Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 3–12.

Н. Д. Копачевский

АБСТРАКТНАЯ ФОРМУЛА ГРИНА ДЛЯ СМЕШАННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Резюме

В данной работе выводится абстрактная формула Грина, приспособленная для исследования в абстрактном виде различных классов смешанных краевых задач с условиями Дирихле, Неймана, Ньютона и др. на разных участках границы. В качестве основного примера приложения этой формулы приводится формула Грина для оператора Лапласа в области с липшицевой границей, разбитой на несколько частей.

1. Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств

Пусть Ω – произвольная односвязаная область в $\mathbb{R}^m$ с границей $\Gamma := \partial\Omega$. Как известно, для дважды непрерывно дифференцируемой функции $u = u(x),\ x \in \Omega$, непрерывно дифференцируемой функции $\eta = \eta(x)$ и достаточно гладкой границы $\Gamma = \partial\Omega$ справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\Omega} \eta(u - \Delta u)\, d\Omega = \int\limits_{\Omega} [\nabla\eta \cdot \nabla u + \eta u]\, d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma, \quad \Delta u := \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}. \tag{1.1}$$

Эту формулу можно переписать в виде

$$(\eta, Lu)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - (\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n})_{L_2(\Gamma)}, \tag{1.2}$$

$$Lu := u - \Delta u, \quad \gamma\eta := \eta\big|_{\Gamma}. \tag{1.3}$$

Здесь γ – оператор следа, $\partial/\partial n$ – производная по внешней нормали к Γ, а $L_2(\Omega), H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ – стандартные функциональные гильбертовы пространства с соответствующими скалярными произведениями и нормами.

Формула Грина (1.2) (первая формула Грина для оператора Лапласа) допускает обобщения в нескольких направлениях. Во-первых, вместо конкретных гильбертовых пространств $L_2(\Omega), H^1(\Omega)$ и $L_2(\Gamma)$ можно взять абстрактные гильбертовы пространства E, F и G соответственно, удовлетворяющие некоторым условиям связи. Во-вторых, в формуле вида (1.2) вместо скалярных произведений в первом и последнем члене можно взять их расширения по непрерывности, являющиеся функционалами (см. ниже). В-третьих, в (1.2) граница $\Gamma = \partial\Omega$ может быть не гладкой, а липшицевой.

Именно, имеют место следующие факт (см. [1], а также [2, 3]).

Теорема 1. *Пусть для тройки абстрактных гильбертовых пространств* $\{E, (\cdot,\cdot)_E\}, \{F, (\cdot,\cdot)_F\}$ *и* $\{G, (\cdot,\cdot)_G\}$ *с введёнными на них скалярными произведениями, а также для абстрактного оператора следа* γ *выполнены следующие условия:*

(1) *Пространство* F *плотно вложено в пространство* E *(обозначение* $F \subset\to E$*), т.е.* F *плотно в* E *и существует константа* $a > 0$ *такая, что*

$$\|u\|_E \le a\|u\|_F, \quad \forall u \in F. \tag{1.4}$$

(2) *Оператор следа* γ *ограниченно действует из* F *на пространство* $G_+ \subset\to G$ *и*

$$\|\gamma u\|_G \le b\|u\|_F, \quad \forall u \in F, \ b > 0. \tag{1.5}$$

Тогда существуют операторы $L : \ F \to F^*$ *и* $\partial : \ F \to (G_+)^*$*, однозначно определяемые по* E, F, G *и* γ*, такие, что имеет место абстрактная формула Грина*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.6}$$

(Здесь косыми скобками обозначены значения функционалов $Lu \in F^*$ *и* $\partial u \in (G_+)^*$ *на элементах* $\eta \in F$ *и* $\gamma\eta \in G_+$ *соответственно.)*

Рассмотрим основной пример:

$$E = L_2(\Omega), \ F = H^1(\Omega), \ G = L_2(\Gamma), \ \Gamma = \partial\Omega, \ \gamma\eta := \eta\big|_\Gamma. \tag{1.7}$$

Здесь важную роль играет следующее утверждение.

Теорема 2. *(E. Gagliardo, см.* [4]*) Пусть область* $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ *имеет липшицеву границу* $\Gamma = \partial\Omega$*. Введём на* Γ *гильбертово пространство* $H^{1/2}(\Gamma)$ *с квадратом нормы*

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int\limits_\Gamma |\varphi|^2 \, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_x} d\Gamma_x \int\limits_{\Gamma_y} d\Gamma_y \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{m+1}}. \tag{1.8}$$

Тогда оператор γ*, определяемый по закону*

$$\gamma u := u\big|_\Gamma, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ *в* $H^{1/2}(\Gamma)$*, т.е. имеет место оценка*

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.9}$$

Обратно, для любой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует функция $u \in H^1(\Omega)$ (определяемая не единственным образом по φ) такая, что

$$\gamma u = \varphi, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \le c_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

При этом пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$.

Замечание 1. Напомним, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ имеет липшицеву границу $\Gamma = \partial\Omega$, если для каждой точки границы существует такая её окрестность и в ней такая ортогональная система координат $0y_1 \dots y_m$, что уравнение части границы $\partial\Omega$, попадающей в эту окрестность, имеет вид $y_m = f(y_1, \dots, y_{m-1})$, где f — функция, удовлетворяющая условию Липшица:

$$|f(y_1, \dots, y_{m-1}) - f(z_1, \dots, z_{m-1})| \le C \left(\sum_{k=1}^{m-1} |y_k - z_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Из теорем 1 и 2 вытекает следующий результат.

Теорема 3. *В области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место следующая формула Грина*

$$\langle \eta, Lu \rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n} \rangle_{L_2(\Gamma)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.10}$$

$$Lu := u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} \in (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma). \tag{1.11}$$

Отметим, что ранее абстрактная формула Грина (с билинейной коэрцитивной формой вместо $(\eta, u)_F$, а также при дополнительном условии плотности $\ker \gamma$ в E и других условиях) была выведена в работе [5], см. также [6]. Она использовалась и в работе [7]. В монографии [3] она была выведена в форме (1.6), однако вместо функционалов $\langle \eta, Lu \rangle_E$ и $\langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G$ там были скалярные произведения $(\eta, Lu)_E$ и $(\gamma\eta, \partial u)_G$, причем $u \in \mathcal{D}(L) \subset F,\ Lu \in E,\ \partial u \in G$.

2. Вывод абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач

Рассмотрим в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ смешанную краевую задачу для уравнения Пуассона:

$$u - \Delta u = f \ (\text{в } \Omega), \quad u = 0 \ (\text{на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \ (\text{на } \Gamma_2), \tag{2.1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial n} + \delta u = 0 \ (\text{на } \Gamma_3), \quad \delta = \delta(x) \ge 0, \quad x \in \Gamma_3,$$

где Γ_1, Γ_2 и Γ_3 – части границы $\Gamma := \partial\Omega$, имеющие положительные меры и в объединении дающие всю Γ.

В задаче (2.1) взяты для примера три классических краевых условия на разных частях границы: условие Дирихле на Γ_1, условие Неймана на Γ_2 и условие Ньютона на Γ_3.

Цель этой работы – предъявить условия при которых вместо абстрактной формулы Грина (1.6) имеет место аналогичная формула, приспобленная к решению абстрактных задач смешанного типа. Применительно к задаче (2.1) в гладком случае, как известно, следует воспользоваться формулой (см. (1.1) и (1.2))

$$(\eta, Lu)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{3} \left(\gamma_k \eta, \frac{\partial u}{\partial n_k} \right)_{L_2(\Gamma_k)}, \tag{2.2}$$

$$\gamma_k \eta := \eta\big|_{\Gamma_k}, \quad \frac{\partial u}{\partial n_k} := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k}, \quad k = 1, 2, 3. \tag{2.3}$$

Приведем вывод этой формулы в абстрактной форме, опираясь на формулу (1.6) и на построения из ([6], с. 191-192).

Будем считать, что выполнены условия теоремы 1. Пусть p_1 — непрерывный проектор в G_+, а $p_2 := I - p_1$. Тогда операторы p_k, $k = 1, 2$, непрерывно действуют из G_+ в $(\tilde{G}_+)_k := p_k G_+$. Введём ещё операторы

$$\tilde{\gamma}_k := p_k \gamma, \quad \tilde{\partial}_k := p_k^* \partial, \quad p_k^* := (\tilde{G}_+)_k^* \to (G_+)_k^*, \quad k = 1, 2. \tag{2.4}$$

Лемма 1. *В сформулированных выше предположениях имеет место формула Грина*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{2} \langle \tilde{\gamma}_k \eta, \tilde{\partial}_k u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{2.5}$$

Доказательство леммы просто. Так как по построению

$$\gamma = (p_1 + p_2)\gamma = \tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2,$$

то

$$\langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G = \langle (\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2)\eta, \partial u \rangle_G = \langle \tilde{\gamma}_1 \eta, \partial u \rangle_G + \langle \tilde{\gamma}_2 \eta, \partial u \rangle_G =$$
$$= \sum_{k=1}^{2} \langle p_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k^2 \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k \gamma \eta, p_k^* \partial u \rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle \tilde{\gamma}_k \eta, \tilde{\partial}_k u \rangle_G. \tag{2.6}$$

Замечание 2. Из доказательства леммы 1 видно, что если взаимно дополнительных проекторов несколько, например, их количество равно $q \geq 2$, т.е.

$$p_k = p_k^2 : \ G_+ \to (\tilde{G}_+)_k := p_k G_+, \ k = \overline{1, q}, \quad \sum_{k=1}^{q} p_k = I, \tag{2.7}$$

то справа в (2.5) суммирование по k производится от $k = 1$ до $k = q$:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \tilde{\gamma}_k \eta, \tilde{\partial}_k u \rangle_G, \quad \forall \eta, u \in F. \tag{2.8}$$

Формула Грина (2.8), однако, не совсем удобна для приложений. Действительно, в ней справа фигурирует функционалы на основе пространства G (в примерах – $L_2(\Gamma)$), а не функционалы на основе пространств G_k, $G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k$. Поэтому в дальнейшем преобразуем формулу (2.8) к более удобному виду, где составляющие слагаемые в (2.8) выглядят более естественным образом. Для этого потребуется ввести абстрактные операторы следа на часть границы и соответствующие операторы производных по внешней нормали.

Будем далее считать, что оператор проектировани p_k имеет структуру

$$p_k = \omega_k \rho_k, \quad k = \overline{1,q}. \tag{2.9}$$

Здесь

$$\rho_k : \; G_+ \to (G_+)_k, \quad k = \overline{1,q}, \tag{2.10}$$

— оператор сужения на пространство $(G_+)_k = \rho_k G_+$ (абстрактный оператор сужения на часть границы области), причём

$$G_+ = \sum_{k=1}^{q} (\dot{+}) (G_+)_k, \quad G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k, \quad (G_+)_k \subset\to G_k, \tag{2.11}$$

а $\omega_k : (G_+)_k \to (\tilde{G}_+)_k$ – оператор “продолжения нулём” из $(G_+)_k$ на подпространство $(\tilde{G}_+)_k \subset G_+$ (в примерах – из части границы области на всю границу), т.е.

$$\omega_k (G_+)_k = \omega_k \rho_k G_+ = p_k G_+ = (\tilde{G}_+)_k. \tag{2.12}$$

При этом в (2.9) предполагается, что ω_k — правый обратный для ρ_k, т.е.

$$\rho_k \omega_k = I_k \quad (\text{в } (G_+)_k), \; k = \overline{1,q}, \tag{2.13}$$

кроме того, считаем, что операторы ρ_k и ω_k непрерывны.

Теорема 4. *При выполненеии сформулированных выше условий формула Грина* (2.8) *имеет следующий вид*

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \forall \eta, u \in F, \tag{2.14}$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta, \quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u, \tag{2.15}$$

где γ_k — абстрактный оператор следа на часть границы области, а ∂_k — абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на части границы области.

Доказательство. Преобразуя с учётом свойств (2.9) – (2.13) выражение, стоящее под знаком суммы в (2.8). Имеем, учитывая вывод (2.6):

$$\langle \tilde{\gamma}_k \eta, \tilde{\partial}_k u \rangle_G = \langle p_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle \omega_k \rho_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G.$$

Так как ω_k непрерывен, то здесь правое выражение является линейным ограниченным функционалом относительно $\rho_k\gamma\eta = \gamma_k\eta \in (G_+)_k$, так как

$$|\langle \omega_k\rho_k\gamma\eta, \partial u\rangle_G| \leq \|\omega_k\| \cdot \|\rho_k\gamma\eta\|_{(G_+)_k} \cdot \|\partial u\|_{F^*}.$$

Поэтому этот функционал в "скалярном произведении" G_k имеет вид

$$\langle \omega_k\rho_k\gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle \rho_k\gamma\eta, \omega_k^*\partial u\rangle_{G_k} =: \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}.$$

Такое обозначение для ∂_k оправдано тем, что в гладком классическом случае (см. (2.2), (2.3)) на этом месте стоит производная по внешней нормали на части границы. □

Опираясь на установленную формулу Грина (2.14), (2.15), можно рассматривать абстрактные смешанные краевые задачи вида

$$Lu = f, \quad \gamma_1 u = 0, \quad \partial_2 u = 0, \partial_3 u + \delta\gamma_3 u = 0, \tag{2.16}$$

а также и многие другие. Эти задачи обобщают задачи вида (2.1) и находят применение в приложениях, в частности, в гидродинамике, теории упругости и др.

3. Классический пример

Докажем теперь утверждения леммы 1 и теоремы 4 применительно к формуле Грина (1.10), т.е. в частном случае (1.7).

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$. Пусть Γ_1 — открытая измеримая часть границы Γ, $\Gamma_2 := \Gamma \setminus \Gamma_1$. Введём в рассмотрение оператор ρ_1, являющийся оператором сужения на Γ_1, т.е.

$$\rho_1\varphi := \varphi\big|_{\Gamma_1}, \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{3.1}$$

Этот оператор сопоставляет каждой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ её часть φ_1, заданную на $\Gamma_1 \subset \Gamma$.

Лемма 2. *Оператор сужения*

$$\rho_1 : \ H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_1), \tag{3.2}$$

ограничен и его норма

$$\|\rho_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq 1. \tag{3.3}$$

Доказательство. Утверждения (3.2), (3.3) следуют непосредственно из определения (1.8) нормы в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$, так как

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq \|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \Gamma_1 \subset \Gamma.$$

□

Рассмотрим теперь множество $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ тех элементов из $H^1(\Omega)$, которое принадлежит ядру оператора $\gamma_1 := \rho_1\gamma$, т.е. множество

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) := \left\{u \in H^1(\Omega) :\ u\big|_{\Gamma_1} = 0\right\} = \ker(\rho_1\gamma). \tag{3.4}$$

Так как по теореме 2 оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$, а по лемме 2 оператор ρ_1 ограниченно действует из $H^{1/2}(\Gamma)$ в $H^{1/2}(\Gamma_1)$, то оператор

$$\gamma_1 = \rho_1\gamma :\ H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_1)$$

ограничен. Поэтому $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ — подпространство пространства $H^1(\Omega)$, и так как

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \supset H^1_0(\Omega),$$

то его размерность $\dim H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = \infty$ и $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$.

Введём теперь оператор $\omega_1 :\ H^{1/2}(\Gamma_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$, действующий по закону

$$\omega_1\varphi_1 := \begin{cases} \varphi_1, & x \in \Gamma_1, \\ 0, & x \in \Gamma \setminus \Gamma_1 = \Gamma_2, \end{cases} \tag{3.5}$$

и называемый оператором продолжения нулём на Γ_2. Нетрудно видеть, исходя из определений (3.1) и (3.5) операторов ρ_1 и ω_1, что оператор

$$p_1 := \omega_1\rho_1 :\ H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma) \tag{3.6}$$

обладает свойством $p_1^2 = p_1$ так как $\rho_1\omega_1$ является единичным оператором в $H^{1/2}(\Gamma_1)$.

Таким образом, оператор p_1 является ограниченным проектором в $H^{1/2}(\Gamma)$, если оператор продолжения $\omega_1 : H^{1/2}(\Gamma_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$ ограничен.

Докажем последнее утверждение. Оно основано на общей схеме рассмотрения неоднородных краевых задач, изложенной в [3], с. 40-46.

Введём в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ оператор следа

$$\hat{\gamma}_2 := \rho_2\left(\gamma\big|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)}\right) :\ H^1_{\Gamma_1}(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma_2),$$

действующий по закону

$$\hat{\gamma}_2 u = \rho_2\left(\gamma\big|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)}\right)u = u\big|_{\Gamma_2}, \quad \forall u \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega).$$

Как очевидно из предыдущих построений,

$$\ker\hat{\gamma}_2 = \ker\rho_2\left(\gamma\big|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)}\right) = H^1_0(\Omega) := \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = 0\}.$$

Ортогональным дополнением к $H^1_0(\Omega)$ в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ будет множество функций

$$H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega) := \left\{u \in H^1(\Omega) :\ u - \Delta u = 0,\ u\big|_{\Gamma_1} = 0\right\}.$$

Этот факт проверяется на гладких функциях и хорошо известен. Таким образом, имеет место ортогональное разложение

$$H^1_{\Gamma_1}(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega). \tag{3.7}$$

В дальнейшем для краткости множество $H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$ будем называть подпространством гармонических функций.

Очевидно, областью значений оператора $\hat{\gamma}_2$ является пространство $H^{1/2}(\Gamma_2)$, плотно и компактно вложенное в $L_2(\Gamma_2)$. По построению оператор $\hat{\gamma}_2$ осуществляет взаимно однозначное отображение $H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma_2)$. Это позволяет ввести на $H^{1/2}(\Gamma_2)$ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{H^{1/2}(\Gamma_2)} = (u_1, u_2)_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)}, \quad u_k \in H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega), \quad \hat{\gamma}_2 u_k = \varphi_k, \ k = 1, 2. \tag{3.8}$$

Соответствующая норма эквивалентна норме (1.8) для $\Gamma = \Gamma_2$.

Можно проверить, опираясь на разложение (3.7), что

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma_2)} = \min_{\hat{\gamma}_2 u = \varphi} \|u\|_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)}.$$

Кроме того, так как $H^{1/2}(\Gamma_2)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma_2)$, то пространства $\big(H^{1/2}(\Gamma_2); L_2(\Gamma_2)\big)$ образуют гильбертову пару пространств (см. [3], с. 32). По этой паре можно построить шкалу гильбертовых пространств $H^\alpha(\Gamma_2)$, $-1 \le \alpha \le 1$ таким образом, что при $\alpha = 1/2$ имеем пространство $H^{1/2}(\Gamma_2)$, при $\alpha = -1/2$ — пространство $H^{-1/2}(\Gamma_2) = (H^{1/2}(\Gamma_2))^*$, а при $\alpha = 0$ — пространство $L_2(\Gamma_2)$.

Обозначим через V_2 оператор, сопряженный к оператору $\hat{\gamma}_2$ в смысле "скалярного произведения" в $L_2(\Gamma_2)$, т.е.

$$\langle \hat{\gamma}_2 \eta, \psi_2 \rangle_{L_2(\Gamma_2)} = (\eta, V_2 \psi_2)_{H^1_{\Gamma_1}(\Omega)}, \quad \forall \eta \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega), \ \forall \psi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_2).$$

Поскольку оператор $\hat{\gamma}_2$ изометрически отображает пространство $H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$ на пространство $H^{1/2}(\Gamma_2)$ (см. (3.8)), то оператор V_2 изометрически отображает пространство $H^{-1/2}(\Gamma_2) := (H^{1/2}(\Gamma_2))^*$ на пространство $H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$. Из свойств операторов $\hat{\gamma}_2$ и V_2 следует, что оператор $C_2 := \hat{\gamma}_2 V_2$ изометрически отображает пространство $H^{-1/2}(\Gamma_2)$ на пространство $H^{1/2}(\Gamma_2)$. Его сужение на $L_2(\Gamma_2)$, как легко проверить, является самосопряжённым положительным компактным оператором, действующим в $L_2(\Gamma_2)$. Из этих свойств, в свою очередь, вытекает, что оператор $C_2^{-1} : \ \mathcal{D}(C_2^{-1}) \subset L_2(\Gamma_2) \to L_2(\Gamma_2), \ \mathcal{D}(C_2^{-1}) = \mathcal{R}(C_2|_{L_2(\Gamma_2)})$ является порождающим оператором гильбертовой пары $\big(H^{1/2}(\Gamma_2); L_2(\Gamma_2)\big)$.

Замечание 3. Оператор V_2 является оператором смешанной краевой задачи

$$u - \Delta u = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad u\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_2} = \psi_2 \in H^{-1/2}(\Gamma_2).$$

Её слабое решение $u = V_2 \psi_2 \in H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$. $\square$

Поскольку оператор $\hat{\gamma}_2$ осуществляет изометрическое отображение пространства $H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$ на $H^{1/2}(\Gamma_2)$, то существует единственное в $H^1_{\Gamma_1}(\Omega)$ слабое решение задачи Дирихле:

$$u - \Delta u = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad u\big|_{\Gamma_1} = 0, \quad u\big|_{\Gamma_2} = \varphi_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2). \tag{3.9}$$

Обратно, любая функция $u \in H^1_{h,\Gamma_1}(\Omega)$ является слабым решением задачи (3.9) с $u\big|_{\Gamma_2} = \varphi_2 \in H^{1/2}(\Gamma_2)$.

Следствием доказанных утверждений является

Лемма 3. *Для области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ оператор продолжения ω_1 из* (3.5) *является непрерывным оператором, действующим из $H^{1/2}(\Gamma_1)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$.*

Доказательство. В самом деле, меняя местами в предыдущих рассуждениях Γ_1 и Γ_2, приходим к выводу, что задача Дирихле

$$u - \Delta u = 0 \ (\text{в } \Omega), \quad u\big|_{\Gamma_2} = 0, \quad u\big|_{\Gamma_1} = \varphi_1 \in H^{1/2}(\Gamma_1),$$

имеет единственное решение $u \in H^1_{\Gamma_2}(\Omega) \subset H^1(\Omega)$.

По теореме 2 след элемента u на $\Gamma = \partial\Omega$ принадлежит пространству $H^{1/2}(\Gamma)$. При этом, согласно (1.9) имеем

$$\|\omega_1\varphi_1\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \le c_1\|u\|_{H^1_{\Gamma_2}(\Omega)} = c_1\|\varphi_1\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)},$$

т.е. $\omega_1 : \ H^{1/2}(\Gamma_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — непрерывный оператор. □

Следствие 1. *Операторы*

$$p_k := \omega_k\rho_k : \ H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2,$$

(см. (3.6)*) являются ограниченными проекторами в $H^{1/2}(\Gamma)$.*

Установленные факты показывают, что для тройки пространств $E = L_2(\Omega),\ F = H^1(\Omega),\ G = L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega$, рассматриваемых в области Ω с липшицевой границей, справедливы утверждения общей леммы 1 и замечания 2 к ней, а также леммы 4.

Поэтому имеет место следующее утверждение.

Теорема 5. *Для тройки пространств $L_2(\Omega), H^1(\Omega), L_2(\Gamma),\ \Gamma = \partial\Omega$ и оператора следа $\gamma : \ H^1(\Omega) \to L_2(\Gamma),\ \gamma\eta := \eta\big|_\Gamma$, в области $\Omega \in \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ справедлива следующая формула Грина:*

$$\langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \sum_{k=1}^{q}\langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{3.10}$$

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{q}\Gamma_k, \quad mes(\Gamma_k \cap \Gamma_l) = 0 \ (k \ne l), \quad \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \tag{3.11}$$

$$\gamma_k\eta := \eta\big|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ k = \overline{1, q}. \tag{3.12}$$

Использование формулы (3.10) позволяет доказать теоремы о разрешимости как абстрактных задач вида (2.16) с неоднородными краевыми условиями, так и неоднородных задач вида (2.1) в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Формулировки соответствующих результатов здесь не приводятся.

Список литературы

[1] Копачевский Н. Д. *Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса.* – //Таврический вестник информатики и математики (ТВИМ), №2, 2004. – с. 52-80.

[2] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г. *Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи.* – //Украинский матем. вестник, Т. 1, № 1, 2004. – с. 69-97.

[3] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике. Эволюционные и спектральные задачи.* – Москва, Наука, 1989. – 416 с.

[4] Gagliardo E. *Caratterizzazioni delle trace sulla frontiera relative ad alaine classi di funzioni in n variabili* // Rendiconti del Seminare Matematico della Universita di Padova. – 1957. – Vol.27.

[5] Обэн Ж.-П. (Aubin J.P.) *Abstarct boundary-value operators and their adjoint.* – Rend. Seminario. Mat. Padova. 43, 1970. – p 1–33.

[6] Обэн Ж.-П. *Приближённое решение эллиптических краевых задач.* – М.: Мир, 1977. – 384 с.

[7] Showalter R. *Hilbert space methods for partial differential equations* //Electronic journal of differential equations. – 1994. – 214 p.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 13–20.

Т. Я. Азизов, В. А. Хацкевич

О ПАРАМЕТРИЧЕСКОМ ОПИСАНИИ ДРОБНО-ЛИНЕЙНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОПЕРАТОРНОГО ШАРА РАДИУСА 1

Введение и постановка задач

Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\cdot)_1$ и $(\cdot,\cdot)_2$, соответственно. Введем гильбертово пространство $\mathcal{H}$ со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \qquad (x,y) = (x_1,y_1)_1 + (x_2,y_2)_2, \tag{0.1}$$

где $x = x_1 + x_2$, $y = y_1 + y_2$, $x_j, y_j \in \mathcal{H}_j$, $j = 1, 2$.

Для гильбертовых пространств $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ через $L(\mathcal{F},\mathcal{G})$ обозначим множество линейных непрерывных операторов, определенных на $\mathcal{F}$ и действующих в $\mathcal{G}$. Если пространства $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ совпадают: $\mathcal{F} = \mathcal{G} =: \mathcal{H}$, то множество линейных непрерывных операторов, действующих в $\mathcal{H}$ будем обозначать $L(\mathcal{H})$.

Четверка операторов $A_{ij} \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$, $i, j = 1, 2$, определяет матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{0.2}$$

оператор $A \in L(\mathcal{H})$, и обратно, по оператору $A \in L(\mathcal{H})$ однозначно определяются компоненты $A_{ij} \in L(\mathcal{H}_i, \mathcal{H}_j)$, $i, j = 1, 2$, матрицы (0.2).

Обозначим через $\mathfrak{K}$ замкнутый шар в $L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ радиуса 1:

$$\mathfrak{K} = \{K \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \mid \|K\| \le 1\},$$

и через $\mathfrak{K}^\circ$ его внутренность:

$$\mathfrak{K}^\circ = \{K \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \mid \|K\| < 1\}.$$

Пусть оператор $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ задан матрицей (0.2). Формулой

$$F_A(X) = (A_{21} + A_{22}X)(A_{11} + A_{12}X)^{-1} \tag{0.3}$$

зададим *дробно-линейное отображение* (д.л.о.) $F_A : L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) \to L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Область определения этого отображения $\operatorname{dom} F_A$ совпадает со множеством операторов $X \in L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, для которых $(A_{11} + A_{12}X)^{-1} \in L(\mathcal{H}_1)$, а потому может оказаться и пустой. Заметим, что $\operatorname{dom} F_A \neq \emptyset$, если $A_{11}^{-1} \in L(\mathcal{H}_1)$ (в этом случае $X = 0 \in \operatorname{dom} F_A$). Нас будет интересовать случай $\operatorname{dom} F_A \supset \mathfrak{K}$, а это выполнено тогда и только тогда, когда

$$\|A_{11}^{-1}A_{12}\| < 1. \tag{0.4}$$

При выполнении условия (0.4) $\operatorname{dom} F_A$ содержит открытый шар $\mathfrak{K}_R^\circ \subset L(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ с центром в нуле и радиуса $R = (\|A_{11}^{-1}A_{12}\|)^{-1}$.

Если

$$\mathfrak{K} \subset \operatorname{dom} F_A, \qquad F_A(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K}, \tag{0.5}$$

будем называть F_A *дробно-линейным преобразованием* (д.л.п.) шара $\mathfrak{K}$. При выполнении условий (0.5) возможны варианты:

[1]Исследование Т.Я. Азизова поддержано грантом РФФИ 05-01-00203-а

(a) $F_A(K) = \text{const}$ для всех $K \in \mathfrak{K}$,

(b) $F_A(K) \neq \text{const}$

Прямо проверяется, что случай (a) имеет место тогда и только тогда, когда оператор $A_{11}^{-1} \in L(\mathcal{H}_1)$, $\Gamma := A_{21}A_{11}^{-1}$ — сжатие, $A_{11}^{-1}A_{12}$ — равномерное сжатие и $A_{22} = \Gamma A_{12}$.

Пусть выполнено (b). В этом случае, как показано в [22], д.л.о. F_A — д.л.п. шара $\mathfrak{K}$ тогда и только тогда, когда A — бистрогий плюс-оператор в пространстве Крейна $\mathcal{H}$ относительно индефинитной J-метрики $[x, y] = (Jx, y)$, где J задается относительно (0.1) матрицей

$$J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Известно, что для бистрогого плюс-оператора A наряду с (0.5) имеет место включение:

$$F_A(\mathfrak{K}^\circ) \subset \mathfrak{K}^\circ. \tag{0.6}$$

Таким образом, описание д.л.п. шара $\mathfrak{K}$, образ которого состоит из одного оператора, не представляет труда, и потому далее будем полагать, что выполнено условие (b) или, чуть более общо, оператор A является бистрогим плюс-оператором.

В последнее время опубликована серия работ в различных областях математики, в которой используются д.л.о. и д.л.п. F_A как общего вида (0.3), так и их частные случаи, когда $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$ или $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}$, $\mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^n$, и часто даже в простейшем случае $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}$, где через $\mathbb{C}$ обозначается множество комплексных чисел. Так, например, д.л.о. и д.л.п. применялись в [17], [19], [20], [9] к изучению дихотомии, согласованной с сигнатурой пространства Крейна, дифференциальных и разностных уравнений специальных классов; в [24], [10] — к изучению генераторов однопараметрических полугрупп, в [6], [7], [11], [12], [13], [14], [16] — к проблеме Кёнигса и связанным с ней уравнениям Абеля–Шредера, в [2], [6], [23], [8], [5] — к изучению операторов композиции на функциональных пространствах, и т.д.

Остановимся подробнее на некоторых приложениях. Напомним, что проблема Кёнигса заключается во вложении заданной дискретной полугруппы G итераций д.л.п. F_A в непрерывную однопараметрическую полугруппу д.л.п. $F_{A(t)}$, $t > 0$, причем так, чтобы для $F_{A(t)}$, $t > 0$, были выполнены условия (0.5) и (0.6). Применяя различные методы, в том числе, уравнения Абеля–Шредера, удается построить непрерывную однопараметрическую полугруппу д.л.о. $F_{A(t)}$, содержащую G. При этом ключевым является установление условий (0.5) и (0.6), т.е. условий, при которых д.л.о. $F_{A(t)}$ является д.л.п..

В теории операторов композиции рассматриваются операторы C_{F_A} вида

$$C_{F_A} = f \circ F_A, \tag{0.7}$$

где F_A — д.л.п., а функции f голоморфны на $\mathfrak{K}^\circ$ и принадлежат пространствам Харди, Бергмана, Дирихле и др. Изучаются условия непрерывности, норма, спектр, сопряженный оператор $C^*_{F_A}$. При изучении $C^*_{F_A}$ часто удается показать, что

$$C^*_{F_A} = C_{F_B}, \tag{0.8}$$

где F_B — некоторое д.л.о. шара $\mathfrak{K}^\circ$. И снова ключевым является установление включения (0.6). Таким образом, насущной является задача отыскания условий в терминах элементов A_{ij}, $i, j = 1, 2$, матрицы A вида (0.2), при которых д.л.о. F_A — д.л.п. шара $\mathfrak{K}$. Впервые это было сделано в [3], где дано параметрическое описание всех J-бинесжимающих операторов и сразу для случая бесконечномерных $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.

1. Описание д.л.п.

Доказан следующий результат:

Теорема 1. *Пусть д.л.о.* F_A *порождено оператором* A*, в матричном представлении* (0.2) *которого оператор* A_{11} *непрерывно обратим на всем* $\mathcal{H}_1$ *и выполнено условие* (0.4)*:*

$$\|A_{11}^{-1} A_{12}\| < 1. \tag{0.4}$$

Тогда

(*i*) *из неравенства:*

$$\begin{aligned} &\|(A_{21}A_{11}^* - A_{22}A_{12}^*)(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{-1/2}\| \\ &\quad + \|(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})(I - A_{12}^* {A_{11}^*}^{-1} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1/2}\| \\ &\quad \le \|(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{-1/2}\|^{-1} \end{aligned} \tag{1.1}$$

следует, что F_A является д.л.п. шара $\mathfrak{K}$, т.е. имеет место включение (0.5)*:*

$$F_A(\mathfrak{K}) \subset \mathfrak{K};$$

(*ii*) *из условия* (0.5)*, следует неравенство:*

$$\begin{aligned} &\|(A_{21}A_{11}^* - A_{22}A_{12}^*)(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{-1/2}\|^2 \\ &\qquad + \|(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})(I - A_{12}^*{A_{11}^*}^{-1}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1/2}\|^2 \\ &\qquad \le \|(A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^*)^{1/2}\|^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Простым следствием этой теоремы является следующий сравнительно недавно опубликованный результат.

Следствие 1 ([23])**.** *Пусть в условиях Теоремы 1* $\dim H_1 = \dim H_2 = 1$, $A_{ij} = a_{ij} \in \mathbb{C}$, $i, j = 1, 2$. *Тогда F_A удовлетворяет условию* (0.5) *тогда и только тогда, когда*

$$|a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}| + |\bar{a}_{11}a_{21} - \bar{a}_{12}a_{22}| \le |a_{11}|^2 - |a_{12}|^2. \tag{1.3}$$

Показано, что исследуемую проблему — проблему описания д.л.п. — достаточно (и необходимо) изучить для операторов нижне треугольного вида (см. ниже Следствие 3). В этом направлении основными являются следующие теоремы и следствия из них.

Теорема 2. *Пусть A — нижний треугольный оператор, A_1 коллинеарен изометрическому оператору V, т.е. $A_1 = \|A_1\|V$. Тогда для того, чтобы A был строгим плюс-оператором, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|A_1\| \ge \sup_{\|x\|=1} \{\|A_{21}^*x\| + \|A_2^*x\|\}. \tag{1.4}$$

Следствие 2. *Пусть A — нижний треугольный оператор с непрерывно обратимым* (*на своей области значений*) *оператором A_1. Требование*

$$\|A_1^{-1}\|^{-1} \ge \|A_{21}\| + \|A_2\| \tag{1.5}$$

является достаточным для того, чтобы A был строгим плюс-оператором.

Теорема 3. *Пусть A — нижний треугольный оператор, A_2 коллинеарен коизометрическому оператору W, т.е. $A_2 = \|A_2\|W$. Тогда для того, чтобы A был строгим плюс-оператором, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\|A_2\| \le \inf_{\|x\|=1} \{\|A_1x\| - \|A_{21}x\|\}. \tag{1.6}$$

□

2. Факторизация д.л.о., приложения

$A \in L(\mathcal{H})$ называется *плюс-оператором*, если

$$[Ax, Ax] \geq 0 \quad \text{для всех } x \in \mathcal{H} : [x, x] \geq 0.$$

Известно [21], что оператор A является плюс-оператором тогда и только тогда, когда существует такая постоянная $\mu \geq 0$, что

$$[Ax, Ax] \geq \mu[x, x] \quad \text{для всех } x \in \mathcal{H}; \tag{2.1}$$

в качестве μ, как правило, берется $\mu(A) = \inf_{[x,x]=1}[Ax, Ax]$. Если $\mu(A) = 0$, то плюс-оператор A называется нестрогим, в противном случае ($\mu(A) > 0$) — строгим.

Всякому плюс-оператору A отвечает отношение G_A, определенное на шаре $\mathfrak{K}$:

$$G_A(K) = \{K' \in \mathfrak{K} \mid A_{21} + A_{22}K = K'(A_{11} + A_{21}K)\}.$$

При этом, если A — нестрогий плюс-оператор, то G_A — постоянное отношение в том смысле, что найдется такой $\widetilde{K} \in \mathfrak{K}$, что $\widetilde{K} \in G_A(K)$ при всех $K \in \mathfrak{K}$.

Теорема 4. *Пусть* $T \in L(\mathcal{H})$,

$$\begin{pmatrix} T_1 & T_{12} \\ T_{21} & T_2 \end{pmatrix}.$$

Следующие условия эквивалентны:

(a) $T_{12} = -T_{11}\Gamma^*$ *при некотором* $\Gamma \in \mathfrak{K}^\circ$;

(b) $T = B\Gamma$, *где* B — *нижний треугольный оператор, т.е.* $B_{12} = 0$, *а* $U(\Gamma)$ — J-*унитарный оператор вида*

$$\begin{pmatrix} (I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & \Gamma^*(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} \\ \Gamma(I - \Gamma^*\Gamma)^{-1/2} & (I - \Gamma\Gamma^*)^{-1/2} \end{pmatrix}$$

В случае, когда $T = A$ — плюс-оператор, удовлетворяющий условию (a) Теоремы 4, B — также плюс-оператор, и отношение G_A допускает факторизацию

$$G_A = G_B \circ F_{U(\Gamma)},$$

где $F_{U(\Gamma)}$ — д.л.п. $\mathfrak{K}$, определенное по оператору $U(\Gamma)$.

Как отмечалось во Введении, в случае бистрогого плюс-оператора A условие (a) выполнено всегда как для A, так и для A^*. Поэтому справедливо следующее следствие.

Следствие 3. *Пусть* A — *бистрогий плюс-оператор. Тогда наряду с* (b) *имеет место факторизация*

(c) $A = U(\Gamma)C$, *где* C — *верхний треугольный оператор, т.е.* $C_{21} = 0$,

а также

(d) $F_A = F_B \circ F_{U(\Gamma)}$, $F_A = F_{U(\Gamma)} \circ F_C$

Теорема 4 и Следствие 3 доказывают утверждение, сделанное после Следствия 1, о том, что описание д.л.п. сводится к описанию аффинных д.л.п. Но сфера их применения гораздо шире. В [18] рассматриваются плюс-операторы A со свойством

$$D(A) := A_{11}A_{11}^* - A_{12}A_{12}^* \geq 0.$$

Для таких операторов, используя тонкие методы функционального анализа, авторы установили выпуклость и замкнутость образов отношений G_A. Теперь эти результаты становятся прямым следствием Теоремы 4 и следующего предложения.

Теорема 5. *Строгий плюс-оператор удовлетворяет условию* (a) *Теоремы 4 точно тогда, когда* $D(A) \geq 0$.

Следует отметить, что впервые вопрос о выпуклости и замкнутости образа д.л.п. $F_A : \mathfrak{K} \to \mathfrak{K}$ для J-бинесжимающего оператора A был решен совершенно другими методами в [4].

Известно [16], что все операторы A, порождающие одно и то же д.л.п. F_A, коллинеарны. Поэтому в силу (2.1) можно считать A J-бинесжимающим:

$$[Ax, Ax] \geq [x, x] \quad \text{и} \quad [A^*x, A^*x] \geq [x, x], \quad x \in \mathcal{H}.$$

Теорема 6. *Нижний треугольный оператор* A*:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ A_{21} & A_2 \end{pmatrix}$$

является J*-несжимающим точно тогда, когда оператор* A_1 *непрерывно обратим на своем образе* $\operatorname{ran} A_1$*, операторы* A_1^{-1} *и* A_2 *— сжатия на* $\operatorname{ran} A_1$ *и* $\mathcal{H}_2$*, соответственно, и существует такое сжатие* $S_{21} : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$*, что*

$$A_{21} = (I - A_2A_2^*)^{1/2} S_{21} (A_1^*A_1 - I)^{1/2}.$$

Аналогичная теорема имеет место для верхнего треугольного J-бинесжимающего оператора. Отсюда получается результат, усиливающий соответствующие утверждения из [15].

Следствие 4. *Пусть* A *— треугольный* J*-бинесжимающий оператор, у которого один из диагональных элементов унитарен, а спектр второго не разделяет* 0 *и* ∞*. Тогда* F_A *обладает свойством Кёнигса.*

Отметим также, что Теорема 4 и Следствие 3 нашли свое применение при исследовании вопроса о существовании у J-бинесжимающего оператора максимального неотрицательного инвариантного подпространства. Однако, это тема нашей следующей работы.

В заключение отметим, что описанное выше — содержание доклада на Крымской Осенней Математической Школе (2007). За подробностями мы отсылаем читателя к статье [1], где можно найти как доказательства большей части обозначенных результатов, так и ряда новых.

Список литературы

[1] Азизов Т.Я., Хацкевич В.А. *Бистрогие плюс-операторы и операторные дробно-линейные преобразования*// Український математичний вісник – 2007. – V.4, N.3.– с. 311-322.

[2] D. Alpay and V. Khatskevich *Linear fractional transformations: basic properties, applications to spaces of analytic functions and Schroeder's equation*// Int. J. Appl. Math. – **2** 2000. – V.2, N.4. – c.459–476.

[3] Азизов Т.Я. *О расширениях инвариантных дуальных пар*// Укр. матем. ж. – 1989. – V.41, N.7. – с. 958–961.

[4] T. Ando *Linear operators on Krein spaces*// Sapporo, Japan – 1979.

[5] C.C. Cowen *Linear fractional composition operators on H^2*// Integral Equations Operator Theory – 1988. – V.11. – c. 151–160.

[6] C. C. Cowen and B. D. MacCluer *Linear fractional maps of the ball and their composition operators* // Acta Sci. Math. (Szeged) – 2000. – V.66, N.1-2. – c.351–376.

[7] C. C. Cowen and B. D. MacCluer *Schroeder's equation in several variables*// Taiwanese J. Math. – – 2003. – V.7, N.1, – c.129–154.

[8] E. A. Gallardo-Gutiérrez, A. Montes-Rodríguez *Adjonts of linear fractional composition operators on the Dirichlet space*// Math. Ann. – 2003. – V.327. – c. 117–134.

[9] V. Khatskevich, I. Karelin, L. Zelenko *Operator pencils of the second order and linear fractional relations*// Ukrainskii matem. visnyk – 2006 – V.3, N.4. – c.467–503.

[10] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet *One-parameter semigroups of fractional-linear transformations*// Operator theory, system theory and related topics (Beer-Sheva/Rehovot, 1997). Oper. Theory Adv. Appl. Birkhäuser, Basel. – 2001. V. 123. – c. 401–411

[11] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet *Schröder's functional equation and the Koenigs embedding property* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications – 2001. – V.47. – c.3977-3988.

[12] V. Khatskevich, S. Reich, and D. Shoikhet *Abel-Schröder equations for linear fractional mappings and the Koenigs embedding problem*// Acta Sci. Math. (Szeged) – 2003. – V.69. – c. 67–98.

[13] В. Хацкевич, В. Сендеров *Уравнение Абеля-Шредера для дробно-линейных преобразований операторных шаров*// Доклады РАН — 2001. – V. 379, N. 4. – с. 455–458.

[14] V. Khatskevich and V. Senderov *Abel-Schröder type equations for maps of operator balls*// Functional Differential Equations – 2003. V.10. – c.239–258.

[15] В. Хацкевич, В. Сендеров *Дробно-линейные преобразования и проблема вложения Кёнигса*// Доклады РАН — 2005. – V. 409, N.5. – с. 482–486.

[16] V. Khatskevich, V. Senderov, and V. Shulman *On operator matrices generating linear fractional maps of operator balls*// Israel Conference Proceedings Contemporary Math. – 2004. – V. 364. – c. 93-102.

[17] V. Khatskevich and V. Senderov *Fractional-Linear Transformation of Operator Balls, Applications to Dynamical Systems*// Acta Math. Sinica, English Series, – 2006. – V.22. – c.1687–1694.

[18] V. Khatskevich and V. Shulman *Operator fractional-linear transformations: convexity and compactness of image; applications*// Studia Math. – 1995 – V.116,N.2. – c.189-195.

[19] V. Khatskevich and L. Zelenko *Bistrict plus-operators in Krein spaces and dichotomous behavior of irreversible dynamical systems* // Operator theory and related topics, Vol. **II** (Odessa, 1997). Oper. Theory Adv. Appl., **118**, Birkhäuser, Basel. – 2000. – V.118. – c.191–203.

[20] V. Khatskevich and L. Zelenko *Plus-operators in Krein spaces and dichotomous behavior of irreversible dynamical systems with a discrete time*// Studia Math. – 206 – V.177., N.3. – c.195-210

[21] Крейн М.Г., Шмульян Ю.Л., Плюс-операторы в пространстве с индефинитной метрикой, *Матем. исследования* (Кишинев), **1** (1966), 1, 131–161.

[22] Крейн М.Г., Шмульян Ю.Л. *О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами*// Матем. исследования (Кишинев). – 1967. – V.2, N.1. – c.64–96.

[23] M.J. Martin *Composition operators with linear fractional symbols and their adjoints*// First advanced course in operator theory and complex analysis. University of Seville, June, 2004.

[24] E. Vesentini *Semigroups of linear contractions for an indefinite metric*// Mem. Mat. Accad. Lincei. – 1994. – V.2. – c. 53–83.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 21–30.

Е. В. Комиссаренко

О ПОЛНОТЕ И НЕВЫРОЖДЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП ОТРАЖЕНИЙ

Получены условия полноты бесконечной группы отражений, действующей на нецилиндрической алгебраической гиперповерхности в линейном вещественном n-мерном пространстве и имеющей четыре линейные оболочки орбит направлений симметрии, любые три из которых образуют прямую сумму. Найдены также условия невырожденности алгебры ее инвариантов.

1^o. Изучение алгебраических нецилиндрических гиперповерхностей с бесконечным множеством плоскостей симметрии сводится к вычислению базисных инвариантов групп типа G^s_μ [1,2]. Пусть группа G такого типа действует в линейном вещественном n-мерном пространстве V и имеет четыре линейные оболочки орбит направлений симметрии $A_1, \ldots, A_4$, и при этом любые три из четырех плоскостей $A_1, \ldots, A_4$ образуют прямую сумму. Группе G в соответствующем базисе пространства V сопоставляется матрица Δ, образованная линейными формами, определяющими отражения, порождающие группу G [2].

Ранее получена классификация таких матриц [3] и для каждого класса матриц найдены рациональные инварианты соответствующей группы [4], а при некоторых дополнительных условиях вычислены образующие алгебр полиномиальных инвариантов.

Цель работы —- получить условия полноты группы G, а также невырожденности алгебры ее инвариантов.

Основные результаты работы: Получены условия полноты группы G, а также невырожденности алгебры ее инвариантов для случая $\mathrm{rank}(\Delta) \leq 2$.

2^o. Пусть V — линейное вещественное n-мерное пространство, G – группа отражений пространства V, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) G действует на нецилиндрической алгебраической поверхности и порождена объединением четырех квадратичных множеств отражений $M_1, \ldots, M_4$. Это означает, что каждое M_i определяется плоскостью A_i и соответствующим линейным

инъективным симметричным отображением $\mu_i : A_i \to V^*$, удовлетворяющим следующему условию: отражение (P, d) относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда $d \in A_i$, а $P = \ker \mu_i(d)$.

2) Множества $M_1, \ldots, M_4$ поэлементно коммутируют между собой.

3) Любые три из четырех плоскостей A_i образуют прямую сумму.

Пусть $B_i = \{v \in A_i : \mu_i(v)|_{A_i} = 0\}$ – особая плоскость множества M_i.

Положим $s = \dim(B_4 \cap (B_1 + B_2 + B_3))$.

Далее будем считать, что каждая из четырех особых плоскостей лежит в сумме трех остальных особых плоскостей. В этом случае, который является основным при изучении строения группы G, в пространстве V существует базис

$$(a_{il},\ b_{ij},\ c_k\ :\ 1 \le i \le 4;\ 1 \le l \le p_i;\ 1 \le j \le s;\ 1 \le k \le m)$$

с соответствующими координатными функциями

$$x_{il} = a_{il}^*, \quad y_{ij} = b_{ij}^*, \quad z_k = c_k^*,$$

для которого

$$B_i = \langle b_{ij} : j \ge 1 \rangle \quad (i \le 3), \quad B_4 = \langle b_{1j} + b_{2j} + b_{3j} : j \ge 1 \rangle,$$

$$A_i = \langle a_{il} \rangle \oplus B_i \quad (i \le 4),$$

$$\mu_i(a_{il}) = \varepsilon_{il}\, x_{il},\ \text{где}\ \varepsilon_{il} \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad (i;\ j \ge 1),$$

$$\mu_i(B_i) \subseteq \langle z_k : k \ge 1 \rangle \quad (i \le 4)$$

(см. [5]). Обозначим

$$\xi_{ij} = \mu_i(b_{ij}) \quad (1 \le i \le 3;\ j \ge 1), \quad \xi_{4j} = -\mu_4\,(b_{1j} + b_{2j} + b_{3j}) \quad (j \ge 1),$$

$$h_i = \sum_l \varepsilon_{il}\, x_{il}^2 + 2 \sum_j y_{ij}\, \xi_{ij} \quad (i \le 3), \quad h_4 = \sum_l \varepsilon_{4l}\, x_{4l}^2,$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \ldots & \xi_{1s} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \xi_{41} & \ldots & \xi_{4s} \end{bmatrix},$$

I_i – i-тая строка матрицы Δ.

Если группа G действует на нецилиндрической поверхности, то, как показано в работе [4], ранг матрицы Δ не может быть больше трех. В этой же работе найдены инварианты группы G.

Рассмотрим вопрос о полноте группы G и невырожденности алгебры ее инвариантов. При этом невырожденность алгебры инвариантов группы означает, что группа действует на некоторой нецилиндрической алгебраической гиперповерхности, а полнота группы означает, что имеются алгебраические гиперповерхности, инвариантные относительно этой группы и обладающие следующим свойством: каждое отражение, сохраняющее все эти поверхности, принадлежит группе.

Пусть

$$d = \sum_{i,l} \alpha_{il}\, a_{il} + \sum_{i,j} \beta_{ij}\, b_{ij} + \sum_{k} \gamma_k\, z_k,$$

θ – линейная форма на V, для которой

$$P = \ker \theta, \quad \theta(d) \neq 0.$$

Если (P, d) сохраняет все инварианты группы G, то из инвариантности z_k относительно (P, d) следует, что $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$.

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{rank}(\Delta) = 1$. *Тогда группа* G *полна.*

Доказательство. Если $\operatorname{rank}(\Delta) = 1$, то либо $s = 1$, либо найдутся вещественные ненулевые λ_i, для которых $\xi_{ij} = \lambda_i\, \xi_{4j} \quad (i \leq 3;\ j \geq 1)$.

1) $s = 1$.

В [4] показано, что формы

$$z_1, \ldots, z_m,\ h_i\, \xi_{41} - h_4\, \xi_{i1} \quad (i = 1, 2, 3)$$

являются полиномиальными инвариантами группы G.

Обозначим $\Psi_i = (h_i\, \xi_{41} - h_4\, \xi_{i1})'_d$. Тогда

$$\Psi_i = \xi_{41}\left(\sum_{l} \varepsilon_{il}\, \alpha_{il}\, x_{il} + \beta_{i1}\, \xi_{i1}\right) - \xi_{i1} \sum_{l} \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l} \quad (i = 1, 2, 3).$$

Предположим, что $\Psi_i = 0$, $(z_k)'_d = 0$. Так как $\xi_{41}\big(\sum_l \varepsilon_{il}\, \alpha_{il}\, x_{il} + \beta_{i1}\, \xi_{i1}\big)$ и ξ_{i1} от ξ_{41} не зависят, то $\sum_l \varepsilon_{il}\, \alpha_{il}\, x_{il} + \beta_{i1}\, \xi_{i1}$ и $\sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l}$ равны нулю, откуда $\alpha_{il} = 0$ $(i \leq 4;\ l \geq 1)$, $\beta_{i1} = 0$ $(i \leq 3)$, то есть $d = 0$. Значит, группа имеет невырожденную алгебру инвариантов.

Докажем, что группа полна.

Пусть (P, d) сохраняет инварианты группы G. Тогда $d \neq 0$ и по доказанному выше $\Psi_i \neq 0$ для некоторого $i \leq 3$.

1.1) Пусть θ не зависит ни от одного x_{il} $(i \leq 4;\ l \geq 1)$. Из делимости форм Ψ_1, Ψ_2, Ψ_3 на θ и из того, что хотя бы одна из этих форма ненулевая, следует, что $\theta \in \langle z_1, \ldots, z_m \rangle$, а это противоречит условию $\theta(d) \neq 0$.

1.2) Предположим, что θ зависит от некоторого x_{il} $(i \leq 4;\ l \geq 1)$. Меняя нумерацию множеств $M_1, \ldots, M_4$ и базисных векторов a_{il}, не нарушая общности, можно считать, что θ зависит от x_{11}. Но Ψ_2, Ψ_3 от x_{11} не зависят и делятся на θ, значит $\Psi_2 = 0$, $\Psi_3 = 0$. Отсюда следует, что $\alpha_{il} = 0$ $(i = 2, 3, 4;\ l \geq 1)$, $\beta_{i1} = 0$ $(i = 2, 3)$, то есть

$$d = \sum_{l} \alpha_{1l}\, a_{1l} + \beta_{11}\, b_{11}, \quad \theta \parallel \sum_{l} \varepsilon_{1l}\, \alpha_{1l}\, x_{1l} + \beta_{11}\, \xi_{11}.$$

Следовательно, $(P,\, d) \in\, M_1$.

2) $\xi_{ij} = \lambda_i\, \xi_{4j},\ \lambda_i \neq 0\ (i \leq 3;\ j \geq 1)$.

Не нарушая общности, можно считать, что $\lambda_i = 1\ (i \leq 3)$.

В [4] показано, что тогда образующими алгебры полиномиальных инвариантов группы G являются формы

$$z_1, \ldots,\, z_m,\ h_i - h_4 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Положим $\Psi_i = (h_i - h_4)'_d$. Пусть $\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = 0$, $(z_k)'_d = 0$. Тогда из равенств

$$(h_i - h_4)'_d = \sum_l \varepsilon_{il}\, \alpha_{il}\, x_{il} - \sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l} + \sum_j \beta_{ij}\, \xi_{4j} \quad (i = 1, 2, 3)$$

и учитывая $\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0$, получаем, что

$$\alpha_{il} = 0, \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i \leq 3;\ l \geq 1;\ j \geq 1),$$

то есть $d = 0$. Следовательно, алгебра полиномиальных инвариантов группы G невырождена.

Докажем, что группа полна. Пусть $(P,\, d)$ сохраняет инварианты группы G. При этом можно считать, что $\Psi_i \neq 0$ для некоторого $i \leq 3$.

2.1) Допустим, что все $\alpha_{il} = 0$ $(i \leq 4,\, l \geq 1)$. Тогда каждая $\Psi_i = \sum_j \beta_{ij}\, \xi_{4j}$ делится на θ, при этом хотя бы одна из них не равна нулю. Значит θ не зависит от x_{il} и y_{ij}. Следовательно, $\theta(d) = 0$, что противоречит условию.

2.2) Допустим, что некоторое $\alpha_{il} \neq 0$ $(i \leq 4;\ l \geq 1)$. Можно считать, что $\alpha_{11} \neq 0$. Тогда из инвариантности h_1 относительно $(P,\, d)$ следует, что $\Psi_1 = \theta\, \Phi$, где Φ – некоторая линейная форма. θ не зависит от y_{ij}, так как Ψ_1 не зависит от y_{ij}. Если Φ зависит от некоторого x_{ij}, то θ не зависит ни от одного x_{ij}. Но тогда $\theta(d) = 0$, что противоречит условию. Следовательно, Φ не зависит ни от одного x_{ij}, а тогда θ зависит от x_{11}. Но Ψ_2 и Ψ_3 также делятся на θ и от x_{11} не зависят, значит $\Psi_2 = 0$, $\Psi_3 = 0$. Так как формы x_{il} $(i \leq 4;\ l \geq 1)$ и ξ_{4j} $(j \geq 1)$ линейно независимы, то $\alpha_{il} = 0$ $(i = 2, 3, 4;\ l \geq 1)$, $\beta_{ij} = 0$ $(i = 2, 3;\ j \geq 1)$, то есть

$$d = \sum_l \alpha_{1l}\, a_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\, b_{1j}, \quad \theta \parallel \sum_l \varepsilon_{1l}\, \alpha_{1l}\, x_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\, \xi_{4j}.$$

Значит, $(P,\, d) \in\, M_1$.

Теорема доказана.

Пусть теперь $\mathrm{rank}(\Delta) = 2$. Тогда либо $s = 2$, либо, с точностью до изменения нумерации множеств $M_1, \ldots,\, M_4$ и умножения отображений $\mu_1, \ldots,\, \mu_4$ на ненулевые константы, можно считать, что матрица Δ совпадает с одной из матриц

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_3 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} I_3 \\ I_4 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} I_3 + I_4 \\ kI_3 + I_4 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_2 & \dots & \xi_s \\ \xi_{21} & \xi_2 & \dots & \xi_s \\ \xi_{31} & \xi_2 & \dots & \xi_s \\ \xi_{41} & \xi_2 & \dots & \xi_s \end{bmatrix}$$

и при этом $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, а у матриц $\Delta_1, \dots, \Delta_4$ третья и четвертая строки линейно независимы (для Δ_4 это означает, что $\xi_{31} \neq \xi_{41}$), см.[3].

Обозначим $\Lambda_i = \mu_i(B_i)$.

Теорема 2. 1. *Если $\Delta = \Delta_1$ или $\Delta = \Delta_2$, то алгебра полиномиальных инвариантов вырождена.*

2. *Если $\Delta = \Delta_3$ и $\dim(\Lambda_3 + \Lambda_4) = 2\,s$, то алгебра полиномиальных инвариантов невырождена. При этом если $k \neq 1$, то группа G полна, а если $k = 1$, то множество $\widetilde{M}$ всех отражений, сохраняющих инварианты группы G, представимо в виде объединения $M_1 \cup M_2 \cup M_0$, где M_0 – квадратичное множество отражений, определяемое плоскостью $A_3 + A_4$ и отображением μ_0, для которого $\mu_0|_{A_3} = -\mu_3,\ \mu_0|_{A_4} = -\mu_4$.*

3. *Если $\Delta = \Delta_4$ и $\dim(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4) = s + 3$, то группа G полна.*

Доказательство. 1) Если $\Delta = \Delta_1$, то образующими алгебры полиномиальных инвариантов, как показано в [4], являются формы

$$z_1, \dots, z_m,\ h_1 - h_3,\ h_2 - h_3.$$

Так как эти формы не зависят от x_{4l} ($l \geq 1$), то и любой полиномиальный или рациональный инвариант группы G не зависит от x_{4l}, значит, алгебра полиномиальных инвариантов вырождена.

Если $\Delta = \Delta_2$, то образующими алгебры полиномиальных инвариантов являются формы

$$z_1, \dots, z_m,\ h_1 - h_3,\ h_2 - h_4$$

(см. [4]). Положим $\Psi_1 = (h_1 - h_3)'_d$, $\Psi_2 = (h_2 - h_2)'_d$. Тогда

$$\Psi_1 = \sum_l \varepsilon_{1l}\, \alpha_{1l}\, x_{1l} - \sum_l \varepsilon_{3l}\, \alpha_{3l}\, x_{3l} + \sum_j (\beta_{1j} - \beta_{3j})\xi_{3j},$$

$$\Psi_2 = \sum_l \varepsilon_{2l}\, \alpha_{2l}\, x_{2l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l} + \sum_j \beta_{2j}\, \xi_{4j}.$$

Очевидно, что если, например, $d = b_{11} + b_{31}$, то $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$, $(z_k)'_d = 0$.

2) Если $\Delta = \Delta_3$ и $\dim(\Lambda_3 + \Lambda_4) = 2\,s$, то, как показано в [4], образующими алгебры полиномиальных инвариантов группы G являются формы

$$z_1, \dots, z_m,\ h_1 - h_3 - h_4,\ h_2 - k\,h_3 - h_4.$$

Положим

$$\Psi_1 = (h_1 - h_3 - h_4)'_d = \sum_l \varepsilon_{1l}\,\alpha_{1l}\,x_{1l} - \sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + \sum_j (\beta_{1j} - \beta_{3j})\,\xi_{3j} + \sum_j \beta_{1j}\,\xi_{4j},$$

$$\Psi_2 = (h_2 - k\,h_3 - h_4)'_d = \sum_l \varepsilon_{2l}\,\alpha_{2l}\,x_{2l} - k\sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + k\sum_j (\beta_{2j} - \beta_{3j})\,\xi_{3j} + \sum_j \beta_{2j}\,\xi_{4j}.$$

Проверим невырожденность алгебры полиномиальных инвариантов группы G.

Пусть $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$, $(z_k)'_d = 0$. Тогда

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i \le 4;\ l \ge 1), \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ j \ge 1),$$

то есть $d = 0$.

Рассмотрим вопрос о полноте группы. Пусть $(P,\, d)$ сохраняет все инварианты группы G, тогда Ψ_1 и Ψ_2 делятся на θ и $\Psi_i \ne 0$ для некоторого $i \le 2$.

Пусть $k = 1$.

2.1) Допустим, что все $\alpha_{il} = 0$ $(i \le 4;\ l \ge 1)$. Тогда из делимости форм Ψ_1, Ψ_2 на θ и того, что хотя бы одна форма $\Psi_i \ne 0 \quad (i = 1, 2)$ и не зависит от x_{il} и y_{ij} следует, что $\theta(d) = 0$, а это противоречит условию.

2.2) Допустим, что некоторое $\alpha_{il} \ne 0$ $(i \le 4;\ l \ge 1)$. Не нарушая общности, за счет изменения нумерации плоскостей M_1 и M_2, M_3 и M_4, а также нумерации базисных векторов a_{il} достаточно рассмотреть один из следующих случаев:

2.2.1) $\alpha_{11} \ne 0$.

Тогда $\Psi_1 \ne 0$ и можно считать, что $\theta = \Psi_1$. Значит $\Psi_2 = 0$, так как не зависит от x_{11} и делится на θ, откуда

$$\alpha_{il} = \beta_{ij} = 0 \quad (i \ge 2;\ l \ge 1;\ j \ge 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{1l}\,a_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\,b_{1j}, \quad \theta = \sum_l \varepsilon_{1l}\,\alpha_{1l}\,x_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\,\xi_{1j},$$

следовательно, $(P,\, d) \in M_1$.

2.2.2) $\alpha_{31} \ne 0$.

Тогда можно считать, что $\theta = \Psi_1$, а $\Psi_1 - \Psi_2 = 0$, откуда

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i \le 2,\ l \ge 1), \quad \beta_{1j} = \beta_{2j} = -t_j \quad (j \ge 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{3l}\,a_{3l} + \sum_l \alpha_{4l}\,a_{4l} + \sum_j (\beta_{3j} - \beta_{1j})\,b_{3j} + \sum_j t_j\,b_{4j},$$

$$\theta = -\sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} - \sum_j (-\beta_{1j} + \beta_{3j})\,\xi_{3j} - \sum_j t_j\,\xi_{4j}.$$

Значит, $(P,\, d)$ принадлежит множеству M_0, определяемому плоскостью $A_3 + A_4$ и отображением μ_0, которое определяется равенствами $\mu_0|_{A_3} = -\mu_3,\ \mu_0|_{A_4} = -\mu_4$.

Пусть $k \neq 1$.

2.3) Допустим, что все $\alpha_{il} = 0$ ($i \leq 4$; $l \geq 1$). Тогда из того, что хотя бы одна из форм Ψ_1, Ψ_2 не равна нулю и делится на θ, при этом Ψ_1, Ψ_2 не зависят от x_{il} и y_{ij}, следует, что $\theta(d) = 0$, что противоречит условию.

2.4) Допустим, что некоторое $\alpha_{il} \neq 0$ ($i \leq 4$; $l \geq 1$). За счет изменения нумерации плоскостей M_1 и M_2 и нумерации базисных векторов a_{il} достаточно рассмотреть один из следующих случаев:

2.4.1) $\alpha_{11} \neq 0$.

Тогда, как и в случае 2.2.1) $\theta = \Psi_1$. Значит $\Psi_2 = 0$, откуда

$$\alpha_{il} = 0, \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i \geq 2;\, l \geq 1;\, j \geq 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{1l}\, a_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\, b_{1j}, \quad \theta = \sum_l \varepsilon_{1l}\, \alpha_{1l}\, x_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\, \xi_{1j}.$$

Следовательно, $(P,\, d) \in M_1$.

2.4.2) $\alpha_{31} \neq 0$.

Тогда опять можно считать, что $\theta = \Psi_1$, а $k\,\Psi_1 - \Psi_2 = 0$, откуда

$$\alpha_{il} = 0, \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i = 1, 2, 4;\, l \geq 1;\, j \geq 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{3l}\, a_{3l} + \sum_j \beta_{3j}\, b_{3j}, \quad \theta = -\sum_l \varepsilon_{3l}\, \alpha_{3l}\, x_{3l} - \sum_j \beta_{3j}\, \xi_{3j}.$$

Следовательно $(P,\, d) \in M_3$.

2.4.3) $\alpha_{41} \neq 0$.

Тогда $\theta = \Psi_1$, а $\Psi_1 - \Psi_2 = 0$, откуда

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i \leq 3;\, l \geq 1), \quad \beta_{1j} = \beta_{2j} = \beta_{3j} = -t_j \quad (j \geq 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{4l}\, a_{4l} + \sum_j t_j\, b_{4j}, \quad \theta = -\sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l} - \sum_j t_j\, \xi_{4j}.$$

Следовательно $(P,\, d) \in M_4$.

3) Пусть $\Delta = \Delta_4$ и $\dim(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4) = s + 3$.

Положим $H_i = f_3(h_i - h_4) - f_i(h_3 - h_4)$ $(i \leq 2)$. H_1, H_2 – полиномиальные инварианты группы G и поэтому для доказательства невырожденности алгебры полиномиальных инвариантов достаточно проверить, что из

$$\Psi_1 = (H_1)'_d = 0 \quad \Psi_2 = (H_2)'_d = 0 \quad (z_k)'_d = 0$$

следует, что $d = 0$. При этом

$$\Psi_1 = f_3\Big(\sum_l \varepsilon_{1l}\,\alpha_{1l}\,x_{1l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + \beta_{11}(\xi_{41}+f_1) + \sum_{j\ge 2}\beta_{1j}\,\xi_j\Big) - \\ - f_1\Big(\sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + \beta_{31}(\xi_{41}+f_3) + \sum_{j\ge 2}\beta_{3j}\,\xi_j\Big),$$

$$\Psi_2 = f_3\Big(\sum_l \varepsilon_{2l}\,\alpha_{2l}\,x_{2l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + \beta_{21}(\xi_{41}+f_2) + \sum_{j\ge 2}\beta_{2j}\,\xi_j\Big) - \\ - f_2\Big(\sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} - \sum_l \varepsilon_{4l}\,\alpha_{4l}\,x_{4l} + \beta_{31}(\xi_{41}+f_3) + \sum_{j\ge 2}\beta_{3j}\,\xi_j\Big).$$

Если $\Psi_1 = 0$, $\Psi_2 = 0$ и $(z_k)'_d = 0$, то

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i \le 4;\ l \ge 1), \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i = 1,2,3; j \ge 1),$$

то есть $d = 0$.

Докажем, что группа G полна.

3.1) Допустим, что все $\alpha_{il} = 0$ $(i \le 4;\ l \ge 1)$. Тогда из того, что хотя бы одна из форм Ψ_1, Ψ_2 не равна нулю и делится на θ следует, что $\theta \subseteq \langle z_k : k \ge 1\rangle$, что противоречит условию.

3.2) Допустим, что некоторое $\alpha_{il} \ne 0$ $(i \le 4;\ l \ge 1)$. За счет изменения нумерации плоскостей M_1 и M_2 и нумерации базисных векторов a_{il} достаточно рассмотреть один из следующих случаев:

3.2.1) $\alpha_{11} \ne 0$.

Тогда θ зависит от x_{11}, а так как Ψ_2 не зависит от x_{11}, то $\Psi_2 = 0$, откуда следует, что

$$\alpha_{il} = 0, \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i \ge 2;\ l \ge 1;\ j \ge 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{1l}\,a_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\,b_{1j}, \quad \theta \parallel \sum_l \varepsilon_{1l}\,\alpha_{1l}\,x_{1l} + \sum_j \beta_{1j}\,\xi_{1j}.$$

Значит, $(P,\, d) \in M_1$.

3.2.2) $\alpha_{31} \ne 0$.

Тогда θ зависит от x_{31}, а $f_2\,\Psi_1 - f_1\,\Psi_2 = 0$, откуда следует

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i = 1,2,4;\ l \ge 1), \quad \beta_{ij} = 0 \quad (i = 1,2;\ j \ge 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{3l}\,a_{3l} + \sum_j \beta_{3j}\,b_{3j}, \quad \theta \parallel \sum_l \varepsilon_{3l}\,\alpha_{3l}\,x_{3l} + \beta_{31}(\xi_{41}+f_3) + \sum_{j\ge 2}\beta_{3j}\,\xi_j.$$

Следовательно $(P,\, d) \in M_3$.

3.2.3) $\alpha_{41} \ne 0$.

Тогда θ зависит от x_{41}, а $(f_2 - f_3)\Psi_1 - (f_1 - f_3)\Psi_2 = 0$, откуда следует, что

$$\alpha_{il} = 0 \quad (i \leq 3;\, l \geq 1), \quad \beta_{ij} = -t_j \quad (i \leq 3;\, j \geq 1),$$

то есть

$$d = \sum_l \alpha_{4l}\, a_{4l} + \sum_j t_j\, b_{4j}, \quad \theta \parallel \sum_l \varepsilon_{4l}\, \alpha_{4l}\, x_{4l} + \sum_j t_j\, \xi_j.$$

Следовательно $(P,\, d) \in M_4$.

Теорема доказана.

Замечание 4. Если $\Delta = \Delta_3$, $k \neq 1$ и $\dim(\Lambda_3{+}\Lambda_4) < 2\,s$, то алгебра полиномиальных инвариантов может быть как вырожденной, так и невырожденной.

Приведем соответствующие примеры.

Пусть $s = 4$.

Если $\xi_{31} = \xi_{41}$ и $\alpha_{il} = 0$ $(i \leq 4;\, l \geq 1)$, $\beta_{1j} = \beta_{2j} = 0$ $(j = 2, 3, 4)$, $\beta_{11} = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{k})$, $\beta_{21} = 1$, $\beta_{31} = 1 + \frac{1}{k}$, то $\Psi_1 = 0,\ \Psi_2 = 0,\ (z_k)'_d = 0$, то есть алгебра полиномиальных инвариантов вырождена.

С другой стороны, если $\xi_{31} = \xi_{42}$ и формы $\xi_{32}, \xi_{33}, \xi_{34}, \xi_{41}, \xi_{42}, \xi_{43}, \xi_{44}$ линейно независимы, то из предположения $\Psi_1 = 0,\ \Psi_2 = 0,\ (z_k)'_d = 0$ следует, что $d = 0$.

Замечание 5. Если $\Delta = \Delta_4$ и $\dim(\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4) < s + 3$, то алгебра полиномиальных инвариантов может быть вырожденной.

Покажем это.

Пусть $s = 4$, $f_1 = -\xi_{41} + \xi_2$, $f_2 = -\xi_{41} + \xi_3$, $f_3 = \xi_{41} + \xi_4$ и $\alpha_{il} = 0$ $(i \leq 4;\, l \geq 1)$, $\beta_{31} = \beta_{34} = 0$, $\beta_{23} = u$, $\beta_{21} = -u$, $\beta_{12} = v$, $\beta_{11} = -v$. Тогда при любых значениях u, v формы $\Psi_1,\ \Psi_2$ равны нулю и $(z_k)'_d = 0$. Это значит, что алгебра полиномиальных инвариантов вырождена.

Заключение. *Пусть* G *— группа отражений типа* G^s_μ *с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии, любые три из которых образуют прямую сумму. Получены условия полноты группы* G*, а также невырожденности алгебры ее инвариантов для случая* $\operatorname{rank}(\Delta) \leq 2$*. Случай* $\operatorname{rank}(\Delta) = 3$ *будет рассмотрен позже.*

Список литературы

[1] Игнатенко В.Ф. *О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями* // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Проблемы геометрии: Москва. — 1989, — Том 21. — С. 155 — 208.

[2] Криворучко А.И. *О строении множества орбит отражений бесконечной группы, порожденной отражениями* // Таврический вестник информатики и математики. — 2003. — № 1. — С. 78 — 92.

[3] Криворучко А.И. *О вырожденных матрицах, образованных линейными формами* // Таврический вестник информатики и математики. – 2005. — № 2. — С. 25 — 44.

[4] Комиссаренко Е.В., Криворучко А.И. *Об инвариантах бесконечных групп отражений с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии* // Ученые записки ТНУ, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн." Симферополь, 2005. — Том 1, № 1. — С. 10 — 18.

[5] Криворучко А.И. *О двойном отношении четверки линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы, порожденной отражениями* // Ученые записки ТНУ, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн." Симферополь, 2001. — Том 14, № 1. — С. 60 — 65.

[6] Криворучко А.И. *О рациональных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями* // Динамические системы. — 1999. — Вып. 18. — С. 170 — 177.

[7] Криворучко А.И. *О полиномиальных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями* // Динамические системы. — 2000. — Вып. 16. С. 124 — 129.

Знайдені умови повноти нескінченной групи віддзеркалень, що діє на нециліндричній алгебраїчній гіперповерхні в лінійному дійсному n-вимірному просторі і яка має чотири лінійні оболонки орбіт напрямів симетрій, будь яки три з котрих утворюють пряму сумую. Знайдені також умови невиродженості алгебри її інваріантів.

The conditions of completeness of infinite reflection group acting on a non-cylindrical algebraic hypersurface in linear real n-dimensional space and having four linear spans of orbits of directions of symmetries, anyone three of which form the direct sum are found. The conditions of non-degeneracy of its invariant algebra are found too.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 31–41.

А. А. Корнута

СИСТЕМЫ БАЗИСНЫХ ИНВАРИАНТОВ ФЛАТТО–ВИНЕР ГРУПП E_6, E_7

Пусть G конечная группа симметрий, порождённая отражениями относительно гиперплоскостей в вещественном пространстве E^n . Найдены алгебры инвариантов Флатто-Винер групп E_6 и E_7 .

Постановка задачи

Пусть в вещественном пространстве E^n введена прямоугольная система координат Ox_i; G — неприводимая конечная группа, порождённая ортогональными отражениями относительно гиперплоскостей, I^G— алгебра инвариантов группы G.

Согласно теореме Шепарда–Тодда–Шевалле [1,2] алгебра I^G порождена n алгебраически независимыми однородными многочленами $I^G_{m_i}$ степеней $m_i \left(i = \overline{1,n}\right)$. В связи с этим возникает задача разработки методов построения и изучения свойств базисных инвариантов $I^G_{m_i}$. Эта задача нашла изучение в работах многих отечественных и зарубежных авторов [3-7].

Одно из направлений данных исследований указали Л. Флатто и М. Винер, установившие связь дифференциальных уравнений с построением базисных инвариантов алгебр I^G.

Флатто и Винер [8] доказали, что существуют, с точностью до постоянного множителя, базисные инварианты $I^G_{m_k}(x)$ алгебры I^G $\left(x = (x_i)\ ,\ i = \overline{1,n}\right)$, удовлетворяющие уравнениям

$$I_{m_j}(\partial)\, I_{m_k} = 0\, (1 \leq j < k)\,,$$

где $I_2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$, $I_{m_j}(\partial)$—дифференциальный оператор, полученный из многочлена $I_{m_j}(x)$ заменой x_i на $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$.

Это утверждение даёт практический способ построения базисных инвариантов конечных групп. При решении данной задачи уже найдены системы базисных инвариантов Флатто–Винер групп $H_2(r)$, A_3, A_4 [9], F_4 [10], E_8[11].

Цель настоящей заметки построить системы базисных инваринтов Флатто–Винер групп E_6 и E_7, порождённых отражениями в пространствах E^6 и E^7, соответственно. Решение задачи приведено в п.1, 2 настоящей статьи.

1. Рассмотрим в пространстве E^6 полуправильный многогранника Госсета 2_{21}. Координаты его вершин зададим строками следующей матрицы [12]:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu \\ -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 & c_\lambda & s_\lambda \\ c_\lambda & s_\lambda & -c_\mu & -s_\mu & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $c_\nu = \cos\dfrac{2\pi\nu}{3}$, $s_\nu = \sin\dfrac{2\pi\nu}{3}$; $\lambda, \mu = 1, 2, 3$. Все 36 пятимерных плоскостей симметрии определяются уравнениями

$$\begin{gathered} x_2 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_6 = 0, \quad x_1 + x_3 + x_5 = 0, \quad \sqrt{3}x_1 \pm x_2 = 0, \\ \sqrt{3}x_3 \pm x_4 = 0, \quad \sqrt{3}x_5 \pm x_6 = 0, \quad x_1 \pm \sqrt{3}x_2 - 2x_3 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_3 \pm \sqrt{3}x_4 + 2x_5 = 0, 2x_1 + 2x_3 - x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0, \\ x_1 \pm \sqrt{3}x_2 + x_3 \pm \sqrt{3}x_4 - 2x_5 = 0, x_1 \pm \sqrt{3}x_2 - 2x_3 + x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0, \\ 2x_1 - x_3 \pm \sqrt{3}x_4 - x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0, x_1 \pm \sqrt{3}x_2 + x_3 \pm \sqrt{3}x_4 + x_5 \pm \sqrt{3}x_6 = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Обозначим через E_6 группу симметрий многогранника 2_{21}. Она порождена отражениями относительно плоскостей (1).

Алгебра инвариантов I^{E_6} группы E_6 порождена шестью алгебраически независимыми формами степеней $m_i = 2, 5, 6, 8, 9, 12$ [13], которые могут быть записаны в виде [14]:

$$Q_2 = \sum p_\lambda, \qquad Q_5 = \sum q_\lambda(p_\mu - p_\nu), \qquad Q_6 = \sum q_\lambda^2 - 10\sum q_\lambda q_\mu + \sum p_\lambda^2 p_\mu - 3p_1p_2p_3,$$

$$Q_8 = 2\sum q_\lambda^2\left(p_\mu + p_\nu\right) - 6\sum p_\lambda q_\lambda\left(q_\mu + q_\nu\right) + 8\sum q_\lambda q_\mu p_\nu + \sum p_\lambda^2 p_\mu\left(p_\mu - p_\nu\right),$$

$$\begin{gathered} Q_9 = 5\sum p_\lambda p_\mu^2\left(q_\lambda + q_\nu\right) - 5\sum p_\lambda^2 p_\mu\left(q_\mu + q_\nu\right) + \sum p_\lambda^2 q_\lambda\left(p_\mu - p_\nu\right) + \\ + \sum q_\lambda\left(p_\mu^3 - p_\nu^3\right) + 12\sum q_\lambda\left(q_\mu^2 - q_\nu^2\right), \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} Q_{12} = 288\sum_{\lambda<\mu} q_\lambda^2 q_\mu^2 - 72\sum q_\lambda^3 q_\mu - 144\sum q_\lambda^2 q_\mu q_\nu + 42\sum p_\lambda^3\left(q_\mu^2 + q_\nu^2\right) - 12\sum p_\lambda^3 q_\lambda q_\mu + \\ +48\sum p_\lambda^3 q_\mu q_\nu - 70\sum p_\lambda^2 q_\mu q_\nu\left(p_\mu + p_\nu\right) - 166\sum p_\lambda^2 p_\mu q_\lambda q_\mu + \\ +68\sum p_\lambda p_\mu q_\nu\left(p_\lambda q_\lambda + p_\mu q_\mu\right) - 62\sum p_\lambda p_\mu q_\nu^2\left(p_\lambda + p_\mu\right) + 4\sum q_\lambda^2 p_\lambda^2 p_\mu + 64\sum q_\lambda^2 p_\lambda p_\mu^2 - \\ -24p_1p_2p_3\sum q_\lambda^2 + 240p_1p_2p_3\sum q_\lambda q_\mu - 11\sum p_\lambda^2 p_\mu p_\nu\left(p_\lambda^2 + p_\mu^2\right) + 2\sum p_\lambda^4 p_\mu^2 - \\ -2\sum p_\lambda^4 p_\mu p_\nu + 10\sum p_\lambda^3 p_\mu^3 + 30{p_1}^2{p_2}^2{p_3}^2, \end{gathered}$$

здесь и далее переменные $p_\lambda = x_\alpha^2 + x_\beta^2$, $q_\lambda = \frac{1}{3}x_\alpha^3 - x_\alpha x_\beta^2$ $((\alpha\beta) = (12), (34), (56))$, индексы λ, μ различны в каждом члене соответствующей суммы и индексы λ, μ, $\nu = 1$, 2, 3 (циклически).

При построении системы Флатто–Винер для группы E_6 будем считать, что $I_2 = Q_2$.

1. 1. Запишем инвариант Флатто–Винер пятой степени в виде $I_5 = aQ_5$. Подействуем на многочлен I_5 оператором $I_2(\partial)$, получим тождество. Следовательно, с точностью до постоянного множителя инвариант I_5 совпадает с Q_5.

1. 2. Любой инвариант шестой степени группы E_6 представим в виде $a_1 {I_2}^3 + a_2 Q_6$, с неопределёнными коэффициентами a_1 , a_2. Для их нахождения запишем равенства $I_2(\partial) I_6(x) = 0$, $I_5(\partial) I_6(x) = 0$. Они приводят к уравнению $6a_1 + a_2 = 0$. Отсюда, $a_2 = -6a_1$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя, инвариант шестой степени имеет вид

$$I_6 = \sum p_\lambda^3 - 3\sum p_\lambda^2 p_\mu - 6\sum q_\lambda^2 + 60\sum q_\lambda q_\mu + 24 p_1 p_2 p_3.$$

1. 3. Инвариант восьмой степени представим в виде

$$I_8 = a_1 {I_2}^4 + a_2 Q_6 I_2 + a_3 Q_8.$$

Система уравнений $I_2(\partial) I_8(x) = 0$, $I_5(\partial) I_8(x) = 0$, $I_6(\partial) I_8(x) = 0$ приводит к следующей совместной системе линейных однородных уравнений $48a_1 + 5a_2 = 0$, $144a_1 + 33a_2 + 8a_3 = 0$, $432a_1 + 9a_2 - 16a_3 = 0$, $12a_1 - a_2 - a_3 = 0$, $9a_2 + 4a_3 = 0$, $432a_1 + 63a_2 + 8a_3 = 0$.

Её решение $a_2 = -\frac{48}{5}a_1$, $a_3 = \frac{108}{5}a_1$. Инвариант Флатто–Винер восьмой степени имеет вид:

$$I_8 = 5\sum p_\lambda^4 - 28\sum p_\lambda^3 p_\mu + 42\sum p_\lambda^2 p_\mu^2 - 48\sum q_\lambda^2 p_\lambda + 168\sum q_\lambda^2 p_\mu +$$
$$+1344\sum q_\lambda q_\mu p_\nu - 168\sum q_\lambda q_\mu p_\mu.$$

1. 4. Запишем инвариант девятой степени в виде

$$I_9 = a_1 Q_5 {I_2}^2 + a_2 Q_9.$$

Система $I_2(\partial) I_9(x) = 0, I_5(\partial) I_9(x) = 0, I_6(\partial) I_9(x) = 0, I_8(\partial) I_9(x) = 0$ приводит к уравнению $3a_1 + 5a_2 = 0$. Следовательно, инвариант девятой степени имеет вид

$$I_9 = 36\sum q_\lambda^2 (q_\mu - q_\nu) - 2\sum p_\lambda^3 (q_\mu - q_\nu) + 2\sum p_\lambda^2 q_\lambda (p_\mu - p_\nu) -$$
$$-5\sum p_\lambda q_\mu \left(p_\mu^2 - p_\nu^2\right) + 20\sum p_\lambda^2 (p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu).$$

1. 5. Инвариант двенадцатой степени можно записать в виде

$$I_{12} = a_1 {I_2}^6 + a_2 Q_6 {I_2}^3 + a_3 {Q_6}^2 + a_4 Q_8 {I_2}^2 + a_5 {Q_5}^2 I_2 + a_6 Q_{12}.$$

Как и ранее, из уравнений $I_2(\partial)\,I_{12}(x)=0$, $I_5(\partial)\,I_{12}(x)=0$, $I_6(\partial)\,I_{12}(x)=0$, $I_8(\partial)\,I_{12}(x)=0$, $I_9(\partial)\,I_{12}(x)=0$, получим однородную систему из 31 линейного уравнения относительно шести коэффициентов $a_i\left(i=\overline{1,6}\right)$. Она равносильна следующей однородной системе 5 уравнений: $96a_1+5a_2=0$, $864a_1+111a_2+14a_3+8a_4+16a_6=0$, $4320a_1+1149a_2+346a_3+376a_4+24a_5+2384a_6=0$, $4320a_1+951a_2+194a_3+184a_4+4a_5+736a_6=0$, $120a_1-2910a_2-635a_3-1260a_4-54a_5-5820a_6=0$.

Общее решение этой системы имеет вид: $a_2=-\dfrac{96}{5}a_1$, $a_3=\dfrac{10856}{155}a_1$, $a_4=\dfrac{8978}{93}a_1$, $a_5=\dfrac{114584}{93}a_1$, $a_6=-\dfrac{14114}{465}a_1$. Следовательно,

$$\begin{gathered}
I_{12}=155\sum p_\lambda^6-2046\sum p_\lambda^5p_\mu+6831\sum p_\lambda^4p_\mu^2-10164\sum_{\lambda<\mu}p_\lambda^3p_\mu^3+\\
+11880\sum p_\lambda^4p_\mu p_\nu-9240\sum p_\lambda^3p_\mu p_\nu\left(p_\mu+p_\nu\right)-9240p_1^2p_2^2p_3^2-2976\sum p_\lambda^3q_\lambda^2+\\
+20328\sum p_\lambda^3q_\mu^2-458304\sum p_\lambda^3q_\mu q_\nu-37488\sum p_\lambda^2p_\mu {q_\mu}^2-3564\sum p_\lambda^3q_\lambda q_\mu+\\
+23892\sum p_\lambda^2q_\lambda^2p_\mu+203280\sum p_\lambda q_\mu^2p_\nu(p_\lambda+p_\nu)+1848\sum p_\lambda^2p_\mu q_\lambda q_\mu-\\
-125664\sum p_\lambda^2q_\lambda\left(p_\mu q_\nu+p_\nu q_\mu\right)+351120\sum p_\lambda^2q_\mu q_\nu\left(p_\mu+p_\nu\right)-3696p_1p_2p_3\sum q_\lambda q_\mu+\\
+10856\sum q_\lambda^4+121616\sum q_\lambda^3q_\mu-247632\sum_{\lambda<\mu}q_\lambda^2q_\mu^2+2631552\sum q_\lambda^2q_\mu q_\nu.
\end{gathered}$$

Таким образом, построены базисные инварианты Флатто–Винер I_{m_i} группы E_6.

2. В вещественном евклидовом пространстве E^7 зададим прямоугольную систему координат $Ox_i\left(i=\overline{1,7}\right)$. Вершины центрально симметричного многогранника 3_{21} в пространстве E^7 определим радиус-векторами $(\pm1,0,\pm1,\pm1,0,0,0)$ и всеми получаемыми из них циклическими перестановками координат. Его 63 плоскости симметрии определяются уравнениями

$$x_i=0,\ \left(i=\overline{1,7}\right);\quad x_i\pm x_j\pm x_k\pm x_l=0.$$

где индексы i,j,k,l принимают значения следующих четвёрок чисел:$1,2,3,5$; $1,2,4,7$; $1,3,6,7$; $1,4,5,6$; $2,3,4,6$; $2,5,6,7$; $3,4,5,7$ [15].

Группу симметрий многогранника 3_{21} обозначим E_7. Образующие алгебры инвариантов этой группы имеют степени $m_i=2,6,8,10,12,14,18$ [12] и могут быть записаны в виде [15] :

$$Q_2=\sum x_i^2,\qquad Q_6=\sum x_i^6+5\sum x_i^4x_j^2+30\sum_{i<j<k}x_i^2x_j^2x_k^2,$$

$$Q_8=3\sum x_i^8+28\sum x_i^6x_j^2+70\sum_{i<j}x_i^4x_j^4+420\sum_{j<k}x_i^4x_j^2x_k^2,$$

$$Q_{10}=\sum x_i^{10}+15\sum x_i^8x_j^2+70\sum x_i^6x_j^4+420\sum_{j<k}x_i^6x_j^2x_k^2+1050\sum_{i<j}x_i^4x_j^4x_k^2,$$

$$Q_{12}=\sum x_i^{12}+22\sum x_i^{10}x_j^2+165\sum x_i^8x_j^4+308\sum_{i<j}x_i^6x_j^6+990\sum_{j<k}x_i^8x_j^2x_k^2+$$
$$+4620\sum x_i^6x_j^4x_k^2+11550\sum_{i<j<k}x_i^4x_j^4x_k^4,$$

$$Q_{14}=3\sum x_i^{14}+91\sum x_i^{12}x_j^2+1001\sum x_i^{10}x_j^4+3003\sum x_i^8x_j^6+6006\sum_{j<k}x_i^{10}x_j^2x_k^2+$$
$$+45045\sum x_i^8x_j^4x_k^2+84084\sum_{i<j}x_i^6x_j^6x_k^2+210210\sum_{j<k}x_i^6x_j^4x_k^4,$$

$$Q_{18}=\sum x_i^{18}+51\sum x_i^{16}x_j^2+1020\sum x_i^{14}x_j^4+6188\sum x_i^{12}x_j^6+14586\sum x_i^{10}x_j^8+$$
$$+6120\sum_{j<k}x_i^{14}x_j^2x_k^2+92820\sum x_i^{12}x_j^4x_k^2+1021020\sum_{j<k}x_i^{10}x_j^4x_k^4+408408\sum x_i^{10}x_j^6x_k^2+$$
$$+656370\sum_{i<j}x_i^8x_j^8x_k^2+3063060\sum x_i^8x_j^6x_k^4+5717712\sum_{i<j<k}x_i^6x_j^6x_k^6,$$

здесь и далее индексы $i,j,k,l,m,n,p=\overline{1,7}$ различны в любом члене соответствующей суммы; i,j,k принимают значения следующих троек чисел: $1,3,4$; $2,4,5$; $3,5,6$; $4,6,7$; $5,7,1$; $6,1,2$; $7,2,3$; а k,l,m - оставшиеся тройки.

2.1. Будем считать, что инвариант I_2 совпадает с Q_2, а искомый базисный инвариант шестой степени находится среди форм

$$a_1{I_2}^3+a_2Q_6.$$

Из уравнения $I_2\left(\partial\right)I_6\left(x\right)=0$ находим $11a_1+15a_2=0$. Отсюда, $a_1=-\dfrac{15}{11}a_2$. Следовательно, с точностью до постоянного множителя, инвариант шестой степени имеет вид

$$I_6=2\sum x_i^6-5\sum x_i^4x_j^2-120\sum_{i<j<k}x_i^2x_j^2x_k^2+45\sum_{k<l<m}x_k^2x_l^2x_m^2.$$

2. 2. Любой инвариант восьмой степени группы E_7 представим в виде

$$I_8=a_1{I_2}^4+a_2Q_6I_2+a_3Q_8.$$

Поэтому рассмотрим систему уравнений $I_2\left(\partial\right)I_8\left(x\right)=0$, $I_6\left(\partial\right)I_8\left(x\right)=0$, которая приводит к следующей совместной системе линейных однородных уравнений: $13a_1+16a_2+63a_3=0$, $78a_1+115a_2+630a_3=0$, $13a_1+35a_2+315a_3=0$, $52a_1+45a_2=0$, $171a_2+2268a_3=0$. Решение этой системы: $a_1=\dfrac{2835}{247}a_3$, $a_2=-\dfrac{252}{19}a_3$. Таким образом,инвариант Флатто–Винер восьмой степени имеет вид:

$$I_8=15\sum x_i^8-70\sum x_i^6x_j^2+77\sum_{i<j}x_i^4x_j^4+336\sum_{j<k}x_i^4x_j^2x_k^2+63\sum_{l<m}x_k^4x_l^2x_m^2+$$
$$+3402\sum_{i<j<k<l}x_i^2x_j^2x_k^2x_l^2-1512\sum_{k<l<m<n}x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2.$$

2. 3. Инварианты десятой степени группы E_7 могут быть представлены в виде

$$I_{10} = a_1 I_2^{\,5} + a_2 Q_6 I_2^{\,2} + a_3 Q_8 I_2 + a_4 Q_{10}.$$

Система $I_2(\partial) I_{10}(x) = 0$, $I_6(\partial) I_{10}(x) = 0$, $I_8(\partial) I_{10}(x) = 0$ приводит к уравнениям: $25a_1 + 29a_2 + 107a_3 + 45a_4 = 0$, $45a_1 + 69a_2 + 413a_3 + 315a_4 = 0$, $15a_1 + 16a_2 + 42a_3 = 0$, $15a_1 + 37a_2 + 329a_3 + 315a_4 = 0$, $10a_1 + 13a_2 + 42a_3 = 0$, $75a_1 + 108a_2 + 539a_3 + 315a_4 = 0$, $5a_1 + 3a_2 = 0$, $133a_2 + 1764a_3 + 1890a_4 = 0$, $25a_1 + 29a_2 + 176a_3 + 180a_4 = 0$. Её решение: $a_1 = -\dfrac{162}{23}a_4$, $a_2 = \dfrac{270}{23}a_4$, $a_3 = -\dfrac{45}{23}a_4$. Следовательно, инвариант I_{10} имеет вид:

$$\begin{gathered} I_{10} = 2\sum x_i^{10} - 15\sum x_i^8 x_j^2 + 50\sum x_i^6 x_j^4 + 480\sum_{j<k} x_i^6 x_j^2 x_k^2 - 90\sum_{l<m} x_k^6 x_l^2 x_m^2 - \\ -1320\sum_{i<j} x_i^4 x_j^4 x_k^2 - 45\sum_{k<l} x_k^4 x_l^4 x_m^2 + 810\sum_{j<k<l} x_i^4 x_j^2 x_k^2 x_l^2 - 3240\sum_{i<j<k} x_m^4 x_i^2 x_j^2 x_k^2 + \\ +2160\sum_{l<m<n} x_k^4 x_l^2 x_m^2 x_n^2 - 6480\sum_{i<j<k<l<m} x_i^2 x_j^2 x_k^2 x_l^2 x_m^2. \end{gathered}$$

Отметим, что в [16] при решении системы была допущена ошибка. Здесь приведено верное решение.

2. 4. Запишем инвариант группы E_7 двенадцатой степени

$$I_{12} = a_1 I_2^{\,6} + a_2 Q_6 I_2^{\,3} + a_3 Q_6^{\,2} + a_4 Q_8 I_2^{\,2} + a_5 Q_5^{\,2} I_2 + a_6 Q_{12}.$$

Как и ранее, из уравнений $I_2(\partial) I_{12}(x) = 0, I_6(\partial) I_{12}(x) = 0, I_8(\partial) I_{12}(x) = 0$, $I_{10}(\partial) I_{12}(x) = 0$ получим однородную систему 16 линейного уравнения относительно коэффициенов a_i $\left(i = \overline{1,6}\right)$. Она равносильна следующей однородной системе 5 уравнений: $17a_1 + 19a_2 + 21a_3 + 67a_4 + 27a_5 + 33a_6 = 0$, $255a_1 + 354a_2 + {}$ $+ 485a_3 + 1657a_4 + 900a_5 + 1485a_6 = 0$, $1020a_1 + 1209a_2 + 1390a_3 + 4172a_4 + 1260a_5 = 0$, $153a_1 + 378a_2 + 875a_3 + 3409a_4 + 3465a_5 + 10395a_6 = 0$, $8a_1 - 249a_2 - 458a_3 - 3332a_4 - {}$ $- 3402a_5 - 8316a_6 = 0$.

Общее решение этой системы: $a_1 = \frac{280}{761}a_4$, $a_2 = -\frac{1288}{761}a_4$, $a_3 = -\frac{490}{761}a_4$, $a_5 = -\frac{970}{761}a_4$, $a_6 = \frac{1735}{8371}a_4$. Следовательно,

$$I_{12} = 30\sum x_i^{12} - 330\sum x_i^{10}x_j^2 + 913\sum x_i^8x_j^4 - 924\sum_{i<j} x_i^6x_j^6 + 1584\sum_{j<k} x_i^8x_j^2x_k^2 +$$
$$+1947\sum_{l<m} x_k^8x_l^2x_m^2 - 1232\sum x_i^6x_j^4x_k^2 - 2618\sum x_k^6x_l^4x_m^2 - 7392\sum_{i<j<k} x_i^4x_j^4x_k^4 +$$
$$+4851\sum_{k<l<m} x_k^4x_l^4x_m^4 - 41580\sum_{j<k<l} x_i^6x_j^2x_k^2x_l^2 + 33264\sum_{i<j<k} x_m^6x_i^2x_j^2x_k^2 -$$
$$-7392\sum_{l<m<n} x_k^6x_l^2x_m^2x_n^2 + 51282\sum_{\substack{i<j\\k<l}} x_i^4x_j^4x_k^2x_l^2 + 20328\sum_{\substack{i<j\\k<m}} x_i^4x_j^2x_k^2x_m^2 -$$
$$-11088\sum_{\substack{i<m\\j<k}} x_i^4x_m^4x_j^2x_k^2 + 133056\sum_{i<j<k<l} x_m^4x_i^2x_j^2x_k^2x_l^2 -$$
$$-99792\sum_{j<k<l<m} x_i^4x_j^2x_k^2x_l^2x_m^2 + 798336\sum_{i<j<k<l<m<n} x_i^2x_j^2x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2.$$

2. 5. Инварианты четырнадцатой степени можно записать в виде

$$I_{14} = a_1{I_2}^7 + a_2Q_6{I_2}^4 + a_3{Q_6}^2I_2 + a_4Q_8{I_2}^3 + a_5Q_8Q_6 + a_6Q_{10}{I_2}^2 + a_7Q_{12}I_2 + a_8Q_{14}.$$

Из уравнений $I_2(\partial)\,I_{14}(x) = 0$, $I_6(\partial)\,I_{14}(x) = 0$, $I_8(\partial)\,I_{14}(x) = 0$, $I_{10}(\partial)\,I_{14}(x) = 0$, $I_{12}(\partial)\,I_{14}(x) = 0$, получаем совместную систему 32 линейных однородных уравнений, равносильную следующей системе 7 уравнений: $133a_1 + 145a_2 + 157a_3 + 495a_4 + 531a_5 + 193a_6 + 229a_7 + 819a_8 = 0$, $399a_1 + 535a_2 + 703a_3 + 2385a_4 + 3049a_5 + 1229a_6 + 1925a_7 + 9009a_8 = 0$, $399a_1 + 595a_2 + 883a_3 + 3249a_4 + 4765a_5 + 2147a_6 + 4389a_7 + 27027a_8 = 0$, $665a_1 + 1025a_2 + 1583a_3 + 5985a_4 + 9289a_5 + 4235a_6 + 9317a_7 + 63063a_8 = 0$, $133a_1 + 165a_2 + 209a_3 + 621a_4 + 821a_5 + 235a_6 + 198a_7 = 0$, $399a_1 + 925a_2 + 1981a_3 + 8001a_4 + 16219a_5 + 7805a_6 + 22407a_7 + 189189a_8 = 0$, $56a_1 - 385a_2 - 770a_3 - 5460a_4 - 6235a_5 - 5474a_6 - 13068a_7 - 81081a_8 = 0$. Её решение: $a_1 = \frac{24270246}{322121}a_8$, $a_2 = -\frac{234215982}{1610605}a_8$, $a_3 = \frac{26486460}{322121}a_8$, $a_4 = -\frac{1621620}{322121}a_8$, $a_5 = -\frac{81081}{10391}a_8$, $a_6 = \frac{13648635}{322121}a_8$, $a_7 = -\frac{190827}{10391}a_8$.

Поэтому инвариант четырнадцатой степени имеет вид:

$$
\begin{gathered}
I_{14} = 3252\sum x_i^{14} - 49322\sum x_i^{12}x_j^2 + 224042\sum x_i^{10}x_j^4 - 297570\sum x_i^8x_j^6 + \\
+777504\sum_{j<k} x_i^{10}x_j^2x_k^2 + 283374\sum_{l<m} x_k^{10}x_l^2x_m^2 - 2837016\sum x_i^8x_j^4x_k^2 - \\
-695331\sum x_k^8x_l^4x_m^2 + 4464096\sum_{i<j} x_i^6x_j^6x_k^2 + 3049956\sum_{k<l} x_k^6x_l^6x_m^2 + \\
+2812992\sum_{j<k} x_i^6x_j^4x_k^4 - 2098278\sum_{l<m} x_k^6x_l^4x_m^4 - 1636362\sum_{j<k<l} x_i^8x_j^2x_k^2x_l^2 - \\
-2299752\sum_{i<j<k} x_m^8x_i^2x_j^2x_k^2 - 235872\sum_{l<m<n} x_k^8x_l^2x_m^2x_n^2 - 7636356\sum_{k<l} x_i^6x_j^4x_k^2x_l^2 - \\
-6604416\sum_{j<k} x_m^6x_i^4x_j^2x_k^2 + 1651104\sum_{j<k} x_i^6x_m^4x_j^2x_k^2 - 1100736\sum_{k<m} x_i^6x_j^4x_k^2x_m^2 + \\
+38697750\sum_{i<j<k} x_i^4x_j^4x_k^4x_l^2 - 31646160\sum_{i<j<k} x_i^4x_j^4x_k^4x_m^2 + 18574920\sum_{k<l<m} x_k^4x_l^4x_m^4x_n^2 - \\
+66044160\sum_{\substack{n<i\\ j<k<l}} x_n^4x_i^4x_j^2x_k^2x_l^2 - 20638800\sum_{\substack{i<j\\ k<l<m}} x_m^4x_n^4x_i^2x_j^2x_k^2 - \\
-107321760\sum_{\substack{m<n\\ i<j<k}} x_m^ix_j^4x_k^2x_l^2x_m^2 + 49533120\sum_{j<k<l<m<n} x_i^4x_j^2x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2 - \\
-1783192320x_1^2x_2^2x_3^2x_4^2x_5^2x_6^2x_7^2.
\end{gathered}
$$

2. 6. Инвариант восемнадцатой степени представим в виде

$$
\begin{gathered}
I_{18} = a_1{I_2}^9 + a_2Q_6{I_2}^6 + a_3{Q_6}^2{I_2}^3 + a_4{Q_6}^3 + a_5Q_8{I_2}^5 + a_6Q_8Q_6{I_2}^2 + a_7{Q_8}^2I_2 + \\
+a_8Q_{10}{I_2}^4 + a_9Q_{10}Q_6I_2 + a_{10}Q_{10}Q_8 + a_{11}Q_{12}{I_2}^3 + a_{12}Q_{12}Q_6 + a_{13}Q_{14}{I_2}^2 + a_{14}Q_{18}.
\end{gathered}
$$

Из уравнений $I_2(\partial)\, I_{18}(x) = 0, I_6(\partial)\, I_{18}(x) = 0, I_8(\partial)\, I_{18}(x) = 0, I_{10}(\partial)\, I_{18}(x) = = 0,\ I_{12}(\partial)\, I_{18}(x) = 0,\ I_{14}(\partial)\, I_{18}(x) = 0$ получаем совместную систему 88 линейных однородных уравнений. Решение этой системы:

$$
a_1 = -\frac{224760471962377}{1177434995692}a_{14}, \quad a_2 = \frac{125992387715922}{294358748923}a_{14}, \quad a_3 = -\frac{412851377575364}{1471793744615}a_{14},
$$

$$
a_4 = \frac{76869873080}{10150301687}a_{14}, \quad a_5 = \frac{11936255768879}{588717497846}a_{14}, \quad a_6 = \frac{41333454425666}{1471793744615}a_{14},
$$

$$
a_7 = \frac{352924349739}{203006033740}a_{14}, \quad a_8 = -\frac{67283347778218}{294358748923}a_{14}, \quad a_9 = \frac{99914730292}{10150301687}a_{14},
$$

$$
a_{10} = -\frac{22509873672}{10150301687}a_{14}, \quad a_{11} = \frac{446774326842480}{3237946238153}a_{14}, \quad a_{12} = -\frac{60195292248}{10150301687}a_{14},
$$

$$
a_{13} = -\frac{35198762013180}{3237946238153}a_{14}.
$$

Следовательно, базисный инвариант Флатто – Винер 18-ой степени имеет вид:

$$I_{18} = 111658\sum x_i^{18} - 2847279\sum x_i^{16}x_j^2 + 22137060\sum x_i^{14}x_j^4 - 70202860\sum x_i^{12}x_j^6 +$$
$$+64163814\sum x_i^{10}x_j^8 + 56793600\sum_{j<k} x_i^{14}x_j^2x_k^2 + 38014380\sum_{m<n} x_l^{14}x_m^2x_n^2 -$$
$$-287890512\sum x_i^{12}x_j^4x_k^2 - 168384762\sum x_l^{12}x_m^4x_n^2 + 702461760\sum x_i^{10}x_j^6x_k^2 +$$
$$+533585052\sum x_l^{10}x_m^6x_n^2 + 692659968\sum_{j<k} x_i^{10}x_j^4x_k^4 + 169387218\sum_{m<n} x_l^{10}x_m^4x_n^4 -$$
$$-933095592\sum_{i<j} x_i^8x_j^8x_k^2 - 1210411917\sum_{l<m} x_l^8x_m^8x_n^2 - 494990496\sum x_i^8x_j^6x_k^4 +$$
$$+875728854\sum x_l^8x_m^6x_n^4 + 228708480\sum_{i<j<k} x_i^6x_j^6x_k^6 - 5480426952\sum_{l<m<n} x_l^6x_m^6x_n^6 -$$
$$-1660568364\sum_{j<k<l} x_i^{12}x_j^2x_k^2x_l^2 + 1078642656\sum_{i<j<k} x_m^{12}x_i^2x_j^2x_k^2 -$$
$$-428382864\sum_{m<n<p} x_l^{12}x_m^2x_n^2x_p^2 + 4890481596\sum_{k<l} x_i^{10}x_j^4x_k^2x_l^2 -$$
$$-5153292144\sum_{j<k} x_m^{10}x_i^4x_j^2x_k^2 + 1279133856\sum_{j<k} x_i^{10}x_m^4x_j^2x_k^2 +$$
$$+1076971896\sum_{k<m} x_i^{10}x_j^4x_k^2x_m^2 - 766377612\sum_{k<l} x_i^8x_j^6x_k^2x_l^2 +$$

$$+17510901408\sum_{j<k} x_m^8x_i^6x_j^2x_k^2 - 11490150672\sum_{j<k} x_i^8x_m^6x_j^2x_k^2 -$$
$$-628539912\sum_{k<m} x_i^8x_j^6x_k^2x_m^2 - 20055385350\sum_{k<l} x_i^8x_j^2x_k^4x_l^4 -$$
$$-11412961560\sum_{j<k} x_m^8x_i^2x_j^4x_k^4 - 4079995920\sum_{j<k} x_i^8x_m^2x_j^4x_k^4 -$$
$$-1212971760\sum_{k<m} x_i^8x_j^2x_k^4x_m^4 + 14434363944\sum_{k<l} x_i^4x_j^2x_k^6x_l^6 -$$
$$-102918816\sum_{j<k} x_m^4x_i^2x_j^6x_k^6 + 6072210144\sum_{j<k} x_i^4x_m^2x_j^6x_k^6 +$$
$$+9417071664\sum_{k<m} x_i^4x_j^2x_k^6x_m^6 + 14472958500\sum_{j<k<l} x_i^6x_j^4x_k^4x_l^4 -$$
$$-6175128960\sum_{i<j<k} x_m^6x_i^4x_j^4x_k^4 - 5660534880\sum_{m<n<p} x_l^6x_m^4x_n^4x_p^4 -$$
$$-6704425728\sum_{i<j<k<l} x_m^{10}x_i^2x_j^2x_k^2x_l^2 + 7189614432\sum_{m<n<p<q} x_l^{10}x_m^2x_n^2x_p^2x_q^2 +$$

$$
\begin{gathered}
+45817251480\sum_{k<l<m}x_i^8x_j^4x_k^2x_l^2x_m^2+14555661120\sum_{j<k<l}x_i^8x_m^4x_j^2x_k^2x_l^2+\\
+37712394720\sum_{j<k<l}x_m^8x_i^4x_j^2x_k^2x_l^2-59545886400\sum_{i<j<k}x_m^8x_n^4x_i^2x_j^2x_k^2-\\
-50636057472\sum_{\substack{m<i\\ j<k<l}}x_m^6x_i^6x_j^2x_k^2x_l^2+100654602048\sum_{\substack{m<n\\ i<j<k}}x_m^6x_n^6x_i^2x_j^2x_k^2-\\
-115474911552\sum_{\substack{i<j\\ k<l<m}}x_i^6x_j^6x_k^2x_l^2x_m^2-83364240960\sum_{\substack{i<j\\ k<l}}x_m^6x_i^4x_j^4x_k^2x_l^2+\\
+13894040160\sum_{\substack{j<m\\ k<l}}x_i^6x_j^4x_m^4x_k^2x_l^2+46313467200\sum_{\substack{m<n\\ j<k}}x_i^6x_m^4x_n^4x_j^2x_k^2-\\
-40138338240\sum_{\substack{j<k\\ m<n}}x_i^6x_j^4x_k^4x_m^2x_n^2-289459170000\sum_{i<j<k<l}x_i^4x_j^4x_k^4x_l^4x_m^2+\\
+115783668000\sum_{i<j<k<m}x_i^4x_j^4x_k^4x_m^4x_n^2-301699157760\sum_{j<k<l<m<n}x_i^8x_j^2x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2-\\
-111152321280\sum_{i<j<k<l}x_m^6x_n^4x_i^2x_j^2x_k^2x_l^2+213041949120\sum_{n<p<q<r}x_l^6x_m^4x_n^2x_p^2x_q^2x_r^2-\\
-439977938400\sum_{\substack{i<j<k\\ m<n<p}}x_i^4x_j^4x_k^4x_m^2x_n^2x_p^2-764172208800\sum_{\substack{m<n<p\\ i<j<k}}x_m^4x_n^4x_p^4x_i^2x_j^2x_k^2+\\
+208410602400\sum_{\substack{l<m<n\\ p<q<r}}x_l^4x_m^4x_n^4x_p^2x_q^2x_r^2+\\
+4001483566080\sum_{j<k<l<m<n<p}x_i^6x_j^2x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2x_p^2-\\
-1667284819200\sum_{\substack{i<j\\ k<l<m<n<p}}x_i^4x_j^4x_k^2x_l^2x_m^2x_n^2x_p^2
\end{gathered}
$$

Таким образом, построена система базисных инвариантов Флатто–Винер группы E_7.

Заключение

В работе в явном виде построена система базисных инвариантов Флатто–Винер групп E_6 и E_7.

В дальнейшем предполагается построение систем базисных инвариантов Флатто–Винер групп H_3 и H_4.

Список литературы

1. Shephard G.C., Todd J.A. Finite unitary reflection groups // Can. J. Math. – 1954. – 6, N2. – P. 274 - 304.

2. Chevalley C. Invariants of finite groups generated by reflections // Amer. j. Math. – 1955. – V.77 – P. 778 - 782.
3. Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. М.: ИЛ, 1947, – 418 с.
4. Игнатенко В.Ф. Геометрия алгебраических поверхностей с симметриями // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники. М.: Наука, 1980. – Т.11. – с. 203 – 240.
5. Игнатенко В.Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Проблемы геометрии / Итоги науки и техники. М.: Наука, 1989. – Т.21. – с. 155 – 208.
6. Винберг Э. Б., Попов В.Л. Теория инвариантов // Итоги науки итехники. Соврм. пробл. математики. 1989. – Т.55. – с. 137 - 309.
7. Shepler A.V. Semiinvariants of finite reflection groups // Department of Mathematics, University of California at San Diego, La Jolla, California, 92093 - 0112, *E - mail address*: ashepler@euclid.ucsd.edu
8. Flatto L. Invariants of finite reflection groups // Enseign. Math. 1978. – V.24. – № 3 – 4. – P. 237 - 292.
9. Кобец А. А., Романенко И.А. Особые многообразия для групп J_2^r, A_3 и A_4// Труды математического факультета. – Симферополь, 1997 – С.72 - 78.
10. Кобец А. А. Об одном классе алгебраических поверхностей с группой симметрий правильного 24-гранника // Таврич. нац. ун-т. – Симферополь, 1993. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины – №1861 УК-93.
11. Кобец А. А. Об одной системе базисных инвариантов группы E_8 // Тезисы докл. Пятая международная конференция им. акад. М. Кравчука. – Киев, 1996. – С. 72 -73.
12. Coxeter H. S. M. The polytope 2_{21}, whose twehty seven vertices correspond to the lines on the general cubic surface// Amer. J. Math. 1940. – v.76, № 3. – p. 457 - 486.
13. Coxeter H. S. M. The product of the generators of a finite group generated by reflections// Duke Math. j. 1951. – v.18, – p. 765 - 782.
14. Frame J. S. The classes and representations of the groups of 27 lines and 28 bitangents // Annali di Matematika. 1951 – v. 32, – p. 83 - 119.
15. Игнатенко В.Ф. Об инвариантах конечных групп, порождённых отражениями // Мат. сб. – Москва, 1983. – 120(162) – №4 – с. 556 - 568.
16. Кобец А.А., Об одной системе базисных инвариантов группы E_7 // Таврич. нац. ун-т. – Рус. – Деп. в ГНТБ Украины – №2213 УК - 95

Нехай G скінчена група симетрій, що породжена віддзеркаленнями відносно гіперплощин в дійсному просторі E^n. Знайдені алгебри інваріантів Флатто-Вінер груп E_6 та E_7 .

Let G be a finite group of symmetries with respect to hyperplanes in real space E^n. Algebras of Flatto-Weiner invariants of groups E_6 and E_7 are found.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 42–52.

А. И. Криворучко

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ С АФФИННЫМИ ОСЯМИ СИММЕТРИИ

Получена аффинная классификация пар аффинных отражений относительно аффинных прямых, а также групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых; вычислены все полуинварианты этих групп.

Введение. Пусть Φ – алгебраическая поверхность, заданная в n-мерном аффинном пространстве уравнением $F = 0$, где F – неприводимый многочлен. Если Φ имеет бесконечное множество гиперплоскостей симметрии, то F – инвариант соответствующей бесконечной группы, порожденной отражениями относительно гиперплоскостей. Поэтому построение канонических уравнений алгебраических поверхностей с бесконечными множествами гиперплоскостей симметрии сводится к вычислению базисных инвариантов бесконечных групп отражений, чему посвящен целый ряд работ (см., например, [1]–[3]). В то же время при изучении алгебраических поверхностей с бесконечными множествами осей симметрии приходится учитывать следующее: если поверхность Φ имеет бесконечное множество осей симметрии, то F, являясь полуинвариантом соответствующей бесконечной группы, порожденной отражениями относительно прямых, может не быть инвариантом какой-либо бесконечной группы отражений. Пример такой поверхности, как следует из результатов работ [4] и [5], – линейчатая поверхность Кэли, которая задается в аффинной системе координат (x_1, x_2, x_3) трехмерного аффинного пространства уравнением $x_1 + x_2x_3 + x_3^3 = 0$. Поэтому найденные в [5] инварианты нецентроаффинных групп, порожденных отражениями относительно прямых и действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях, не позволяют прямо получить уравнение любой нецилиндрической алгебраической поверхности с бесконечным множеством осей симметрии, имеющих пустое пересечение. В связи с этим возникает *следующая задача*: Вычислить полуинварианты групп, порожденных аффинными отражениями относительно прямых.

Ниже эта задача решается для бесконечных групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых.

Цель работы – построение аффинной классификации пар отражений и групп, порождаемых двумя отражениями относительно прямых, а также вычисление полуинвариантов таких групп.

Основные результаты работы: Получена аффинная классификация пар отражений относительно прямых и групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых; вычислены полуинварианты бесконечных групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых.

1^o. **Инварианты некоторых однопараметрических групп.** Пусть V – линейное вещественное n-мерное пространство,

$$(e_1, \dots, e_n) \tag{1}$$

– некоторый заданный в этом пространстве базис с соответствующей системой координатных функций $(x_1, \dots, x_n)$ (т.е. двойственным базисом в пространстве V^*).

Если $A \subseteq V$, то $\langle A \rangle$ – линейная оболочка A.

Если X – множество с заданной на нем системой координат $(x, \dots, z)$, то равенство $T = \{x' = f(x, \dots, z), \dots, z' = h(x, \dots, z)\}$ означает, что $T : X \to X$ – отображение, имеющее координатное представление $x' = f(x, \dots, z), \dots, z' = h(x, \dots, z)$; при этом если значение y' некоторой координаты y не определяется в координатном представлении T, то считается, что $y' = y$.

Пусть Λ – аффинная прямая, P – гиперплоскость, лежащие в V, и $\Lambda \nparallel P$; тогда (Λ, P) обозначает отражение относительно Λ в направлении P. Если $c \in \Lambda$, a – направляющий вектор Λ, $\xi \in V^*$, $P = \ker \xi$, то для любого вектора $v \in V$

$$(\Lambda, P)(v) = -v + 2\,(\xi(a))^{-1}\,\xi(v-c)\,a + 2\,c.$$

Далее $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $\mathbf{K} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$; $\mathbf{K}^G$ – алгебра полиномиальных инвариантов, а $\mathbf{K}(G)$ – множество всех полуинвариантов группы G.

Для любого подмножества $I \cup \{x, \dots, z\}$ кольца $\mathbf{K}$ пусть $I\,\langle x, \dots, z\rangle$ – множество всех многочленов с коэффициентами, принадлежащими I, "переменными" $x, \dots, z$ и одночленами, имеющими только четные степени относительно "переменных" $x, \dots, z$; $I\lfloor x, \dots, z\rfloor$ – множество всех многочленов с коэффициентами, принадлежащими I, "переменными" $x, \dots, z$ и одночленами, имеющими только нечетные степени относительно "переменных" $x, \dots, z$.

Пусть $F = f(x, \dots, z) \in I[x, \dots, z]$. Из равенства $f(-x, \dots, -z) = F$ следует, что $F \in I\,\langle x, \dots, z\rangle$, а если $f(-x, \dots, -z) = -F$, то $F \in I\lfloor x, \dots, z\rfloor$.

В системе координат (1) для любого $t \in \mathbb{R}$ положим

$$A^t = \{x_1' = x_1 + t\,x_2 + t^2\,x_3/2 + t^3/6,\ \ x_2' = x_2 + t\,x_3 + t^2/2,\ \ x_3' = x_3 + t\},$$

$$B^t = \{x_1' = x_1 + t\,x_2,\ \ x_3' = x_3 + t\}, \quad P^t = \{x_1' = x_1 + t\,x_2 + t^2/2,\ \ x_2' = x_2 + t\},$$

$$N^t = \{x_1' = x_1 + t\,x_2 + t^2\,x_3/2,\ \ x_2' = x_2 + t\,x_3,\ \ x_4' = x_4 + t\}, \quad S^t = \{x_1' = x_1 + t\}.$$

Если $t \neq 0$, то A^t – параболический сдвиг с переносом, B^t – винтовой сдвиг, S^t – перенос, P^t – параболический поворот, N^t – винтовой параболический сдвиг.

$\mathcal{A} = (A^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (B^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{P} = (P^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{N} = (N^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{S} = (S^t : t \in \mathbb{R})$ – однопараметрические группы. Найдем их инварианты.

Пусть $F = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}$.

Если $F \in \mathbf{K}^{\mathcal{A}}$, то применяя к F преобразование A^t, получим

$$F = f(x_1 + t\,x_2 + t^2 x_3/2 + t^3/6,\ x_2 + t\,x_3 + t^2/2,\ x_3 + t,\ x_4, \dots, x_n).$$

Полагая $t = -x_3$, получим $F = f(x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3,\ x_2 - x_3^2/2,\ 0,\ x_4, \dots, x_n)$. Но $x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3,\ 2\,x_2 - x_3^2,\ x_4, \dots, x_n$ – инварианты группы $\mathcal{A}$. Следовательно,

$$\mathbf{K}^{\mathcal{A}} = \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3,\ 2\,x_2 - x_3^2,\ x_4, \dots, x_n]. \tag{2}$$

Аналогично показывается, что

$$\begin{gathered} \mathbf{K}^{\mathcal{B}} = \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3,\ x_2,\ x_4, \dots, x_n], \quad \mathbf{K}^{\mathcal{P}} = \mathbb{R}[2x_1 - x_2^2,\ x_3, \dots, x_n], \\ \mathbf{K}^{\mathcal{N}} = \mathbb{R}[x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2,\ x_2 - x_3x_4,\ x_3,\ x_5, \dots, x_n], \quad \mathbf{K}^{\mathcal{S}} = \mathbb{R}[x_2, \dots, x_n]. \end{gathered} \tag{3}$$

2^o**. Группы, порожденные двумя отражениями.** Пусть в пространстве V для каждого $i \in \{1;\ 2\}$ задано отражение $R_i = (\Lambda_i,\ P_i)$ относительно аффинной прямой Λ_i в направлении линейной гиперплоскости P_i; L_i – линейная прямая, параллельная Λ_i; $S = L_1 + L_2$, $Q = P_1 \cap P_2$; $T = R_2R_1$, G – группа, порожденная R_1 и R_2; $\bar{G}$ – замыкание группы G в топологии Зарисского группы $\mathrm{Aff}(V)$ всех аффинных преобразований пространства V; $F \in \mathbf{K}(G)$.

Очевидно, что $R_1^2 = R_2^2 = \mathrm{id}$, $T\,R_1 = R_1T^{-1} = R_2$. Поэтому

$$G = \{T^m : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{T^m R_1 : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть χ_F – характер группы G, являющийся весом F (т.е. $F \cdot g^{-1} = \chi_F(g)\,F$ для каждого элемента g группы G). Тогда $\chi_F(G) \subseteq \{-1;\ 1\}$. При этом если G' – компонента единицы id_V группы G, то $\chi_F(G') = \{1\}$. Кроме того, $F \in \mathbf{K}(\bar{G})$, а F как полуинвариант группы $\bar{G}$ имеет вес $\tilde{\chi}_F$, являющийся непрерывным продолжением веса χ_F, и $\tilde{\chi}_F(G) \subseteq \{-1;\ 1\}$.

Рассматривая все возможные случаи “взаимного расположения” P_1, P_2, Λ_1, Λ_2, построим канонический базис пары $(R_1,\ R_2)$, и в этом базисе найдем координатные представления элементов группы $\bar{G}$, а также полуинварианты группы G.

Не нарушая общности, далее считаем, что $\Lambda_1 = L_1$; при этом если $L_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$, то и $\Lambda_2 = L_2$, а если $P_1 \neq P_2$, $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ и $V = S \oplus Q$, то $\vec{0} \in \Lambda_2 + Q$.

Отсюда следует, что $P_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$. Зафиксируем $c \in P_1 \cap \Lambda_2$. При этом если $Q \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$, то считаем, что $c \in Q \cap \Lambda_2$.

1. $L_1 = L_2$, $P_1 = P_2$.

При построении канонического базиса (1) пары $(R_1,\ R_2)$ полагаем, что $e_1 \in L_1$, $(e_2, \dots, e_n)$ – базис в P_1, причем если $L_1 \neq \Lambda_2$, то $e_2 = 2\,c$.

В каноническом базисе $R_1 = \{x'_i = -x_i \ \ (i > 1)\}$.

1.1. $L_1 = \Lambda_2$.

В этом случае $R_1 = R_2$, $G = \{\mathrm{id},\, R_1\}$.

Пусть $F = f(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда $f(x_1, -x_2, \ldots, -x_n) \in \{-F,\, F\}$ в силу R_1-полуинвариантности F. Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1]\langle x_2, \ldots, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1]\lfloor x_2, \ldots, x_n\rfloor$.

1.2. $L_1 \neq \Lambda_2$.

Теперь $e_2/2 \in \Lambda_2$ и $e_1 \parallel \Lambda_2$. Полагая $\mathcal{S} = (S^t \,:\, t \in \mathbb{R})$, где $S^t = \{x'_2 = x_2 + t\}$, имеем: $T = S^1$, $\bar{G} = \mathcal{S} \cup (\mathcal{S} \cdot R_1)$. Но тогда $F \in \mathbf{K}^{\mathcal{S}}$, т.е. $F \in \mathbb{R}[x_1, x_3, \ldots, x_n]$, и, как в случае **1.1**, получаем: $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1]\langle x_3, \ldots, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1]\lfloor x_3, \ldots, x_n\rfloor$.

2. $L_1 = L_2$, $P_1 \neq P_2$.

Построим в V канонический базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы $e_1, \ldots, e_n$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$e_1 \in L_1$, $e_2 \in P_1 \setminus Q$, $e_1 + 2\,e_2 \in P_2$; если $n > 2$, то $(e_3, \ldots, e_n)$ – базис Q; при этом если $L_1 + Q \neq \Lambda_2 + Q$ (и тогда $c \notin Q$), то $e_2 = 2\,c$, а если $L_1 + Q = \Lambda_2 + Q$, $L_1 \neq \Lambda_2$ (и тогда $n > 2$, $c \in Q \setminus \{\vec{0}\}$), то $e_3 = 2\,c$.

2.1. $L_1 = \Lambda_2$.

Для любого вещественного t пусть $D^t = \{x'_1 = x_1 + t\,x_2\}$. Тогда $\mathcal{D} = \{D^t \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ – однопараметрическая группа сдвигов, $T = D^1$. Поэтому $\bar{G} = \mathcal{D} \cup (\mathcal{D} \cdot R_1)$.

Из $\mathcal{D}$-инвариантности F имеем:

$$F = f(x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_2, \ldots, x_n]. \tag{4}$$

Теперь, как и в случае **1.1**, получаем:

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}\langle x_2, \ldots, x_n\rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}\lfloor x_2, \ldots, x_n\rfloor.$$

2.2. $L_1 + Q \neq \Lambda_2 + Q$.

Определяя P^t и $\mathcal{P}$ так же, как в п. 1^o, получаем: $T = P^1$. Отсюда $\bar{G} = \mathcal{P} \cup (\mathcal{P} \cdot R_1)$.

Теперь из (3) имеем: $F = f(2x_1 - x_2^2,\, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^{\mathcal{P}}$. Поэтому из R_1-полуинвариантности F следует, что $f(2x_1 - x_2^2,\, -x_3, \ldots, -x_n) \in \{-F,\, F\}$. Отсюда

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[2x_1 - x_2^2]\langle x_3, \ldots, x_n\rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[2x_1 - x_2^2]\lfloor x_3, \ldots, x_n\rfloor.$$

2.3. $L_1 + Q = \Lambda_2 + Q$, $L_1 \neq \Lambda_2$.

Определяя B^t и $\mathcal{B}$ так же, как в п. 1^o, имеем: $T = B^1$, $\bar{G} = \mathcal{B} \cup (\mathcal{B} \cdot R_1)$.

Теперь из (3) получаем:

$$F = f(x_1 - x_2x_3,\, x_2,\, x_4, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3,\, x_2,\, x_4, \ldots, x_n]. \tag{5}$$

Отсюда $f(x_1 - x_2x_3,\, -x_2,\, -x_4, \ldots, -x_n) \in \{-F,\, F\}$ в силу R_1-полуинвариантности F, и $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1 - x_2x_2]\langle x_2,\, x_4 \ldots, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3]\lfloor x_2,\, x_4 \ldots, x_n\rfloor$.

3. $L_1 \neq L_2$, $P_1 = P_2$.

Построим в V канонический базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы $e_1, \ldots, e_n$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$e_1 \in P_1 \cap S$; $e_2 \in L_1$; $e_1 + 2\,e_2 \in L_2$; если $n > 2$, то $(e_1, e_3, \ldots, e_n)$ – базис P_1; если $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ (и тогда $n > 2$), то $e_3 = 2\,c$.

3.1. $\Lambda_1 = L_1$, $\Lambda_2 = L_2$.

Определяя D^t и $\mathcal{D}$ так же, как случае **2.1**, получаем: $T = D^1$, $\bar{G} = \mathcal{D} \cup (\mathcal{D} \cdot R_1)$.

Из $\mathcal{D}$-инвариантности F следует (4). Теперь, как в случае **1.1**, получаем:

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2]\langle x_3, \ldots, x_n\rangle; \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2]\lfloor x_3, \ldots, x_n\rfloor.$$

3.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Определяя B^t и $\mathcal{B}$ так же, как в п. 1^o, имеем: $T = B^1$, $\bar{G} = \mathcal{B} \cup (\mathcal{B} \cdot R_1)$.

Теперь из $\mathcal{B}$-инвариантности F получаем (5). Поэтому из R_1-полуинвариантности F следует, что $f(-x_1 + x_2x_3, x_2, -x_4, \ldots, -x_n) \in \{-F, F\}$. Отсюда

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2]\langle x_1 - x_2x_3, x_4, \ldots, x_n\rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2]\lfloor x_1 - x_2x_3, x_4, \ldots, x_n\rfloor.$$

4. $L_1 \neq L_2$, $V = S \oplus Q$.

Пусть J – отражение относительно плоскости Q в направлении плоскости S.

Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Построим в V базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы $e_1, \ldots, e_n$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $e_1 \in P_1 \cap S$; $e_2 \in L_1$; при этом если $L_2 \subseteq P_1$, а $L_1 \nsubseteq P_2$, то $e_1 + 2\,e_2 \in P_2$; если же $L_2 \nsubseteq P_1$, то $e_1 + \alpha\,e_2 \in L_2$;

2) если $n > 2$, то $(e_3, \ldots, e_n)$ – базис Q; при этом если $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, то $e_3 = 2\,c$.

Отсюда $R_1 = \{x'_i = -x_i \ (i \neq 2)\}$, $J = \{x'_1 = -x_1, \ x'_2 = -x_2\}$.

Если $n > 2$, то полагаем $\mathcal{S} = \{S^t : t \in \mathbb{R}\}$, где $S^t = \{x'_3 = x_3 + t\}$.

4.1. $L_1 \subset P_2$, $L_2 \subset P_1$, $\Lambda_2 = L_2$.

В этом случае $T = R_2R_1 = R_1R_2 = J$, и поэтому $G = \{\mathrm{id}, J, R_1, R_2\}$.

Возможны лишь следующие случаи.

а) F – T-инвариантный многочлен.

Значит, $F = g(x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_3, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}\langle x_1, x_2\rangle[x_3, \ldots, x_n]$; теперь из R_1-полуинвариантности F получаем: $g(x_1^2, x_2^2, -x_1x_2, -x_3, \ldots, -x_n) \in \{-F, F\}$.

б) F – не T-инвариантный многочлен.

Меняя, если нужно, нумерацию x_1 и x_2, можем считать, что F – R_1-инвариантный, но не R_2-инвариантный многочлен. Тогда

$$F = g(x_2, x_1^2, x_1x_3, \ldots, x_1x_n, x_3^2, x_3x_4, \ldots, x_n^2) \in \mathbb{R}[x_2]\langle x_1, x_3, \ldots, x_n\rangle$$

в силу R_1-инвариантности F, и теперь в из T-полуинвариантности F следует, что $g(-x_2, x_1^2, -x_1x_3, \ldots, -x_1x_n, x_3^2, x_3x_4, \ldots, x_n^2) = -F$.

В результате получаем: $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2, x_2^2]\langle x_1x_2, x_3, \ldots, x_n\rangle$,

$\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2,\, x_2^2]\lfloor x_1x_2,\, x_3, \ldots,\, x_n\rfloor \cup$

$\cup\, \mathbb{R}[x_1^2]\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle\lfloor x_2,\, x_1x_3, \ldots,\, x_1x_n\rfloor \cup \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle\lfloor x_1,\, x_2x_3, \ldots,\, x_2x_n\rfloor.$

4.2. $L_1 \subset P_2,\;\; L_2 \subset P_1,\;\; L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset.$

В этом случае $P_2 = \ker x_1,\;\; e_1 \parallel \Lambda_2,\;\; e_3/2 \in \Lambda_2$. Отсюда $T = J\,S^1 = S^1 J$. Поэтому $\bar{G} = \mathcal{S} \cdot \{\mathrm{id},\, R_1,\, J,\, R_1J\}$.

Следовательно, $\mathbf{K}^G \subseteq \mathbf{K}^{\mathcal{S}} = \mathbb{R}[x_1,\, x_2,\, x_4, \ldots,\, x_n]$. Теперь, как и в случае **4.1**, получаем: $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2,\, x_2^2]\langle x_1x_2,\, x_4, \ldots,\, x_n\rangle$,

$\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2,\, x_2^2]\lfloor x_1x_2,\, x_4, \ldots,\, x_n\rfloor \cup$

$\cup\, \mathbb{R}[x_1^2]\langle x_4, \ldots,\, x_n\rangle\lfloor x_2,\, x_1x_4, \ldots,\, x_1x_n\rfloor \cup \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_4, \ldots,\, x_n\rangle\lfloor x_1,\, x_2x_4, \ldots,\, x_2x_n\rfloor.$

4.3. $L_1 \nsubseteq P_2,\;\; L_2 \subseteq P_1.$

В этом случае $e_1 \in L_2$, $P_2 = \ker(2\,x_1 - x_2)$.

4.3.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Пусть D^t и $\mathcal{D}$ в построенном базисе определяются так же, как и в случае **2.1**. Тогда $T = J\,D^1 = D^1 J,\;\; \bar{G} = \mathcal{D} \cdot \{\mathrm{id},\, R_1,\, J,\, R_1J\}$.

Из $\mathcal{D}$-инвариантности F получаем (4). Теперь, как и в случае **4.1**, имеем:

$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle$;

F – T-инвариантный многочлен, не принадлежащий $\mathbf{K}^G$, тогда и только тогда, когда $F \in \mathbb{R}[x_2^2]\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor$;

F – R_1-инвариантный многочлен, не принадлежащий $\mathbf{K}^G$, тогда и только тогда, когда $F \in \mathbb{R}\lfloor x_2\rfloor\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle$.

Допустим теперь, что F – R_2-инвариантный многочлен, не принадлежащий $\mathbf{K}^G$. Тогда $f(x_2,\, -x_3, \ldots,\, -x_n) = -F$ в силу (4) и R_1-полуинвариантности F. Следовательно, $F \in \mathbb{R}[x_2]\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor$. При этом $f(-x_2,\, x_3, \ldots,\, x_n) = -F$, т.к. F полуинвариантен относительно T. Отсюда $F \in \mathbb{R}\lfloor x_2\rfloor\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor$.

Значит, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2^2]\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor \cup \mathbb{R}\lfloor x_2\rfloor\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle \cup \mathbb{R}\lfloor x_2\rfloor\lfloor x_3, \ldots,\, x_n\rfloor$.

4.3.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Определяя B^t и $\mathcal{B}$ так же, как в п. 1^o, получаем: $T = B^1 J = J\,B^1$, и отсюда $\bar{G} = \mathcal{B} \cdot \{\mathrm{id},\, R_1,\, J,\, R_1J\}$.

Из $\mathcal{B}$-инвариантности F имеем (5).

Рассмотрим теперь следующие случаи.

а) F инвариантен относительно J.

С учетом (5) получаем: $f(-x_1 + x_2x_3,\, -x_2,\, x_4, \ldots,\, x_n) = F$. Поэтому

$$F = g((x_1 - x_2x_3)^2,\, (x_1 - x_2x_3)\,x_2,\, x_2^2,\, x_4, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}[x_4, \ldots, x_n]\langle x_1 - x_2x_3,\, x_2\rangle.$$

Теперь из R_1-инвариантности F имеем:

$$g((x_1 - x_2x_3)^2,\, -(x_1 - x_2x_3)\,x_2,\, x_2^2,\, -x_4, \ldots,\, -x_n) = F.$$

Если же F не инвариантен относительно R_1, то

$$g((x_1 - x_2x_3)^2,\, -(x_1 - x_2x_3)\,x_2,\, x_2^2,\, -x_4, \dots,\, -x_n) = -F.$$

b) F не инвариантен относительно J.

В этом случае если F инвариантен относительно R_1, то

$$f(-x_1 + x_2x_3,\, x_2,\, -x_4, \dots,\, -x_n) = F.$$

Отсюда

$$F = g(x_2,\, (x_1 - x_2x_3)^2,\, (x_1 - x_2x_3)\,x_4, \dots,\, (x_1 - x_2x_3)\,x_n,\, x_4^2,\, x_4x_5, \dots,\, x_n^2) \in \mathbb{R}[x_2]\langle x_1 - x_2x_3,\, x_4, \dots,\, x_n\rangle,$$

и из полуинвариантности F относительно J имеем:

$$g(-x_2,\, (x_1 - x_2x_3)^2,\, -(x_1 - x_2x_3)\,x_4, \dots,\, -(x_1 - x_2x_3)\,x_n,\, x_4^2,\, x_4x_5, \dots,\, x_n^2) = -F.$$

Если же F не инвариантен относительно R_1, то F инвариантен относительно R_1J. Но тогда $f(x_1 - x_2x_3,\, -x_2,\, -x_4, \dots,\, -x_n) = F$. Поэтому

$$F = g(x_1 - x_2x_3,\, x_2^2,\, x_2x_4,\, \dots,\, x_2x_n^2,\, x_4^2,\, x_4x_5, \dots,\, x_n^2) \in \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3,\, x_2,\, x_4, \dots,\, x_n]\langle x_2,\, x_4, \dots,\, x_n\rangle,$$

и $g(-x_1 + x_2x_3,\, x_2^2,\, -x_2x_4,\, \dots,\, -x_2x_n^2,\, x_4^2,\, x_4x_5, \dots,\, x_n^2) = -F$ в силу полуинвариантности F относительно J.

Таким образом, $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[(x_1 - x_2x_3)^2,\, x_2^2]\langle (x_1 - x_2x_3)\,x_2,\, x_4, \dots,\, x_n\rangle$,

$$\begin{aligned}\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G &\cup \mathbb{R}[(x_1 - x_2x_3)^2,\, x_2^2]\lfloor (x_1 - x_2x_3)\,x_2,\, x_4, \dots,\, x_n\rfloor \cup \\ &\cup \mathbb{R}[(x_1 - x_2x_3)^2]\langle x_4, \dots,\, x_n\rangle\lfloor x_2,\, (x_1 - x_2x_3)\,x_4, \dots,\, (x_1 - x_2x_3)\,x_n\rfloor \cup \\ &\cup \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_4, \dots,\, x_n\rangle\lfloor x_1 - x_2x_3,\, x_2x_4, \dots,\, x_2x_n\rfloor.\end{aligned}$$

Случай $L_1 \subseteq P_2,\, L_2 \nsubseteq P_1$ аффинно эквивалентен случаю **4.3**.

4.4. $L_1 \nsubseteq P_2,\, L_2 \nsubseteq P_1,\, L_1 \neq L_2$.

Для $i \in \{1;\, 2\}$ пусть $L_i' = P_i \cap S$. Двойное отношение

$$\varkappa = (L_1,\, L_1';\, L_2,\, L_2')$$

прямых $L_1,\, L_1',\, L_2,\, L_2'$ назовем двойным отношением пары $(R_1,\, R_2)$.

По условию, $e_1 + \alpha\, e_2 \in L_2$, и из определения $\varkappa$ следует, что $e_1 + \varkappa\,\alpha\, e_2 \in P_2$. Поэтому $P_2 = \ker(\alpha\,\varkappa\, x_1 - x_2)$, $\varkappa \notin \{0;\, 1\}$.

Положим $\mu = \sqrt{|\varkappa|}$, $\alpha = \mu^{-1}$. Получаем базис, в котором $\mu\, e_1 + e_2 \in L_2$, $P_2 = \ker((\operatorname{sgn}\varkappa)\,\mu\, x_1 - x_2)$.

4.4.1. $\varkappa > 0$.

Пусть $\mathcal{H} = (H^t \,:\, t \in \mathbb{R})$, где $H^t = \{x_1' = x_1 \operatorname{ch} t + x_2 \operatorname{sh} t,\;\; x_2' = x_1 \operatorname{sh} t + x_2 \operatorname{ch} t\}$.

4.4.1.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Если $\varkappa < 1$, то при $\varphi = 2\operatorname{arth}\mu$ имеем: $T = H^\varphi$, $G = \{H^{m\varphi},\, H^{m\varphi}R_1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\varkappa > 1$, то полагая $\varphi = 2\operatorname{arcth}\mu$, получаем:

$$T = H^\varphi J, \quad G = \{H^{2m\varphi},\; H^{(2m+1)\varphi}J,\; H^{2m\varphi}R_1,\; H^{(2m+1)\varphi}J\,R_1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Поэтому при любом положительном $\varkappa$, не равном 1, $\bar{G} = \mathcal{H}\cdot\{\mathrm{id},\, R_1,\, J,\, R_1J\}$, и из $\mathcal{H}$-инвариантности F имеем: $F = f(x_1^2 - x_2^2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n]$.

Но тогда $f(x_1^2 - x_2^2,\, -x_3,\, \ldots,\, -x_n) \in \{-F,\, F\}$ в силу R_1-полуинвариантности F. Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2]\langle x_2,\, \ldots,\, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2]\lfloor x_3,\, \ldots,\, x_n\rfloor$.

4.4.1.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Если $\varkappa < 1$, то полагая $\varphi = 2\operatorname{arth}\mu$, получаем:

$$T = H^\varphi S^1, \quad G = \{H^{m\varphi}S^m,\, H^{m\varphi}S^mR_1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Если же $\varkappa > 1$. Полагая $\varphi = 2\operatorname{arcth}\mu$, получаем: $T = H^\varphi S^1 J$,

$$G = \{H^{2m\varphi}S^{2m},\; H^{(2m+1)\varphi}S^{2m+1}J,\; H^{2m\varphi}S^{2m}R_1,\; H^{(2m+1)\varphi}S^{2m+1}J\,R_1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}.$$

Таким образом, учитывая периодичность функции $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, получаем, что при любом положительном $\varkappa$, не равном 1, $\bar{G} = \mathcal{H}\cdot\mathcal{S}\cdot\{\mathrm{id},\, R_1,\, J,\, R_1J\}$.

Но тогда из $\mathcal{S}$-инвариантности F следует, что F не зависит от x_3. Теперь, как и в случае **4.4.1.1**, получаем:

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2]\langle x_4, \ldots, x_n\rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2]\lfloor x_4,\, \ldots,\, x_n\rfloor.$$

4.4.2. $\varkappa < 0$.

Пусть $\mathcal{E} = (E^t \,:\, t \in \mathbb{R})$, где $E^t = \{x_1' = x_1\cos t - x_2\sin t,\;\; x_2' = x_1\sin t + x_2\cos t\}$.

Положим $\varphi = -2\operatorname{arctg}\mu$.

4.4.2.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Тогда $T = E^\varphi$, $G = \{E^{m\varphi},\, E^{m\varphi}R_1 \,:\, m \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\varphi = 2\pi k/m$, где k и m – взаимно-простые натуральные числа, то G конечна и изоморфна диэдральной группе H_2^m, и полуинварианты группы G могут быть выражены через базисные инварианты группы H_2^m (см. [6]).

Допустим, что φ не соизмеримо с π. Тогда G бесконечна и $\bar{G} = \mathcal{E} \cup (\mathcal{E}\cdot R_1)$ (такое же замыкание G имеет и относительно евклидовой топологии группы $\mathrm{Aff}(V)$).

Теперь из $\mathcal{E}$-инвариантности F следует, что

$$F = f(x_1^2 + x_2^2,\, x_3, \ldots,\, x_n) \in \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2,\, x_3, \ldots,\, x_n].$$

Из R_1-полуинвариантности F получаем: $f(x_1^2 + x_2^2,\, -x_3, \ldots,\, -x_n) \in \{-F,\, F\}$. Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2]\langle x_3, \ldots,\, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2]\lfloor x_3,\, \ldots,\, x_n\rfloor$.

4.4.2.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Тогда $T = E^\varphi S^1$.

Если $\varphi = 2\pi k/m$, где k и m – взаимно-простые натуральные числа, то полагая $\psi = 2\pi/m$ и $G_0 = \{E^{l\psi},\, E^{l\psi} R_1 \,:\, l = 0, \dots, m-1\}$, получаем:

$$G = G_0 \cdot \{S^l \,:\, l \in \mathbb{Z}\}, \quad \bar{G} = G_0 \cdot \mathcal{S}.$$

При этом G_0 конечна и изоморфна диэдральной группе H_2^m, полуинварианты группы G не зависят от x_3 и выражаются через базисные инварианты группы H_2^m.

Допустим теперь, что φ не соизмеримо с π. Тогда $\bar{G} = (\mathcal{E} \cdot \mathcal{S}) \cup (\mathcal{E} \cdot \mathcal{S} \cdot R_1)$ в силу периодичности функции $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Из $\mathcal{S}$-инвариантности F следует, что F не зависит от x_3, и, как в случае **4.4.2.1**, $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2]\langle x_4, \dots, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2]\lfloor x_4, \dots, x_n\rfloor$.

5. $L_1 \neq L_2$, $P_1 \neq P_2$, $V \neq S \oplus Q$.

Отсюда $n > 2$, $\dim(S \cap Q) = 1$, $L_1 + Q = L_2 + Q$, $L_1 \nsubseteq P_2$, $L_2 \nsubseteq P_1$.

Построим в V канонический базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы $e_1, \dots, e_n$ так, чтобы выполнялись все следующие условия:

1) $e_1 \in Q \cap S$, $e_2 \in L_1$, $e_1 + 2e_2 \in L_2$ (это условие выполнимо, т.к. прямые L_1, L_2 и $Q \cap S$ попарно различны и лежат в 2-плоскости S); $e_3 \in P_1 \setminus Q$, $e_2 + 2e_3 \in P_2 \setminus Q$ (это условие выполнимо, т.к. $e_3 \notin P_2$, а 2-плоскость $\langle e_2, e_3\rangle$ пересекает P_2 по прямой, которая не содержится в Q); если $n > 3$, то $(e_1, e_4, \dots, e_n)$ – базис в Q;

2) если $L_1 + Q \neq \Lambda_2 + Q$, то $e_3 = 2c + e_1/12$;

3) если $L_1 + Q = \Lambda_2 + Q$ и $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ (и тогда $n > 3$, т.к. $L_1 + Q$ содержит скрещивающиеся прямые L_1 и Λ_2), то $e_4 = 2c$.

В таком базисе $R_1 = \{x_i' = -x_i \ (i \neq 2)\}$, $P_2 = \ker(2x_2 - x_3)$.

5.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Для любого $t \in \mathbb{R}$ пусть $R^t = \{x_1' = x_1 + t\,x_2 + t^2 x_3/2, \quad x_2' = x_2 + t\,x_3\}$. Тогда $\mathcal{R} = \{R^t \,:\, t \in \mathbb{R}\}$ – однопараметрическая группа параболических сдвигов, $T = R^1$, и поэтому $\bar{G} = \mathcal{R} \cup (\mathcal{R} \cdot R_1)$.

Из последнего равенства следует, что $F \in \mathbf{K}^{\mathcal{R}}$, т.е. (см. [6])

$$F = f(2x_1x_3 - x_2^2,\, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[2x_1x_3 - x_2^2,\, x_3, \dots, x_n].$$

Теперь $f(2x_1x_3 - x_2^2, -x_3, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$ в силу R_1-инвариантности F. Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[2x_1x_3 - x_2^2]\langle x_3, \dots, x_n\rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[2x_1x_3 - x_2^2]\lfloor x_3, \dots, x_n\rfloor$.

5.2. $L_1 + Q \neq \Lambda_2 + Q$.

Это эквивалентно тому, что $c \notin Q$.

Определяя A^t и $\mathcal{A}$ так же, как в п. 1^o, имеем: $T = A^1$, $\bar{G} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cdot R_1)$.

Теперь из (2) следует, что

$$F = f(x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3,\, 2x_2 - x_3^2,\, x_4, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3,\, 2x_2 - x_3^2,\, x_4, \dots, x_n].$$

Но тогда $f(-x_1+x_2x_3-x_3^3/3,\, 2\,x_2-x_3^2,\, -x_4,\dots,\, -x_n)\in\{-F,\, F\}$ в силу R_1-инвариантности F. Отсюда $\mathbf{K}^G=\mathbb{R}[2\,x_2-x_3^2]\langle x_1-x_2x_3+x_3^3/3,\, x_4,\dots,\, x_n\rangle$ и

$$\mathbf{K}(G)=\mathbf{K}^G\cup\mathbb{R}[2\,x_2-x_3^2]\lfloor x_1-x_2x_3+x_3^3/3,\, x_4,\dots,\, x_n\rfloor.$$

5.3. $L_1+Q=\Lambda_2+Q$, $L_1\cap\Lambda_2=\emptyset$.

Определяя N^t и $\mathcal{N}$ так же, как в п. 1^o, имеем: $T=N^1$, $\bar{G}=\mathcal{N}\cup(\mathcal{N}\cdot R_1)$.

Теперь из (3) получаем:

$$F=f(x_1-x_2x_4+x_3x_4^2/2,\, x_2-x_3x_4,\, x_3,\, x_5,\dots,\, x_n)\in \mathbb{R}[x_1-x_2x_4+x_3x_4^2/2,\, x_2-x_3x_4,\, x_3,\, x_5,\dots,\, x_n].$$

Отсюда $f(-x_1+x_2x_4-x_3x_4^2/2,\, x_2-x_3x_4,\, -x_3,\, -x_5,\dots,\, -x_n)\in\{-F,\, F\}$ в силу R_1-инвариантности F. Значит,

$$\mathbf{K}^G=\mathbb{R}[x_2-x_3x_4]\langle x_1-x_2x_4+x_3x_4^2/2,\, x_3,\, x_5,\dots,\, x_n\rangle,$$
$$\mathbf{K}(G)=\mathbf{K}^G\cup\mathbb{R}[x_2-x_3x_4]\lfloor x_1-x_2x_4+x_3x_4^2/2,\, x_3,\, x_5,\dots,\, x_n\rfloor.$$

Заключение. *Основные результаты работы*:

Получена аффинная классификация пар отражений относительно прямых и групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых; найдены полуинварианты бесконечных групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых.

Аналогичным образом могут быть вычислены полуинварианты нецентроаффинных групп, действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях и порожденных отражениями относительно прямых.

Список литературы

[1] Игнатенко В.Ф. Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей косой симметрии. IV // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1998. Т.5, № 1/2. – С. 35–48.

[2] Рудницкий О.И. Об одном классе диких групп косых симметрий, имеющих четые орбиты направлений симметрии // Ученые записки ТНУ, 2002, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 2. – С. 75–81.

[3] Комиссаренко Е.В., Криворучко А.И. Об инвариантах бесконечных групп отражений с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии // Ученые записки ТНУ, 2005, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 1. – С. 33–41.

[4] Криворучко А.И. О кольцах инвариантов групп, порожденных отражениями относительно скрещивающихся прямых. – Мат. физика, анализ, геометрия (2000), т. 7, № 4. – С. 415–441.

[5] Криворучко А.И. О нецентроаффинных группах, порожденных отражениями относительно прямых // Ученые записки ТНУ, 2004, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 1. – С. 38–46.

[6] Криворучко А.И. О группах, порожденных двумя аффинными отражениями // Ученые записки ТНУ, 2006, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 2. – С. 43–51.

Знайдена афінна класифікація пар афінних віддзеркалень відносно прямих, а також груп, які породжені двома такими віддзеркаленнями; побудовани усі напів-інваріанти нескінченних груп, які породжені двома віддзеркаленнями.

Affine classification of groups generated by two affine reflections through straight lines are obtained. Semi-invariants of infinite groups generated by two affine reflections through straight lines are calculated.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 53–57.

Н. В. Лактионова

МОДЕЛЬНАЯ ЗАДАЧА О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ОТКРЫТОМ СОСУДЕ

В работе изучается скалярная задача, моделирующая процесс нормальных колебаний тяжелой вязкой жидкости, частично заполняющей некоторый контейнер. Исследуется процесс миграции собственных значений с положительной полуоси в комплексную плоскость при изменении главного физического параметра - вязкости.

Введение

Задачи о движении твердых тел с полостями, заполненными жидкостями, являются классическими. В монографии [2] изучена классичекая задача о нормальных колебаниях вязкой жидкости в частично заполненном контейнере. В данной работе на модельном примере проводится качественные и количественные исследования спектра (частот и декрементов затухания) нормальных движений тяжелой вязкой жидкости в сосуде.

Постановка задачи

В частности, изучается спектральная задача вида

$$\begin{aligned} &\Delta u + \mu u = 0 \ (\text{ в } \Omega), \quad u = 0 \ (\text{ на } S), \\ &\mu \frac{\partial u}{\partial n} = \alpha^2 u \ (\text{ на } \Gamma), \quad \mu \in \mathbb{C}; \end{aligned} \qquad (1),$$

где $\Omega = (0,\pi) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$, $\Gamma = \{(x,y) : 0 < x < \pi, y = 1\}$, $S = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$,
$\mu = \lambda\alpha$ - спектральный параметр, λ - комплексный декремент затухания, а $\alpha = \nu^{-1}$, ν - кинематическая вязкость жидкости.

Требуется определить числа $\mu \neq 0$, при которых задача (1) допускает ненулевое решение (собственные функции), а также исследовать процесс перехода собственных значений $\mu = \mu(\alpha)$ с положительной полуоси в комплексную плоскость при возрастании α^2 от малых значений (уменьшение вязкости) до достаточно больших.

Предварительные свойства спектра. Опишем простейшие свойства спектра задачи (1), считая, что Ω, Γ и S - произвольные $\Omega \in \mathbb{R}^m$, $\partial\Omega = S \cup \Gamma$.

1. Число $\mu = 0$ не является собственным значением. Действительно, если $\mu = 0$, то $\Delta u = 0$ (в Ω), $u =\ 0$ ($\partial\Omega$). Значит, $u \equiv 0$, а это противоречит постановке задачи (1).

2. Если u - решение спектральной задачи (1), то $\operatorname{Re}\mu > 0$. Действительно,

$$-\int\limits_{\Omega} \Delta u \cdot \overline{u} d\Omega = \mu \int\limits_{\Omega} |u|^2 d\Omega = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega - \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \cdot \overline{u}\, d\Gamma,$$

Поэтому

$$\mu \int\limits_{\Omega} |u|^2 d\Omega = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega - \frac{\alpha^2}{\mu} \int\limits_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma; \tag{2}$$

$$\mu \int\limits_{\Omega} |u|^2 d\Omega + \frac{\alpha^2}{\mu} \int\limits_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega; \tag{3}$$

$$\operatorname{Re}\mu(\int\limits_{\Omega} |u|^2 d\Omega + \frac{\alpha^2}{|\mu|^2}\, \mu \int\limits_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma) = \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega;$$

$$\operatorname{Re}\mu = \frac{\int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega}{\int\limits_{\Omega} |u|^2 d\Omega + \frac{\alpha^2}{|\mu|^2} \int\limits_{\Gamma} |u|^2 d\Gamma}\, \mu > 0.$$

3. Из (2) имеем (в краткой записи)

$$\mu^2 ||u||^2_{\Omega} - \mu ||u||^2_{1,\Omega} + \alpha^2 ||u||^2_{\Gamma} = 0;$$

$$\mu_{\pm} = \frac{||u||^2_{1,\Omega} \pm \sqrt{||u||^4_{1,\Omega} - 4\alpha^2 ||u||^2_{\Omega}\, ||u||^2_{\Gamma}}}{2||u||^2_{\Omega}}.$$

Поскольку норма $||u||^2_{1,\Omega}$ эквивалентна стандартной норме $||u||^2_{W_2^1}$ (см.[3]), то по теореме вложения и теоремах о следах:

$$||u||^2_{\Omega} \le c_{\Omega} ||u||^2_{1,\Omega}, \ \ ||u||^2_{\Gamma} \le c_{\Gamma} ||u||^2_{1,\Omega},$$

тогда

$$||u||_{1,\Omega} - 4\alpha^2\, ||u||^2_{\Omega}\, ||u||^2_{\Gamma} \ge (1 - 4\alpha^2 c_{\Omega} c_{\Gamma}) ||u||_{1,\Omega}.$$

Из полученного неравенства следует, если $4\alpha^2 c_{\Omega} c_{\Gamma} < 1$, то корни только вещественные (вязкость велика).

4. Если $4\alpha^2 c_\Omega c_\Gamma \geq 1$, то могут быть невещественные корни (комплексно-сопряженные пары), что соответствует случаю достаточно малой вязкости.

5. Задача имеет дискретный спектр с предельными точками $\mu = 0$ и $\mu = +\infty$, конечное число невещественных собственных значений при любой вязкости $\nu > 0$ (это будет установлено далее на модельной задаче).

Получение, асимптотическое исследование и решение характеристических уравнений. Применяя метод разделения переменных ([1]), решение задачи (1) ищем в виде:

$$u = u_k(x, y) = \sin(kx) Y_k(y), \quad k = 1, 2, ...$$

Тогда, используя этот вид решения в (1), получим задачу для определения функциий $Y_k(y)$:

$$\begin{gathered} Y'' + (\mu - k^2)Y = 0, \ \ 0 < y < 1 \\ \mu Y_k'(1) = \alpha^2 Y_k(1). \end{gathered} \tag{4}$$

Для общего исследования характеристических уравнений (4) задачи, рассмотрим функцию

$$f_k(\delta) := \begin{cases} \delta^2 \sqrt{k^2 - \delta^2}\,\mathrm{cth}(\sqrt{k^2 - \delta^2}), 0 < \delta < k, \\ k^2, \qquad \delta = k \\ \delta^2 \sqrt{\delta^2 - k^2}\,\mathrm{ctg}(\sqrt{\delta^2 - k^2}), k < \delta < \infty. \end{cases} \qquad (5),$$

где $\delta = \sqrt{\mu} > 0$, $0 < \alpha^2 < \infty$. Тогда основное трансцендентное уравнение для нахождения вещественных корней принимает вид

$$f_k(\delta) = \alpha^2, \quad k = 1, 2... \qquad (6).$$

Как функция комплексной переменной δ функция $f_k(\delta)$ зависит лишь от δ^2, и является мероморфной функцией с простыми полюсами в тех точках, где $\mathrm{ctg}\, x$ имеет ненулевые полюсы , то есть в точках $\sqrt{\delta^2 - k^2} = \pi n$. Это вещественные полюсы $\delta_{kn}^2 = k^2 + \pi^2 n^2$. Из теории аналитических функциий (по теореме Миттаг-Леффлера) мероморфную функцию ctg(z) можно представить в виде ряда([4]). Тогда функция $f_k(\delta)$ принимает вид:

$$f_k(\delta) = \delta^2 \left\{ 1 + 2(\delta^2 - k^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\delta^2 - k^2 - n^2\pi^2} \right\}. \tag{7}$$

В такой форме функция $f_k(\delta)$ выражается единой формулой при любом δ^2. Рассмотрим уравнение, аппроксимирующее уравнение (7), $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\alpha^2 = \delta^2 \left\{ 1 + 2(\delta^2 - k^2) \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\delta^2 - k^2 - n^2\pi^2} \right\};$$

оно сводится к нахождению нулей многочлена степени N+1 (относительно δ^2); при этом количество вещественных положительных δ^2 будет равно N-1 плюс два вещественных, если есть пересечение кривых(графиков левой и право часте уравнения) или невещественных, если пересечений нет.

Выводы

Опишем кратко итоги численного решения задачи (1). Практическая значимость работы состоит в том, что на модельном примере стал ясен механизм перехода собственных значений с действительной оси в комплексную плоскость при уменьшении вязкости. С другой стороны, как показало изучение задачи, данный модельный пример хорошо качественно описывает спектральную картину при большой вязкости и недостаточно адекватно - при малой.

Учитывая вышеизложенное результаты численных расчетов, проведенных с помощью пакета математических расчетов Maple (вычисление α_k, расчет и построение траекторий $\lambda(\alpha)$), можно сформулировать основные итоги исследования:

1. Модельная задача (1) имеет дискретный спектр с предельными точками $\lambda = 0$ и $\lambda = +\infty$.

2. При $\alpha^2 \ll 1$ спектр задачи (1) состоит из двух ветвей положительных и отрицательных собственных значений λ_k^+ и λ_k^-, причем $\lambda_k^+ \to +\infty$, $\lambda_k^- \to 0$ при $k \to \infty$.

3. Каждому номеру k соответствует критическое значение значение параметра α_k^2, такое, что при $\alpha^2 > \alpha_k^2$ к счетному множеству вещественных собственных значений добавляется пара невещественнх собственных значений (для каждого номера - единственная), расположенных симметрично относительно вещественной оси в правой комплексной полуплоскости.

4. Как показали вычисления, предложенная модель хорошо описывает качественную сторону процесса малых колебаний вязкой жидкости при достаточно малых значениях α^2, а также в некотором диапазоне после критических значений.

С другой стороны, данная модель не дает даже качественной картины исследуемого явления при больших значениях α^2. Это можно объяснить тем, что в этом случае задача (1) содержит малый параметр μ при старших производных, возникают решения типа пограничного слоя, которые должны описываться другой моделью.

5. Доказанные выше общие свойства решений справедливы и в модельной задаче о нормальных колебаниях вязкой жидкости в открытом цилиндрическом сосуде, то есть в задаче (1) при $\Omega = \Gamma \times (0,1)$, $\Gamma \in \mathbb{R}^2$,
$S = \partial\Omega \setminus \overline{\Gamma}$, где Γ - произвольное поперечное сечение сосуда Ω.

В этом случае вместо функций $\sin kx$ и чисел k возникают собственные функции $\varphi = \varphi_k(x_1, x_2)$ задачи

$$-\Delta_2\varphi = \beta\varphi, \ \ (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad \varphi = 0 \ \ (\partial\Gamma),$$

отвечающие собственным значениям $\beta = \beta_k, \quad k = 1, 2, \dots$, образующим дискретный спектр: $0 < \beta_1 \le \beta_1 \le \dots \le \beta_k \le \dots, \ \ \beta_k \to +\infty \ (k \to \infty)$.

Таким образом, качественно и количественно исследована модельная несамосопряженная спектральная задача, порожденная проблемой нормальных колебаний вязкой жидкости в открытом сосуде. Найдены критические значения параметров вязкости, при которых собственные значения задачи сливаются и выходят с положительной полуоси парами в комплексную плоскость. Получены графики собственных значений как функций параметра вязкости и асимптотические формулы. Разработана программа вычисления вещественных и невещественных корней характеристических уравнений задачи.

Автор выражает благодарность научному руководителю Н. Д. Копачевскому за постановку задачи и помощь в работе.

Список литературы

[1] Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука,1982,336с

[2] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. М.:Наука, 1989, 416с.

[3] Копачевский Н.Д. Операторные методы математической физики. Курс лекций, 2001.

[4] Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. М.: Наука, 1985, 336с

У роботі вивчається скалярне задача, що моделює процес нормальних коливань важкої грузлої рідини, що частково заповнює деякий контейнер. Досліджується процес міграції власних значень із позитивної півосі в комплексну площину при зміні головного фізичного параметра - в'язкості.

Explored high-quality and in number model spectral problem, generated a problem normal vibrations of viscid liquid in the opened vessel.

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 20(59) № 2 (2007), с. 58–65.

С. Г. Солодкий, Е. А. Лукьянова, А. В. Мосенцова

ОБ ОДНОМ БЫСТРОМ АЛГОРИТМЕ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ГАРМОНИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассмотрена задача конечномерного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода с периодическими гармоническими ядрами и свободными членами. Построен алгоритм, с помощью которого на классе указанных уравнений достигается существенное сокращение объема вычислений по сравнению со стандартными методами без потери точности решения.

Введение и постановка задачи. На сегодняшний день в рамках IBC-теории (Informational Based Complexity) интенсивное развитие приобрели исследования, посвященные нахождению сложности для широкого круга математических задач (см., например, [1], [2], [3]). Суть этих исследований заключается в построении алгоритмов, которые для восстановления приближенного решения с необходимой погрешностью требуют существенно меньших затрат различных вычислительных ресурсов по сравнению со стандартными методами, а также в нахождении оценок минимально возможных объемов этих затрат. Более строго, под сложностью решаемой задачи понимается наименьшее количество некоторого фиксированного вычислительного ресурса, используемого при достижении наперед заданной точности приближения. В частности, для классов интегральных уравнений Фредгольма II рода

$$x(t) - \int\limits_0^{2\pi} h(t,\tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad 0 \le t \le 2\pi, \tag{0.1}$$

с 2π-периодическими коэффициентами $h(t,\tau)$ и $f(t)$ установлены точные порядковые оценки сложности (в случае коэффициентов конечной гладкости) [4], [5] и точные порядки в логарифмической шкале для сложности в случае аналитических коэффициентов [6]. Договоримся далее в качестве вычислительного ресурса, объем которого требуется сократить, рассматривать только элементарные арифметические операции (сложение, вычитание, умножение, деление). Заметим тут же, что подобного рода алгоритмы (т.е. алгоритмы, направленные на сокращение объема вычислений без потери точности) принято называть быстрыми. Объектом предлагаемых исследований являются уравнения (0.1) с гармоническими ядрами и свободными членами. Цель настоящей работы состоит в построении быстрого алгоритма для решения уравнений с гармоническими коэффициентами.

Прежде всего введем в рассмотрение необходимые обозначения и понятия. Через L_2 обозначим пространство функций $f(t), g(t)$, суммируемых в квадрате на $[0, 2\pi]$ с обычными скалярным произведением $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)\ dt$ и нормой $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. В пространстве L_2 возьмем ортонормированный базис, порождаемый тригонометрическими полиномами

$$e_0(t) \equiv 1,\ e_m(t) = \pi^{-1\backslash 2}\cos(mt), \quad e_{-m}(t) = \pi^{-1\backslash 2}\sin(mt),\ m = 1, 2, \ldots .$$

Хорошо известно (см., например, [7, с.397]), что многочлены вида $e_{l,m}(t, \tau) = e_l(t)e_m(\tau)$ образуют ортонормированный базис в пространстве $L_2(Q)$ функций двух переменных $h(t, \tau)$, суммируемых в квадрате на $Q = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_2$ и нормой $\|\cdot\|_2$, определяемыми обычным образом:

$$(h_1, h_2)_2 := \int\limits_Q h_1(t, \tau)h_2(t, \tau)\ dt\ d\tau,$$

$$\|h\|_2 := \left(\int\limits_Q h^2(t, \tau)\ dt\ d\tau\right)^{1/2}.$$

Для произвольных функций $f \in L_2$ и $h \in L_2(Q)$ их коэффициенты Фурье задаются стандартным путем

$$\hat{f}(m) := (f, e_m) = \int\limits_0^{2\pi} f(t)e_m(t)\ dt,$$

$$\hat{h}(l, m) := (h, e_{l,m})_2 = \int\limits_Q h(t, \tau)e_m(t)e_l(\tau)\ dt\ d\tau.$$

Будем рассматривать следующие нормированные пространства функций одной и двух переменных:

$$\Gamma^\rho = \{f :\ f \in L_2,\ \| f \|_\rho := (\sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^{-2|m|}\hat{f}^2(m))^{1/2} < \infty\},$$

$$\mathcal{T}^\rho = \{h : h \in L_2(Q),\ \| h \|_{2,\rho} := (\sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \rho^{-2|l|}\rho^{-2|m|}\hat{h}^2(l, m))^{1/2} < \infty\}.$$

Известно [8, с.186], что пространства Γ^ρ и $\mathcal{T}^\rho$ состоят из 2π-периодических функций соответственно одной и двух переменных, которые являются по каждой переменной следами гармонических в единичном круге $\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$ функций на окружности радиуса $\rho\{(x, y) :\ x^2 + y^2 = \rho^2\}$, $0 < \rho < 1$.

Через Γ_1^ρ обозначим шар единичного радиуса в пространстве Γ^ρ и введем в рассмотрение множество функций двух переменных

$$\mathcal{H}_\rho^\alpha = \{h :\, h \in \mathcal{T}^\rho,\, \| h \|_{2,\rho} \leq \alpha_1,\, \|(I-H)^{-1}\| \leq \alpha_2\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $Hx(t) = \int\limits_0^{2\pi} h(t,\tau)x(\tau)d\tau$. Совокупность уравнений Фредгольма (0.1) с ядрами $h(t,\tau)$ из $\mathcal{H}_\rho^\alpha$ и свободными членами $f \in \Gamma_1^\rho$ обозначим $[\mathcal{H}_\rho^\alpha,\, \Gamma_1^\rho]$.

Под способом задания дискретной информации об уравнениях из класса $[\mathcal{H}_\rho^\alpha,\, \Gamma_1^\rho]$ будем понимать совокупность $T = (T_1,\, T_2)$ двух произвольных наборов T_1 и T_2 линейных непрерывных функционалов

$$\begin{aligned} T_1 h &= (\lambda_1(h), \lambda_2(h), \ldots, \lambda_{n_1}(h))\,, \\ T_2 f &= (\sigma_1(f), \sigma_2(f), \ldots, \sigma_{n_2}(f))\,, \end{aligned} \tag{0.2}$$

заданных над множествами $\mathcal{H}_\rho^\alpha$ и Γ_1^ρ соответственно. Через $\mathcal{T}$ будем обозначать длину вектора T, то есть $\mathcal{T} = n_1 + n_2$.

Под алгоритмом φ решения уравнения (0.1) будем понимать произвольный оператор, ставящий в соответствие информационному вектору $T(h,f) = (T_1h,\, T_2f) \in R^{n_1+n_2}$ в качестве приближенного решения уравнения (0.1) некоторый элемент $\varphi(T,h,f) \in L_2$. При этом будем считать, что элемент $\varphi(T,h,f)$ находится в результате выполнения конечного числа элементарных операций (э.о.). Другими словами, предполагается, что приближенное решение уравнения (0.1) ищется в виде, однозначно определяемом некоторым числовым вектором $b_1, b_2, \ldots, b_l$, например, в форме сплайна или полинома, для вычисления компонент b_i которого разрешается провести лишь конечное число э.о.

В работах [9], [10, гл.1, §4] для приближенного решения уравнений (0.1) из описанного класса предложен алгоритм, состоящий в нахождении решения уравнения

$$\hat{x}(t) - H_\nu \hat{x}(t) = S_\nu f(t), \tag{0.3}$$

где

$$H_\nu \hat{x}(t) = \sum_{(l,m)\in R_\nu} e_l(t)\hat{h}(l,m) \int\limits_0^{2\pi} e_m(\tau)x(\tau)d\tau,$$

$$S_\nu f(t) = \sum_{m=-\nu}^{\nu} e_m(t)\hat{f}(m),$$

а способ задания информации представляет собой набор коэффициентов Фурье вида

$$\begin{aligned} T_1^* h &= \Big(\lambda_{l,m}(h) = \hat{h}(l,m), \quad (l,m) \in R_\nu\Big)\,, \\ T_2^* f &= \Big(\sigma_m(f) = \hat{f}(m), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\Big)\,. \end{aligned} \tag{0.4}$$

Здесь множество R_ν координатной плоскости является ромбом

$$R_\nu = \{(l,m): \ l,m \in \mathbb{Z}, \ |l|+2|m| \le \nu\}, \quad \nu = 1,2,\dots,$$

для которого имеют место оценки

$$\nu^2+\nu-1 \le mathcalR_\nu := \nu_1 \le \nu^2+\nu+1, \quad n_2 = 2\nu+1.$$

Отсюда следует, что для способа задания информации $T^* = (T_1^*, T_2^*)$ (0.4) справедливы соотношения

$$\nu^2+3\nu \le N \le \nu^2+3\nu+2, \tag{0.5}$$

где $N =: \mathcal{T}^*$.

Из теоремы 4.1 [10] вытекает, что для метода (0.3), в котором используется информация (0.4), на исследуемом классе уравнений (0.1) при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ гарантирована погрешность порядка $O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}})$. С другой стороны, в той же теореме установлен тот факт, что ни один алгоритм, при реализации которого используется N произвольных линейных непрерывных функционалов (0.2), не может обеспечить на классе $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ точность приближения лучшую по порядку, чем величина $O(\rho^{\sqrt{N(1+\varepsilon)}})$. Тем самым в [10] доказана оптимальность (с точностью до сколь угодно малого $\varepsilon > 0$) по порядку для способа задания информации (0.4) на указанном классе уравнений (0.1).

Продолжая исследования, инициированные в [9], [10], рассмотрим задачу построения быстрого алгоритма для уравнений (0.1) из $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$, т.е. проблему уменьшения количества э.о., необходимого для достижения на классе $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ заданного порядка точности. А именно, нам предстоит предъявить такой алгоритм решения (0.1), который в качестве дискретной информации использует компоненты вектора (0.4) и на всем классе уравнений $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ гарантирует погрешность $O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}})$ за счет выполнения M э.о., где $M = O(N^{7/6})$.

Быстрый алгоритм и вспомогательные утверждения. Нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 1. *При любом $0 \le L \le \nu$ справедливо неравенство*

$$\|H_\nu - S_L H_\nu\| \le \alpha_1 \rho^{L+1}.$$

Доказательство. Возьмем любую функцию $f \in L_2$. Тогда выполняется

$$\|(H_\nu - S_L H_\nu) f\|^2 = \sum_{|l|=L+1}^{\nu} \left(\sum_{|m|=0}^{(\nu-|l|)/2} \hat{h}(l,m) \hat{f}(m) \right)^2 \le$$

$$\sum_{|l|=L+1}^{\nu} \left(\sum_{|m|=0}^{(\nu-|l|)/2} \hat{h}^2(l,m) \right) \left(\sum_{|m|=0}^{(\nu-|l|)/2} \hat{f}^2(m) \right) \le \|f\|^2 \sum_{|l|=L+1}^{\nu} \frac{\rho^{-2|l|}}{\rho^{-2|l|}} \left(\sum_{|m|=0}^{(\nu-|l|)/2} \hat{h}^2(l,m) \right) \le$$

$$\leq \|f\|^2 \frac{1}{\rho^{-2(L+1)}} \sum_{l,m=-\infty}^{\infty} \rho^{-2|l|}\rho^{-2|m|}\hat{h}(l,m) = \rho^{2(L+1)}\|h\|_{2,\rho}^2 \|f\|^2.$$

Утверждение леммы следует из полученного выше неравенства, произвольности $f \in L_2$ и определения класса $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$.

Для любого уравнения (0.1) из класса $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ рассмотрим последовательность элементов

$$x_0 = 0, \quad x_k = x_{k-1} + (I - S_L H_\nu)^{-1}(H_\nu x_{k-1} - x_{k-1} + S_\nu f), \tag{0.6}$$

где $k = 1, 2, \dots, K$, $\quad K = \{(\nu^2 + 3\nu + 2)^{1/6}\}$, $\quad L = K^2$. Здесь, как обычно, $\{u\}$ обозначает ближайшее сверху к u целое число.

Легко видеть, что все элементы x_k принадлежат подпространству $span(e_{-v}, \dots, e_0, \dots, e_v)$, причем для построения каждого x_k достаточно иметь дискретную информацию (0.4) и решить уравнение

$$\varepsilon_k = S_L H_\nu \varepsilon_k + (H_\nu x_{k-1} - x_{k-1} + S_\nu f), \quad x_k = x_{k-1} + \varepsilon_k. \tag{0.7}$$

Через φ обозначим алгоритм, который каждому уравнению (0.1) в качестве приближенного решения ставит в соответствие элемент $\varphi(T^*, h, f) := x_K$. Аналогично лемме 2 из [11] доказывается следующее утверждение.

Лемма 2. *В рамках алгоритма φ для представления приближенного решения x_K любого уравнения из $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ в стандартном виде $\sum\limits_{i=-\nu}^{\nu} \alpha_i e_i$ достаточно выполнить не более $O(\nu^{7/3})$ э.о.*

Основной результат.

Теорема 1. *Для достижения точности $O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}})$ на классе уравнений $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ в рамках алгоритма φ требуется вычислить N коэффициентов Фурье (0.4) и выполнить $O(N^{7/6})$ э.о.*

Доказательство. Для произвольного уравнения (0.1) из рассматриваемого класса найдем оценку величины $\|\varphi(T^*, h, f) - \hat{x}\|$, где $\varphi(T^*, h, f)$ и $\hat{x}$ — приближенные решения уравнения (0.1), соответствующие алгоритмам (0.6) и (0.3). Заметим, что алгоритмы (0.6) и (0.3) используют один и тот же набор дискретной информации (0.4), состоящий из N коэффициентов Фурье.

Чтобы найти искомую оценку, нам потребуются следующие соотношения, установленные в гл.1, §4 [10]:

$$\|x\|_\rho \leq 1 + \alpha_1 \alpha_2, \tag{0.8}$$

$$\|(I - H_\nu)^{-1}\| \leq \gamma, \tag{0.9}$$

где постоянная γ не зависит от ν.

Далее, используя теорему об оценке норм резольвент близких операторов [12, с.517], неравенство (0.9) и лемму 1, для достаточно больших L получаем

$$\|(I - S_L H_\nu)^{-1}\| \le \frac{\|(I - H_\nu)^{-1}\|}{1 - \|(I - H_\nu)^{-1}\|\|H_\nu - S_L H_\nu\|} \le$$

$$\le \frac{\gamma}{1 - \gamma\|H_\nu - S_L H_\nu\|} \le \frac{\gamma}{1 - \gamma\alpha_1\rho^{L+1}} \le \gamma_1, \tag{0.10}$$

где γ_1 не зависит от ν. Представим решение $\hat{x}$ уравнения (0.3) в следующем виде

$$\hat{x} = x_{K-1} + (I - H_\nu)^{-1}(H_\nu x_{K-1} - x_{K-1} + S_\nu f). \tag{0.11}$$

Из (0.6) и (0.11) следует

$$\hat{x} - \varphi(T^*, h, f) = \{(I - H_\nu)^{-1} - (I - S_L H_\nu)^{-1}\}(I - H_\nu)(\hat{x} - x_{K-1}) =$$

$$= (I - S_L H_\nu)^{-1}(H_\nu - S_L H_\nu)(\hat{x} - x_{K-1}) =$$

$$\{(I - S_L H_\nu)^{-1}(H_\nu - S_L H_\nu)\}^{K-1}(\hat{x} - x_1). \tag{0.12}$$

В силу (0.3) и (0.6) имеет место

$$\|\hat{x} - x_1\| = \|(I - S_L H_\nu)^{-1}(H_\nu - S_L H_\nu)\hat{x}\| \le$$

$$\le \|(I - S_L H_\nu)^{-1}\|\|H_\nu - S_L H_\nu\|(\|x\| + \|\hat{x} - x\|). \tag{0.13}$$

Как уже упоминалось выше, в теореме 4.1 [10] было установлено, что алгоритм (0.3) гарантирует на исследуемом классе точность решения

$$\|x - \hat{x}\| = O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}}). \tag{0.14}$$

Кроме того, с учетом соотношений (0.8), (0.10), (0.13) и леммы 1, из (0.12) следует

$$\|\hat{x} - \varphi(T^*, h, f)\| \le$$

$$\le \|(I - S_L H_\nu)^{-1}\|^K \|(H_\nu - S_L H_\nu)\|^K (\|x\|_\rho + \|\hat{x} - x\|) \le c\rho^{(L+1)K}.$$

Отсюда при $K = \{(\nu^2 + 3\nu + 2)^{1/6}\}$, $L = K^2$ имеем

$$\|\hat{x} - \varphi(T^*, h, f)\| \le O(\rho^{\sqrt{\nu^2+3\nu+2}}). \tag{0.15}$$

С помощью очевидного неравенства

$$\|x - \varphi(T^*, h, f)\| \le \|x - \hat{x}\| + \|\hat{x} - \varphi(T^*, h, f)\|$$

и оценок (0.5), (0.14), (0.15) окончательно получаем, что алгоритм φ (0.6) обеспечивает на классе $[\mathcal{H}_\rho^\alpha, \Gamma_1^\rho]$ погрешность порядка $\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}}$ при любом $\varepsilon > 0$. Для доказательства теоремы осталось воспользоваться леммой 2.

Обсуждение результатов. Оценим теперь эффективность предлагаемого алгоритма φ (0.6) по сравнению с другими методами, известными ранее. Для этого в первую очередь требуется подсчитать объем вычислительных затрат (в смысле количества произведенных э.о.) в рамках алгоритма (0.3), предложенного в работах [9], [10]. Нетрудно видеть, что для нахождения решения уравнения (0.3) необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений размерности ν, а это в свою очередь требует (в общем случае) выполнения $O(\nu^3)$ э.о. Напомним, что при этом оба алгоритма (0.3) и (0.6) гарантируют на исследуемом классе уравнений (0.1) одинаковую по порядку точность решения ($O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}})$). Сузим теперь класс изучаемых уравнений путем наложения дополнительного условия на норму интегрального оператора $\|H\| \le q < 1$. В этом случае традиционно применяется метод последовательных приближений. В качестве конечного набора функционалов (0.2) используем оптимальный способ задания дискретной информации (0.4). Таким образом, описанный алгоритм (обозначим его $\hat{\varphi}$) принимает вид

$$x'_0 = 0,\, x'_k = H_\nu x'_{k-1} + S_\nu f,\, k = 1, 2, \dots \tag{0.16}$$

Определим количество K_* шагов итерации, обеспечивающих на исследуемом классе ту же точность приближения $O(\rho^{\sqrt{N(1-\varepsilon)}})$ при любом $\varepsilon > 0$. Для этого в силу (0.5) достаточно определить наименьшее k, удовлетворяющее условию $q^k \le C\rho^{\sqrt{\nu^2+3\nu}}$. Тогда очевидно, что алгоритму $\hat{\varphi}$ для достижения нужного уровня погрешности необходимо выполнить не менее $O(\nu)$ итераций (0.16). Кроме того, согласно лемме 2 построение каждого элемента x'_k требует $2\nu^2 + 2\nu + 1$ э.о. С учетом соотношения $K_* \ge O(\nu)$ для алгоритма $\hat{\varphi}$ получаем нижнюю оценку общего объема его вычислительных затрат, равную по порядку $O(\nu^3)$.

Выводы. Сравнительный анализ эффективности трех обсуждаемых алгоритмов показывает, что для достижения одинаковой по порядку точности решения уравнений (0.1) предлагаемый алгоритм φ требует выполнения существенно меньшего числа э.о., чем (0.3) и (0.16). Тем самым было установлено, что построенный нами алгоритм действительно является более быстрым (в указанном выше смысле) по сравнению с известными ранее методами, предназначенными для решения уравнений (0.1) с гармоническими коэффициентами.

Список литературы

[1] Трауб Дж., Вожьняковский Х. Общая теория оптимальных алгоритмов. – М.: Мир, 1983. – 382 с.

[2] Трауб Дж., Васильковский Г., Вожьняковский Х. Информация, неопределенность, сложность. – М.: Мир, 1988. – 183 с.

[3] Переверзев С. В. Оптимизация методов приближенного решения операторных уравнений.// Киев: Институт математики НАН Украины. - 1996 - 252 с.

[4] Переверзев С.В. Гиперболический крест и сложность приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма II рода с дифференцируемыми ядрами.// Сиб.мат.журн. 1991. Т. 32. N 1. С.107–115.

[5] Frank K., Heinrich S., Pereverzev S. Information complexity of multivariate Fredholm integral equation in Sobolev classes// J. Complexity 1996. V.12. P. 17 - 34.

[6] Переверзев С. В., Азизов М. Об оптимальных способах задания информации при решении интегральных уравнений с аналитическими коэффициентами// Укр. мат. журнал. 1996. Т. 48. № 5. С. 656-665.

[7] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 5-е. М.: Изд-во Наука, 1981. – 544 с.

[8] Тихомиров В.М. Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.

[9] Азизов М. Информационная сложность приближенного решения уравнений Фредгольма с гармоническими ядрами и свободными членами// Доповіді НАН України. 1996. №5. С.24-28.

[10] Азизов М. Информационная сложность приближенного решения интегральных уравнений и смежные вопросы теории приближенных методов. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат.наук. – Киев: Ин-т математики НАНУ. 1998. –259 с.

[11] Солодкий С. Г. Об одном алгоритме решения уравнений Фредгольма с гармоническими коэффициентами.// Дифференциальные уравнения. 2005. Т. 41. №9. С.1286-1290.

[12] Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ.– М.: Наука, 1977. – 744 с.

СОДЕРЖАНИЕ