохнеру. Тогда существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что f интегрируемо по Бохнеру в пространстве E_C.*

Теорема 8. *Пусть E — пространство Фреше, а отображение $F : I = [a;b] \to E$ сильно абсолютно непрерывно и почти всюду дифференцируемо на I. Тогда $F \in$ $\in AC^s_K(I,E)$ и существует абсолютно выпуклый компакт $C \subset E$ такой, что F почти всюду дифференцируемо на I в пространстве E_C.*

3. Обобщённая формула Лагранжа с компактной выпуклой оценкой для дифференцируемых отображений в пространства Фреше

Далее рассмотрим одно приложение полученных результатов. В работе [19] была получена для отображений $F : [a;b] \to E$ (E — отделимое ЛВП) обобщённая формула Лагранжа

$$F(b) - F(a) \in \left(\int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(x)dx \right) \cdot B, \tag{10}$$

в предположении непрерывности F на $[a;b]$, дифференцируемости на $[a;b]\setminus e$, нулевой слабой меры $F(e)$ и локальной оценки $F'(x) \in \varphi(x) \cdot B$, где $\varphi(x)$ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\setminus e$, а множество B замкнуто и выпукло в E. Оказывается, если E — пространство Фреше, то в случае, когда множество e имеет нулевую меру, а множество B абсолютно выпукло и ограничено, то оценку (10) можно усилить, заменив B на некоторое его компактное подмножество. Обозначим через mes меру Лебега на вещественной прямой. Справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть E — пространство Фреше, а отображение $F : [a;b] \to E$ непрерывно на $[a;b]$, дифференцируемо на $[a;b]\setminus e$, причём $mes(e) = 0$ и множество $F(e)$ имеет скалярную меру нуль. Если $F'(x) \in \varphi(x) \cdot B$ при $x \in [a;b]\setminus e$, где $\varphi(x)$ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\setminus e$, множество B замкнуто, абсолютно выпукло и ограничено в E, то существует такое компактное подмножество $C \in \mathcal{C}(E)$, $C \subset B$, что*

$$F(b) - F(a) \in \left(\int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(t)dt \right) \cdot C. \tag{11}$$

Доказательство. 1). Покажем сначала, что $F \in AC(I,E)$. Пусть $\{\|\cdot\|\}_{j=1}^{\infty}$ — определяющая система полунорм в E, $E = \varprojlim\limits_{j\to\infty} \widehat{E}_j$ — соответствующее каноническое представление E. Тогда из оценки (10) и ограниченности B в каждом $\widehat{E}_j$ вытекает, что для всякой неперекрывающейся системы отрезков $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha_k;\beta_k] \subset [a;b]$ верно при любом $j \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|F(\beta_k) - F(\alpha_k)\|_j \leqslant \|B\|_j \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[\alpha_k;\beta_k]\setminus e} \varphi(t)dt \right) \longrightarrow 0 \text{ при } \sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k - \alpha_k) \to 0,$$

то есть $F \in AC([a;b], \widehat{E}_j)$ $\forall j \in \mathbb{N}$, а значит, $F \in AC(I, E)$.

2). Так как F по условию почти всюду дифференцируемо на $[a;b]$, то, согласно известной теореме о представимости интеграла Бохнера ([1], теорема 3.8.6),

$$F(x) = F(a) + (B)\int_a^x F'(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Тогда по теореме 7 F' интегрируемо по Бохнеру в некотором пространстве E_C, $C \in \mathcal{C}(E)$. При этом можно считать, что $F'(x) \in \varphi(x) \cdot C \quad x \in [a;b]\backslash e$. (в противном случае можно просто заменить множество C на $\overline{abs.co}\ (B \bigcap C)$).

3). Теперь остаётся применить оценку (10) с заменой B на C. $\square$

Следствие 1. (**Теорема о среднем.**) *Пусть E — пространство Фреше, отображение $F : [a;b] \to E$ непрерывно на $[a;b]$, дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, причём $mes(e) = 0$, множество $F(e)$ имеет скалярную меру нуль, а множество $F'([a;b]\backslash e)$ ограничено. Тогда существует такое $C \in \mathcal{C}(E)$, что*

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \in \overline{co}_{E_{\widetilde{C}}}\ F'([a;b]\backslash e), \tag{12}$$

а также

$$\|F(b) - F(a)\|_C \leqslant \sup_{x \in [a;b]\backslash e} \|F'(x)\| \cdot (b - a). \tag{13}$$

Заметим, что в качестве C, в соответствии с доказательством теоремы 9 можно взять $C = \overline{abs.co}\ (F'([a;b]\backslash e)$. Заметим также, что оценка (12) точнее оценки из [19] за счёт того, что замыкание в пространстве E_C меньше, чем замыкание в E.

Список литературы

[1] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле , Р. Филлипс. — М: ИЛ, 1962. — 829 с.

[2] Diestel J. Vector Measures / J. Diestel, J.J. Uhl. — Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[3] Davis W.J. The Radon-Nikodym property / W.J. Davis // Seminaire d'analyse fonctionelle (Polytechnique) — 1973 – 1974. — exp no. 0. — P. 1 — 12.

[4] Chi G. A geometric characterization of Frechet spaces with the RNT / G. Chi // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 48. — P. 371 — 380.

[5] Dunford N. Linear operations on summable functions / N. Dunford, B.J. Pettis. — Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 47. — P. 323 — 392.

[6] Phillips R.S. On weakly compact subsets of a Banach space / R.S. Phillips // Amer. J. Math. — 1943. — Vol. 65, no. 3. — P. 108 — 136.

[7] Rieffel M.A. The Radon – Nikodym theorem for the Bochner integral / M.A. Rieffel // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 131. — P. 466 — 487.

[8] Moedomo S. Radon – Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals / S. Moedomo, J.J. Uhl // Pacific J. of Math. — 1971. — Vol. 38, no. 2. — P. 531 — 536.

[9] Gilliam D. Geometry and the Radon – Nikodym theorems in strict Mackey convergence spaces / D. Gilliam // Pacific J. of Math. — 1976. — Vol. 65, no. 2. — P. 353 — 364.
[10] Cheeger J. Characterization of the Radon-Nikodym property in terms of inverse limits / J. Cheeger, B. Kleiner // arXiv:0706.3389v3 [math.FA]. — 11 Jan 2008. — P. 1 — 12.
[11] Cheeger J. Differentiability of Lipschitz maps from metric measure spaces to Banach spaces with the Radon-Nikodym property / J. Cheeger, B. Kleiner // arXiv:0808.3249v1 [math.MG]. — 24 Aug 2008. — P. 1 — 17.
[12] Chakraborty N.D. Type II-Λ-Weak Radon-Nikodym Property in a Banach Space Associated with a Compact Metrizable Abelian Group / N.D. Chakraborty, Sk. Jaker Ali // Extracta Mathematicae. — 2008. — Vol. 23, no. 3. — P. 201 — 216.
[13] Bu Q. The Radon-Nikodym Property for Tensor Products of Banach Lattices II / Q. Bu, G. Buskes and Wei-Kai Lai // Positivity. — 2008. — Vol. 12. — P. 45 -— 54.
[14] Arvanitakis A.D. Some examples of continuous images of Radon-Nikodym compact spaces / A.D. Arvanitakis, A. Aviles // arXiv:0903.0653v1 [math.GN]. — 3 Mar 2009. — P. 1 — 11.
[15] Orlov I.V. Compact variation, compact subdifferential and indefinite Bochner integral / I.V. Orlov, F.S. Stonyakin // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15, no. 1. — P. 74 — 90.
[16] Orlov I.V. Strong compact properties of the mappings and K-property of Radon-Nikodym / I.V. Orlov, F.S. Stonyakin // Methods of Functional Analysis and Topology. — to appear.
[17] Березанский Ю.М. Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. — К: Выща шк., 1990. — 600 с.
[18] Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория. / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. — М.: ИЛ, 1962. — 896с.
[19] Орлов И.В. Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств / И.В. Орлов // Мат. физика, анализ, геометрия. — 2001. — Т. 8, № 4. — С. 419 — 439.

У данній роботі розглядаються нові характеристики відображень у локально опуклі простори: сильна компактна абсолютна неперервність та K-властивість Радона-Нікодима. Доведено, що довільний простір Фреше має K-властивість Радона-Нікодима. Встановлено диференційовність майже скрізь кожного сильно компактно абсолютно неперервного відображення у просторі, породженому абсолютно опуклою компактною множиною. Отримано узагальнену формулу Лагранжа з компактною опуклою оцінкою для відображень у простори Фреше.

In this paper the new properties of compact absolutely continuity and K-property of Radon-Nikodym for mappings into locally convex spaces are considered. It is proved that each Frechet space possesses K-property of Radon-Nikodym. The differentiability almost everywhere of each strong compact absolutely continuous mapping in the topology of some subspace, generated by absolutely convex compact set is asserted. The generalized Lagrange formula with compact estimation for differentiable mappings into Frechet spaces is obtained.

Содержание