УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТАВРИЧЕСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА им. В. И. ВЕРНАДСКОГО

Научный журнал

Том 17 (56). №1:

Математика. Механика. Информатика и кибернетика

Симферополь, Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского, 2004

Журнал основан в 1918 г.

ISSN 1606-3715

Свидетельство о регистрации – серия КМ № 534
от 23 ноября 1999 года

Редакционная коллегия:

Багров Н. В. – главный редактор
Бержанский В. Н. – заместитель главного редактора
Ена В. Г. – ответственный секретарь

Редакционная коллегия серии " Математика. Механика. Информатика и кибернетика":

Копачевский Н. Д.	*доктор физико-математических наук, профессор* (редактор серии)
Анашкин О. В.	*доктор физико-математических наук*
Бутаков Е. А.,	*доктор технических наук, профессор*
Донской В. И.	*доктор физико-математических наук, профессор* (зам. редактора серии)
Кужель А. В.	*доктор физико-математических наук, профессор*
Орлов И.В.	*кандидат физико-математических наук*
Персидский С. К.,	*доктор физико-математических наук, профессор*
Полумиенко С.К.,	*доктор физико-математических наук, ст. научный сотрудник*
Самойленко Ю.С.,	*доктор физико-математических наук, чл.-корр. НАН Украины*
Старков П. А.	*кандидат физико-математических наук* (отв. секретарь серии)
Чехов В. Н.,	*доктор физико-математических наук, профессор* (зам. редактора серии)
Чикрий А.А.,	*доктор физико-математических наук, профессор, чл.-корр. НАН Украины*

© Таврический национальный университет, 2004 г.

Подписано в печать 13.04.2005 Формат 70x100 $^{1}/_{16}$
9,1 усл. п. л. 11,2 уч.-изд. л. Тираж 500. Заказ № 212.
Отпечатано в информационно-издательском отделе ТНУ.
пр. Академика Вернадского, 4, г. Симферополь, 95007

"Учение записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского"
Науковий журнал. Том 17(56). №1. Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика.
Сімферополь, Таврійський національний університет ім. В. І. Вернадського, 2003
Журнал заснований у 1918 р.
Адреса редакції: пр. Академіка Вернадського, 4, м. Сімферополь, 95007
Надруковано у інформаційно-видавницькому відділі Таврійського національного університету
ім. В. І. Вернадського. пр. Академіка Вернадського, м. Сімферополь, 95007

Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 3–10

УДК 517.988.6

Б.М. Вронский

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ СИСТЕМЫ "ЖИДКОСТЬ-ГАЗ"В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

1. Постановка задачи

1.1. **Уравнения эволюционной задачи.** Рассмотрим систему, состоящую из несмешивающихся идеальных несжимаемой и сжимаемой (газа) жидкости, целиком заполняющих область $\Omega \subset R^3$. В состоянии покоя жидкость занимает область $\Omega_1 \subset \Omega$, ограниченную частью S_1 твердой стенки $S = \partial\Omega$ и границей раздела сред Γ, которая является горизонтальной. Соответственно, газ занимает область $\Omega_2 = \Omega \setminus \Omega_1$, ограниченную поверхностью Γ и частью $S_2 = S \setminus S_1$ твердой стенки S. Будем считать, что система находится в гравитационном поле с ускорением $\vec{g} = -g\vec{k}$, где $\vec{k}$ – орт оси Oz. Система координат (x_1, x_2, z) выбрана так, что оси Ox_1 и Ox_2 лежат на плоскости Γ, а ось Oz перпендикулярна ей.

Малые движения системы описываются следующей системой уравнений, краевых и начальных условий [2]:

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_1}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_1}\nabla p_1; \qquad \operatorname{div} \vec{w}_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1); \tag{1}$$

$$\frac{\partial^2 \vec{w}_2}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho_2}\nabla p_2; \qquad p_2 + \rho_2 c^2 \operatorname{div} \vec{w}_2 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2); \tag{2}$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на} S_1), \quad \vec{w}_2 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_2); \tag{3}$$

$$\vec{w}_1 \cdot \vec{n} = \vec{w}_2 \cdot \vec{n} \quad (\text{на } \Gamma); \tag{4}$$

$$(-p_1 + g\rho_1 \vec{w}_1 \cdot \vec{n}) = (-p_2 + g\rho_2 \vec{w}_2 \cdot \vec{n}) \quad (\text{на } \Gamma); \tag{5}$$

$$\vec{w}_i(\vec{x}, 0) = \vec{w}_i^0(\vec{x}), \qquad \frac{\partial \vec{w}_i(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}_i^1(\vec{x}) \quad (i = 1, 2). \tag{6}$$

Здесь введены обозначения: $\vec{w}_i = \vec{w}_i(\vec{x}, t)$ – смещение частиц i-й жидкости от состояния покоя, $p_i = p_i(\vec{x}, t)$ – отклонение полей давлений от их равновесных значений; $\rho_i = \text{const}$ – плотности в состоянии покоя; c – скорость звука в газе; $\vec{x} = (x_1, x_2, z)$ – точка в R^3; $\vec{n}$ – внешняя нормаль к поверхности S, а на границе раздела Γ положим по определению $\vec{n} = \vec{k}$. Состояние покоя предполагается устойчивым, то есть сжимаемая жидкость находится над несжимаемой и $\Delta\rho = \rho_1 - \rho_2 > 0$.

1.2. **Переход к скалярной задаче.** Из (1), (2) следует, что можно ввести в рассмотрение потенциалы полей смещений, то есть скалярные функции $\Phi_i = \Phi_i(\vec{x}, t)$ такие, что

$$\vec{w}_i = \nabla\Phi_i \quad (i = 1, 2). \tag{7}$$

В этом случае

$$p_i = -\rho_i \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial t^2} + c_i(t),$$

где $c_i(t)$ — произвольные функции времени, которые можно считать тождественно равными нулю. В результате этого исходная начально-краевая задача примет вид:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{8}$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} = c^2 \Delta\Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{9}$$

$$\nabla\Phi_i \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_i) \quad (i = 1, 2), \tag{10}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \equiv \xi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{11}$$

$$\rho_1 \left(\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \right) \quad (\text{на } \Gamma), \tag{12}$$

$$\vec{w}_i(\vec{x}, 0) = \nabla\Phi_i(\vec{x}, 0) = \vec{w}_i^0(\vec{x}), \quad \frac{\partial \vec{w}_i(\vec{x}, 0)}{\partial t} = \vec{w}_i^1(\vec{x}). \tag{13}$$

1.3. **Формулировка спектральной задачи.** Будем теперь разыскивать собственные колебания системы, то есть решения задачи (8) – (12), зависящие от времени по закону $\exp(i\omega t)$, где ω — частота колебаний. Получим следующую спектральную задачу:

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{14}$$

$$-\Delta\Phi_2 = \frac{\lambda}{c^2}\Phi_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \lambda \equiv \omega^2, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} \equiv \xi \quad (\text{на } \Gamma), \tag{16}$$

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_i), \quad (i = 1, 2), \tag{17}$$

Заметим, что проинтегрировав левые и правые части уравнений (14) и (15) по областям Ω_1 и Ω_2 и воспользовавшись формулой Грина, легко можно получить необходимые условия, налагаемые на функции Φ_i $(i = 1, 2)$:

$$\int_\Gamma \xi \, d\Gamma = \int_\Gamma (\rho_1\Phi_1 - \rho_2\Phi_2) \, d\Gamma = \int_{\Omega_2} \Phi_2 \, d\Omega = 0. \tag{18}$$

Эти условия вызывают необходимость введения оператора P_Γ, который действует по формуле:

$$P_\Gamma v \equiv v|_\Gamma - (|\Gamma|)^{-1} \int_\Gamma v \, d\Gamma \tag{19}$$

Таким образом, динамическое условие на границе раздела Г приобретает вид:

$$g\Delta\rho\xi = \lambda P_\Gamma(\rho_1\Phi_1 - \rho_2\Phi_2) \quad (\text{на } \Gamma). \tag{20}$$

Отметим простейшие свойства решений полученной спектральной задачи:

1. Умножив обе части уравнения (14) на $\rho_1\Phi_1$, а уравнения (15) на $\rho_2\Phi_2$, проинтегрируем по Ω_1 и Ω_2, соответственно, воспользовавшись формулой Грина. Складывая результаты, получим, что собственные значения λ задачи (14) – (20) находятся среди значений функционала:

$$F(\Phi_1,\Phi_2) = \frac{\sum\limits_{k=1}^{2}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\nabla\Phi_k|^2\,d\Omega_k}{g(\Delta\rho)^{-1}\int\limits_{\Gamma}|P_\Gamma(\rho_1\Phi_1-\rho_2\Phi_2)|^2\,d\Gamma+\rho_2c^{-2}\int\limits_{\Omega_2}|\Phi_2|^2\,d\Omega_2}. \tag{21}$$

и поэтому $\lambda \geq 0$. Отсюда следует, что собственные частоты колебаний $\omega = \pm\sqrt{\lambda}$ вещественны.

2. Задача имеет тривиальное решение $\lambda_0 = 0$, $(\Phi_0)_i = c_i$ $(i = 1,2)$, которому отвечает состояние покоя исследуемой системы.

Отметим, что наличие тривиального решения задачи приводит к тому, что функции Φ_i $(i = 1,2)$ определяются с точностью до постоянного слагаемого. В дальнейшем на них будут налагаться условия:

$$\int\limits_{\Gamma}\Phi_1\,d\Gamma = \int\limits_{\Omega_2}\Phi_2\,d\Omega = 0. \tag{22}$$

2. Операторный метод исследования спектральной задачи

2.1. Вспомогательные краевые задачи. Рассмотрим вспомогательные краевые задачи, непосредственно связанные со спектральной задачей (14)–(20).

Задача 1.

$$\Delta\Phi_1 = 0 \quad (\text{в } \Omega_1), \qquad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_1);$$
$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \xi \quad (\text{на } \Gamma), \qquad \int\limits_{\Gamma}\xi\,d\Gamma = \int\limits_{\Gamma}\Phi_1\,d\Gamma = 0.$$

Задача 2.

$$\Delta\Phi_{22} = 0 \quad (\text{в } \Omega_2), \qquad \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2),$$
$$\frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n} = -\xi \quad (\text{на } \Gamma), \int\limits_{\Gamma}\xi\,d\Gamma = \int\limits_{\Omega_2}\Phi_{22}\,d\Omega = 0.$$

Задача 3.

$$-\Delta\Phi_{21} = f \quad (\text{в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Phi_{21}}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } S_2 \cup \Gamma),$$
$$\int\limits_{\Omega_2} f\, d\Omega = \int\limits_{\Omega_2} \Phi_{21}\, d\Omega = 0.$$

Известно (см.например [3]), что при выполнении необходимого условия $\int\limits_\Gamma \xi\, d\Gamma = 0$ задача 1 имеет единственное обобщенное решение $\Phi_1 \in W_2^1(\Omega_1)$, удовлетворяющее условию $\int\limits_\Gamma \Phi_1\, d\Gamma = 0$, для всех функций $\xi \in H_-$, где

$$H_- \equiv \{\xi \in W_2^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) : \quad \int\limits_\Gamma \xi\, d\Gamma = 0\}.$$

Таким образом, решение задачи 1 можно записать в виде $\Phi_1 = T_1\xi$, где $T_1 : H_- \to W_2^1(\Omega_1)$ — линейный ограниченный оператор. Кроме оператора T_1 введем еще два оператора:

а) оператор γ_1 взятия следа функции $\Phi_1 \in W_2^1(\Omega_1)$ на границе Γ : $\gamma_1\Phi_1 \equiv \Phi_1|_\Gamma$. В нашем случае $\gamma_1 : W_2^1(\Omega_1) \to H_+$, где H_+ — позитивное пространство, построенное по негативному H_- и нулевому $H_0 \equiv L_2(\Gamma) \ominus \{1\}$.

б) оператор $C_1 \equiv \gamma_1 T_1$.

Перейдем к задаче 2. Для нее справедливо сказанное о задаче 1, и можно ввести аналогичные операторы T_2, γ_2, $C_2 \equiv -\gamma_2 T_2$.

Для задачи 3 известно, что для любой $f \in W_2^{-1}(\Omega_2)$ при выполнении условия $\int\limits_{\Omega_2} f\, d\Omega = 0$ она разрешима, и решение, удовлетворяющее условию $\int\limits_{\Omega_2} \Phi_{21}\, d\Omega = 0$, единственно. Задачу 3 можно записать в виде $A\Phi_{21} = f$ и ее решение задается формулой $\Phi_{21} = A^{-1}f$, где оператор A, определенный на плотном в пространстве $L_2(\Omega_2) \ominus \{1_{\Omega_2}\}$ множестве D(A), является самосопряженным неограниченным положительно определенным оператором с дискретным спектром [?]. Поэтому $A \gg 0$, $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$.

2.2. **Приведение задачи (14)–(20) к операторной форме.** Как следует из вышеприведенных рассмотрений, функцию Φ_1, входящую в (14)–(20) можно искать в виде: $\Phi_1 = T_1\xi$, $\Phi_1|_\Gamma = C_1\xi$.

Функцию Φ_2 из (14)–(20) будем искать в виде суммы $\Phi_2 = \Phi_{21} + \Phi_{22}$, где Φ_{21}, и Φ_{22} удовлетворяют второй и третьей краевым задачам, соответственно, при $\xi = \lambda(g\Delta\rho)^{-1}P_\Gamma(\rho_1\Phi_1 - \rho_2\Phi_2)$, и $f = \lambda c^{-2}\Phi_2$.

С учетом введенных обозначений можно записать задачу (14)–(20) в операторной форме:

$$\begin{cases} A\eta = \lambda c^{-2}(\eta + T_2\xi), \\ g\Delta\rho\xi = \lambda(-\rho_2 P_\Gamma \gamma_2 \eta + P_\Gamma(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2)\xi), \end{cases} \tag{23}$$

где $\eta \equiv \Phi_{21}|_{\Omega_2}$.

Элемент $(\eta, \xi)^T$ будем считать принадлежащим гильбертову пространству $\mathcal{H} \equiv H \oplus H_0$, где $H \equiv L_2(\Omega_2) \ominus \{1_{\Omega_2}\}$.

В пространстве H_- введем норму в одной из эквивалентных форм:

$$\|\xi\|_-^2 = \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2 \, d\Omega + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Phi_{22}|^2 \, d\Omega, \tag{24}$$

в этом случае справедлива

Теорема 1. *Оператор $C \equiv P_\Gamma(\rho_1 C_1 + \rho_2 C_2) : H_0 \to H_0$ положительный вполне непрерывный. Его расширение на H_- есть изометрический оператор, отображающий H_- на H_+, при этом $D(C^{-\frac{1}{2}}) = H_+$, а после расширения $D(C^{-\frac{1}{2}}) = H_0$, $C^{-\frac{1}{2}} H_0 = H_-$.*

Доказательство можно найти в [1].#

Выполним в (23) замену $c\sqrt{\rho_2} A\eta = \psi$, $\sqrt{g\Delta\rho}\xi = \varphi$, после чего запишем систему в виде:

$$y = \lambda \mathcal{A} y, \tag{25}$$

где $y \equiv (\psi, \varphi)^T \in \mathcal{H} \equiv (L_2(\Omega_2) \ominus \{1\}) \oplus (L_2(\Gamma) \ominus \{1\})$, а оператор $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} c^{-2}A^{-1} & \rho_2^{\frac{1}{2}}(g\Delta\rho)^{-\frac{1}{2}} c^{-1} A^{-\frac{1}{2}} (A^{\frac{1}{2}} T_2) \\ -\rho_2^{\frac{1}{2}}(g\Delta\rho)^{-\frac{1}{2}} c^{-1} P_\Gamma(\gamma_2 A^{-\frac{1}{2}}) A^{-\frac{1}{2}} & (g\Delta\rho)^{-1} C \end{pmatrix}.$$

2.3. Свойства оператора $\mathcal{A}$ и структура спектра.

Теорема 2. *Оператор $\mathcal{A}$ — самосопряженный, положительный, вполне непрерывный.*

Доказательство. Составим квадратичную форму $(\mathcal{A}y, y)$ и преобразуем ее, используя определение вектора y и входящих в $\mathcal{A}$ операторов. Имеем:

$$(\mathcal{A}y, y) = c^{-2}(A^{-1}\psi, \psi) + c^{-1}\sqrt{\rho_2}(g\Delta\rho)^{-\frac{1}{2}}(A^{-\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}T_2\varphi, \psi) -$$

$$-c^{-1}\sqrt{\rho_2}(g\Delta\rho)^{-\frac{1}{2}}(P_\Gamma\gamma_2 A^{-\frac{1}{2}}A^{-\frac{1}{2}}\psi, \varphi) + (g\Delta\rho)^{-1}(C\varphi, \varphi) =$$

$$= (\rho_2 A\eta, \eta) + (\rho_2 A\eta, T_2\xi) - (\rho_2 P_\Gamma\eta, \xi) + (C\xi, \xi) =$$

$$= \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} (-\Delta\Phi_{21}(\Phi_{21} + \Phi_{22})^*)\, d\Omega - \rho_2 \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}\Phi_{21}^*\, d\Gamma +$$

$$+\rho_1 \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial\Phi_1}{\partial n}\Phi_1^*\, d\Gamma + \rho_2 \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial\Phi_{22}}{\partial n}\Phi_{22}^*\, d\Gamma =$$

$$= \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega.$$

Из выражения для $(\mathcal{A}y, y)$ следует, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A} \geq 0$. Если же $(\mathcal{A}y, y) = 0$, то $\Phi_1 = \text{const}$, $\Phi_2 = \text{const}$, а из условий (1.3) вытекает, что $\Phi_1 = 0$ и $\Phi_2 = 0$, то есть $y = 0$, следовательно, оператор $\mathcal{A}$ положителен.

Осталось доказать его полную непрерывность. Из первой части доказательства следует, что операторы $\mathcal{A}_{12} = A^{\frac{1}{2}}T_2$ и $\mathcal{A}_{21} = -P_\Gamma\gamma_2 A^{-\frac{1}{2}}$ взаимно сопряженные. В силу свойств ограниченности операторов P_Γ и γ_2 и полной непрерывности $A^{-\frac{1}{2}}$ следует, что $\mathcal{A}_{21} \in \mathfrak{S}_\infty$ (а значит и $\mathcal{A}_{12} \in \mathfrak{S}_\infty$). Из свойств полной непрерывности операторов A и C следует теперь полная непрерывность оператора $\mathcal{A}$. #

Исследуемая задача приведена, таким образом, к задаче на характеристические значения для вполне непрерывного, положительного самосопряженного оператора. Из теоремы Гильберта–Шмидта следует:

Теорема 3. *Задача (25) имеет дискретный спектр, то есть:*

1. Существует счетное множество собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ *таких, что*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \ldots, \quad \lambda_k \to +\infty \quad (k \to +\infty);$$

2. Система собственных векторов $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ *оператора* $\mathcal{A}$ *образует ортогональный базис в пространстве* $\mathcal{H}$.

Установим теперь асимптотическое поведение собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ при $k \to \infty$. Для этого заметим, что λ_k представляют собой последовательные минимумы функционала:

$$\Psi(y) = \frac{(y, y)_{\mathcal{H}}}{(\mathcal{A}y, y)_{\mathcal{H}}}. \tag{26}$$

Используя определение вектора y и оператора $\mathcal{A}$, мы можем записать выражение для функционала $\Psi(y)$ в виде:

$$\Psi(y) = \frac{c^2\rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\Delta\Phi_2|^2\, d\Omega + g\Delta\rho \int\limits_{\Gamma} |\xi|^2\, d\Gamma}{\rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Phi_1|^2\, d\Omega + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Phi_2|^2\, d\Omega}. \tag{27}$$

Кроме того, как показано выше, собственные значения $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ могут быть найдены как последовательные минимумы функционала $F(\Phi_1, \Phi_2)$ из (21). Для них может быть установлена следующая асимптотическая формула:

$$\lambda_k = \frac{2g(\Delta\rho)(|\Gamma|)^{1/2}}{(\rho_1+\rho_2)\pi^{1/2}} k^{1/2}[1+o(1)] \quad (k\to\infty). \tag{28}$$

Окончательный итог исследованию подводит

Теорема 4. *Задача (14)-(20) имеет дискретный спектр собственных значений $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ с асимптотическим поведением, описываемым формулой (28) и систему собственных функций $\{((\Phi_{21})_k, \xi_k)^T\}_{k=1}^{\infty}$, образующую ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Так как система собственных векторов задачи (25) $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ образует ортогональный базис пространства $\mathcal{H}$, а система векторов $(\eta_k, \xi_k)^T = ((\Phi_{21})_k, \xi_k)^T$ получается из $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ по формулам $\eta_k = \sqrt{\rho_2}A^{-1}\psi_k$, $\xi_k = (g\Delta\rho)^{-\frac{1}{2}}\varphi_k$, то есть действием на компоненты векторов y_k ограниченных операторов, то требуемое утверждение доказано. #

3. О разрешимости эволюционной задачи

Методом, изложенным выше, эволюционная задача (8)-(13) может быть приведена к задаче Коши

$$\mathcal{A}\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0, \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1, \tag{29}$$

для дифференциального уравнения в пространстве $\mathcal{H}$, где оператор $\mathcal{A}$ определен в (25), а $y = y(t) \in \mathcal{H}$ при всех $t > 0$.

Определение. Назовем решение $y = y(t)$ задачи (29) решением с конечной энергией, если для всех $t > 0$ функции $A^{\frac{1}{2}}y'$ и y непрерывны по времени t в норме пространства $\mathcal{H}$.

Лемма 1. *При выполнении условий $y_0 \in \mathcal{H}$, $y_1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$ задача (29) однозначно разрешима и имеет решение с конечной полной энергией. Для этого решения выполнен закон сохранения энергии:*

$$\|\mathcal{A}^{1/2}y'\|_{\mathcal{H}}^2 + \|y\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\mathcal{A}^{1/2}y_1\|_{\mathcal{H}}^2 + \|y_0\|_{\mathcal{H}}^2 \tag{30}$$

Доказательство. Осуществим в уравнении (29) замену $\mathcal{A}^{1/2}y = p$. В результате прийдем к задаче Коши для абстрактного гиперболического уравнения:

$$p'' + \mathcal{A}^{-1}p = 0, \quad p(0) = p_0, \quad p'(0) = p_1. \tag{31}$$

Как следует из, обобщенное решение задачи (31) имеет вид:

$$p(t) = \cos(t\mathcal{A}^{-1/2})p_0 + \sin(t\mathcal{A}^{-1/2})\mathcal{A}^{1/2}p_1.$$

Отсюда следует, что если $y_0 \in \mathcal{H}$, $y_1 \in \mathcal{H}_{\mathcal{A}}$, то функции $p'(t)$ и $\mathcal{A}^{-1/2}p(t)$ непрерывны по t в норме пространства $\mathcal{H}$.

Покажем, что из этого следует, что $y(t) = \mathcal{A}^{1/2}p(t)$ является решением с конечной полной энергией. В самом деле, функция $\mathcal{A}^{1/2}y'$ непрерывна по t в норме пространства $\mathcal{H}$, функция $\|\mathcal{A}^{-1/2}y(t)\|_{\mathcal{H}}$ непрерывна по t, с другой стороны Аналогично доказывается, что при . Первое утверждение леммы доказано.

Для доказательства закона сохранения энергии умножим обе части равенства (29) на $y'(t)$ и проинтегрируем от 0 до t по времени, использовав начальные условия. В результате получим равенство (30), выражающее закон сохранения энергии. #

Следствием данной леммы является

Теорема 5. *Если в начальный момент времени функции* (13) *таковы, что им отвечают конечные кинетическая и потенциальная энергии системы,условия то существует едиственное обобщенное решение задачи* (8)-(13), *для которого кинетическаяи потенциальная энергии системы являются непрерывными функциями времени и имеет место закон сохранения энергии:*

$$K(t) + U(t) = K(0) + U(0).$$

4. Выводы

В предложенной статье исследована задача о малых движениях и собственных колебаниях системы "жидкость-газ". Доказана дискретность спектра, получены вариационные и на их основе асимптотические формулы для собственных частот. Для собственных векторов доказаны теоремы о полноте и базисности.

Список литературы

[1] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. - М. : Наука, 1989. - 416 с.

[2] Комаренко А. Н., Луковский И. А., Фещенко С. Ф. К задаче о собственных значениях с параметром в краевых условиях // Укр. мат. журнал. - 1965. - т. 17, № 6. - с. 22 - 30.

[3] Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. - М: Наука, 1970. - 512 с.

E-mail: bmw1960@mail.ru

Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 11-29

УДК 517.984.4, 517.968.7

Д.А. Закора, Н.Д. Копачевский

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Постановка задачи

В произвольном сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ рассмотрим задачу Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s)\, ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1, \tag{1}$$

$$A = A^* \gg 0, \quad A_k = A_k^* \geq 0, \quad \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A_k) \quad (k = \overline{1,m}), \tag{2}$$

$$0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_m. \tag{3}$$

Задача Коши вида (1) возникает при исследовании малых движений идеальной релаксирующей жидкости в ограниченной области [1]. В работе [2] исследована задача Коши более общая, чем (1). Из результатов работы [2] следует, как частный случай, теорема о сильной разрешимости задачи Коши (1) на произвольном интервале времени.

Настоящая статья посвящена исследованию так называемой ассоциированной спектральной задачи, связанной с уравнением (1).

По схеме работы [3] задачу для интегродифференциального уравнения (1) можно привести к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка в ортогональной сумме гильбертовых пространств. А именно, введем новые неизвестные функции

$$v_k(t) := \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k^{1/2} u(s)\, ds, \quad v(0) = 0, \quad k = \overline{1,m}.$$

Если $u = u(t)$ — сильное решение задачи (1)-(3), то $v_k(t)$ непрерывно дифференцируемы и

$$\frac{dv_k}{dt} = A_k^{1/2} u - \gamma_k v_k, \quad k = \overline{1,m}.$$

Вводя еще функцию $z(t) := u'(t)$, приходим взамен (1)-(3) к задаче Коши вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & I \\ 0 & -\widehat{I} & 0 \\ I & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ \widehat{v} \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & E & 0 \\ E^t & -\widehat{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \widehat{v} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$u(0) = u^0, \quad \widehat{v}(0) = 0, \quad z(0) = u^1. \tag{5}$$

Здесь

$$\widehat{v} := (v_1; \ldots; v_m)^t, \quad \widehat{\gamma} := \operatorname{diag}(\gamma_1 I, \ldots, \gamma_m I),$$
$$\widehat{I} := \operatorname{diag}(\underbrace{I, \ldots, I}_{m \text{ раз}}), \quad E := (A_1^{1/2}; \ldots; A_m^{1/2}), \tag{6}$$

а символом $(\ldots)^t$ обозначена операция транспонирования.

Задача (4)-(6) коротко может быть записана в виде

$$\widehat{\mathcal{J}} \frac{dy}{dt} + \widehat{\mathcal{A}}_0 y = \widehat{f}(t), \quad y(0) = y^0. \tag{7}$$

Имеет место следующая

Лемма 1. *Операторная блок-матрица $\widehat{\mathcal{A}}_0$, заданная на области определения*

$$\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}_0) := \mathcal{D}(A) \oplus \left(\oplus_{k=1}^m \mathcal{D}(A_k^{1/2})\right) \oplus \mathcal{H} \subset \widehat{\mathcal{H}},$$
$$\widehat{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus (\oplus_{k=1}^m \mathcal{H}_k) \oplus \mathcal{H}, \quad \mathcal{H}_k := \mathcal{H},$$

является симметричным и ограниченным снизу оператором; он допускает замыкание до самосопряженного ограниченного снизу оператора $\widehat{\mathcal{A}}$. При этом

$$\widehat{\mathcal{A}} = \operatorname{diag}(A^{1/2}, \widehat{I}, I) \cdot \begin{pmatrix} I & (\widehat{Q}^t)^* & 0 \\ \widehat{Q}^t & -\widehat{\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & -I \end{pmatrix} \cdot \operatorname{diag}(A^{1/2}, \widehat{I}, I),$$

$$\widehat{Q} := (A_1^{1/2} A^{-1/2}; \ldots; A_m^{1/2} A^{-1/2}),$$
$$\mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}) = \{(u; \widehat{v}; z)^t \in \widehat{\mathcal{H}} \mid u + A^{-1/2}(\widehat{Q}^t)^* \widehat{v} \in \mathcal{D}(A)\} \supset \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}_0).$$

Доказательство леммы проводится по схеме работы [2] и здесь не приводится.

Рассмотрим наряду с задачей Коши (7), связанной с проблемой (1)-(3), аналогичную задачу с замкнутым оператором $\widehat{\mathcal{A}}$:

$$\widehat{\mathcal{J}} \frac{dy}{dt} + \widehat{\mathcal{A}} y = \widehat{f}(t), \quad y(0) = y^0. \tag{8}$$

Определение 1. Будем говорить, что задача (8) ассоциирована с задачей (7) и задачей (1)-(3).

Приведем без доказательства теорему из работы [2] о связи задач (1)-(3), (7) и (8).

Теорема 1. *При условиях* $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{H})$ *задача* (1)-(3) *для интегродифференциального уравнения, а также задача* (7) *для векторно-матричного уравнения и ассоциированная задача* (8) *равносильны, т.е. из существования и единственности сильного решения любой из этих задач на отрезке* $[0,T]$ *следует существование и единственность сильного решения двух других задач.*

Рассмотрим решения однородной задачи (8), зависящие от t по закону

$$y(t) = \exp(-\lambda t)y, \quad y \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}) \subset \widehat{\mathcal{H}}, \tag{9}$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ — неизвестный заранее комплексный параметр, а $y \neq 0$ — так называемый амплитудный элемент. Решения такого вида называют нормальными движениями, отвечающими проблеме (8), причем λ есть комплексный декремент затухания.

Для амплитудных элементов y получаем спектральную задачу

$$\widehat{\mathcal{A}}y = \lambda \widehat{\mathcal{J}}y, \quad y \in \mathcal{D}(\widehat{\mathcal{A}}), \tag{10}$$

в гильбертовом пространстве $\widehat{\mathcal{H}}$.

Определение 2. Назовем задачу (10) спектральной задачей, ассоциированной с задачей (1)-(3) для интегродифференциального уравнения второго порядка.

Исследование задачи (10) и есть цель настоящей работы.

2. Вывод основного операторного пучка, локализация и асимптотика спектра

Запишем спектральную задачу (10) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} A^{1/2}(A^{1/2}u + (\widehat{Q}^t)^*\widehat{v}) = \lambda z, \\ \widehat{Q}^t A^{1/2}u - \widehat{\gamma}\widehat{v} = -\lambda \widehat{v}, \\ -z = \lambda u. \end{cases} \tag{11}$$

Осуществим в системе (11) замену $A^{1/2}u = \xi$, в результате придем к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \xi + (\widehat{Q}^t)^*\widehat{v} - \lambda A^{-1/2}z = 0, \\ \widehat{Q}^t\xi - \widehat{\gamma}\widehat{v} + \lambda\widehat{v} = 0, \\ z + \lambda A^{-1/2}\xi = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть $\lambda \neq \gamma_k$ $(k = \overline{1,m})$. Выразим из второго и третьего уравнений системы (12) $\widehat{v}$ и z соответственно:

$$\widehat{v} = -(\lambda\widehat{I} - \widehat{\gamma})^{-1}\widehat{Q}^t\xi, \quad z = -\lambda A^{-1/2}\xi.$$

Подставляя их в первое соотношение системы (12), получим

$$\xi - (\widehat{Q}^t)^*(\lambda\widehat{I} - \widehat{\gamma})^{-1}\widehat{Q}^t\xi + \lambda^2 A^{-1}\xi = 0. \tag{13}$$

После несложных преобразований задача (13) приводится к следующей спектральной задаче для операторного пучка $L(\lambda)$:

$$L(\lambda)\xi := \left\{ I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B_k \right\} \xi = 0, \quad \xi \in \mathcal{H}, \tag{14}$$

$$B_k := (A_k^{1/2} A^{-1/2})^* (A_k^{1/2} A^{-1/2}), \quad 0 \le B_k = B_k^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \quad k = \overline{1,m}.$$

Спектры задач (10) и (14) вне точек $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ совпадают. Далее будет показано, что точки $\lambda = \gamma_k$ ($k = \overline{1,m}$) при некотором условии на операторы B_k не принадлежат спектру задачи (10), и, таким образом, задачи (10) и (14) эквивалентны.

Введем следующее

Условие (a). Операторы B_k положительно определены: $B_k \gg 0$, $k = \overline{1,m}$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (a). Тогда спектр операторного пучка $L(\lambda)$ расположен симметрично относительно действительной оси. Для любого $0 < \varepsilon < \gamma_1$ и достаточно большого $R > \gamma_m$ справедливо включение*

$$\sigma(L(\lambda)) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\sum_{k=1}^{m} \|B_k\| < \operatorname{Re}\lambda < 0, \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0\} \cup (\gamma_1 - \varepsilon; R).$$

Доказательство. Покажем сначала, что справедливо включение

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \ge 0, \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0\} \subset \rho(L(\lambda)). \tag{15}$$

Несложно проверить, что для пучка $L(\lambda)$ верно следующее представление:

$$L(\lambda) = \left\{ I + ((\operatorname{Re}\lambda)^2 - (\operatorname{Im}\lambda)^2) A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{\operatorname{Re}\lambda - \gamma_k}{|\lambda - \gamma_k|^2} B_k \right\} + \\ + i \cdot \operatorname{Im}\lambda \left\{ 2A^{-1} \operatorname{Re}\lambda + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{|\lambda - \gamma_k|^2} B_k \right\}. \tag{16}$$

Из условия (3) на числа γ_k ($k = \overline{1,m}$), из положительной определенности операторов B_k (см. условие (a)) и представления (16) следует, что мнимая часть $\operatorname{Im} L(\lambda)$ операторного пучка $L(\lambda)$ есть знакоопределенный оператор, если только $\operatorname{Re}\lambda \ge 0$ и $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ ($\operatorname{Im} L(\lambda) \gg 0$ при $\operatorname{Im}\lambda > 0$, $\operatorname{Im} L(\lambda) \ll 0$ при $\operatorname{Im}\lambda < 0$). Значит на указанном множестве пучок $L(\lambda)$ непрерывно обратим и, таким образом, включение (15) справедливо.

Покажем теперь, что для любого $0 < \varepsilon < \gamma_1$ и достаточно большого $R > \gamma_m$ верно включение

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\lambda = 0, \ \operatorname{Re}\lambda \le \gamma_1 - \varepsilon\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}\lambda = 0, \ \operatorname{Re}\lambda \ge R\} \subset \rho(L(\lambda)). \tag{17}$$

В самом деле, если $\lambda \le \gamma_1 - \varepsilon$ ($0 < \varepsilon < \gamma_1$), то из условий (3) и (14) тривиально следует, что пучок операторов $L(\lambda)$ положительно определен, а значит ограниченно

обратим. Далее, если $\lambda \geq R$ и $R > \gamma_m$ настолько велико, что

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R - \gamma_m} \|B_k\| < 1,$$

то пучок $L(\lambda)$ снова будет положительно определенным, поскольку оператор A^{-1} положителен. Таким образом, включение (17) справедливо.

Используя теорему об оценке нормы резольвенты самосопряженного оператора, можно получить следующую оценку:

$$\|(I + \lambda^2 A^{-1})^{-1}\| \leq \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Re}\lambda|}, \quad \operatorname{Re}\lambda \neq 0. \tag{18}$$

Основываясь на оценке (18), покажем, что

$$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda \leq -\sum_{k=1}^{m} \|B_k\|\} \subset \rho(L(\lambda)). \tag{19}$$

Итак, пусть λ из левого множества во включении (19). Для таких λ с учетом (18) оценим следующую норму:

$$\|(I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B_k\| \leq \frac{|\lambda|}{|\operatorname{Re}\lambda|} \sum_{k=1}^{m} \frac{\|B_k\|}{|\lambda - \gamma_k|} < \frac{1}{|\operatorname{Re}\lambda|} \sum_{k=1}^{m} \|B_k\| \leq 1. \tag{20}$$

Из оценки (20) и представления

$$L(\lambda) = (I + \lambda^2 A^{-1}) \left\{ I - (I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B_k \right\}$$

следует включение (19). Симметричность расположения спектра следует из самосопряженности операторного пучка $L(\lambda)$. Отсюда и из соотношений (15), (17) и (19) следует утверждение настоящей теоремы. □

Докажем теперь, что точки $\lambda = \gamma_k$ ($k = \overline{1,m}$) не принадлежат спектру задачи (10). Этим фактом будет установлена эквивалентность задач (10) и (14).

Теорема 3. *Пусть выполнено условие (а). Тогда точки* $\lambda = \gamma_k$ ($k = \overline{1,m}$) *не принадлежат спектру задачи* (10).

Доказательство. Все рассуждения проведем для $\lambda = \gamma_p$, где $1 \leq p \leq m$. Покажем сначала, что точка $\lambda = \gamma_p$ не является собственным значением задачи (10). Допустим противное, т.е., что точка γ_p — собственное значение задачи (10) (или, что то же, задачи (12)). Тогда из (12) получим

$$\begin{cases} \xi + (\widehat{Q}^l)^* \widehat{v} - \gamma_p A^{-1/2} z = 0, \\ A_p^{1/2} A^{-1/2} \xi = 0, \\ A_k^{1/2} A^{-1/2} \xi + (\gamma_p - \gamma_k) v_k = 0, \quad k = 1, \ldots, p-1, p+1, \ldots, m, \\ z + \gamma_p A^{-1/2} \xi = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Из второго уравнения системы (21) следует, что $\xi = 0$. Из последнего уравнения (21) получаем тогда, что $z = 0$. Из третьего соотношения в (21), с учетом условия (3) на числа γ_k ($k = \overline{1,m}$), следует, что $v_k = 0$, $k \neq p$. Из первого соотношения в (21) и полученных фактов получаем, что $v_p = 0$. Таким образом, $\xi = v_1 = \ldots = v_m = z = 0$. Это противоречит тому, что γ_p – собственное значение задачи (12) (а значит и задачи (10)).

Докажем, что $\lambda = \gamma_p$ не является предельной точкой спектра задачи (10). Для этого достаточно показать, что пучок $L_p(\lambda) := (\lambda - \gamma_p)L(\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой проколотой окрестности точки γ_p.

В самом деле, пучок $L_p(\lambda)$ можно записать в виде

$$L_p(\lambda) = -B_p + (\lambda - \gamma_p)B(\lambda), \quad B(\lambda) := I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{k=1,\,k\neq p}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B_k.$$

Поскольку оператор-функция $B(\lambda)$ равномерно ограничена в окрестности точки $\lambda = \gamma_p$, а оператор B_p положительно определен, в силу условия (a), то из последнего представления следует, что операторный пучок $L_p(\lambda)$ непрерывно обратим в некоторой окрестности точки $\lambda = \gamma_p$. Теорема доказана. □

Введем следующее

Условие (b). Операторы B_k имеют вид $B_k := \alpha_k I + T_k$ ($k = \overline{1,m}$). Кроме того

$$A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty, \quad 0 \leq T_k \in \mathfrak{S}_\infty, \quad \alpha_k > 0, \quad k = \overline{1,m}. \tag{22}$$

Для дальнейших исследований введем скалярную функцию $\varphi(\lambda)$:

$$\varphi(\lambda) := 1 - \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{\lambda - \gamma_k} \equiv \frac{(\lambda - \beta_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda - \beta_m)}{(\lambda - \gamma_1)\cdot\ldots\cdot(\lambda - \gamma_m)}, \tag{23}$$

где β_k ($k = \overline{1,m}$) – нули функции $\varphi(\lambda)$, и определим операторный пучок $F(\lambda)$ равенством

$$F(\lambda)\xi := \varphi^{-1}(\lambda)L(\lambda)\xi = \left\{ I + \varphi^{-1}(\lambda)\left(\lambda^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{\lambda - \gamma_k}\right)\right\}\xi = 0, \quad \xi \in \mathcal{H}. \tag{24}$$

Все нули β_k ($k = \overline{1,m}$) функции $\varphi(\lambda)$ действительны, положительны и чередуются с числами γ_k ($k = \overline{1,m}$): $0 < \gamma_1 < \beta_1 < \ldots < \gamma_m < \beta_m$, в чем легко убедиться непосредственно. Очевидно также, что вне точек γ_k и β_k ($k = \overline{1,m}$) спектры пучков $L(\lambda)$ и $F(\lambda)$ совпадают.

Из соотношения (24), определяющего операторный пучок $F(\lambda)$, и условия (22) (условия (b)) следует, что $F(\lambda) = I + \Phi(\lambda)$, где $\Phi(\lambda) \in \mathfrak{S}_\infty$, т.е. пучок $F(\lambda)$ имеет вид фредгольмовой оператор-функции. Поскольку $F(\lambda)$ имеет регулярные точки (см. теорему 2), то спектр пучка $F(\lambda)$, а значит и пучка $L(\lambda)$, отличный от особенностей оператор-функции $\Phi(\lambda)$, дискретный. Возможными предельными точками спектра могут быть только особенности оператор-функции $\Phi(\lambda)$, т.е. бесконечно удаленная

точка и нули функции $\varphi(\lambda)$ (из теоремы 3 следует, что точки $\lambda = \gamma_k$ $(k = \overline{1,m})$ не могут быть предельными).

Теорема 4. *Пусть выполнено условие (b) (см. (22)). Зафиксируем номер p $(1 \le p \le m)$ и определим оператор A_p по формуле*

$$A_p := \psi_p(\beta_p)\left(\beta_p^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k}\right), \quad \psi_p(\lambda) := (\lambda - \beta_p)\varphi^{-1}(\lambda).$$

Пусть $\operatorname{Ker} A_p = \{0\}$ *и оператор $A_p = A_p^*$ имеет степенную асимптотику положительных $\{\lambda_n^+(A_p)\}_{n=1}^{\infty}$ и отрицательных $\{\lambda_n^-(A_p)\}_{n=1}^{\infty}$ собственных значений. Тогда пучок $L(\lambda)$ имеет ветвь собственных значений, локализованную на действительной оси, с предельной точкой β_p. Эта ветвь разбивается на две: лежащую слева $\{\lambda_n^{(p-)}(L)\}_{n=1}^{\infty}$ и справа $\{\lambda_n^{(p+)}(L)\}_{n=1}^{\infty}$ от точки β_p соответственно. При этом справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\lambda_n^{(p\pm)}(L(\lambda)) = \beta_p - \lambda_n^{\mp}(A_p)(1 + o(1)) \quad (n \to +\infty). \tag{25}$$

Если количество отрицательных либо положительных собственных значений оператора A_p конечно, то из двух соотношений в (25) останется только одна формула, отвечающая бесконечной ветви (со знаком $-$ либо $+$ в левой части соответственно).

Доказательство. Оно основано на применении теоремы Маркуса-Мацаева [4] к операторному пучку $F(\lambda)$.

Пусть номер p $(1 \le p \le m)$ такой же, как в условии теоремы. Представим функцию $\varphi^{-1}(\lambda)$ в окрестности точки β_p в следующем виде:

$$\varphi^{-1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda - \beta_p} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{m}(\lambda - \gamma_k)}{\prod_{k=1,\,k\neq p}^{m}(\lambda - \beta_k)} =: \frac{1}{\lambda - \beta_p}\psi_p(\lambda), \tag{26}$$

где $\psi_p(\lambda)$ голоморфна в некоторой окрестности точки β_p и $\psi_p(\beta_p) \neq 0$ (точнее, $\psi_p(\beta_p) > 0$, это можно заметить из определения (26) функции $\psi_p(\lambda)$ и условия (3) на числа γ_k $(k = \overline{1,m})$).

Как уже отмечалось, спектры пучков $L(\lambda)$ и $F(\lambda)$ вне точек γ_k, β_k $(k = \overline{1,m})$ совпадают, поэтому для получения асимптотики (25) воспользуемся пучком $F(\lambda)$. Для изучения окрестности точки β_p осуществим в задаче (24) замену спектрального параметра: $\lambda = \beta_p + \mu^{-1}$. В результате придем к задаче

$$F(\beta_p + \frac{1}{\mu})\xi = \left\{I + \mu\psi_p(\beta_p + \frac{1}{\mu})\left((\beta_p + \frac{1}{\mu})^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k + \mu^{-1}}\right)\right\}\xi = 0, \tag{27}$$

которую будем изучать в окрестности бесконечно удаленной точки.

Преобразуем задачу (27) с помощью соотношений

$$\psi_p(\beta_p + \mu^{-1}) = \psi_p(\beta_p) + \psi_p'(\beta_p)\mu^{-1} + \mu^{-1}\varepsilon_0(\mu),$$
$$\frac{1}{\beta_p - \gamma_k + \mu^{-1}} = \frac{1}{\beta_p - \gamma_k} - \frac{1}{(\beta_p - \gamma_k)^2}\frac{1}{\mu} + \mu^{-1}\varepsilon_k(\mu),$$
$$\varepsilon_0(\mu) = O(\mu^{-1}), \quad \varepsilon_k(\mu) = O(\mu^{-1}), \quad \mu \to \infty, \quad k = \overline{1,m},$$

справедливых в окрестности бесконечно удаленной точки. После перегруппировки слагаемых получим следующую задачу:

$$F(\beta_p + \mu^{-1})\xi = \{I + \mu A_p + Q_p + G_p(\mu)\}\,\xi = 0, \quad \xi \in \mathcal{H}, \tag{28}$$

где

$$A_p := \psi_p(\beta_p)\left(\beta_p^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m}\frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k}\right),$$

$$Q_p := \psi_p(\beta_p)\left(2\beta_p A^{-1} + \sum_{k=1}^{m}\frac{T_k}{(\beta_p - \gamma_k)^2}\right) + \psi_p'(\beta_p)\left(\beta_p^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m}\frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k}\right),$$

$$G_p(\mu) := \psi_p(\beta_p)\left(\frac{1}{\mu}A^{-1} + \sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k(\mu)T_k\right) +$$
$$+ \psi_p'(\beta_p)\left(\frac{2\beta_p}{\mu}A^{-1} + \frac{1}{\mu^2}A^{-1} + \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\frac{T_k}{(\beta_p - \gamma_k)^2} + \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon_k(\mu)T_k\right) +$$
$$+ \varepsilon_0(\mu)\left((\beta_p + \frac{1}{\mu})^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m}\frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k + \mu^{-1}}\right).$$

Оператор A_p по условию теоремы есть полный самосопряженный компактный оператор, а его собственные значения имеют степенную асимптотику. Оператор Q_p, как видно из его определения, является компактным, в силу условия (22). Оператор-функция $G_p(\mu)$, определенная выше, очевидно, обладает следующим свойством: $G_p(\mu) \to 0$ при $\mu \to \infty$. Из этих фактов и теоремы Маркуса-Мацаева [4] следует, что у пучка $F(\beta_p + \mu^{-1})$ существует две ветви собственных значений, локализованных у действительной оси с предельными точками в бесконечности. Эти ветви имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\mu_n^{(\pm\infty)}(F(\beta_p + \mu^{-1})) = -\left[\lambda_n^{\mp}(A_p)\right]^{-1}(1 + o(1)) \quad (n \to +\infty).$$

Отсюда после обратной замены $\mu = (\lambda - \beta_p)^{-1}$ следует формула (25):

$$\lambda_n^{(p\pm)}(L(\lambda)) = \lambda_n^{p\pm}(F(\lambda)) = \beta_p - \lambda_n^{\mp}(A_p)(1 + o(1)) \quad (n \to +\infty).$$

Найденная ветвь собственных значений операторного пучка $L(\lambda)$ не только локализована у действительной оси, но и лежит на ней в силу теоремы 2. Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть выполнено условие (b) (см. (22)). Зафиксируем номер* p $(1 \le p \le m)$. *Пусть* $\operatorname{Ker} A_p \ne \{0\}$, $\dim(\operatorname{Ker} A_p)^{\perp} = +\infty$ *и выполнены все оставшиеся условия теоремы 4. Если* $-1 \in \rho(P_2 Q_p P_2)$, *где* Q_p — *оператор из соотношения* (28), *а* P_2 *это ортопроектор на* $\operatorname{Ker} A_p$, *то имеют место все выводы теоремы 4.*

Доказательство. Проводя рассуждения, как и в теореме 4, приходим к спектральной задаче (28), изучаемой вне круга достаточно большого радиуса. Теорему Маркуса-Мацаева применить теперь нельзя, так как $\operatorname{Ker} A_p \ne \{0\}$. Введем ортопроекторы P_1, P_2 на $(\operatorname{Ker} A_p)^{\perp}$, $\operatorname{Ker} A_p$ соответственно и представим ξ в виде $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где $\xi_j := P_j \xi$, $j = 1, 2$. Подставим введенное представление для ξ в (28) и применим к левой и правой частям полученного выражения поочередно ортопроекторы P_1 и P_2. В результате получим два соотношения:

$$\begin{cases} \xi_1 + \mu P_1 A_p \xi_1 + P_1 Q_p(\xi_1 + \xi_2) + P_1 G_p(\mu)(\xi_1 + \xi_2) = 0, \\ \xi_2 + P_2 Q_p(\xi_1 + \xi_2) + P_2 G_p(\mu)(\xi_1 + \xi_2) = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Запишем второе соотношение в следующем виде:

$$\{I_2 + P_2 Q_p P_2 + P_2 G_p(\mu) P_2\}\xi_2 = -P_2 Q_p P_1 \xi_1 - P_2 G_p(\mu) P_1 \xi_1, \tag{30}$$

где I_2 — единичный оператор в $\operatorname{Ker} A_p$. По условию теоремы $-1 \in \rho(P_2 Q_p P_2)$, поэтому оператор $I_2 + P_2 Q_p P_2$ непрерывно обратим в $\operatorname{Ker} A_p$. Оператор-функция $P_2 G_p(\mu) P_2$ стремится к нулю при $\mu \to \infty$. Отсюда следует, что существует число $M > 0$ такое, что оператор-функция, стоящая в левой части (30), обратима и обратная к ней ограничена при $|\mu| > M$. Пусть $|\mu| > M$; выразим ξ_2 из (30) и подставим полученное выражение в (29), будем иметь:

$$\begin{aligned} &\{I_1 + \mu P_1 A_p P_1 + P_1 Q_p P_1 - P_1 Q_p P_2 K_p^{-1}(\mu)(P_2 Q_p P_1 + P_2 G_p(\mu) P_1) + \\ &\quad + P_1 G_p(\mu) P_1 - P_1 G_p(\mu) P_2 K_p^{-1}(\mu)(P_2 Q_p P_1 + P_2 G_p(\mu) P_1)\}\xi_1 = 0, \\ &\quad K_p(\mu) := I_2 + P_2 Q_p P_2 + P_2 G_p(\mu) P_2. \end{aligned} \tag{31}$$

Воспользовавшись просто проверяемой формулой

$$(P_2 + P_2 Q_p P_2)^{-1} - K_p^{-1}(\mu) = (P_2 + P_2 Q_p P_2)^{-1} P_2 G_p(\mu) P_2 K_p^{-1}(\mu),$$

преобразуем задачу (31) к виду

$$\begin{aligned} &\{I_1 + \mu P_1 A_p P_1 + \widehat{Q}_p + \widehat{G}_p(\mu)\}\xi_1 = 0, \quad \xi_1 \in (\operatorname{Ker} A_p)^{\perp}, \\ &\widehat{Q}_p := P_1 Q_p P_1 - P_1 Q_p P_2 (P_2 + P_2 Q_p P_2)^{-1} P_2 Q_p P_1, \end{aligned} \tag{32}$$

$$\begin{aligned} \widehat{G}_p(\mu) := {} & P_1 Q_p P_2 (P_2 + P_2 Q_p P_2)^{-1} P_2 G_p(\mu) P_2 K_p^{-1}(\mu) - P_1 Q_p P_2 K_p^{-1}(\mu) \times \\ & \times P_2 G_p(\mu) P_1 + P_1 G_p(\mu) P_1 - P_1 G_p(\mu) P_2 K_p^{-1}(\mu)(P_2 Q_p P_1 + P_2 G_p(\mu) P_1). \end{aligned}$$

Из проведенных рассуждений следует, что спектры задач (28) и (32) совпадают вне круга радиуса M. Применение к задаче (32) теоремы Маркуса-Мацаева заканчивает доказательство теоремы. □

Из доказанных двух теорем следует, что если для каждого номера p $(1 \le p \le m)$ будут выполнены условия либо теоремы 4. либо теоремы 5, то пучок $L(\lambda)$ будет иметь m ветвей действительных собственных значений с предельными точками $\beta_1, \dots, \beta_m$. Из последующих рассуждений будет установлено, что ветвь с номером p $(1 \le p < m)$ лежит в интервале $(\gamma_p; \gamma_{p+1})$, а для номера $p = m$ - в интервале $(\gamma_m; R)$, где R достаточно велико (см. теорему 2). Таким образом, все m выделенных ветвей собственных значений между собой не пересекаются.

Осталось проверить, может ли пучок $L(\lambda)$ иметь ветви с бесконечно удаленной предельной точкой? Если эти ветви и есть, то они могут лежать только в области

$$\Lambda := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid -\sum_{k=1}^{m} \|B_k\| < \operatorname{Re}\lambda < 0, \ \operatorname{Im}\lambda \neq 0\}, \tag{33}$$

в соответствии с теоремой 2.

Далее понадобится следующая абстрактная теорема (см. [6]), опирающаяся на результат работы [7].

Теорема 6. *Пусть $0 < C = C^* \in \mathfrak{S}_\infty$, причем собственные значения оператора C имеют степенную асимптотику. Введем обозначения:*

$$l(\lambda) := I + \lambda^2 C + G(\lambda), \quad T(\lambda) := (I - \lambda C^{1/2})^{-1} G(\lambda)(I + \lambda C^{1/2})^{-1},$$

$$\Lambda^{\pm}_{R,\varepsilon} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| > R, \quad |\arg\lambda \pm \pi/2| < \varepsilon\}, \quad -\pi < \arg\lambda \le \pi.$$

Пусть оператор-функция $G(\lambda)$ аналитична в секторах $\Lambda^+_{R,\varepsilon}$ и $\Lambda^-_{R,\varepsilon}$, а оператор-функция $T(\lambda)$ удовлетворяет следующему условию: $T(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty, \ \lambda \in \Lambda^{\pm}_{R,\varepsilon})$. Тогда операторный пучок $l(\lambda)$ имеет две ветви собственных значений $\{\lambda_n^{(+i)}(l(\lambda))\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\lambda_n^{(-i)}(l(\lambda))\}_{n=1}^{\infty}$ и

$$\lambda_n^{(\pm i)}(l(\lambda)) = \pm i\lambda_n^{1/2}(C^{-1})(1 + o(1)) \quad (n \to +\infty).$$

С использованием теоремы 6 докажем следующий результат.

Теорема 7. *Пусть выполнено условие (a), $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$ и собственные значения оператора A^{-1} имеют степенную асимптотику. Тогда у пучка $L(\lambda)$ имеется две комплексно сопряженные ветви собственных значений, локализованные в области Λ (см. (33)), со следующей асимптотикой:*

$$\lambda_n^{(\pm i)}(L(\lambda)) = \pm i\lambda_n^{1/2}(A)(1 + o(1)) \quad (n \to +\infty). \tag{34}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно проверить выполнение условий теоремы 6. Очевидно, в проверке нуждается лишь условие, связанное с оператор-функцией $T(\lambda)$, которая в данном случае принимает следующий вид:

$$T(\lambda) := (I - \lambda A^{-1/2})^{-1} \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B_k \right) (I + \lambda A^{-1/2})^{-1}.$$

Крайние сомножители в выражении для $T(\lambda)$ равномерно ограниченны в секторах $\Lambda^{+}_{R,\varepsilon}$ и $\Lambda^{-}_{R,\varepsilon}$, а значит $T(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty,\ \lambda \in \Lambda^{\pm}_{R,\varepsilon})$. Из теоремы 6 выводится асимптотическая формула (34). Локализация найденных двух ветвей в области Λ следует из теоремы 2. Теорема доказана. □

Рассмотрим частный случай пучка $L(\lambda)$, когда выполнено условие (b) и $T_k = 0$ $(k = \overline{1,m})$. О более точной локализации его комплексно сопряженных ветвей говорит следующая

Теорема 8. *Пусть выполнено условие (b), $A^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty$, $T_k = 0$ $(k = \overline{1,m})$. Тогда у пучка $L(\lambda)$ имеется две комплексно сопряженные ветви собственных значений, локализованные в области Λ (см. (33)) и с асимптотикой (34), причем справедливо следующее предельное соотношение:*

$$\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Re} \lambda_n^{(\pm i)}(L(\lambda)) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}(\beta_k - \gamma_k). \tag{35}$$

Доказательство. Поскольку $T_k = 0$ $(k = \overline{1,m})$, то из (14) следует, что все собственные значения операторного пучка $L(\lambda)$ можно найти из следующей последовательности скалярных уравнений:

$$1 + \lambda^2\lambda_n(A^{-1}) - \sum_{k=1}^{m}\frac{\alpha_k}{\lambda - \gamma_k} = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots. \tag{36}$$

где $\lambda_n(A^{-1})$ – это собственные значения оператора A^{-1}. Легко установить графическим методом, что при каждом n уравнение из (36) имеет ровно m действительных корней. Наборы из этих m корней в совокупности образуют m ветвей собственных значений операторного пучка $L(\lambda)$, которые (ветви) лежат справа от своих предельных точек β_k $(k = \overline{1,m})$ и имеют следующее асимптотическое поведение:

$$\lambda_n^{(k-)}(L(\lambda)) = \beta_k - \psi_k(\beta_k)\beta_k^2\lambda_n(A^{-1})(1 + o(1)) \quad (n \to \infty), \quad k = \overline{1,m}; \tag{37}$$

это следует из теоремы 4. Каждое уравнение из (36) имеет порядок $m + 2$, следовательно, кроме m действительных корней каждое уравнение имеет по два комплексно сопряженных корня, которые и составляют две оставшиеся ветви. Формула (34) устанавливается непосредственно из (36), а принадлежность ветвей к области Λ по-прежнему следует из теоремы 2.

Преобразуем уравнения (36) к следующему виду:

$$(\lambda^2 + \lambda_n^{-1}(A^{-1}))\prod_{k=1}^{m}(\lambda - \gamma_k) - \lambda_n^{-1}(A^{-1})\sum_{k=1}^{m}\alpha_k \prod_{j=1,\,j\neq k}^{m}(\lambda - \gamma_j) = 0, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Раскроем здесь скобки и соберем слагаемые с λ^{m+2} и λ^{m+1}, получим

$$\lambda^{m+2} - \lambda^{m+1}\sum_{k=1}^{m}\gamma_k + \ldots = 0, \quad n = 1,2,3,\ldots. \tag{38}$$

С другой стороны, уравнения (36) можно представить в следующем виде:

$$\left(\lambda - \lambda_n^{(+i)}(L(\lambda))\right)\left(\lambda - \lambda_n^{(-i)}(L(\lambda))\right)\prod_{k=1}^{m}\left(\lambda - \lambda_n^{(k-)}(L(\lambda))\right) = 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad (39)$$

где $\lambda_n^{(+i)}(L(\lambda))$ и $\lambda_n^{(-i)}(L(\lambda))$ - это комплексно сопряженные корни уравнений (36), а $\lambda_n^{(k-)}(L(\lambda))$ определены в (37). Собрав в (39) слагаемые с λ^{m+2} и λ^{m+1}, получим

$$\lambda^{m+2} - \lambda^{m+1}\left(2\operatorname{Re}\lambda_n^{(\pm i)}(L(\lambda)) + \sum_{k=1}^{m}\lambda_n^{(k-)}(L(\lambda))\right) + \ldots = 0, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \quad (40)$$

Из (38) и (40) следует, что

$$\operatorname{Re}\lambda_n^{(\pm i)}(L(\lambda)) = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}\left(\lambda_n^{(k-)}(L(\lambda)) - \gamma_k\right).$$

Переходя в этом соотношении к пределу при $n \to +\infty$ и учитывая (37), получим (35). Теорема доказана. □

Следует отметить, что утверждение теоремы останется верным, если операторы A^{-1} и T_k $(k = \overline{1.m})$ имеют одинаковые собственные элементы. Доказательство при этом останется такое же, лишь с небольшими дополнениями в коэффициентах. Возможно, такая ситуация сохранится и в общем случае, когда операторы A^{-1} и T_k $(k = \overline{1.m})$ не коммутируют, однако это требует дополнительного исследования.

3. О свойствах базисности Рисса и кратной полноте части собственных и присоединенных элементов

В этом параграфе будет доказано утверждение о базисности Рисса системы собственных элементов операторного пучка $L(\lambda)$, отвечающих каждой из m действительных ветвей собственных значений (при условии (b), см. (22)). А также получено свойство двукратной полноты системы собственных и присоединенных элементов, отвечающих двум комплексно сопряженным ветвям собственных значений (при условии (a)).

Введем обозначения для следующих интервалов: $\mathcal{J}_{p,\varepsilon} := (\gamma_p + \varepsilon; \gamma_{p+1} - \varepsilon)$ для номеров p таких, что $1 \le p < m$, и $\mathcal{J}_{m,\varepsilon,R} := (\gamma_m + \varepsilon; R)$ при $p = m$.

Справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть выполнено условие (b) (см. (22)). Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ (и достаточно большого $R > \gamma_m + \varepsilon$) спектр операторного пучка $L(\lambda)$ в интервале $\mathcal{J}_{p,\varepsilon}$ $(\mathcal{J}_{m,\varepsilon,R})$ состоит из точки β_p (β_m) и не более чем счетного множества собственных значений конечной кратности. Если это множество бесконечно, то оно имеет предельную точку β_p (β_m). Собственные элементы $L(\lambda)$, отвечающие собственным значениям из $\mathcal{J}_{p,\varepsilon}$ $(\mathcal{J}_{m,\varepsilon,R})$, образуют базис Рисса в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Доказательство опирается на теорему 30.12 из [8]. Согласно этой теореме достаточно проверить, что существует $\varepsilon > 0$ такое, что выполнены условия

$$L(\gamma_p + \varepsilon) \ll 0, \quad L(\gamma_{p+1} - \varepsilon) \gg 0, \quad L'(\lambda) \gg 0 \ (\lambda \in \mathcal{J}_{p,\varepsilon}), \quad L(\beta_p) \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{41}$$

для номеров p с $1 \le p < m$, и условия

$$L(\gamma_m + \varepsilon) \ll 0, \quad L(R) \gg 0, \quad L'(\lambda) \gg 0 \ (\lambda \in \mathcal{J}_{m,\varepsilon,R}), \quad L(\beta_m) \in \mathfrak{S}_\infty, \tag{42}$$

для $p = m$, где $R > \gamma_m + \varepsilon$ – достаточно велико.

Из соотношения (14), определяющего операторный пучок $L(\lambda)$, и условия (22) на числа α_k ($k = \overline{1,m}$) найдем, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и $R > \gamma_m + \varepsilon$

$$L'(\lambda) = \sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k}{(\lambda - \gamma_k)^2} + \left(2\lambda A^{-1} + \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{(\lambda - \gamma_k)^2} \right) \gg 0, \quad \lambda \in \mathcal{J}_{p,\varepsilon}(\mathcal{J}_{m,\varepsilon,R}), \tag{43}$$

при $1 \le p < m$.

Далее, из (14), условия (22) и того факта, что точки β_p ($p = \overline{1,m}$) есть нули функции $\varphi(\lambda)$, определенной в (23), имеем:

$$L(\beta_p) = \beta_p^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{T_k}{\beta_p - \gamma_k} \in \mathfrak{S}_\infty, \quad p = \overline{1,m}. \tag{44}$$

Проведем следующее преобразование:

$$L(\gamma_p + \varepsilon) = I + (\gamma_p + \varepsilon)^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\gamma_p - \gamma_k + \varepsilon} (\alpha_k I + T_k) =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}(\alpha_p I + T_p) + I + (\gamma_p + \varepsilon)^2 A^{-1} - \sum_{k=1,\, k \ne p}^{m} \frac{1}{\gamma_p - \gamma_k + \varepsilon} (\alpha_k I + T_k).$$

Это выражение можно записать более коротко:

$$\begin{aligned} L(\gamma_p + \varepsilon) &= -\frac{1}{\varepsilon}(\alpha_p I + T_p) + M_1(\varepsilon), \\ M_1(\varepsilon) &:= I + (\gamma_p + \varepsilon)^2 A^{-1} - \sum_{k=1,\, k \ne p}^{m} \frac{1}{\gamma_p - \gamma_k + \varepsilon} (\alpha_k I + T_k). \end{aligned} \tag{45}$$

Оператор-функция $M_1(\varepsilon)$ равномерно ограничена при $\varepsilon \to 0$ ($\varepsilon > 0$), а оператор $-(\alpha_p I + T_p)$ отрицательно определен. Отсюда следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор $L(\gamma_p + \varepsilon)$ будет отрицательно определенным: $L(\gamma_p + \varepsilon) \ll 0$ ($p = \overline{1,m}$).

Далее, аналогично формуле (45), приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} L(\gamma_{p+1} - \varepsilon) &= \frac{1}{\varepsilon}(\alpha_p I + T_p) + M_2(\varepsilon), \\ M_2(\varepsilon) &:= I + (\gamma_{p+1} - \varepsilon)^2 A^{-1} - \sum_{k=1,\, k \ne p+1}^{m} \frac{1}{\gamma_{p+1} - \gamma_k - \varepsilon} (\alpha_k I + T_k). \end{aligned} \tag{46}$$

Оператор-функция $M_2(\varepsilon)$, как можно видеть, равномерно ограничена при $\varepsilon \to 0$ $(0 < \varepsilon < \min_{1\le r<s\le m}(\gamma_s - \gamma_r))$, а оператор $(\alpha_p I + T_p)$ положительно определен. Отсюда следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ оператор $L(\gamma_{p+1} - \varepsilon)$ будет положительно определенным: $L(\gamma_{p+1} - \varepsilon) \gg 0$ $(p = \overline{1, m-1})$.

Наконец из (14) следует, что $L(R) \gg 0$, если только $R > \gamma_m$ достаточно велико.

Из (43), (44) и проведенных выше рассуждений следуют условия (41), (42). Применение теоремы 30.12 из [8] завершает доказательство настоящей теоремы. □

Из доказанного утверждения следует, в частности, что действительные ветви операторного пучка $L(\lambda)$ между собой не пересекаются.

Исследованию свойства кратной полноты части системы собственных и присоединенных элементов операторного пучка $L(\lambda)$ предпошлем следующую теорему.

Теорема 10. *Пусть в круге радиуса r определен пучок, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:*

$$\mathcal{L}(\lambda) := \lambda(I + C) - H - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k B_k, \tag{47}$$

$$\exists t \in (0, r): \quad \frac{\|H\|}{t} + \sum_{k=1}^{\infty} t^k \|B_k\| < 1, \tag{48}$$

где $B_1 \in \mathfrak{S}_\infty$, $C^* = -C \in \mathfrak{S}_\infty$, H — нормальный оператор, спектр которого лежит на конечном числе лучей, $\operatorname{Ker} H = \{0\}$, $H \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p \in (0, \infty)$. Тогда система собственных и присоединенных элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающих собственным значениям из круга радиуса t, полна в пространстве $\mathcal{H}$.

Доказательство. Предварительно покажем, что $\|(I + C)^{-1}\| \le 1$. В самом деле, используя то, что $C^* = -C$, $-C^2 \ge 0$, вычислим квадрат нормы:

$$\|(I + C)^{-1}\|^2 = \sup_{y\in\mathcal{H},\, y\ne 0} \frac{\|(I + C)^{-1} y\|^2}{\|y\|^2} = \sup_{y\in\mathcal{H},\, y\ne 0} \frac{((I - C^2)^{-1} y, y)_{\mathcal{H}}}{\|y\|^2} \le 1,$$

так как $I - C^2 \gg I$ и, следовательно, $(I - C^2)^{-1} \ll I$.

Из доказанной оценки следует, что условие (48) является достаточным для факторизации пучка $(I + C)^{-1}\mathcal{L}(\lambda) =: \mathcal{L}_C(\lambda)$. По теореме 23.4 из [8], с. 130, для пучка $\mathcal{L}_C(\lambda)$ справедливо представление $\mathcal{L}_C(\lambda) = A_+(\lambda)(\lambda I - Z)$, где оператор-функция $A_+(\lambda)$ — голоморфна и голоморфно обратима при $|\lambda| < t$. При этом спектр оператора Z лежит в круге $|\lambda| < t$. В этой области задача для операторного пучка $\mathcal{L}_C(\lambda)$ сводится к задаче на собственные значения для оператора Z. Распишем подробно представление для пучка $\mathcal{L}_C(\lambda)$:

$$\lambda I - (I + C)^{-1} H - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^k (I + C)^{-1} B_k = \left(A_+(0) + \frac{A'_+(0)\lambda}{1!} + \dots \right) \cdot (\lambda I - Z). \tag{49}$$

Из равенства (49), приравнивая коэффициенты при нулевой степени λ, получим $-(I+C)^{-1}H = -A_+(0)Z$, откуда следует, что $Z = A_+^{-1}(0)(I+C)^{-1}H \in \mathfrak{S}_p$. Приравнивая в (49) коэффициенты при первой степени λ, получим $A_+(0) = I-(I+C)^{-1}B_1+A'_+(0)Z = I + S_1$, где $S_1 \in \mathfrak{S}_\infty$. Отсюда $A_+^{-1}(0) = (I + S_1)^{-1} = I + S_2$, где $S_2 \in \mathfrak{S}_\infty$. Из последнего соотношения следует, что $Z = (I + S_2)(I + C)^{-1}H = (I + S_3)H$, где $S_3 \in \mathfrak{S}_\infty$. Таким образом, оператор Z есть слабое возмущение оператора H. Учитывая свойства оператора H и обратимость оператора $I + S_3$, по теореме 4.2 из [8], с. 20, получаем, что система корневых элементов оператора Z, а следовательно и пучка $\mathcal{L}_C(\lambda)$ в указанной области, полна в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Остается заметить, что собственные и присоединенные элементы пучков $\mathcal{L}_C(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающие одному и тому же собственному значению, совпадают. Теорема доказана. □

Осуществим в задаче (14) замену $\lambda A^{-1/2}\xi = \eta$, в результате придем к системе двух уравнений, которые запишем в виде одного векторно-матричного уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^2 := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$:

$$\left\{\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 & A^{-1/2} \\ -A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} \begin{pmatrix} B_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (50)$$

Задачу (50) можно записать более коротко:

$$\mathcal{L}(\lambda)y := \left\{\mathcal{I} + \lambda\mathcal{C} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k}\mathcal{B}_k\right\} y = 0, \quad y := (\xi;\eta)^t \in \mathcal{H}^2. \quad (51)$$

Здесь оператор $\mathcal{C}$, очевидно, обладает свойством $\mathcal{C}^* = -\mathcal{C}$ и его спектр лежит на прямой $\operatorname{Re}\lambda = 0$.

Дадим следующее

Определение 3. (см. [8], стр. 62) Пусть $y_\xi(\lambda)$ — векторный полином с коэффициентами из $\mathcal{H}$, причем $y_\xi(\lambda_0) \neq 0$ и $L(\lambda_0)y_\xi(\lambda_0) = 0$. Если порядок нуля полинома $L(\lambda)y_\xi(\lambda)$ в точке λ_0 равен n, то $y_\xi(\lambda)$ называется производящим полиномом для цепочки из собственного и присоединенных к нему векторов $\{(j!)^{-1}y_\xi^{(j)}(\lambda_0)\}_{j=0}^{n-1}$ оператор-функции $L(\lambda)$. Число n будем называть рангом производящего полинома $y_\xi(\lambda)$.

Для выяснения связи собственных и присоединенных элементов операторных пучков $L(\lambda)$ и $\mathcal{L}(\lambda)$ установим следующие две леммы.

Лемма 2. *Векторный полином $y(\lambda) := (y_\xi(\lambda); y_\eta(\lambda))^t$ (с коэффициентами из $\mathcal{H}^2$) является производящим полиномом ранга n пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ в точке λ_0 тогда и только тогда, когда $y_\xi(\lambda)$ является производящим полиномом ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 и*

$$y_\eta(\lambda) = \lambda A^{-1/2}y_\xi(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^n p(\lambda), \quad (52)$$

где $p(\lambda)$ *вектор-функция* $(p(\lambda_0) \neq 0)$.

Доказательство. Доказательство этой леммы следует рассуждениям леммы 12.3 из [8]. Начнем с достаточности. Пусть $y_\xi(\lambda)$ является производящим полиномом ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 и выполнено соотношение (52). Поскольку $L(\lambda)y_\xi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, то из (14) получим:

$$\left\{I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B_k\right\} y_\xi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n q(\lambda), \tag{53}$$

где $q(\lambda)$ некоторая вектор-функция $(q(\lambda_0) \neq 0)$. Подставим (52) в (53) и запишем полученное соотношение вместе с (52) в виде одного векторно-матричного выражения в $\mathcal{H}^2$, после простых преобразований получим:

$$\mathcal{L}(\lambda)(y_\xi(\lambda); y_\eta(\lambda))^t = (\lambda - \lambda_0)^n (q(\lambda) + \lambda A^{-1/2} p(\lambda); p(\lambda))^t.$$

Отсюда следует, что $y(\lambda) := (y_\xi(\lambda); y_\eta(\lambda))^t$ есть производящий полином ранга n пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ в точке λ_0. Достаточность доказана.

Пусть теперь векторный полином $y(\lambda) := (y_\xi(\lambda); y_\eta(\lambda))^t$ является производящим полиномом ранга n пучка $\mathcal{L}(\lambda)$ в точке λ_0. Из (50) имеем

$$\mathcal{L}(\lambda)y(\lambda) = \begin{pmatrix} y_\xi(\lambda) - \lambda A^{-1/2} y_\eta(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} (\lambda - \gamma_k)^{-1} B_k y_\xi(\lambda) \\ y_\eta(\lambda) - \lambda A^{-1/2} y_\xi(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{54}$$

По условию $\mathcal{L}(\lambda)y(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, тогда из (54) получим

$$y_\xi(\lambda) - \lambda A^{-1/2} y_\eta(\lambda) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\lambda - \gamma_k} B_k y_\xi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n r(\lambda), \tag{55}$$

$$y_\eta(\lambda) - \lambda A^{-1/2} y_\xi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n p(\lambda), \tag{56}$$

где $r(\lambda)$, $p(\lambda)$ некоторые вектор-функции $(r(\lambda_0) \neq 0,\ p(\lambda_0) \neq 0)$. Из (56) следует (52). Подставив (56) в (55), получим, что

$$L(\lambda)y_\xi(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n (r(\lambda) - \lambda A^{-1/2} p(\lambda)).$$

Отсюда следует, что $L(\lambda)y_\xi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже n. Из этого факта и формулы (56), рассуждая как при доказательстве достаточности, получаем, что $L(\lambda)y_\xi(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка n. Значит, $y_\xi(\lambda)$ есть производящий полином ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0. □

Как следствие из леммы 2 получаем следующее утверждение.

Лемма 3. *Набор векторов* $y_k := (\xi_k; \eta_k)^t$ $(k = \overline{0, n-1})$ *является цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов пучка* $\mathcal{L}(\lambda)$, *отвечающей собственному значению* λ_0, *тогда и только тогда, когда* ξ_k $(k = \overline{0, n-1})$ - *цепочка*

из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0 и

$$\eta_0 = \lambda_0 A^{-1/2}\xi_0, \quad \eta_k = \lambda_0 A^{-1/2}\xi_k + A^{-1/2}\xi_{k-1}, \quad k = 1, \ldots, n-1. \tag{57}$$

Опираясь на теорему 10 и лемму 3, докажем следующую теорему о двукратной полноте части системы собственных и присоединенных элементов операторного пучка $L(\lambda)$.

Теорема 11. *Пусть выполнено условие (a), $A^{-1} \in \mathfrak{S}_p$ при некотором $p \in (0, \infty)$, а $\xi_k^{(l)}$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$ – цепочка из собственного и присоединенных к нему элементов пучка $L(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_l. Тогда система элементов $y_k^{(l)} := (\xi_k^{(l)}; \eta_k^{(l)})'$ $(k = \overline{0, k(\lambda_l)})$, где индекс l пробегает все собственные значения λ_l пучка $L(\lambda)$, лежащие в области Λ (см. (33)), а $\xi_k^{(l)}$ и $\eta_k^{(l)}$ связаны соотношениями (57) для каждого l, образует полную в $\mathcal{H}^2$ систему, если выполнено условие:*

$$a(\gamma_m - \gamma_1) + 2\sqrt{ab} < 1, \quad a := \|A^{-1/2}\|, \quad b := m \max_{k=\overline{1,m}} \|B_k\|.$$

Доказательство. В силу леммы 3 нужно доказать, что система собственных и присоединенных элементов пучка $\mathcal{L}(\lambda)$, отвечающая собственным значениям из области Λ, полна в $\mathcal{H}^2$. Осуществим в задаче (51) замену спектрального параметра: $\lambda = R^2\mu^{-1} + R$, где $R > \gamma_m$ пока произвольно, а μ – новый спектральный параметр (эта замена переводит спектр, лежащий в области Λ в λ–плоскости в круг радиуса R с центром в начале координат в μ–плоскости). Умножив правую и левую части полученного выражения на μ, придем к следующей спектральной задаче:

$$\mu\mathcal{L}\left(\frac{R^2}{\mu} + R\right)y \equiv \left\{\mu(\mathcal{I} + R\mathcal{C}) + R^2\mathcal{C} - \mu^2 \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{R^2 + \mu(R - \gamma_k)}\mathcal{B}_k\right\} y = 0. \tag{58}$$

Применив к правой и левой частям (58) оператор $(\mathcal{I} + R\mathcal{C})^{-1}$ и воспользовавшись разложениями

$$\frac{1}{R^2 + \mu(R - \gamma_k)} = \frac{1}{R^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\mu^n\left(\frac{R - \gamma_k}{R^2}\right)^n, \quad |\mu| < \frac{R^2}{R - \gamma_k}, \quad k = \overline{1, m},$$

придем к спектральной задаче

$$\left\{\mu\mathcal{I} + R^2(\mathcal{I} + R\mathcal{C})^{-1}\mathcal{C} - (\mathcal{I} + R\mathcal{C})^{-1}\frac{\mu^2}{R^2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\mu^n\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{R - \gamma_k}{R^2}\right)^n\mathcal{B}_k\right)\right\} y = 0 \tag{59}$$

в области $|\mu| < R^2(R - \gamma_1)^{-1}$.

Наша цель – установить, что пучок задачи (59) допускает факторизацию, т.е. что для него выполнено условие (48). Это позволит воспользоваться выводами теоремы 10.

Используя оценку $\|(\mathcal{I}+R\mathcal{C})^{-1}\| \le 1$ запишем условие (48), достаточное для факторизации пучка задачи (59):

$$\exists t \in (0, \frac{R^2}{R-\gamma_1}): \quad \frac{R^2}{t}\|\mathcal{C}\| + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^{n+1}}{R^2} \| \sum_{k=1}^{m} \left(\frac{R-\gamma_k}{R^2}\right)^n \mathcal{B}_k\| < 1. \tag{60}$$

Учитывая, что $\|\mathcal{C}\| \le \|A^{-1/2}\|$, $\|\mathcal{B}_k\| = \|B_k\|$ $(k = \overline{1,m})$, условие (60) будет выполнено, если

$$\exists t \in (0, \frac{R^2}{R-\gamma_1}): \quad \frac{R^2}{t}\|A^{-1/2}\| + \frac{m}{R^2} \max_{k=\overline{1,m}} \|B_k\| \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+1} \left(\frac{R-\gamma_1}{R^2}\right)^n < 1. \tag{61}$$

Просуммировав в (61) геометрическую прогрессию и проделав простые алгебраические преобразования найдем, что условие (61) эквивалентно следующему:

$$\exists t \in (0, \frac{R^2}{R-\gamma_1}): \quad t^2(b+(R-\gamma_1)) - tR^2(1+a(R-\gamma_1)) + aR^4 < 0, \tag{62}$$

$$a := \|A^{-1/2}\|, \quad b := m \max_{k=\overline{1,m}} \|B_k\|.$$

Дискриминант в квадратичном выражении из (62) будет положительным, если $R-\gamma_1 \notin [a^{-1}(1-2\sqrt{ab}), a^{-1}(1+2\sqrt{ab})]$. В этом случае меньший корень квадратичного выражения будет меньше, чем $R^2(R-\gamma_1)^{-1}$, если $a(R-\gamma_1) < 1$. Отсюда получаем, вспомнив условие $R > \gamma_m$, что R должно удовлетворять неравенствам $\gamma_m < R < \gamma_1 + a^{-1}(1-2\sqrt{ab})$. Другими словами, число R можно выбрать так, чтобы было верно (62), если $\gamma_m < \gamma_1 + a^{-1}(1-2\sqrt{ab})$, а это неравенство справедливо в силу условий теоремы.

Таким образом, пучок задачи (59) допускает факторизацию. Применение теоремы 10 к задаче (59) завершает доказательство теоремы. □

Заключение. Рассмотрена задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s)\,ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1.$$

Сформулирована ассоциированная спектральная задача. Для спектральной задачи установлена локализация спектра, получены асимптотические формулы для ветвей собственных значений, доказаны утверждения о базисности Рисса и кратной полноте части собственных и присоединенных элементов.

Список литературы

[1] Bolgova (Orlova) L.D., Kopachevsky N.D. *Boundary value problems on small oscillations of an ideal relaxing fluid and its generalizations.* // Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3: Тез. лекц. и докл. III Крымской осенней матем. школы-симпоз., Симферополь, 1994, с. 41-42.

[2] Копачевский Н.Д. *Задача Коши для линейного интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве.* // Ученые записки ТНУ. - Симферополь, 2001. - Том 16(55), №1 - С.139-152.

[3] Азизов Т.Я., Копачевский Н.Д., Орлова Л.Д. *Эволюционные и спектральные задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости.* // Труды Санкт-Петербургского математического общества. Т. 6., 1998, с. 5-33.

[4] Маркус А.С., Мацаев В.И. *Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральные асимптотики.* – Труды ММО. - 1982. - Т.45. - С. 133-181.

[5] Маркус А.С., Мацаев В.И. *Теоремы сравнения спектров линейных операторов и спектральная асимптотика для пучка М.В. Келдыша.* Матем. сборник. - 1984. - Т.123, вып. 3. - С. 391-406.

[6] Оразов М.Б. *Некоторые вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов и связанные с ними задачи механики.* Дис... д-ра физ.-мат. наук: 01.01.02. - Ашхабат, 1982. - 290 с.

[7] Авакян В.А. *Асимптотическое распределение спектра линейного пучка, возмущенного аналитической оператор-функцией.* // Функциональный анализ и его приложения. - 1978. - Т.12, №2. - С. 66-67.

[8] Маркус А.С. *Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков.* – Кишинев: Штиинца. - 1986. - 260 с.

E-mail: dmitry_@crimea.edu

E-mail: kopachevsky@crimea.edu

Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 30 - 37

УДК 517.983

И. И. Карпенко, А. И. Сухтаев, Д. Л. Тышкевич

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЮ ФУНКЦИЙ КВАТЕРНИОННОГО ПЕРЕМЕННОГО

Введение

В последнее время появились работы (см., например, [1], [2]), связанные с детальным изучением спектральных задач для линейных операторов, действующих в гильбертовых кватернионных пространствах. В частности, возникает вопрос об аналитических свойствах резольвенты линейного оператора [1]. Как показывают конкретные примеры, нельзя сделать вывод о дифференцируемости и аналитичности резольвенты в соответствии с определениями дифференцируемости и аналитичности функции кватернионного переменного, приведенными в работах R.Fueter'a (см. обзор работ в [4]). Другой подход к определению дифференцируемости (так называемая супердифференцируемость), позволяющий говорить об аналитичности резольвенты, предложен в работе [3]. В настоящей работе предлагается ввести понятие дифференцируемости функции кватернионного переменного по направлению, охватывающее достаточно широкий класс функций. И в этом смысле резольвента линейного оператора также оказывается дифференцируемой оператор-функцией. Отметим, что предложенное ниже определение является обобщением понятия дифференцируемости, приведенного в работе [5].

1. Структура невещественного поля в теле кватернионов.

Предложение 1. *Пусть F - поле, являющееся подтелом $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}\setminus F \neq \varnothing$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $\mathbb{R} \subsetneqq F$;

(2) *существует* $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R} : F = \{p \in \mathbb{H} \mid pq = qp\}$.

Доведення. Докажем импликацию (1)⇒(2). Пусть $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$, $q = q_0 + \overrightarrow{q}$. Так как $\overrightarrow{q}^2 = -|\overrightarrow{q}|^2$, то

$$q^2 = q_0^2 - |\overrightarrow{q}|^2 + 2q_0\overrightarrow{q}. \tag{1}$$

Так как $\mathbb{R} \subsetneqq F$, то по теореме Фробениуса F изоморфно полю $\mathbb{C}$, следовательно $\dim(F : \mathbb{R}) = 2$. Так как $\overrightarrow{q} \neq 0$, то система $\{1, \overrightarrow{q}\}$ - линейно независима в $\mathbb{H}$ над

$\mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}$-линейно независима). Тогда система $\{q, q^2\}$ также $\mathbb{R}$-линейно независима в $\mathbb{H}$.

Действительно, из (1) следует, что

$$\begin{vmatrix} q_0 & 1 \\ q_0^2 - |\overrightarrow{q}|^2 & 2q_0 \end{vmatrix} = 2q_0^2 - (q_0^2 - |\overrightarrow{q}|^2) = q_0^2 + |\overrightarrow{q}|^2 \neq 0.$$

Очевидно, q и q^2 входят в $\{p \in \mathbb{H} \mid pq = qp\}$, а, следовательно, и любая их $\mathbb{R}$-линейная комбинация входит в это множество. Поэтому в силу двумерности F над $\mathbb{R}$ выполняется (1).

Импликация (2)$\Rightarrow$(1) очевидна. □

Предложение 2. *Пусть* $F = \{p \in \mathbb{H} \mid pq = qp\}$. *Тогда*

(1) *существует такой кватернион* ε, *что* $\varepsilon^2 = -1$, *и любой кватернион* $h \in \mathbb{H}$ *однозначно представим в виде* $h = u + v\varepsilon$, $(u, v \in F)$;

(2) *существует такая инволюция* $J : F \to F$. *что*

$$pJ(p) = \nu^2(p) \ (p \in F);$$
$$J(p) = p \Leftrightarrow p \in \mathbb{R};$$
$$\varepsilon p = J(p)\varepsilon \ (p \in F).$$

Доведення. (1) Положим $f = \frac{1}{|\overrightarrow{q}|}\overrightarrow{q}$, тогда

$$f^2 = -1 \tag{2}$$

В силу рассуждений при доказательстве импликации (1) $\Rightarrow$ (2) в предложении 1 система $\{1, f\}$ является базисом над $\mathbb{R}$ (или $\mathbb{R}$-базисом) в F. Пусть ε - такой векторный кватернион, что $\varepsilon^2 = -1$, $\{\varepsilon, f\}$ - линейно независимая над $\mathbb{R}$ система и $(\varepsilon, f) = 0$. Тогда система $\{1, f, \varepsilon, f\varepsilon\}$ является $\mathbb{R}$-базисом в $\mathbb{H}$. Следовательно, для любого $h \in \mathbb{H}$ имеет место однозначное разложение:

$$h = r_1 + r_2 f + s_1\varepsilon + s_2 f\varepsilon = (r_1 + r_2 f) + (s_1 + s_2 f)\varepsilon = u + v\varepsilon; \quad u, v \in F.$$

(2) Положим $J(r_1 + r_2 f) := r_1 - r_2 f$. Тогда в силу равенства (2):

$$J((r_1 + r_2 f)(s_1 + s_2 f)) = J(r_1 s_1 - r_2 s_2 + (r_1 s_2 + r_2 s_1)f) =$$
$$r_1 s_1 - r_2 s_2 + (r_1 s_2 + r_2 s_1)f = (r_1 - r_2 f)(s_1 - s_2 f) =$$
$$= J(r_1 + r_2 f)J(s_1 + s_2 f).$$

Аддитивность отображения J очевидна. Кроме того,
$pJ(p) = (r_1 + r_2 f)J(r_1 + r_2 f) = (r_1 + r_2 f)(r_1 - r_2 f) = |r_1|^2 + |r_2|^2 = \nu^2(p)$, и
$J(p) = p$ или $r_1 + r_2 f = r_1 - r_2 f$ тогда и только тогда, когда $p \in \mathbb{R}$.
Далее, $\varepsilon p = \varepsilon(r_1 + r_2 f) = \varepsilon r_1 + \varepsilon r_2 f = r_1\varepsilon + r_2\varepsilon f = r_1\varepsilon + r_2[\overrightarrow{\varepsilon}, \overrightarrow{f}] = r_1\varepsilon - r_2[\overrightarrow{f}, \overrightarrow{\varepsilon}] =$
$r_1\varepsilon + r_2 f\varepsilon = (r_1 - r_2 f)\varepsilon = J(r_1 + r_2 f)\varepsilon = J(p)\varepsilon$. □

2. Дифференцируемость функции кватернионного переменного

Пусть φ - функция, действующая в $\mathbb{H}$. $D(\varphi)$ - область определения φ, $q_0 \in D(\varphi)$.

Рассмотрим множество $F(q_0) = \{u \in \mathbb{H} \mid uq_0 = q_0u\}$. Будем записывать $g_0 = \lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q_0)} g(h)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $h \in F(q_0)$, $|h| < \delta$ следует $|g(h) - g_0| < \varepsilon$.

Определение 1. Функцию $\varphi(q)$ назовем *дифференцируемой справа в точке* q_0, если существует предел $\lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q_0)} (\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0))h^{-1}$, который мы будем называть *правой производной* функции φ в точке q_0 и обозначать $\varphi'(q_0)$.

Пусть $q_0 \in \mathbb{H} \backslash \mathbb{R}$. Тогда согласно предложению 1. $F(q_0)$ - поле, $\mathbb{R} \subset F(q_0)$ и $\dim(F : \mathbb{R}) = 2$. В качестве $\mathbb{R}$-базиса в $F(q_0)$ можно выбрать векторы 1, $f = \frac{1}{|q_0|}\overrightarrow{q_0}$. В этом случае для всех $h \in F(q_0)$ $h = h_1 + h_2 f$. Кроме того, можно выбрать такой векторный кватернион ε, что $\varepsilon^2 = -1$, и система $\{1, \varepsilon, f, f\varepsilon\}$ является $\mathbb{R}$-базисом в $\mathbb{H}$.

В таком случае произвольный кватернион $h \in \mathbb{H}$ допускает разложение:

$$h = h_0 + h_1 f + h_2 \varepsilon + h_3 f\varepsilon,$$

где $h_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,3}$. Следовательно,

$$\varphi(q) = \varphi_0(x_0, x_1, x_2, x_3) + \varphi_1(x_0, x_1, x_2, x_3)f + \varphi_2(x_0, x_1, x_2, x_3)\varepsilon + \varphi_3(x_0, x_1, x_2, x_3)f\varepsilon,$$

где $\varphi_i(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,3}$.

Теорема 1. *Пусть функция $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 f + \varphi_2 \varepsilon + \varphi_3 f\varepsilon$ определена в некоторой окрестности невещественной точки q_0, причем в этой окрестности функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ дифференцируемы относительно переменных x_0 и x_1. Тогда для дифференцируемости функции кватернионного переменного φ в точке q_0 необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имели место следующие соотношения*

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} = -\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_0} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}. \tag{3}$$

Доведення. а) Необходимость. Пусть существует

$$\varphi'(q_0) = \lim_{h \to 0 \cdot F(q_0)} (\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0))h^{-1}.$$

Так как любой кватернион $h \in F(q_0)$ представим в виде $h = h_1 + h_2 f$, где $h_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,2}$, то $h \to 0 \cdot F(q_0)$ тогда и только тогда, когда $h_1, h_2 \to 0$.

Так как предел не зависит от направления, предположим сначала, что $h = h_1 \to 0$, где $h_1 \in \mathbb{R}$. В этом случае получим

$$\varphi'(q_0) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} + f\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + \varepsilon\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} + f\varepsilon\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_0}. \tag{4}$$

Найдем тот же предел в предположении, что $h = h_2 f \to 0$:

$$\varphi'(q_0) = -f\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} + f\varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} - \varepsilon\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}. \tag{5}$$

Сравнивая выражения (4) и (5), приходим к равенствам (3).

б) Достаточность. Согласно определению дифференцируемой функции двух действительных переменных имеют место равенства:

$$\varphi_s(x_0 + h_1, x_1 + h_2, x_2, x_3) - \varphi_s(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_0}h_1 + \frac{\partial\varphi_s}{\partial x_1}h_2 + \alpha_s \cdot \rho, \ (s = \overline{0,3}),$$

где α_s стремятся к нулю вместе с ρ ($\rho = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} = \nu(h)$). Тогда приращение функции $\varphi(q)$ принимает вид:

$$\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0) = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0}h_1 + \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1}h_2 + f\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0}h_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}h_2\right) + \varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0}h_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1}h_2\right) +$$
$$+ f\varepsilon\left(\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_0}h_1 + \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1}h_2\right) + \eta \cdot \rho,$$

где $\eta = \alpha_0 + f\alpha_1 + \varepsilon\alpha_2 + f\varepsilon\alpha_3$. Используя соотношения (3), это приращение можно переписать в виде:

$$\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0) = \left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} + f\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0} + f\varepsilon\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_0}\right)(h_1 + h_2 f) + \eta \cdot \rho,$$

где $A = \frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} + f\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0} + \varepsilon\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0} + f\varepsilon\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_0}$ — число, не зависящее от h, а $\lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q_0)} \eta\rho h^{-1} = 0$.

Таким образом, $\lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q_0)} (\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0))h^{-1}$ существует и равен A. □

Пусть $q_0 \in \mathbb{R}$. Тогда $F(q_0)$ совпадает с $\mathbb{H}$. В этом случае для всех $h \in F(q_0)$ $h = h_1 + h_2 i + h_3 j + h_4 k$.

Теорема 2. *Пусть функция $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 i + \varphi_2 j + \varphi_3 k$ определена в некоторой окрестности вещественной точки q_0, причем в этой окрестности функции $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ дифференцируемы относительно переменных x_0, x_1, x_2 и x_3. Тогда для дифференцируемости функции кватернионного переменного φ в точке q_0 необходимо и достаточно, чтобы в этой точке имели место следующие соотношения*

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_0} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3},\\
&\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0} = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_1} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_3},\\
&\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0} = -\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_1} = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_2} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_3},\\
&\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_0} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial x_3}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Доведення. Пусть существует $\varphi'(q_0) = \lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q_0)} (\varphi(q_0 + h) - \varphi(q_0))h^{-1}$.

Так как любой кватернион $h \in F(q_0)$ представим в виде $h = h_1 + h_2 i + h_3 j + h_4 k$, где $h_i \in \mathbb{R}$. $i = \overline{1,4}$, то условие $h \to 0 \cdot F(q_0)$ равносильно условию $h_1, h_2, h_3, h_4 \to 0$.

Предположим сначала, что $h = h_1 \to 0$. Получим:

$$\varphi'(q_0) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x_0} + i\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_0} + j\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_0} + k\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_0}. \tag{7}$$

Найдем тот же предел в предположении, что $h = h_2 f \to 0$.

$$\varphi'(q_0) = -i\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_1} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} + k\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} - j\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_1}. \tag{8}$$

Теперь пусть $h = h_3 f \to 0$. Тогда

$$\varphi'(q_0) = -j\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_2} - k\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + i\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2} \tag{9}$$

И, наконец, $h = h_4 f \to 0$. В этом случае

$$\varphi'(q_0) = -k\frac{\partial \varphi_0}{\partial x_3} + j\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_3} - i\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3}. \tag{10}$$

Сравнивая выражения (7).(8).(9) и (10), приходим к равенствам (6).

Доказательство обратного утверждения аналогично приведенному доказательству теоремы 1.

□

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть $f(q) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k q^k$. Тогда

$\lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} (f(q+h) - f(q))h^{-1} = \lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k (q+h)^k - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k q^k \right) h^{-1}$. Так как $h \in F(q)$, то h коммутирует с q, и $f(q+h) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k (q+h)^k = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l q^{k-l} h^l$

Поэтому $\lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} (f(q+h) - f(q))h^{-1} = \lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k \sum\limits_{l=0}^{k} C_k^l q^{k-l} h^l - \sum\limits_{k=0}^{n} a_k q^k \right) h^{-1} =$

$$= \lim_{h \to 0 \cdot F(q)} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{k} C_k^l q^{k-l} h^l \right) h^{-1} = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{l=1}^{k} C_k^l q^{k-l} \lim_{h \to 0 \cdot F(q)} h^{l-1}.$$

При $l > 1$ $\lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} h^{l-1} = 0$. Следовательно, $f'(q) = \lim\limits_{h \to 0 \cdot F(q)} (f(q+h) - f(q))h^{-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k C_k^1 q^{k-1} = = \sum\limits_{k=1}^{n} k a_k q^{k-1}$.

Пример 2. Пусть $f(q) = (a-q)^{-1}$. Найдем производную в произвольной точке q при условии, что $a \in F(q)$. (Заметим, что отсюда следует, что $q \in F(a)$.)

$$\lim_{h \to 0 \cdot F(q)} (f(q+h) - f(q))h^{-1} = \lim_{h \to 0 \cdot F(q)} ((a-(q+h))^{-1} - (a-q)^{-1})h^{-1} =$$

$$= \lim_{h \to 0 \cdot F(q)} (a-(q+h))^{-1}((a-q) - (a-(q+h)))(a-q)^{-1}h^{-1} =$$

$$= \lim_{h \to 0 \cdot F(q)} (a-(q+h))^{-1}h(a-q)^{-1}h^{-1}.$$

Так как $a \in F(q)$, то $(a-q)^{-1} \in F(q)$. Поэтому $(a-q)^{-1}$ и h перестановочны. Получим

$$\lim_{h \to 0 \cdot F(q)} (a-(q+h))^{-1}(a-q)^{-1}h \cdot h^{-1} =$$

$$= \lim_{h \to 0 \cdot F(q)} (a-(q+h))^{-1}(a-q)^{-1} = (a-q)^{-2}.$$

Таким образом, функция f дифференцируема только в точках множества $F(a)$.

Заметим, что функции, рассмотренные в примерах 1, 2, не являются дифференцируемыми по Фютеру. В то же время несложно привести пример, показывающий, что есть функции, дифференцируемые по Фютеру, но не дифференцируемые в смысле определения 1.

Пример 3. В качестве такого примера можно рассмотреть функцию $f(q) = jqk$. Эта функция не является дифференцируемой в любой комплексной точке в смысле определения 1, однако непосредственные вычисления показывают, что она дифференцируема по Фютеру.

Естественно возникает вопрос о связи между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке. Под непрерывной функцией, как обычно, понимаем функцию, непрерывную относительно топологии, порождаемой модулем кватерниона.

Следующий пример показывает, что функция, дифференцируемая в точке q_0 в смысле определения 1, может не являтся непрерывной в этой точке.

Пример 4. Пусть $q = q_1 + q_2 j$. $q_1, q_2 \in \mathbb{C}$. Рассмотрим для $c \neq 0$ функцию

$$f(q) = \begin{cases} q, & q_2 \neq 0; \\ q + c, & q_2 = 0. \end{cases}$$

Найдем производную этой функции в произвольной точке $q_0 \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$. Функция f дифференцируема в точке q_0, причем,

$$f'(q_0) = \lim_{h \to 0 \cdot F(q_0)} (f(q_0+h) - f(q_0))h^{-1} = \lim_{h \to 0 \cdot F(q_0)} (q_0 + h + c - (q_0 + c))h^{-1} = 1.$$

Выясним, будет ли эта функция непрерывной в точке q_0. Рассмотрим две последовательности: $h_n = \frac{1}{n}$ и $h_n = \frac{1}{n}j$. В первом случае $\lim\limits_{n \to \infty} f(q_0 + h_n) = q_0 + c$. Во

втором случае $\lim\limits_{n\to\infty} f(q_0+h_n)=q_0$. Следовательно, $\lim\limits_{h\to 0} f(q_0+h)$ не существует, и данная функция не является непрерывной в точке $q_0\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Отметим, что отсутствие жесткой связи между непрерывностью и дифференцируемостью функции имеет простой интуитивный смысл. Действительно, дифференцируемость в смысле определения 1 требует существования пределов по особым направлениям, в то время как непрерывность подразумевает существование пределов по всем направлениям.

3. Еще один критерий дифференцируемости функции кватернионного переменного

Пусть $\varphi:\mathbb{H}\longrightarrow\mathbb{H}$. невещественная точка $q_0\in D(\varphi)$. Тогда согласно предложения 2 для любого $q\in D(\varphi)\quad q=u+v\varepsilon\quad (u,v\in F(q_0))$, и $\varphi(q)=\varphi_1(u,v)+\varphi_2(u,v)\varepsilon$. Обозначим $\psi_1(u)=\varphi_1(u,0)$; $\psi_2(u)=\varphi_2(u,0)$; $\overline{\psi}_i(u)=J(\psi_i(u))$ (здесь J–инволюция, построенная в предложении 2).

Лемма 1. *Предел* $L_1=\lim\limits_{h\to 0\cdot F(q_0)}[\psi_2(q_0+h)-\psi_2(q_0)]\cdot h|h|^{-2}$ *существует тогда и только тогда, когда существует предел* $L_2=\lim\limits_{h\to 0\cdot F(q_0)}[\overline{\psi}_2(q_0+h)-\overline{\psi_2}(q_0)]\cdot h^{-1}$. *При этом* $L_1=\overline{L}_2$

Доведення. Пусть существует предел L_1. Следовательно, для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для любого $h\in F(q_0)$ из условия $|h|<\delta$ следует $|[\psi_2(q_0+h)-\psi_2(q_0)]\cdot h|h|^{-2}-L_1|<\varepsilon$ Используя соотношения $\varepsilon h^{-1}=J(h^{-1})\varepsilon$ и $h^{-1}=J(h)|h|^{-2}$, полученные в предложении 2, последнее неравенство можно переписать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
&|[\psi_2(q_0+h)-\psi_2(q_0)]\cdot h|h|^{-2}-L_1|=|[(\psi_2(q_0+h)-\psi_2(q_0))\cdot h|h|^{-2}-L_1]\varepsilon|=\\
&=|[\psi_2(q_0+h)-\psi_2(q_0)]\cdot\varepsilon J(h|h|^{-2})-\varepsilon\overline{L}_1|=|\varepsilon[\overline{\psi}_2(q_0+h)-\overline{\psi_2}(q_0)]\cdot h^{-1}-\varepsilon\overline{L}_1|=\\
&=|\varepsilon[(\overline{\psi}_2(q_0+h)-\overline{\psi_2}(q_0))\cdot h^{-1}-\overline{L}_1]|=|[\overline{\psi}_2(q_0+h)-\overline{\psi_2}(q_0)]\cdot h^{-1}-\overline{L}_1|<\varepsilon,
\end{aligned}
$$

откуда и следует существование предела L_2.

Достаточное утверждение доказывается аналогично. □

Теорема 3. *Предел* $L=\lim_{h\to 0\cdot F(q_0)}[\varphi(q_0+h)-\varphi(q_0)]\cdot h^{-1}$ *существует тогда и только тогда, когда существуют пределы* $\lim_{h\to 0\cdot F(q_0)}[\psi_1(q_0+h)-\psi_1(q_0)]\cdot h^{-1}$ *и* $\lim_{h\to 0\cdot F(q_0)}[\overline{\psi}_2(q_0+h)-\overline{\psi_2}(q_0)]\cdot h^{-1}$.

Доведення. Как показывают вычисления, $[\varphi(q_0+h)-\varphi(q_0)]\cdot h^{-1}=$

$$
\begin{aligned}
&=[(\varphi_1(q_0+h,0)+\varphi_2(q_0+h,0)\varepsilon)-(\varphi_1(q_0,0)+\varphi_2(q_0,0)\varepsilon)]\cdot h^{-1}=\\
&=[(\psi_1(q_0+h)+\psi_2(q_0+h)\varepsilon)-(\psi_1(q_0)+\psi_2(q_0)\varepsilon)]\cdot h^{-1}=\\
&=[(\psi_1(q_0+h)-\psi_1(q_0))+(\psi_2(q_0+h)-\psi_2(q_0))\varepsilon]\cdot h^{-1}.
\end{aligned}
$$

Используя соотношения $\varepsilon h^{-1} = J(h^{-1})\varepsilon$ и $h^{-1} = J(h)|h|^{-2}$, имеем: $\varepsilon h^{-1} = J(J(h)|h|^{-2})\varepsilon = h|h|^{-2}\varepsilon$.

Таким образом, $[\varphi(q_0+h)-\varphi(q_0)]\cdot h^{-1} =$

$$= [(\psi_1(q_0+h)-\psi_1(q_0))\cdot h^{-1} + (\psi_2(q_0+h)-\psi_2(q_0))\cdot h|h|^{-2}\varepsilon] =$$
$$= [(\psi_1(q_0+h)-\psi_1(q_0)]\cdot h^{-1}) + [(\psi_2(q_0+h)-\psi_2(q_0)]\cdot h|h|^{-2})\varepsilon.$$

С учетом леммы 1, из полученного равенства следует справедливость утверждения. □

Замечание. Поле $F(q_0)$ изометрически изоморфно полю комплексных чисел. Поэтому понятие дифференцируемости функции в данном поле вводится аналогично этому понятию для функции комплексного переменного. Это позволяет сформулировать теорему 3 в терминах дифференцируемости.

Следствие 1. *Функция $\varphi(q)$ дифференцируема в невещественной точке q_0 тогда и только тогда, когда функции $\psi_1(q)$ и $\overline{\psi_2}(q)$ дифференцируемы в этой точке.*

Теорема 3 и следствие из нее позволяют думать, что на функции, дифференцируемые в смысле определения 1, можно перенести ряд результатов из теории контурного интегрирования функций комплексного переменного. В нашем случае контуры будут лежать в полях, порождаемых соответствующими точками дифференцируемости. Этим вопросам предполагается посвятить отдельную работу.

Заключение. В настоящей работе введено понятие дифференцируемости функции кватернионного переменного по направлению, охватывающее достаточно широкий класс функций. Получены различные критерии дифференцируемости функций.

Список литературы

[1] Ludkovsky S.V. Unbounded operators on Banach spaces over the quaternion field // arXiv:math.OA/0404444 v1. - 24 Apr. 2004.

[2] De Leo S.,Scolarici G.,Solombino L. Quaternionic eigenvalue problem // J.Math. Phys. Bd.43. - 2002. - Vol.11. - P.5815-5829.

[3] Ludkovsky S.V., Oystaeyen F van. Differentiable functions of quaternion variables // Bull. des Sciences Math. (France). - 2003. - Vol.127. - P.755-796.

[4] Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А. Кватернионы в релятивистской физике // М.:Едиториал УРСС. - 2003. - 200 с.

[5] Abdel-Khalek Kh. Quaternion analysis // arXiv:hep-th/19607152v2. - 1996. - P.1-8.

[6] Sudbery A. Quaternionic analysis // Math.Proc.Camb.Phil.Soc. - 1979. Vol.85. - P.199-225.

[7] Фукс Б.А. Теория аналитических функций многих комплексных переменных // М.:ОГИЗ. - 1948. - 472 с.

E-mail: ltyshk@crimea.edu

Ученые записки Таврического национального университета им. В.И.Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" № 1 (2004) 38 - 46

УДК 514.12

А.П. Криворучко

О НЕЦЕНТРОАФФИННЫХ ГРУППАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЯМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМЫХ

Введение. В связи с задачей о строении нецилиндрических алгебраических гиперповерхностей с бесконечными множествами плоскостей симметрии в целом ряде работ изучается строение бесконечных групп, которые порождены отражениями и имеют невырожденные алгебры полиномиальных инвариантов. Так, в [1]-[3] и других работах В.Ф.Игнатенко рассматриваются группы, порожденные отражениями относительно гиперплоскостей, в [4]-[6] группы, порожденные отражениями относительно прямых в вещественном n-мерном аффинном пространстве V.

Анализ последних достижений и публикаций [2]-[5], посвященных алгебраическим гиперповерхностям с бесконечными группами симметрий, позволяет сделать вывод: вопрос о строении центроаффинных групп, порожденных отражениями относительно прямых, сводится к аналогичному и в значительной степени решенному вопросу о группах, порожденных отражениями относительно гиперплоскостей. В связи с этим естественным образом возникает *постановка следующей проблемы*: Получить аффинную классификацию нецентроаффинных алгебраических групп преобразований, порожденных отражениями относительно прямых и имеющих невырожденные алгебры полиномиальных инвариантов.

В [5] и [6] эта проблема решена для групп, порожденных отражениями относительно скрещивающихся прямых.

Цель работы — построение всех нецентроаффинных алгебраических групп, порожденных отражениями относительно прямых и имеющих невырожденные алгебры полиномиальных инвариантов.

Основные результаты работы: В пункте 1° строятся некоторые нецентроаффинные группы, порожденные аффинными отражениями относительно прямых, указываются полные системы данных и вычисляются базисные полиномиальные инварианты этих групп.

В пункте 2° доказывается, что замыкание в топологии Зарисского всякой нецентроаффинной группы преобразований аффинного пространства V, которая порождена отражениями относительно прямых и имеет невырожденную алгебру полиномиальных инвариантов, либо содержит отражения относительно скрещивающихся прямых, либо аффинно эквивалентно одной из групп, построенных в пункте 1°. Вместе с результатами работы [6] это дает полное решение задачи о строении нецентроаффинных алгебраических групп, порожденных аффинными отражениями относительно прямых и имеющих невырожденные алгебры полиномиальных инвариантов.

1°. Отражениями будем называть отражения относительно прямых; отражение относительно прямой L в направлении линейной гиперплоскости P обозначаем через (L, P). Для произвольного множества A аффинных преобразований $\langle A\rangle$ обозначает группу, порожденную A; $\mathrm{cl}\,A$ - замыкание A в топологии Зарисского; $[B, C]$ коммутатор линейных операторов B и C; $\mathbb{R}$ - поле вещественных чисел.

Под действием на произвольной группе некоторой ее подгруппы будем понимать действие сопряжениями.

Если X - множество с определенной на нем системой координат $(x, \ldots, z)$, то $(x' = f(x, \ldots, z), \ldots, z' = h(x, \ldots, z))$ обозначает отображение $F : X \to X$, координатное представление которого указано в скобках; при этом если значение y' некоторой координаты y не указывается в координатном представлении F, то $y' = 0$.

Считаем, что $\dim V \geq 2$. Далее V будем рассматривать как аффинную гиперплоскость $x_0 = 1$ координатного пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ с координатами, определяемыми координатными функциями, заданными в V, и дополнительной координатой x_0. Это позволяет аффинные преобразования и элементы алгебры Ли группы аффинных преобразований пространства V отождествлять с линейными операторами в $\mathbb{R}^{n+1}$ (при этом $x_0' = x_0$ для координатных представлений аффинных преобразований, и $x_0' = 0$ для элементов алгебры Ли группы аффинных преобразований).

Для любого кольца S через $S\langle x, \ldots, z\rangle$ обозначается кольцо всех четных многочленов над S, т.е. многочленов над S от всех попарных произведений (в том числе, и квадратов) переменных $x, \ldots, z$.

Зафиксируем в V репер

$$(O;\ d_i\ :\ 1 \leq i \leq n) \tag{1}$$

с соответствующими координатными функциями $x_i = d_i^*$.

Лемма 1. *Для каждого $t \in \mathbb{R}$ пусть α_t - отражение относительно прямой*

$$\frac{x_1 - t\,c_1}{0} = \cdots = \frac{x_{n-1} - t\,c_{n-1}}{0} = \frac{x_n}{1}$$

в направлении гиперплоскости

$$t\sum_{i<n} A_i\,y_i - y_n = 0.$$

Тогда $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\} \subset \mathrm{cl}\,\langle\{\alpha_0, \alpha_1\}\rangle$.

Доказательство. Непосредственным вычислением проверяется, что для любого целого m отражение α_m совпадает с $\alpha_0(\alpha_0\alpha_1)^m$ и поэтому содержится в $\langle\{\alpha_0, \alpha_1\}\rangle$. Но для любого бесконечного подмножества Y множества $\mathbb{R}$ выполняется равенство $\mathrm{cl}\{\alpha_y : y \in Y\} = \{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$.

Пусть целые неотрицательные k, m, s удовлетворяю неравенству

$$0 < k + m + 2s < n.$$

$\varkappa = (t_i : 1 \le i \le k+m+s) \in \mathbb{R}^{k+m+s}$, $L^{\varkappa}_{k,m,s}$ прямая, параллельная вектору d_n и проходящая через точку с радиус-вектором $\sum_{i=1}^{k+m+s} t_i d_i$,

$$Q^{\varkappa}_{k,m,s} = \ker\left(\sum_{i=1}^{k} t_i x_i - \sum_{j=k+1}^{k+m} t_j x_j + \sum_{l=k+m+1}^{k+m+s} t_l x_{k+m+s+l} - x_n\right),$$

$\alpha^{\varkappa}_{k,m,s} = \left(L^{\varkappa}_{k,m,s}, Q^{\varkappa}_{k,m,s}\right)$, $\varphi^{\varkappa}_{k,m,s} = \alpha^{\varkappa}_{k,m,s}\alpha^{(0)}_{k,m,s}$, $G_{k,m,s} = \{\varphi^{\omega}_{k,m,s} : \omega \in \mathbb{R}^{k+m+s}\}$, $M_{k,m,s} = \{\alpha^{\omega}_{k,m,s} : \omega \in \mathbb{R}^{k+m+s}\}$. $H_{k,m,s} = \langle M_{k,m,s}\rangle$,

$$g_{k,m,s} = \sum_{j=1}^{k} x_j^2 - \sum_{j=k+1}^{k+m} x_j^2 + 2\sum_{j=k+m+1}^{k+m+s} x_j x_{s+j} - 2x_n\,.$$

Если $\varkappa$ имеет только одну ненулевую координату t_i, которая при этом равна 1, то соответствующее $\alpha^{\varkappa}_{k,m,s}$ обозначим через $\alpha_{k,m,s,i}$; $\alpha_0 := \alpha^{(0)}_{k,m,s}$.

Теорема 1. *$H_{k,m,s}$ совпадает с $\mathrm{cl}\langle\{\alpha_0, \alpha_{k,m,s,i} : 1 \le i \le m\}\rangle$ и распадается на компоненты связности $G_{k,m,s}$ и $M_{k,m,s}$: $M_{k,m,s}$ - множество всех принадлежащих $H_{k,m,s}$ отражений и $G_{k,m,s}$ действует на $M_{k,m,s}$ транзитивно.*

$K_{k,m,s} = \mathbb{R}[g_{k,m,s}]\langle x_{k+s+m+1}, \ldots, x_{n-1}\rangle$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $\varphi^{\varkappa}_{k,m,s}\varphi^{\varkappa'}_{k,m,s} = \varphi^{\varkappa+\varkappa'}_{k,m,s}$ и поэтому $G_{k,m,s}$ коммутативная группа, не содержащая отражений.

Пусть $f \in K_{k,m,s}$ и $\varkappa = (t_i : 1 \le i \le k+m+s) \in \mathbb{R}^{k+m+s}$. Из инвариантности f относительно $\varphi^{\varkappa}_{k,m,s}$ в $\mathbb{R}[x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_{k+m+s}]$ имеем:

$$f = f(x_1, \ldots, x_n) = f(x'_1, \ldots, x'_{k+m+s}, x_{k+m+s+1}, \ldots, x_{n-1}, x'_n),$$

где $x'_i = x_i + 2t_i$ для всех $i < n$, а

$$x'_n = x_n + 2\left(\sum_{j=1}^{k} t_j(x_j + t_j) - \sum_{j=k+1}^{k+m} t_j(x_j + t_j) + \sum_{j=k+m+1}^{k+m+s} t_j x_{s+j}\right).$$

Для каждого $i \le m + k + s$ полагая $t_i = -\frac{1}{2}x_i$, а затем используя инвариантность f относительно α_0, получим: $f \in \mathbb{R}[g_{k,m,s}]\langle x_{k+s+m+1}, \ldots, x_{n-1}\rangle$.

Остальные утверждения теоремы доказываются так же, как и соответствующие утверждения теорем 1.1 и 1.2 работы [5].

Пусть теперь $k = m = 0$, $s = 1$. Тогда $n > 2$, $g_{0,0,1} = 2(x_1 x_2 - x_n)$.

Положим $\delta_0 = (\Lambda_0, \Pi_0)$, где прямая Λ_0 проходит через точку O и параллельна вектору d_1, а $\Pi_0 = \ker(x_1)$; $H'_{0,0,1} := \langle M_{0,0,1} \cup \{\delta_0\}\rangle$, $K'_{0,0,1}$ - алгебра полиномиальных инвариантов группы $H'_{0,0,1}$.

Теорема 2. *$H'_{0,0,1}$ распадается на компоненты связности $G_{0,0,1}$, $G_{0,0,1}\,\alpha_0$, $G_{0,0,1}\,\delta_0$, $G_{0,0,1}\,\alpha_0\,\delta_0$.*

$K'_{0,0,1} = \mathbb{R}[(x_1 x_2 - x_n)^2]\,\langle x_2, \ldots, x_{n-1}\rangle$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы следует из того, что δ_0 и $\alpha^{(t)}_{0,0,1}$ коммутируют при любом t.

Докажем второе утверждение. Пусть $g \in K'_{0,0,1}$. Тогда, по теореме 1,

$$g = f(x_1 x_2 - x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}[x_1 - x_2 x_n]\,\langle x_2, \ldots, x_{n-1}\rangle\,.$$

Действуя на g отражением δ_0, получаем равенство

$$f(x_1 x_2 - x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}) = f(-x_1 x_2 + x_n, x_2, \ldots, x_{n-1}).$$

Отметим, что при $n > 3$ множество $M_{0,0,1} \cup \{\delta_0\}$ является множеством всех отражений, принадлежащих группе $H'_{0,0,1}$; однако $K'_{0,0,1}$ совпадает с алгебрами полиномиальных инвариантов рассмотренных в [6] групп H^5_6 и H^6_6, порожденных отражениями относительно скрещивающихся прямых и содержащих группу $H'_{0,0,1}$. Если же $n = 3$, то $H'_{0,0,1}$ совпадает с рассмотренными в [6] группами H^1_6, H^2_6 и H^3_6, также порожденными отражениями относительно скрещивающихся прямых.

2°. Пусть H обозначает порожденную аффинными отражениями относительно лежащих в V прямых нецентроаффинную группу, алгебра полиномиальных инвариантов которой невырожденна, т.е. не содержится в $\mathbb{R}[y_2, \ldots, y_n]$ ни при каком выборе в V аффинных координат y_1, $y_2, \ldots, y_n$. Очевидно, что группа $\mathrm{cl}\,H$ не содержит ни параллельных переносов, ни сдвигов, и действует на нецилиндрической алгебраической гиперповерхности.

В этом пункте доказывается

Теорема 3. *Если группа H не содержит отражений относительно скрещивающихся прямых, то либо $\mathrm{cl}\,H$ аффинно эквивалентна одной из групп $H_{k,m,s}$, либо $n > 3$ и $\mathrm{cl}\,H$ аффинно эквивалентна группе $H'_{0,0,1}$.*

Зафиксируем некоторое отражение $\beta_0 = (L_0, P_0)$, принадлежащее группе $\mathrm{cl}\,H$. Обозначим через M_0 множество всех отражений относительно прямых, параллельных L_0, и положим $M_H = M_0 \cap \mathrm{cl}\,H$.

Далее $\mathrm{Lin}\,X$ — линейная оболочка множества X в содержащем это множество линейном пространстве, $K(H)$ - алгебра полиномиальных инвариантов группы H.

Лемма 2. *M_H аффинно эквивалентно некоторому множеству $M_{k,m,s}$.*

Доказательство. Выберем репер

$$(C_0;\ b_1, \ldots, b_n) \tag{2}$$

с координатными функциями $y_i := b_i^*$, для которых $C_0 \in L_0$, $b_n \parallel L_0$, $P_0 = \ker(y_n)$.

Пусть $\beta = (L,\ P) \in M_0$. Тогда L в репере (2) задается пропорцией

$$\frac{y_1 - c_1}{0} = \cdots = \frac{y_{n-1} - c_{n-1}}{0} = \frac{y_n}{1},$$

$P = \ker\left(\sum_{i<n} A_i\, y_i - y_n\right)$. Для каждого такого β положим

$$\tilde\pi_1(\beta) = \sum_{i<n} c_i\, b_i,\ \ \tilde\pi_2(\beta) = \sum_{i<n} A_i\, y_i,\ \ B\langle\beta\rangle = \left(y_n' = \sum_{i<n} A_i\, y_i,\ y_j' = c_j\, x_0\ \ :\ j < n\right).$$

M_0 будем рассматривать как вещественное линейное пространство, для любых β, γ из M_0 и вещественных s, t полагая $s\cdot\beta \oplus t\cdot\gamma$ равным такому δ из M_0, которое однозначно определяется равенством $B\langle\delta\rangle = s\,B\langle\beta\rangle + t\,B\langle\gamma\rangle$ (или, что то же самое, $\tilde\pi_i(\delta) = s\,\tilde\pi_i(\beta) + t\,\tilde\pi_i(\gamma)$ для всех $i \le 2$).

Тогда каждое $\tilde\pi_i$ является линейным отображением пространства M_0: эти отображения (и линейные операции в M_0) хотя и задаются с использованием координат $y_1, \ldots, y_n$, полностью определяются выбором отражения $(L_0,\ P_0)$ и вектора $b_n \parallel L_0$.

Из леммы 1

$$\{t\cdot\beta\ :\ t\in\mathbb{R}\} \subset \mathrm{cl}\,\langle\{\beta_0,\ \beta\}\rangle. \tag{3}$$

Отсюда $\mathrm{cl}\,H$ содержит однопараметрическую группу $\{(t\cdot\beta)\beta_0\ :\ t\in\mathbb{R}\}$ с производящим оператором $B\langle\beta\rangle$. Кроме того, если $\gamma = (L',\ P')$ — отражение относительно прямой $\dfrac{y_1 - c_1'}{0} = \cdots = \dfrac{y_{n-1} - c_{n-1}'}{0} = \dfrac{y_n}{1}$ в направлении гиперплоскости $\sum_{i<n} A_i'\, y_i - y_n = 0$, то

$$\exp(B\langle\beta\rangle + B\langle\gamma\rangle)\,\beta_0\,\exp(-B\langle\beta\rangle - B\langle\gamma\rangle) = \beta\oplus\gamma, \tag{4}$$

$$[B\langle\beta\rangle,\ B\langle\gamma\rangle] = \left(y_n' = \left(\sum_{i<n}(A_i\,c_i' - A_i'\,c_i)\right)x_0\right). \tag{5}$$

Из (3) и (4) следует, что M_H — линейное пространство. Пусть ν_i — сужение $\tilde\pi_i$ на M_H. Из (5) следует, что $\nu_2(\beta)(\nu_1(\gamma)) = \nu_2(\gamma)(\nu_1(\beta))$, т.к. иначе $\mathrm{cl}\,H$ содержит однопараметрическую группу сдвигов $\exp(t\,[B\langle\beta\rangle,\ B\langle\gamma\rangle])$ и тогда $K(H)$ вырожденна.

Если $\nu_1(\beta) = 0$, то $L = L_0$; отсюда $P = P_0$, т.к. иначе $\mathrm{cl}\,H$ содержит сдвиг $\beta\beta_0$. Если же $\nu_2(\beta) = 0$, то $P = P_0$; отсюда $L = L_0$, т.к. иначе $\mathrm{cl}\,H$ содержит перенос $\beta\beta_0$.

Таким образом, $\nu_2\,\nu_1^{-1}$ является симметричным невырожденным линейным отображением содержащейся в P_0 плоскости $W := \nu_1(M_H)$ в пространство линейных форм, определенных на ассоциированном с V линейном (касательном) пространстве $T(V)$. При этом $\nu_2(M_H) \subseteq \mathrm{Lin}\{y_j\ :\ j < n\}$. Значит, $y_n \notin \nu_2(M_H)$, причем $P_0 = \ker(y_n)$.

Отображение $(u, v) \mapsto \nu_2(u)(\nu_1(v))$ определяет на W билинейную симметричную форму ψ с каноническим базисом $(e_1, \ldots, e_{k+m+s})$, для которого

$$\psi(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j \le k, \\ -1, & \text{если } k < i = j \le k+m, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Положим $e_n = b_n$, $z_n = y_n$ и

$$z_j = \begin{cases} \nu_2\,\nu_1^{-1}(e_j), & \text{если } j \le k, \\ -\nu_2\,\nu_1^{-1}(e_j), & \text{если } k < j \le k+m, \\ \nu_2\,\nu_1^{-1}(e_{j-s}), & \text{если } k+m+s < j \le k+m+2s. \end{cases}$$

Тогда формы $z_1, \ldots, z_{k+m}, z_{k+m+s+1}, \ldots, z_{k+m+2s}, z_n$ линейно независимы, векторы $e_1, \ldots, e_{k+m+s}, e_n$ линейно независимы и

$$z_i(e_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \ne j. \end{cases}$$

Отсюда следует, что $k+m+2s < n$, а индексированные семейства $e_1, \ldots, e_{k+m+s}, e_n$ и $z_1, \ldots, z_{k+m}, z_{k+m+s+1}, \ldots, z_{k+m+2s}, z_n$ содержатся в двойственных базисах $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(z_1, \ldots, z_n)$ пространств $T(V)$ и $T(V)^*$ соответственно. Но тогда $W = \operatorname{Lin}\{e_j : j \le k+m+s\}$, $P_0 = \operatorname{Lin}\{e_j : j < n\}$ и

$$\nu_2\,\nu_1^{-1}(e_j) = \begin{cases} z_j, & \text{если } j \le k, \\ -z_j, & \text{если } k < j \le k+m, \\ z_{s+j}, & \text{если } k+m < j \le k+m+s. \end{cases}$$

Пусть (1) – репер, использованный в п. 1° для задания множества отражений $M_{k,m,s}$. F – аффинное преобразование, для которого $F(C) = O$, $F(e_j) = d_j$ $(j \ge 1)$. Тогда координатное представление отражения $\beta \in M_H$ в реперe (2) совпадает с координатным представлением отражения $F\beta F^{-1}$ в реперe (1), и $F M_H F^{-1}$ совпадает с $M_{k,m,s}$. Единственность множества $M_{k,m,s}$, аффинно эквивалентного M_H и удовлетворяющего условию $k \ge m$, следует из аффинной однородности $M_{k,m,s}$ и закона инерции квадратичных форм.

Таким образом, если H порождается отражениями относительно параллельных прямых, то $\operatorname{cl} H$ аффинно эквивалентна группе $H_{k,m,s}$.

Лемма 3. *Пусть группа H порождена отражениями относительно прямых, лежащих в некоторой двумерной аффинной плоскости. Тогда группа $\operatorname{cl} H$ аффинно эквивалентна одной из групп $H_{1,0,0}$, $H_{0,0,1}$, $H'_{0,0,1}$.*

Доказательство. Все оси принадлежащих группе H отражений лежат в некоторой двумерной аффинной плоскости. Достаточно проверить, что если H содержит два отражения относительно непараллельных прямых, то $\mathrm{cl}\,H$ аффинно эквивалентна группе $H'_{0.0.1}$.

1. Покажем, что $\mathrm{cl}\,H$ содержит отражения относительно параллельных непересекающихся прямых.

Зафиксируем систему координат (2). Можно считать, что все оси принадлежащих группе H отражений лежат в координатной плоскости $y_3 = 0, \ldots, y_n = 0$.

Из [4] получаем, что достаточно рассмотреть следующие два случая.

1.1. Группа $\mathrm{cl}\,H$ содержит семейство $\{(\Lambda_t, \Pi_t) : t \in \mathbb{R}\}$ отражений, для каждого из которых прямая Λ_t задается пропорцией $\dfrac{y_1}{\cos t} = \dfrac{y_2}{\sin t} = \dfrac{y_3}{0} = \cdots = \dfrac{y_n}{0}$ и $\Pi_t = \ker(y_1 \cos t + y_2 \sin t)$.

Из нецентроаффинности группы $\mathrm{cl}\,H$ следует, что она содержит отражение (L, P), ось L которого не проходит через начало C выбранной системы координат. Но тогда L параллельна некоторой прямой Λ_t и не совпадает с ней.

1.2. Группа $\mathrm{cl}\,H$ содержит семейство $\{(L_t, P_t) : t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ отражений, для каждого из которых L_t задается пропорцией $\dfrac{y_1}{t} = \dfrac{y_2}{t^{-1}} = \dfrac{y_3}{0} = \cdots = \dfrac{y_n}{0}$ и $P_t = \ker(t^{-1} y_1 + t y_2)$: кроме того, $\mathrm{cl}\,H$ содержит отражение (L, P), для которого L задается пропорцией $\dfrac{y_1}{1} = \dfrac{y_2 - c_2}{a_2} = \dfrac{y_3}{0} = \cdots = \dfrac{y_n}{0}$ и $P = \ker\left(\sum_i A_i y_i\right)$, причем $c_2 \neq 0$.

Если $a_2 \neq 0$, то L параллельна некоторой прямой L_t, но не совпадает с ней. Если же $a_2 = 0$, то действуя отражениями (L_t, P_t) на отражение (L, P), опять получаем принадлежащие группе $\mathrm{cl}\,H$ отражения относительно параллельных, но не равных друг другу прямых.

2. Пусть семейство $\{(L_i, P_i) : i \in \{1; 2; 3\}\}$ отражений содержится в $\mathrm{cl}\,H$ и при этом прямые L_1, L_2, L_3 попарно различны, $L_1 \parallel L_2$, $L_1 \nparallel L_3$.

Опять из [4] следует, что, с точностью до аффинной эквивалентности, L_1, L_2, L_3 задаются пропорциями

$$\frac{y_1}{1} = \frac{y_2 - 1}{0} = \frac{y_3}{0} = \cdots = \frac{y_n}{0},$$

$$\frac{y_1}{1} = \frac{y_2}{0} = \frac{y_3}{0} = \cdots = \frac{y_n}{0},$$

$$\frac{y_1 - c_1}{a_1} = \frac{y_2}{1} = \frac{y_3}{0} = \cdots = \frac{y_n}{0}$$

соответственно. $P_1 = \ker(y_1 - A_{12} y_2 - A_{13} y_3)$, $P_2 = \ker(y_1)$, и при этом либо $A_{12} - 1 = A_{13} = 0$, либо $A_{12} = A_{13} - 1 = 0$.

По лемме 1, для каждого вещественного t группа $\mathrm{cl}\,H$ содержит отражение T_t относительно прямой $\dfrac{y_1}{1} = \dfrac{y_2 - t}{0} = \dfrac{y_3}{0} = \cdots = \dfrac{y_n}{0}$ в направлении гиперплоскости $y_1 - t\,(A_{12} y_2 + A_{13} y_3) = 0$.

2.1. Допустим, что $A_{12}-1 = A_{13} = 0$. Тогда $\mathrm{cl}\,H$ содержит подгруппу параболических поворотов $T_t\,T_0$ с производящим оператором $B = (y_1' = y_2,\ y_2' = x_0)$. Действуя этими параболическими поворотами на $(L_3,\ P_3)$, получаем, что $\mathrm{cl}\,H$ содержит отражение T относительно прямой $\dfrac{y_1 - c_1'}{0} = \dfrac{y_2}{1} = \dfrac{y_3}{0} = \cdots = \dfrac{y_n}{0}$.

Вычислением координатного представления линейного отображения $B + T\,B\,T$ проверяется, что это отображение является производящим оператором однопараметрической группы параллельных переносов. Но оператор $B + T\,B\,T$ принадлежит алгебре Ли группы $\mathrm{cl}\,H$, а это противоречит тому, что $\mathrm{cl}\,H$ не содержит параллельных переносов.

2.2. Пусть $A_{12} = A_{13} - 1 = 0$, $P_3 = \ker\bigl(\sum_i A_i\,y_i\bigr)$, $g \in K(H)$. Из теоремы 1 следует, что $g = f(y_1 - y_2\,y_3,\ y_3, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}[y_1 - y_2\,y_3]\,\langle y_3, \ldots, y_n\rangle$. Действуя на многочлен g отражением $T_t\,(L_3,\ P_3)\,T_t$, в алгебре $\mathbb{R}[t,\ y_1, \ldots, y_n]$ получаем равенство $g = f(4\,(A_1\,a_1 + A_2)^{-1}\,(A_1\,y_3^2 + A_2\,a_1)\,t + h,\ y_3, \ldots, y_n)$, где $h \in \mathbb{R}[y_1, \ldots, y_n]$. Отсюда $A_1 = 0$ и $A_2\,a_1 = 0$, т.к. иначе $g \in \mathbb{R}\,\langle y_3, \ldots, y_n\rangle$, а это противоречит невырожденности $K(H)$. Но если $A_1 = 0$, то $A_2 \neq 0$, т.к. иначе $L_3 \parallel P_3$. Таким образом, $A_1 = a_1 = 0$, а за счет замены координат можно считать, что $c_1 = A_3 = \cdots = A_n = 0$.

Остается показать, что $\{(L_3,\ P_3)\} \cup \{T_t\ :\ t \in \mathbb{R}\}$ — множество всех отражений, принадлежащих $\mathrm{cl}\,H$.

Пусть $(L_4,\ P_4) \in \mathrm{cl}\,H$. Если $L_4 \parallel L_1$, то L_4 совпадает с осью некоторого отражения T_t. Но тогда $(L_4,\ P_4) = T_t$, т.к. $\mathrm{cl}\,H$ не содержит сдвигов. Если же $L_4 \nparallel L_1$, то из доказанного выше для $(L_3,\ P_3)$ следует, что L_4 задается пропорцией $\dfrac{y_1 - c_{41}}{0} = \dfrac{y_2}{1} = \dfrac{y_3}{0} = \cdots = \dfrac{y_n}{0}$ и $P_4 = \ker\bigl(y_2 - \sum_{i>2} A_{4i}\,y_i\bigr)$. По лемме 1, для каждого вещественного t группа $\mathrm{cl}\,H$ содержит отражение $T_{4,t}$ относительно прямой $\dfrac{y_1 - t\,c_{41}}{0} = \dfrac{y_2}{1} = \dfrac{y_3}{0} = \cdots = \dfrac{y_n}{0}$ в направлении гиперплоскости $y_2 - t\,\sum_{i>2} A_{4i}\,y_i = 0$. Действуя на g отражением $T_{4,t}$, получаем следующее равенство в алгебре $\mathbb{R}[t,\ y_1, \ldots, y_n]$:

$$g = f\left(y_2\,y_3 - y_1 + 2\,t\left(c_{41} + y_3\sum_{i>2} A_{4i}\,y_i\right),\ y_3, \ldots, y_n\right).$$

Отсюда либо опять $g \in \mathbb{R}\,\langle y_3, \ldots, y_n\rangle$, либо $c_{41} = 0$ и $A_{4i} = 0$ для всех $i > 2$, т.е. $(L_1,\ P_1) = (L_3,\ P_3)$.

Для доказательства теоремы 3 остается отметить, что если группа H не содержит отражений относительно скрещивающихся прямых, то из нецентроаффинности этой группы следует, что все оси принадлежащих группе H отражений либо попарно параллельны, либо лежат в некоторой двумерной аффинной плоскости.

Заключение. *Основные результаты работы:*

Построены все нецентроаффинные алгебраические группы, порожденные аффинными отражениями относительно прямых в конечномерном вещественном аффинном пространстве и имеющие невырожденные алгебры полиномиальных инвариантов. Найдены полные системы данных и базисные полиномиальные инварианты этих групп.

Список литературы

[1] Игнатенко В.Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями - Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. М., 1989. т. 21. - С. 155–208.

[2] Игнатенко В.Ф. Об одной бесконечной группе косых симметрий - Изв. вузов. Математика. 1994. № 3. С. 32–34.

[3] Игнатенко В.Ф. Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. III - Укр. математ. журн. 1998. Т. 50, № 10. С. 1324–1340.

[4] А.И.Криворучко. Об инвариантах бесконечных групп, порожденных отражениями относительно прямых. Укр. геометр. сб. (1990), вып. 33. - С. 65–69.

[5] А.И.Криворучко. О кольцах инвариантов групп, порожденных отражениями относительно скрещивающихся прямых. Матем. физика, анализ, геометрия (2000), т. 7, № 4. - С. 415–441.

[6] А.И.Криворучко. О группах, порожденных отражениями относительно скрещивающихся прямых. - Ученые Записки Таврического национального университета 2003. Т.16 (55). № 2. С. 19–35.

Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 47-58

УДК 514.747:574.583

А.М. Лях

ДЕФОРМАЦИИ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФОРМЫ КЛЕТОК ФИТОПЛАНКТОНА

1. Постановка задачи и общие сведения

В последнее время публикуется много работ, посвященных построению трехмерных геометрических моделей живых организмов (далее 3D-моделей), которые применяются как в области компьютерного искусства, так и для исследования поведения отдельных индивидуумов и их совокупностей в заданных условиях (*Individual Based Modeling*, см. [1, 2, 3]) и для имитации искусственной жизни (*Artificial Life*).

Одним из направлений трехмерного моделирования в биологии является моделирование особенностей внутреннего и внешнего строения (*морфологии*) и поведения микроскопических объектов, не видимых или слабо различимых невооруженным глазом. В первую очередь, такие 3D-модели могут использоваться для *виртуальной микроскопии*, то есть для изучения морфологии живых объектов с помощью компьютерного "*виртуального микроскопа*". Последний представляет собой специальную программу, позволяющую рассматривать микроскопический объект с любым увеличением и с любой стороны, что, практически, невозможно при использовании обычных световых, электронных и прочих микроскопов. В этой связи особенно интересным и практически необходимым является моделирование планктонных организмов: одноклеточных водорослей (*фитопланктона*) и животных (*зоопланктона*), свободно парящих в толще воды, которые являются главными звеньями продукционной цепи водоемов. Существуют отдельные работы по построению 3D-моделей зоопланктона для изучения его движения и питания (см. [4]), но работ, посвященных 3D-моделированию клеток фитопланктона, за исключением [5], до настоящего времени не опубликовано.

Трехмерные модели фитопланктона, прежде всего, могут использоваться для точного вычисления его объема и площади поверхности. Объем клетки фитопланктона эквивалентен ее живой массе (*биомассе*) и совместно с площадью поверхности используется при продукционных исследованиях, изучении процессов обмена вещества и энергии в водных экосистемах, экологических исследованиях и т. п. Наиболее

распространенным способом вычисления объема и площади клеток фитопланктона является *метод истинных объемов*, при котором форма клетки аппроксимируется набором простых геометрических примитивов (см. [6, 7]). Однако, не всякую форму микроводоросли можно точно представить совокупностью простых геометрических тел, тогда как 3D–модели позволяют точно воссоздать форму любого живого объекта. При этом используются как различные способы построения 3D–моделей, так и различные методы их последующих деформаций, причем, чем понятнее метод деформации, то есть чем очевиднее его результат, тем проще его использовать. В работе рассматриваются два мощных и интуитивно понятных метода деформации 3D–объектов — *деформация свободной формы* и *осевая деформация*, которые применяются для моделирования клеток фитопланктона. Перед описанием каждого из методов кратко рассмотрим применяющуюся в них теорию кривых и поверхностей Безье.

2. Кривые, поверхности и тела Безье

1. Кривые Безье — это параметрические кривые, зависящие от одного параметра $u \in [0;1]$. Они названы в честь Пьера Безье (*Pierre Bézier*) — инженера компании "Рено", который в 60-х гг. прошлого века разработал теорию кривых для моделирования сложных поверхностей. Изложение теории кривых Безье начнем с самого простого случая — параметризации отрезка прямой. Пусть в трехмерном пространстве $\mathcal{R}^3$ заданы две точки P_0 и P_1. Тогда отрезок, проходящий через эти точки, можно параметризовать следующим выражением:

$$Q(u) = (1-u)P_0 + uP_1, \tag{1}$$

где $Q(u) = (x(u), y(u), z(u))$ — точка отрезка. Перепишем (1) следующим образом:

$$Q(u) = B_{01}(u)P_0 + B_{11}(u)P_1, \tag{2}$$

где

$$B_{01}(u) = (1-u) \qquad B_{11}(u) = u,$$

называются *базисными функциями*. Тогда параметризация (2) запишется следующим образом:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{1} B_{i1}(u)P_i. \tag{3}$$

Выведем аналогичную формулу для сегмента кривой линии. Пусть форма сегмента кривой определяется положением трех точек $\{P_0, P_1, P_2\} \subset \mathcal{R}^3$ так, что P_0 и P_2 задают координаты концов сегмента, а P_1 — это точка, к которой стремится выпуклость сегмента кривой (рис. 1,а). Тогда любую точку сегмента кривой можно параметризовать, следуя методу де Кастелье (*de Casteljau*). Зафиксируем произвольную точку $Q(u)$ сегмента кривой и построим такой отрезок $P_{01}(u)P_{12}(u)$,

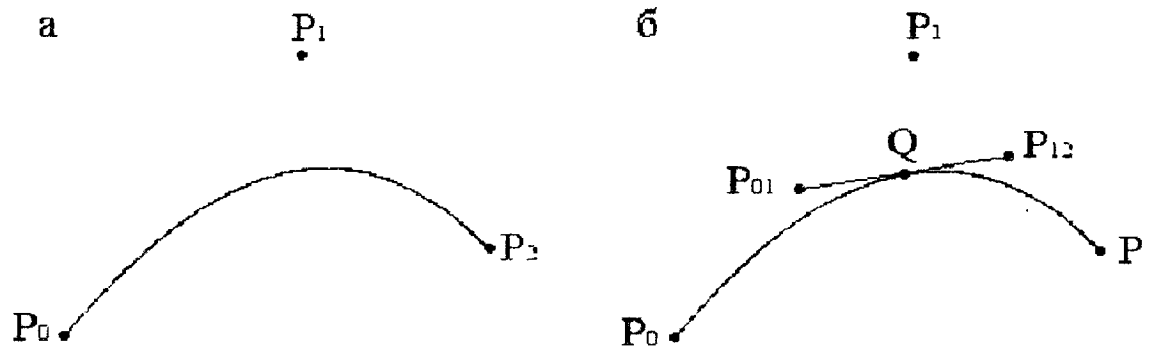

Рис. 1. (а) Кривая Безье; (б) способ определения координат точек кривой Безье.

который касается сегмента в точке $Q(u)$, а его концы $P_{01}(u)$ и $P_{12}(u)$ принадлежат отрезкам P_0P_1 и P_1P_2 соответственно. Тогда положения точек $P_{01}(u)$ и $P_{12}(u)$ будет определяться выражением (2) для соответствующих им отрезков (рис. 1,б):

$$P_{01}(u) = B_{01}(u)P_0 + B_{11}(u)P_1,$$
$$P_{12}(u) = B_{01}(u)P_1 + B_{11}(u)P_2.$$

Координаты точки сегмента кривой $Q(u)$ можно найти по формуле (2) для отрезка $P_{01}(u)P_{12}(u)$:

$$Q(u) = B_{01}(u)P_{01}(u) + B_{11}(u)P_{12}(u) = (1-u)^2P_0 + 2u(1-u)P_1 + u^2P_2. \quad (4)$$

Таким образом, параметрическое выражение сегмента кривой, зависящего от положения трех точек, будет определяться следующей формулой:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{2} B_{i2}(u)P_i, \quad (5)$$

где $B_{i2}(u)$ — базисные функции:

$$B_{02}(u) = (1-u)^2 \qquad B_{12}(u) = 2u(1-u) \qquad B_{22}(u) = u^2.$$

Выражение (5) определяет кривую Безье *второй степени.*

Определение 1. Точки, от которых зависит форма кривой Безье, будем называть *управляющими вершинами.*

Определение 2. Степенью кривой Безье называется число, которое на единицу меньше количества управляющих вершин.

В общем случае, кривую Безье степени N можно построить, используя $N+1$ управляющую вершину методом де Кастелье. Базисные функции $B_{iN}(\cdot)$ кривой

Безье N-ой степени будут являться *многочленами Бернштейна* и выражаться следующей формулой:

$$B_{iN}(u) = C_i^N u^i (1-u)^{N-i} \qquad i = 0, \ldots, N, \tag{6}$$

где C_i^N число сочетаний из N по i.

Определение 3. Кривая Безье степени N, определяемая управляющими вершинами $\{P_i\}_{i=0}^N$, обладает следующими свойствами:

1) Она проходит через вершины P_0 и P_N, и около вершин $P_1, \ldots, P_{N-1}$.

2) Отрезок P_0P_1 касается кривой в точке P_0, а отрезок $P_{N-1}P_N$ — в точке P_N.

3) Она полностью содержится в выпуклой оболочке, описанной около управляющих вершин.

Следствие 1. *Если все N управляющих вершин лежат на одной прямой, то кривая Безье будет являться прямой линией.*

2. По аналогии с кривыми Безье определяется поверхность Безье как параметрическая поверхность, зависящая от двух параметров $(u, v) \subset [0;1]^2$. Пусть в трехмерном пространстве $\mathcal{R}^3$ заданы управляющие вершины, расположенные в узлах некоторой сетки:

$$P_{ij} \in \mathcal{R}^3 \qquad i = 0, \ldots, N \qquad j = 0, \ldots, M.$$

Тогда поверхность Безье будет определяться следующим выражением:

$$Q(u,v) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} B_i(u) B_j(u) P_{ij} \tag{7}$$

3. Аналогично поверхности Безье можно определить тело Безье — параметрическое тело, зависящее от трех параметров $(u, v, w) \subset [0;1]^3$. Пусть в трехмерном пространстве $\mathcal{R}^3$ заданы управляющие вершины, расположенные в узлах трехмерной решетки:

$$P_{ijk} \in \mathcal{R}^3 \qquad i = 0, \ldots, N \qquad j = 0, \ldots, M \qquad k = 0, \ldots, L.$$

Тогда тело Безье будет определяться следующим выражением:

$$Q(u,v,w) = \sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{M} \sum_{k=0}^{L} B_i(u) B_j(u) B_k(u) P_{ijk} \tag{8}$$

4. Изменяя положение управляющих вершин, можно изменять форму кривой, поверхности и тела Безье, то есть деформировать эти объекты. На этом свойстве основан метод деформации свободной формы.

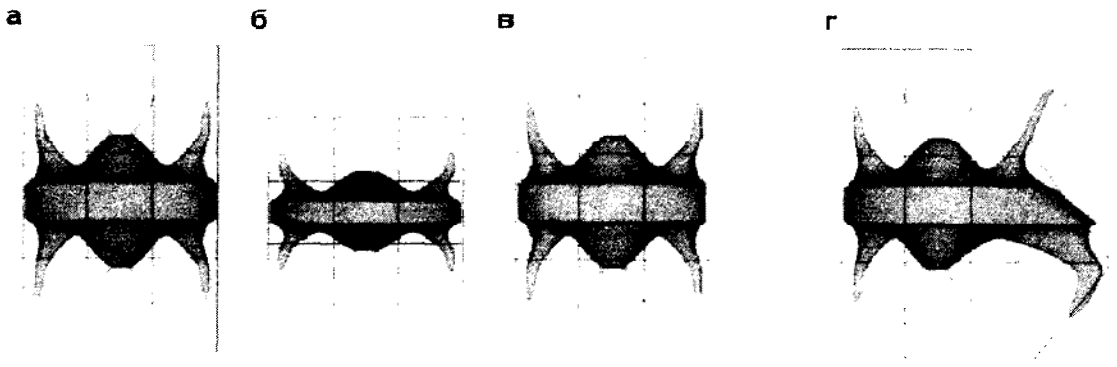

Рис. 2. Деформация свободной формы.

3. Деформация свободной формы

Деформация свободной формы (*Free Form Deformation*) – это разновидность пространственной деформации, которая впервые была описана в работе [8]. Метод является преобразованием трехмерного объекта из начального состояния в деформированное состояние, сопровождаемое деформацией координатной системы объекта.

Пусть трехмерный объект задан совокупностью вершин $X_i = (x_i, y_i, z_i)$. Деформация свободной формы осуществляется за три шага (рис. 2):

(1) Вокруг объекта описывается параметрическое тело Безье, которое называется *деформационной ячейкой* (в простейшем случае имеющей форму параллелепипеда, рис. 2,а), и объект внедряется в систему координат этого тела (рис. 2,б), то есть координаты каждой вершины объекта преобразуются функцией $\varphi\colon \mathcal{R}^3 \to [0;1]^3$ в систему координат деформационной ячейки:

$$U_i = (u_i, v_i, w_i) = \varphi(X_i) \tag{9}$$

(2) Путем смещения управляющих вершин ячейка деформируется (рис. 2,в).

(3) Местоположение точек объекта корректируется функцией $\vartheta\colon [0;1]^3 \to \mathcal{R}^3$ так, чтобы их координаты согласовывались с новым положением координатной системы деформированной ячейки (рис. 2,г):

$$\widehat{X_i} = \vartheta(U_i) \tag{10}$$

Обычно, трехмерный объект определяется координатами своих вершин в мировой системе координат. Отличие деформации свободной формы от других пространственных деформаций заключается в том, что позиция вершин объекта не изменяется напрямую. Вместо этого деформируется локальная система координат

деформационной ячейки, к которой привязан объект, что изменяет положение точек объекта в мировой системе координат. Описывая данную деформацию, нужно мыслить категориями координатных систем: не "*объект был повернут*", а "*локальная система координат объекта была повернута, что привело к повороту объекта*". Для выполнения этого необходимо определить систему координат, имеющую больше степеней свободы, чем обычная прямоугольная декартова система координат. Она должна базироваться на телах Безье, поэтому основой деформации свободной формы является теория кривых и поверхностей Безье.

1. Операция внедрения объекта заключается в нахождении локальных координат объекта в пространстве деформационной ячейки. Классический метод деформации свободной формы оперирует деформационными ячейками в форме параллелепипеда, что приводит к простым формулам преобразования координат:

$$U_i = \varphi(X_i) = \begin{cases} u_i & = (x_i - x_{min})/x_{max}, \\ v_i & = (y_i - y_{min})/y_{max}, \\ w_i & = (z_i - z_{min})/z_{max}, \end{cases} \tag{11}$$

где $X_i = (x_i, y_i, z_i)$ — координаты вершины объекта в мировой системе координат; $U_i = (u_i, v_i, w_i)$ — координаты вершины объекта в локальной системе координат; $(x_{min}, y_{min}, z_{min})$ и $(x_{max}, y_{max}, z_{max})$ — минимальная и максимальная координаты деформационной ячейки.

В 1991 г. S. Coquillar (см. [9]) разработан улучшенный метод деформации свободной формы (*Extended Free Form Deformation*), который оперирует деформационными ячейками произвольной формы. Понятно, что чем точнее форма ячейки соответствует форме объекта, тем очевиднее изменения, происходящие с объектом во время его деформации. При реализации данного метода основная трудность заключается в определении функции преобразования $\varphi(\cdot)$ мировых координат объекта в локальную систему координат деформационной ячейки произвольной формы.

2. Смещение управляющих вершин приводит к искажению локальной системы координат деформационной ячейки. Однако, параметрические координаты объекта никогда не изменяются, также как не изменяются параметрические координаты тела Безье. Они всегда принадлежат единичному кубу $[0; 1]^3$.

3. Мировые координаты объекта, после деформации локальной системы координат деформационной ячейки, вычисляются по формуле (8).

Можно предложить еще одну аналогию для понимания деформации свободной формы. Тело Безье — это цельный трехмерный объект, а деформируемый объект — это некоторая часть внутри этого тела. Он "вморожен" в тело Безье и всегда следует за его изменениями. Для построения тела Безье нужно, непрерывно изменяя параметры u, v, w от 0 до 1, вычислить мировые координаты тела. Для деформируемого объекта значения параметров уже вычислены заранее, они зафиксированы

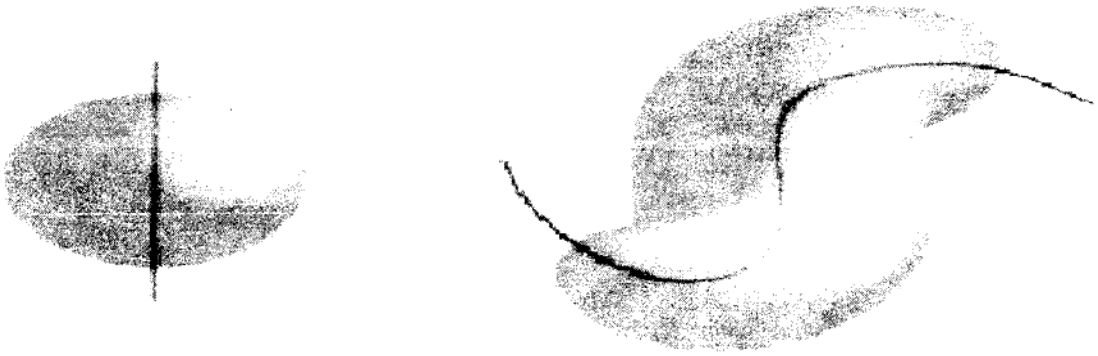

Рис. 3. Осевая деформация [10].

и остается только подставить их в формулу (8) и определить мировые координаты объекта.

4. Осевая деформация

Метод осевой деформации (*Axial Deformation*), предложенный F. Lazarus и др. [10], устанавливает однозначное соответствие между объектом и некоторой параметрической кривой — *осью деформации* так, что при изменении формы оси происходит деформация объекта; объект как бы следует за изменениями кривой (рис. 3).

Суть деформации заключается в том, что для каждой точки объекта находится ближайшая к ней точка кривой, которая становится центром локальной прямоугольной системы координат. Мировые координаты вершин объекта преобразуются в локальную координатную систему окрестности кривой, затем кривая деформируется, и после этого вычисляются новые мировые координаты объекта.

Для реализации метода осевой деформации нужно:

(1) Определить точку кривой, ближайшую к заданной вершине объекта;
(2) Построить систему координат с центром в указанной точке кривой;
(3) Вычислить мировые и локальные координаты вершины объекта.

1. В компьютерной геометрии все непрерывные кривые представляются в дискретной форме в виде ломаной линии. Произвольную параметрическую кривую $Q(u)$, используя дискретную последовательность значений параметра $u_i = i \cdot \Delta u$, можно преобразовать в ломаную линию — аппроксимацию исходный кривой. Чем меньше шаг дискретизации Δu, тем точнее аппроксимация. Если ось деформации аппроксимирована ломаной линией, то ближайшей точкой к указанной вершине объекта будем считать ближайшую точку изгиба ломаной.

2. В качестве локальной системы координат можно использовать направляющие векторы сопутствующего трехгранника Френе. Если ось деформации задана параметрическим уравнением

$$\overline{Q(u)} = \Big(x(u), y(u), z(u)\Big), \tag{12}$$

то направляющие векторы соприкасающегося трехгранника будут вычисляться по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{t} &= \overline{Q'(u)}, \\ \bar{b} &= \overline{Q'(u)} \times \overline{Q''(u)}, \\ \bar{n} &= \bar{b} \times \bar{t} = \Big(\overline{Q'(u)} \times \overline{Q''(u)}\Big) \times \overline{Q'(u)}, \end{aligned} \tag{13}$$

в которых $\bar{t}$ — вектор касательной, $\bar{b}$ – вектор бинормали, $\bar{n}$ – вектор главной нормали.

Если ось деформации задана кривой Безье степени N, то производные выражения (12) примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \overline{Q'(u)} &= \textstyle\sum_{i=0}^{N} B'_{iN}(u)\overline{P_i}, \\ \overline{Q''(u)} &= \textstyle\sum_{i=0}^{N} B''_{iN}(u)\overline{P_i}, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} B'_{iN} &= N\Big(B_{i-1N-1} - B_{iN-1}\Big), \\ B''_{iN} &= N(N-1)\Big(B_{i-2N-2} - 2B_{i-1N-2} + B_{iN-2}\Big). \end{aligned} \tag{15}$$

3. Осевая деформация действует аналогично деформации свободной формы. Каждая вершина трехмерного объекта *фиксируется* в системе координат оси деформации, т. е. мировые координаты каждой вершины объекта преобразуются в локальные координаты параметрической оси, которые больше никогда не изменяются. После деформации оси — смещения ее управляющих вершин, деформированные мировые координаты вершин объекта определяются с помощью обратного преобразования.

Если в методе осевой деформации использовать дополнительный параметр — *кручение кривой* (не путать с аналогичным термином дифференциальной геометрии), который будет определять поворот локальной системы координат относительно оси деформации, то к методу модификации кривой прибавится еще одна возможность. Например, используя в качестве оси деформации прямую линию с переменным кручением, можно получить закрученный объект (рис. 4).

Рис. 4. Закручивание объекта в методе осевой деформации [10].

5. Применение деформаций в 3D-моделировании фитопланктона

Рассмотренные два типа деформаций, благодаря простоте их выполнения, используются в моделировании формы клеток фитопланктона [5]. Как известно, любые организмы одного и того же вида подвержены морфологическим изменениям, то есть *не бывает двух совершенно одинаковых организмов*. Поэтому, основная задача моделирования клеток фитопланктона заключается в построении 3D-модели конкретной клетки, которую ученый наблюдает в микроскоп или видит на фотографии.

Будем предполагать, что:

(1) Существует набор *базовых 3D-моделей*:

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_i\}_{i=1}^{M}, \tag{16}$$

которые имитируют форму некоторых среднестатистических клеток фитопланктона определенного вида, причем, базовые модели могут состоять из нескольких частей:

$$\mathcal{M}_i = \{\mu_{ik}\}_{k=1}^{K_i}, \tag{17}$$

где каждая часть μ_{ik} имитирует определенную морфологическую единицу микроводоросли (створку, выросты и т. п.).

(2) Пользователь имеет оцифрованное изображение исследуемой клетки.

Тогда один из способов решения данной задачи будет заключаться в применении последовательности рассмотренных деформаций $\{\Psi_i\}$ к базовой 3D-модели $\mathcal{M}_j$, соответствующей виду исследуемой клетки до тех пор, пока внешняя граница 3D-модели не будет совпадать с контуром клетки на изображении:

$$\widehat{\mathcal{M}_j} = \bigcup_i \Psi_i(\mathcal{M}_j) = \bigcup_i \bigcup_k \Psi_i(\mu_{jk}). \tag{18}$$

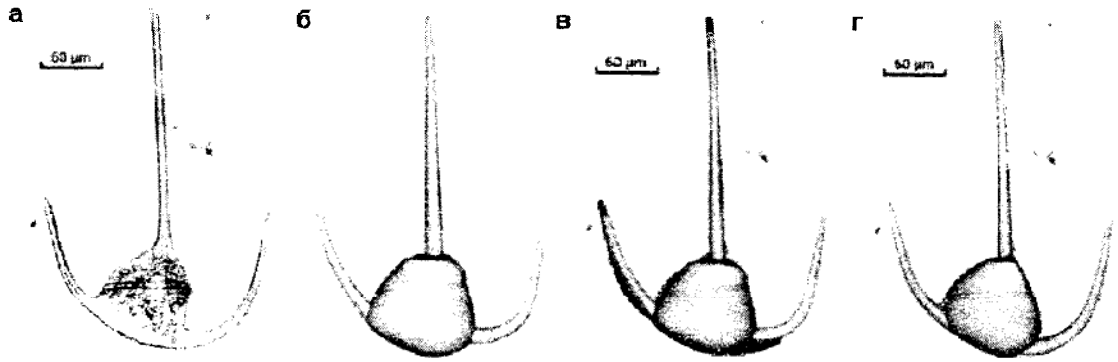

Рис. 5. Пример построения 3D-модели клетки фитопланктона: (а) исходная фотография клетки вида *Ceratium tripos*; (б) базовая 3D–модель, соответствующая данному виду микроводоросли; (в) наложение 3D–модели на фотографию (темным цветом отмечены несовпадающие области); (г) готовая 3D-модель после совмещения границ при помощи деформаций.

В этом случае будем считать, что форма построенной 3D-модели $\widehat{\mathcal{M}_j}$ соответствует форме наблюдаемой клетки (рис. 5).

В компьютерной графике существует несколько способов представления 3D-моделей. Один из них – представление в виде совокупности вершин, объединенных в плоские ориентированные грани. Тогда площадь поверхности модели будет равна сумме площадей всех ее граней, а объем можно вычислить, построив проекцию каждой грани на некоторую плоскость и просуммировав объемы полученных тел.

6. Выводы

1. Рассмотренные методы деформации трехмерных объектов относятся к классу *деформаций пространства* – методов, оперирующих локальными системами координат трехмерных объектов с помощью вспомогательных инструментов, – *контейнеров*, состоящих из управляющих вершин. В общем случае деформацию пространства $\Psi(\cdot)$ можно определить суперпозицией двух функций:

$$\Psi(\cdot) = \vartheta(\varphi(\cdot)), \tag{19}$$

где

- Функция φ: $\mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$, преобразующей мировые координаты вершин X_i объекта в локальные координаты контейнера:

$$U_i = \varphi(X_i), \tag{20}$$

- Функция ϑ: $\mathcal{R}^3 \to \mathcal{R}^3$, преобразующей координаты объекта из системы координат контейнера U_i в деформированные мировые координаты $\widehat{X_i}$:

$$\widehat{X_i} = \vartheta(U_i). \tag{21}$$

2. Деформация свободной формы и осевая деформация — это простые и интуитивно понятные методы, реализуемые посредством смещения управляющих вершин, что приводит, в первом случае, к изменению формы деформационной ячейки, а во втором — к деформации управляющей оси и последующему изменению формы 3D-объекта.

3. Имея набор базовых 3D–моделей клеток фитопланктона и оцифрованное изображение исследуемой клетки, и применяя описанные методы деформаций пространства, можно имитировать форму одноклеточных водорослей, совмещая внешнюю границу базовой 3D–модели с контуром клетки на изображении.

4. Построенные 3D-модели формы клеток фитопланктона могут использоваться для вычисления их важных экологических характеристик — объема и площади поверхности.

Традиционные методы вычисления биомассы ограничиваются измерениями некоторых характерных размеров клеток, по которым затем рассчитываются их объемы и площади поверхностей. Автор данной работы планирует разработать метод преобразования размеров клеток в вектора смещения управляющих вершин, что сделает предлагаемый метод новым универсальным способом вычисления биомассы и площади клеток фитопланктона.

Список литературы

[1] Grimm V. *Ten years of individual-based modelling in ecology: what have we learned and what could we learn in the future?* // Ecological Modelling. 1999. V. 115. P. 129 – 148.

[2] Galbraith C., Prusinkiewicz P., Wyvill B. *Modeling Murex cabritii sea shell with structured implicit surface modeler* // Visual Computer Journal. 2002. V. 18. P. 70 – 80.

[3] Liang X., Nur M.A., Wyvill B. *Modeling the structure of the sea anemone, Stomphia Coccinea and the sea star, Dermasterias imbricata using implicit surfaces* // Proc. 9th Pacific Conf. on Computer Graphics and Applications. 2001. P. 265 – 274.

[4] Fowler C., Yen J., Jaffe J. *3D Visualization of Calanoid Copepod. Eucheta* // Aquatic Sciences Meeting (ASLO), 2001.

[5] Lyakh A.M. *The free form deformation of phytoplankton models* // Lecture Notes in Computer Science. 2002. V. 2331. P. 194 - 201.

[6] Киселев И.А. *Планктон морей и континентальных водоемов. Т. 1. Вводные и общие вопросы планктологии* — Л.: Наука, Ленингр. отд., 1969. - 658 С.

[7] Sun J., Liu D. *Geometric models for calculating cell biovolume and surface area for phytoplankton* // J. Plankton Res. 2003. V. 25. P. 1331 - 1346.

[8] Sederberg T.W., Parry S.R. *Free-form deformation of solid geometric models* // Computer Graphics (SIGGRAPH'86). 1986. V. 20. P. 151 - 160.

[9] Coquillar S. *Extended free-form deformation: a sculpturing tool for 3D geometric modeling* // Computer Graphics (SIGGRAPH'91). 1991. V. 25. P. 23 – 26.

[10] Lazarus F., Coquillar S., Jancene P. *Axial deformation: an intuitive technique* // Computer–Aided Design. 1994. V. 28. P. 607 - 613.

E-mail: antonandiva@mail.ru

Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 59 - 67

УДК 517.98

М. А. Муратов[1], Б. А. Рубштейн[2]

АНАЛОГИ ДОМИНАНТНОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ В ПЕРЕСТАНОВОЧНО ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

1. Введение

Как известно, большую роль в эргодической теории играют теоремы, изучающие асимптотическое поведение и условия сходимости Чезаровских средних для различных классов операторов в банаховых пространствах (см. например, [1] — [7].)

Одной из основных теорем указанного класса является доминантная эргодическая теорема, которая рассматривалась различными авторами, в частности, Г.Харди и Д.Литлвудом [8] для трансляций, Н.Винером [7] для сохраняющих меру преобразований, Н.Данфордом и Д.Шварцем [9] для положительных сжатий.

В работе [10] был доказан аналог доминантной эргодической теоремы в перестановочно инвариантных пространствах измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ для Чезаровских средних, порожденных положительными сжатиями, а в работе [11] - обобщение этого результата на случай бесконечной меры .

В настоящей статье рассматриваются аналоги доминантной эргодической теоремы в перестановочно инвариантных пространствах для последовательностей положительных сжатий, удовлетворяющих различным эргодическим неравенствам. Мы будем использовать обозначения и терминологию из [10] —[14].

2. Основные понятия и факты

Пусть μ - мера Лебега на полупрямой $[0, +\infty)$ и $S(0, +\infty)$ пространство всех измеримых по Лебегу почти всюду конечных функций на $(0, +\infty)$. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь те функции $f \in S(0, +\infty)$, для которых их функция распределения

$$n_{|f|}(y) = n_f(y) = \mu\{s : \ |f(s)| > y\}$$

[1]Таврический Национальный Университет, Симферополь.

[2]Beer-Sheva.

не равна тождественно $+\infty$. Обозначим множество таких функций через $S_0(0, +\infty)$. Ясно, что для любой функции $f \in S_0(0, +\infty)$ $\lim_{y\to+\infty} n_f(y) = 0$.

Заметим, что если $\lambda = \inf|f(t)|$ на $(0, +\infty)$, то $n_f(y) < +\infty$ для любого $y > \lambda$.

Функция $f^*(t)$, определенная для каждого $t \in (0, +\infty)$ равенством:

$$f^*(t) = \inf\{y > 0 : \ n_f(y) \le t\}$$

называется убывающей перестановкой функции $f(t)$.

Как известно, функция $f^*(t)$ невозрастает, непрерывна справа и $f^* = |f|^*$.

Функции $f(t)$ и $g(t)$ называются равноизмеримыми, если

$$n_f(y) = n_g(y)$$

для любого $y \in (0, +\infty)$.

Если $f(t)$ и $g(t)$ равноизмеримы, то $f^*(t) = g^*(t)$ для каждого $t \in (0, +\infty)$.

Обозначим

$$f^*(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} f^*(t) = \inf\{y > 0 : \ n_f(y) < +\infty\}.$$

Ясно, что $f^*(+\infty) = \lambda = \inf|f(t)|$ на $(0, +\infty)$ и $n_f(y) = +\infty$ при $y < f^*(+\infty)$.

Определение 1. Пусть $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$. Функция

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t f^*\,d\mu, \ t \in (0, +\infty)$$

называется максимальной функцией Харди-Литлвуда.

В следующем предложении приведены основные свойства максимальной функции Харди-Литлвуда.

Предложение 1. ([12],[11])

1°. $f^*(t) \le f^{**}(t)$ для любого $t \in (0, +\infty)$.

2°. $f^{**}(t)$ непрерывная, невозрастающая на $(0, +\infty)$ функция.

3°. Для каждого $u > f^*(+\infty)$

$$f^{**}(\mu\{f^{**} > u\}) = u.$$

4°. $f^{**}(+\infty) = f^*(+\infty)$.

5°. $f^{**}(t) = \frac{1}{t}\sup_{G:\mu G=t}\int_G |f(s)|\,ds$ для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$.

6°. $(f_1 + f_2)^{**}(t) \le f_1^{**}(t) + f_2^{**}(t)$ для любых функций $f_1, f_2 \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$.

7°. Если $\{f_k\}_{k=1}^\infty \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k^{**}(t)$ сходится, то для любого измеримого множества G такого, что $\mu(G) = t$, ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k(t)$ сходится

почти всюду на G и

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)^{**}(t) \le \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{**}(t).$$

Замечание 1. Если $f_\lambda = |f| - \lambda$, то $f_\lambda^* = f^* - \lambda$ и $f_\lambda^*(+\infty) = 0$. Кроме того , $(f_\lambda + \lambda)^{**} = f^{**} = f_\lambda^{**} + \lambda$.

Определение 2. Банахово пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ функций из $S_0(0, +\infty)$ называется перестановочно инвариантным или симметричным, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$S1^o$. Если $f, g \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $|f(t)| \le |g(t)|$ почти всюду на $(0, +\infty)$, то $f \in E$ и $\|f(t)\|_E \le \|g(t)\|_E$.

$S2^o$. Если $f, g \in S_0(0, +\infty)$, $g \in E$ и $f^*(t) = g^*(t)$, то $f \in E$ и $\|f(t)\|_E = \|g(t)\|_E$.

Как известно, перестановочно инвариантными пространствами являются пространства $L_p(0, +\infty)$, Орлича, Лоренца, Марцинкевича.

Имеет место следующая теорема (см.[12], теорема 4.1):

Теорема 1. Любое перестановочно инвариантное пространство $(E, \|\cdot\|_E)$ является промежуточным между $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$, то есть

$$L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty).$$

Пусть E перестановочно инвариантное пространство. Легко видеть, что если $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $f^{**} \in E$, то $f \in E$.

Обозначим, как и в [11],

$$H(E) = \{f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty) : \ f^{**} \in E\}$$

и положим $\|f\|_{H(E)} = \|f^{**}\|_E$.

Предложение 2. ([11]) Пространство $(H(E), \|\cdot\|_{H(E)})$ является перестановочно инвариантным и имеет место следующая цепочка вложений:

$$L_1(0, +\infty) \cap L_\infty(0, +\infty) \subset H(E) \subset E \subset L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty).$$

Определение 3. Положительный линейный оператор

$$T : \ L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty) \longrightarrow L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$$

называется положительным $L_1 - L_\infty$ сжатием или абсолютным сжатием, если

1°. T действует в $L_1(0, +\infty)$ и $L_\infty(0, +\infty)$;

2°. $\|T\|_{L_1 \to L_1} \le 1$, $\|T\|_{L_\infty \to L_\infty} \le 1$.

Обозначим, как и в [10], множество всех положительных $L_1 - L_\infty$ сжатий через $\mathcal{PC}$.

Заметим, что если E перестановочно инвариантное пространство, то для любого оператора $T \in \mathcal{PC}$

$$T(H(E)) \subset H(E)$$

и $\|Tf\|_{H(E)} \leq \|f\|_{H(E)}$.

3. Различные типы эргодических неравенств

Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ — последовательность положительных сжатий. Обозначим

$$B_{\{T_n\}} f(s) = \sup_n \{T_n |f|(s)\},$$

где $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $s \in (0, +\infty)$.

Определение 4. Говорят, что последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству (MI_λ), если для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и для всех $t > 0$

$$(MI_\lambda) \qquad \mu\{B_{\{T_n\}} f_\lambda > t\} \leq \frac{1}{t} \int\limits_{\{B_{\{T_n\}} f_\lambda > t\}} |f| \, d\mu$$

Теорема 2. Пусть E — перестановочно инвариантное пространство и последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству (MI_λ). Тогда из $f \in H(E)$ следует, что $B_{\{T_n\}} f \in E$ и

$$\|B^+_{\{T_n\}} f\|_E \leq \|f\|_{H(E)}.$$

Доказательство теоремы опирается на следующие леммы.

Лемма 1. ([10],[11]) Пусть f и g две неотрицательные измеримые функции из $S(0, +\infty)$ такие, что

1) $g^*(+\infty) = 0$;
2) Для любого $t > 0$

$$\mu\{g > t\} \leq \frac{1}{t} \int\limits_{\{g > t\}} f \, d\mu.$$

Тогда $g^*(s) \leq f^{**}(s)$ для каждого $s > 0$.

Лемма 2. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ и $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$. Тогда для любого $s \in (0, +\infty)$

$$(B_{\{T_n\}} f)^*(s) \leq f^{**}(s).$$

Доказательство. Без ограничения общности, считаем $f = |f| \geq 0$.

1) Пусть сначала $f^*(+\infty) = 0$. Покажем, что тогда и $(B_{\{T_n\}} f)^*(+\infty) = 0$. Действительно. $B_{\{T_n\}} f(s) = \sup_n \{T_n(f)(s)\}$.

Поэтому для любого $\theta > 0$ (см.[12])

$$\int_0^\theta (B_{\{T_n\}}f)^*(s)\,ds = \sup_{\mu F=\theta}\int_F (B_{\{T_n\}}f)(s)\,ds = \sup_{\mu F=\theta}\int_F \sup_n\{T_n(f)(s)\}\,ds =$$

$$= \sup_n \sup_{\mu F=\theta}\int_F T_n(f)(s)\,ds = \sup_n \int_0^\theta (T_n(f))^*(s)\,ds \le$$

$$\le \sup_n \int_0^\theta f^*(s)\,ds = \int_0^\theta f^*(s)\,ds,$$

откуда следует, что $(B_{\{T_n\}}f)^*(+\infty) = 0$.

По нашему предположению, $f^*(+\infty) = \lambda - 0$. Следовательно, $f_\lambda = f$ и неравенство (MI_λ) примет вид

$$(MI) \qquad \mu\{B_{\{T_n\}}f > t\} \le \frac{1}{t}\int\limits_{\{B_{\{T_n\}}f>t\}} f\,d\mu.$$

Полагая $B_{\{T_n\}}f(s) = g(s)$, получим, что функции f и g удовлетворяют условиям леммы 1. Поэтому $g^*(s) \le f^{**}(s)$, то есть

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \le f^{**}(s)$$

для каждого $s \in (0, +\infty)$.

2) Пусть теперь $f^*(+\infty) = \lambda > 0$.

Тогда функция f представима в виде $f = f_\lambda + \lambda$, и $f_\lambda^*(+\infty) = 0$.

Так как $(f_\lambda + \lambda)^*(t) = f_\lambda^*(t) + \lambda$ и $(f_\lambda + \lambda)^{**}(t) = f_\lambda^{**}(t) + \lambda$, то мы имеем:

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) = [B_{\{T_n\}}(f_\lambda + \lambda)]^*(s) = [\sup_n T_n(f_\lambda + \lambda)](s) \le$$

$$\le [\sup_n (T_n f_\lambda + \lambda)]^*(s) = [\sup_n T_n f_\lambda + \lambda]^*(s) =$$

$$= [\sup_n T_n f_\lambda](s) + \lambda = (B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*(s) + \lambda \le f_\lambda^{**}(s) + \lambda =$$

$$= (f_\lambda + \lambda)^{**}(s) = f^{**}(s).$$

Таким образом, и в этом случае

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \le f^{**}(s).$$

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть E перестановочно инвариантное пространство , последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству (MI_λ) и $f \in H(E)$. Тогда $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и $f^{**} \in E$. По лемме 2

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \le f^{**}(s), \quad \forall s \in (0, +\infty).$$

Так как E - идеальная структура, то $(B_{\{T_n\}}f)^* \in E$ и

$$\|(B_{\{T_n\}}f)^*\|_E \le \|f^{**}\|_E.$$

Но функции $B_{\{T_n\}}f$ и $(B_{\{T_n\}}f)^*$ имеют одинаковые убывающие перестановки:

$$[(B_{\{T_n\}}f)^*]^* = (B_{\{T_n\}}f)^*.$$

Поэтому $B_{\{T_n\}}f \in E$ и

$$\|B_{\{T_n\}}f\|_E = \|(B_{\{T_n\}}f)^*\|_E \le \|f^{**}\|_E = \|f\|_{H(E)}.$$

Теорема доказана.

Замечание 2. Легко видеть, что

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \le (B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*(s) + \lambda \le f^{**}(s).$$

Действительно, так как $(B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*(s) \le f_\lambda^{**}(s)$, то
$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) \le (B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*(s) + \lambda \le f^{**}(s) + \lambda = (f_\lambda + \lambda)^{**}(s) = f^{**}(s)$.

Для каждого $T \in \mathcal{PC}$ обозначим через

$$S_n(T)f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k|f|$$

последовательность Чезаровских средних оператора T. Тогда $B_{\{S_n(T)\}} \in \mathcal{PC}$ и имеет место следующее следствие:

Следствие 1. Пусть E перестановочно инвариантное пространство и $T \in \mathcal{PC}$. Тогда из $f \in H(E)$ следует $B_{\{S_n(T)\}}f \in E$ и

$$\|B_{\{S_n(T)\}}f\|_E \le \|f\|_{H(E)}.$$

Определение 5. Говорят, что последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству (IMI_λ), если для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и для всех $t > 0$

$$(IMI_\lambda) \qquad \frac{1}{2t}\int\limits_{\{f_\lambda > t\}} f_\lambda \, d\mu \le \mu\{B_{\{T_n\}}f_\lambda > t\}$$

Лемма 3. Пусть $C > 1$. Для каждой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$, $f \ge 0$ и всех $t > 0$ имеет место неравенство

$$(I_\lambda) \qquad (C-1)\mu\{f_\lambda^{**} \ge Ct\} \le \frac{1}{t}\int\limits_{\{f_\lambda > t\}} f \, d\mu$$

Так как $f_\lambda^*(+\infty) = 0$, то доказательство леммы следует из ([11], Лемма 1).

Лемма 4. Если последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству (IMI_λ), то

$$(2_\lambda) \qquad f_\lambda^{**}(s) \le 2(B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*\left(\frac{s}{2}\right)$$

для любого $s > 0$ и для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$.

Доказательство. Полагая в (I_λ) $C = 2$, получаем:

$$\mu\{f_\lambda^{**} \ge 2t\} \le \frac{1}{t}\int\limits_{\{f_\lambda > t\}} f\,d\mu$$

для всех $t > 0$ и $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$

Поэтому, в силу неравенства (IMI_λ),

$$\mu\{f_\lambda^{**} \ge 2t\} \le 2\mu\{B_{\{T_n\}}f_\lambda > t\} \quad \forall t > 0.$$

Пусть $s > 0$. Тогда

$$(B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*(\frac{s}{2}) = \inf\left\{t > 0 :\ \mu\{B_{\{T_n\}}f_\lambda > t\} \le \frac{s}{2}\right\} =$$

$$= \inf\{t > 0 :\ 2\mu\{B_{\{T_n\}}f_\lambda > t\} \le s\} \ge \inf\{t > 0 :\ \mu\{f_\lambda^{**} \ge 2t\} \le s\} \ge$$

$$\ge \inf\{t > 0 :\ \mu\{f_\lambda^{**} > 2t\} \le s\} = \frac{1}{2}\inf\{2t > 0 :\ \mu\{f_\lambda^{**} > 2t\} \le s\} =$$

$$= \frac{1}{2}\inf\{u > 0 :\ \mu\{f_\lambda^{**} > u\} \le s\} = \frac{1}{2}(f_\lambda^{**})^*(s) = \frac{1}{2}f_\lambda^{**}(s).$$

Следовательно,

$$f_\lambda^{**}(s) \le 2(B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*\left(\frac{s}{2}\right).$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Если для каждого натурального n имеет место $T_nI = I$, то

$$(B_{\{T_n\}}f)^*(s) = (B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*(s) + \lambda.$$

Замечание 4. Если в условиях леммы 4 для каждого натурального числа n имеет место $T_nI = I$, то для любого $s > 0$ верно неравенство

$$(2) \qquad f^{**}(s) \le 2(B_{\{T_n\}}f)^*\left(\frac{s}{2}\right).$$

Действительно, в силу неравенства (2_λ), для любого $s > 0$

$$f_\lambda^{**}(s) \le 2(B_{\{T_n\}}f_\lambda)^*\left(\frac{s}{2}\right).$$

Следовательно,

$$f^{**}(s) - \lambda \le 2((B_{\{T_n\}}f)^*\left(\frac{s}{2}\right) - \lambda) = 2(B_{\{T_n\}}f)^*\left(\frac{s}{2}\right) - 2\lambda,$$

то есть

$$f^{**}(s) \le 2(B_{\{T_n\}}f)^*\left(\frac{s}{2}\right) - \lambda \le 2(B_{\{T_n\}}f)^*\left(\frac{s}{2}\right).$$

Определение 5 и лемма 4 могут быть сформулированы в более общем виде.

Определение 6. Говорят, что последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству $(IMI_{\lambda,k})$, если существует такое $k > 0$, что для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$ и для всех $t > 0$

$$(IMI_{\lambda,k}) \qquad \frac{1}{t} \int\limits_{\{f_\lambda > t\}} f_\lambda \, d\mu \le k\mu\{B_{\{T_n\}} f_\lambda > t\}$$

Лемма 5. Если последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству $(IMI_{\lambda,k})$, то для любых $s > 0$ и $C > 1$ и для любой функции $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$

$$(2_{\lambda,C,k}) \qquad f_\lambda^{**}(s) \le C(B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right).$$

Замечание 5. Если в условиях леммы 5 для каждого натурального числа n имеет место $T_n I = I$, то для любого $s > 0$ верно неравенство

$$(2_{C,k}) \qquad f^{**}(s) \le C(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right).$$

Действительно,

$$f_\lambda^{**}(s) = f^{**} - \lambda \le C(B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right) =$$

$$= C((B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right) - \lambda) = C(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right) - C\lambda.$$

Следовательно,

$$f^{**}(s) \le C(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right) - (C-1)\lambda \le C(B_{\{T_n\}} f)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right)$$

Теорема 3. Пусть E — перестановочно инвариантное пространство, последовательность положительных сжатий $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{PC}$ удовлетворяет неравенству $(IMI_{\lambda,k})$ и $f \in L_1(0, +\infty) + L_\infty(0, +\infty)$. Тогда если $B_{\{T_n\}} f_\lambda \in E$, то $f_\lambda \in H(E)$

Доказательство. Пусть $B_{\{T_n\}} f \in E$. Тогда $(B_{\{T_n\}} f)^* \in E$.

Рассмотрим для любого $C > 0$ оператор растяжения $\sigma_{\frac{k}{C-1}}$, определенный равенством

$$\sigma_{\frac{k}{C-1}} g(t) = g\left(\frac{C-1}{k} t\right).$$

Оператор $\sigma_{\frac{k}{C-1}}$ действует как ограниченный оператор в любом перестановочно инвариантном пространстве E (см. [12]). Поэтому $\sigma_{\frac{k}{C-1}} (B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \in E$, то есть функция $(B_{\{T_n\}} f_\lambda)^* \left(\frac{C-1}{k} s\right)$ принадлежит E.

Тогда, в силу леммы 5, $f^{**}(s)$ принадлежит E. Таким образом, $f \in H(E)$.

Теорема доказана.

Следствие 2. Если в условиях теоремы 3 для любого натурального n имеет место $T_n I = I$, то из $B_{\{T_n\}} f \in E$ следует, что $f \in H(E)$

Следствие 3. Если в условиях теоремы 3 $f_\lambda = |f|$ (то есть $\lambda = 0$) ,то из $B_{\{T_n\}} f \in E$ следует, что $f \in H(E)$

Заключение. В настоящей работе рассматриваются аналоги доминантной эргодической теоремы для последовательностей абсолютных сжатий в перестановочно инвариантных пространствах измеримых функций на положительной полуоси.

Список литературы

[1] von Neumann J. Proof of the quasiergodic hypothesis, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, No. 18, 70–82 (1932).

[2] Birkgoff G. D. Proof of the ergodic theorem, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, No. 17, 656–660 (1931).

[3] Yosida K. Mean ergodic theorem in Banach Spaces *Proc. Imp. Acad. Yokyo*, No. 14, 292–294 (1938).

[4] Kakutani S. Iteration of linear operations in complex Banach spaces *Proc. Imp. Acad. Yokyo*, No. 14, 295–300 (1938).

[5] Hopf E. On the ergodic theorem for positive linear operators *J. Reinc. Ang. Math.*, No. 205, 101–106 (1960).

[6] Hopf E. The general temporally descrete Markov process, *J. Rat. Meca. Anal.*, No. 3, 13–45 (1954).

[7] Weiner N. The ergodic theorem, *Duke. Math. J.*, No. 5, 1–18 (1939).

[8] Hardy G. H., Littlewood J. E. A maximal theorem with function-theoretik application, *Acta Math.*, No. 54, 81–116 (1930).

[9] Dunford N., Schwarts J. T. Convergence almost everywhere of operator averages, *J. Rat. Mech. Anal.*, No. 5, 129–178 (1956).

[10] Braverman M, Rubshtein B, Veksler A. Dominated ergodic theorems in rearrangement invariant spaces, *Studia Mathem.*, No. 128 (2), 145–157 (1998).

[11] М. А. Муратов, Ю. С. Пашкова, Б. А. Рубштейн Доминантная эргодическая теорема в симметричных пространствах измеримых функций для последовательности абсолютных сжатий. - Ученые записки ТНУ, Т.17 (56), № 2, с. 36 - 48, 2003.

[12] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов, *Наука*, Москва, 1978, 400с.

[13] Krengel U., Ergodik Theorems, *de Gruyter Stud. Math.*, de Gruyter, Berlin, 1985, 357p.

[14] Lindenstrauss J. and Tzafriri L., Classical Banach Spaces. Function Spaces, *Springer*, 1979.

Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 68–77

УДК 517.98

И.В. Орлов

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА И K-ЭКСТРЕМУМА В ПРОИЗВЕДЕНИИ ДВУХ ЯДЕРНЫХ ЛВП (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Введение. Предварительные сведения

В [1]–[3] автором были получены достаточные условия экстремума и компактного экстремума в произведении двух ядерных локально выпуклых пространств (ЛВП) в случае коммутирования вторых частных производных. В настоящей работе найдена форма достаточных условий экстремума функционала от двух переменных в общем случае неизоморфных ядерных ЛВП и некоммутирующих вторых производных. Результаты применены к нахождению компактных экстремумов функционала Эйлера-Лагранжа — проблеме, исследование которой активно продолжается в настоящее время [4]–[8].

Работа состоит из введения и четырёх разделов. В первом разделе получен вариант критерия Сильвестра положительной определённости операторной матрицы размера 2×2 с некоммутирующими коэффициентами в произведении гильбертовых пространств, и на его базе — достаточное условие положительной определённости квадратичной формы в произведении двух ядерных ЛВП. Во втором разделе получены достаточные условия локального экстремума в произведении двух ядерных ЛВП в терминах вторых нормальных частных производных. В третьем разделе предыдущие результаты перенесены на K-положительно определённые квадратичные формы и K-экстремумы. Наконец, в заключительном разделе получены достаточные условия K-экстремума функционала Эйлера-Лагранжа в терминах вторых частных нормальных производных подинтегральной функции.

Приведём определения и результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

Определение 1. ([9]). Пусть E — отделимое ЛВП с индуктивно упорядоченной по возрастанию определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$:

$$(t_1 \preceq t_2) \quad \Rightarrow \quad (\|\cdot\|_{t_1} \le C_{t_1t_2}\cdot\|\cdot\|_{t_2}).$$

Для каждого $t\in T$ положим

$$E_t^* := \{f\in E^* \mid \|f\|^t := \sup_{\|x\|_t\le 1}|f(x)| < \infty\}.$$

Разложение топологического сопряжённого E^* в индуктивную шкалу банаховых пространств

$$\overrightarrow{E^*} := \{(E_t^*,\ \|\cdot\|^t)\}_{t\in T}$$

назовём *нормальным разложением* пространства E^*. Топологию индуктивного предела

$$E_\lambda^* := \varinjlim \overrightarrow{E^*}$$

назовём λ-топологией в E^*.

Отметим, что λ-топологии широко используются в теории двойственности ([10], гл. 8).

Определение 2. ([11], гл. 1). Пусть E – ЛВП, $\vec{F} = \{F_t\}_{t\in T}$ – индуктивная шкала ЛВП, $\Phi:\ E \to \vec{F}$, $x \in E$. Будем говорить, что отображение Φ непрерывно в точке x, если для некоторой окрестности $U(x) \subset E$ и некоторого пространства $F_t \in \vec{F}$ отображение $\Phi:\ U(x) \to F_t$ непрерывно в точке x.

Определение 3. ([12]). Пусть E_1, E_2 – отделимые ЛВП с индуктивно упорядоченными по возрастанию определяющими системами полунорм $\{\|\cdot\|_{t_1}\}_{t_1\in T_1}$ и $\{\|\cdot\|_{t_2}\}_{t_2\in T_2}$. $(E_1, E_2)^*$ – пространство билинейных непрерывных форм на $E_1 \times E_2$. Для любых $(t_1, t_2) \in T_1 \times T_2$ положим

$$(E_1, E_2)^*_{t_1t_2} = \{g \in (E_1, E_2)^* \mid \|g\|^{t_1t_2} := \sup_{\substack{\|x_1\|_{t_1}\le 1\\ \|x_2\|_{t_2}\le 1}} |g(x_1, x_2)| < \infty\}.$$

Разложение билинейного сопряжённого $(E_1, E_2)^*$ в индуктивную шкалу банаховых пространств

$$\overrightarrow{(E_1, E_2)^*} := \left\{\left((E_1, E_2)^*_{t_1t_2},\ \|\cdot\|^{t_1t_2}\right)\right\}_{(t_1,t_2)\in T_1\times T_2}$$

назовём *бинормальным разложением* пространства $(E_1, E_2)^*$.

Предложение 4. *([12]). Имеет место канонический изоморфизм:*

$$\overrightarrow{(E_1; E_2^*)} \cong (E_1, E_2)^*.$$

Определение 5. ([1]). Пусть φ – непрерывная квадратичная форма в полном вещественном ЛВП E, порождённая билинейной формой g на $E \times E$: $\varphi(h) = g(h, h)$. Назовём форму φ *невырожденной*, если оператор

$$g_1:\ E \ni h \mapsto g(h, \cdot) \in E_\lambda^*$$

является изоморфизмом E в E_λ^*. Если форма φ невырождена и $\varphi \ge 0$, то назовём φ *положительно определённой формой*: $\varphi \gg 0$.

Определение 6. ([13]). Пусть E – вещественное ЛВП с определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_t\}_{t\in T}$, $f: E \to \mathbb{R}$. Назовём функционал f *нормально дифференцируемым* в точке $x \in E$, если для некоторого $t \in T$ и $l \in E_t^*$ верно:

$$f(x+h) - f(x) = l(h) + o(\|h\|_t).$$

Линейный непрерывный функционал $f'(x) := l$ назовём *нормальной производной* f в точке x. Если f нормально дифференцируем в некоторой окрестности $U(x) \subset E$, то мы рассматриваем производное отображение

$$f': \quad U(x) \to \overrightarrow{E^*}.$$

Если отображение f' нормально дифференцируемо в точке $x \in E$ (как отображение окрестности $U'(x) \subset U(x)$ в некоторое пространство E_l^*), то его нормальную производную в точке x назовём *второй нормальной производной* f в точке x:

$$f''(x) := (f')'(x) \in (E, E)^*.$$

Таким образом, с учётом предложения 4, второе производное отображение есть

$$f'': \quad U'(x) \to \overrightarrow{(E; \overrightarrow{E^*})} \cong \overrightarrow{(E, E)^*}.$$

Перейдём к K-непрерывности, K-дифференцируемости и K-экстремумам.

Определение 7. ([2, 3]). Пусть E – полное вещественное ЛВП. Для любого абсолютно выпуклого компакта $C := C(0) \subset E$ положим E_C – $span\, C$ и снабдим пространство E_C банаховой нормой $\|\cdot\|_C$, равной функционалу Минковского множества C. Обозначим E_K^* – пространство всех линейных функционалов на E, все сужения которых на E_C, $C = C(0)$, непрерывны. Элементы E_K^* назовём *K-непрерывными функционалами*. Аналогично, в случае двух ЛВП E_1 и E_2 обозначим $(E_1, E_2)_K^*$ – пространство всех билинейных форм на $E_1 \times E_2$, все сужения которых на $E_{1,C_1} \times E_{2,C_2}$ ($C_i = C_i(0)$: $i = 1, 2$) непрерывны (относительно норм $\|\cdot\|_{C_1}$, $\|\cdot\|_{C_2}$). Элементы $(E_1, E_2)_K^*$ назовём *K-непрерывными билинейными формами*.

Если φ – квадратичная форма в E, порождённая K-непрерывной билинейной формой g на E^2, то форму φ также назовём *K-непрерывной* (что равносильно непрерывности всех сужений φ на E_C, $C = C(0)$). Назовём K-непрерывную квадратичную форму φ *K-положительно определённой в E*:

$$\varphi \gg 0 \ (mod\ K),$$

если каждое сужение φ на $(E_C, \|\cdot\|_C)$, $C = C(0)$, является положительно определённой формой.

Определение 8. ([3]). Пусть E – полное вещественное ЛВП, $f: E \to \mathbb{R}$. Будем говорить, что функционал f имеет *K-экстремум* в точке $x \in E$, если каждое сужение f на $(x + E_C)$ имеет локальный экстремум в точке x (относительно $\|\cdot\|_C$, $C = C(0)$).

Аналогично, будем говорить, что f *K-дифференцируем в точке* $x \in E$, если каждое сужение f на $(x + E_C)$, $C = C(0)$, сильно дифференцируемо (с производной $f'_C(x)$). Линейный функционал на E, определяемый равенствами

$$f'_K(x)h = f'_C(x)h \ (h \in E_C, \ C = C(0))$$

назовём *K-производной* функционала f в точке x.

Если функционал f K-дифференцируем в некоторой окрестности точки x, и его K-производная удовлетворяет условию

$$(f'_K(x+h) - f'_k(x)) \cdot k = g_{C_1C_2}(x)(h,k) + o(\|h\|_{C_1} \cdot \|k\|_{C_2})$$

для любых $C_i = C_i(0) \subset E_i$ $(i = 1,2)$, где $g_{C_1C_2}(x) \in (E_{C_1}, E_{C_2})^*$, то назовём f *дважды K-дифференцируемым* в точке x. K-непрерывную билинейную форму, определяемую равенствами

$$f''_K(x)(h,k) = g_{C_1C_2}(x)(h,k) \ (h \in E_{C_1}, \ k \in E_{C_2}, \ C_i = C_i(0)),$$

назовём *второй K-производной* функционала f в точке x.

Легко видеть, что понятия K-непрерывности, K-экстремума, K-положительной определённости и K-дифференцируемости в ЛВП слабее соответствующих общих понятий непрерывности, локального экстремума, положительной определённости и нормальной дифференцируемости.

1. Положительно определённые квадратичные формы в произведении ядерных ЛВП

Напомним [14], что полное ядерное ЛВП изоморфно проективному пределу гильбертовых пространств с ядерными вложениями. Поэтому вначале мы рассмотрим условие положительной определённости в произведении гильбертовых пространств.

Теорема 1. *Пусть H_1, H_2 – вещественные либо комплексные сепарабельные гильбертовы пространства, $B = (B_{ij})$, где $B_{ij} : H_j \to H_i$ $(i,j = 1,2)$ – самосопряженный непрерывный линейный оператор в $H_1 \times H_2$. Следовательно, $B_{11} = B_{11}^*$, $B_{22} = B_{22}^*$, $B_{12} = B_{21}^*$. Оператор B положительно определён тогда и только тогда, когда:*

$$\begin{cases} 1). \quad B_{11} \gg 0, \quad B_{22} \gg 0; \\ 2). \quad \Delta_1^2 := B_{11} - B_{12}B_{22}^{-1}B_{21} \gg 0; \quad \Delta_{21} := B_{22} - B_{21}B_{11}^{-1}B_{12} \gg 0. \end{cases}$$

Доказательство. Необходимость условия 1) 2) теоремы фактически проверена в [15], с. 57. Обратно, если условия 1)–2) выполнены, то из непосредственно проверяемых симметричных тождеств:

$$\langle Bh, h\rangle = \begin{cases} \|B_{11}^{1/2}h_1 + B_{11}^{-1/2}B_{12}h_2\|^2 + \langle \Delta_2^1 h_2, h_2\rangle; \\ \|B_{22}^{1/2}h_2 + B_{22}^{-1/2}B_{21}h_1\|^2 + \langle \Delta_1^2 h_1, h_1\rangle; \end{cases}$$

следует

$$\begin{cases} \langle Bh, h\rangle \geq \langle \Delta_2^1 h_2, h_2\rangle \geq C_2\|h_2\|^2; & (C_2 > 0) \\ \langle Bh, h\rangle \geq \langle \Delta_1^2 h_1, h_1\rangle \geq C_1\|h_1\|^2; & (C_1 > 0) \end{cases}$$

откуда

$$\langle Bh, h\rangle \geq \min(C_1, C_2)\cdot\|h\|^2,$$

т.е. B положительно определён. □

Перенесём полученный критерий на общий случай

Теорема 2. *Пусть E_1, E_2 – вещественные либо комплексные полные ядерные ЛВП. φ непрерывная квадратичная форма на $E = E_1 \times E_2$, порождённая симметричной билинейной формой g на E^2, B – ассоциированный с g оператор из E в E^* ($g(h, k) = \langle k, Bh\rangle$). $B = (B_{ij})$, где $B_{ij} : E_j \to E_i^*$ $(i, j = 1, 2)$. Если выполнены условия 1) 2) теоремы 1, то $\varphi \gg 0$ на E.*

Доказательство. Так как полное ядерное ЛВП изоморфно проективному пределу гильбертовых пространств, то можно считать, что

$$E_1 = \varprojlim_{k\to\infty} H_1^k, \quad E_2 = \varprojlim_{l\to\infty} H_2^l; \quad E_1 \times E_2 = \varprojlim_{(k,l)\to\infty} H_1^k \times H_2^l;$$

где $\{H_1^k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{H_2^l\}_{l=1}^{\infty}$ – проективные шкалы гильбертовых пространств с ядерными вложениями.

Далее, по теореме о каноническом изоморфизме [12], B можно рассматривать как непрерывный линейный оператор из E в "нормальное разложение" E^* индуктивную шкалу $\overrightarrow{E^*}$, состоящую в данном случае из пространств

$$(H_1^k \times H_2^l)^* \cong H_1^{-k} \times H_2^{-l}.$$

Это означает, что согласно [11], что B отображает E в некоторое пространство $H_1^{-k_0} \times H_2^{-l_0}$ шкалы $\overrightarrow{E^*}$. Поскольку вложения в шкале $\{H_1^k \times H_2^l\}_{k=1,l=1}^{\infty}$ – ядерные, то вложения $E \subset\!\!\to H_1^k \times H_2^l$ плотны. Далее, обозначая

$$e_k : H_1^{k+1} \subset\!\!\to H_1^k; \quad e_l : H_2^{l+1} \subset\!\!\to H_2^l$$

вложения в шкалах, проведём факторизацию по ядрам вложений:

$$H_1^{(k+1)} := H_1^{k+1}\big|_{Ker\, e_k}; \quad H_2^{(l+1)} := H_2^{l+1}\big|_{Ker\, e_l}.$$

Тогда

$$E = \varprojlim_{(k,l)} H_1^{(k)} \times H_2^{(l)}, \tag{1}$$

где $H_1^{(k)} \times H_2^{(l)}$ – также гильбертовы пространства, а вложения в шкале (1) плотны и инъективны. Тем самым выполнены условия регулярности [11], позволяющие продолжить оператор B на любое пространство $H_1^{(k)} \times H_2^{(l)}$ шкалы (1), а значит, и на любое пространство $H_1^k \times H_2^l$. Мы приходим к выполнению условий 1) 2) теоремы

1 для $B: H_1^k \times H_2^l \to H_1^{-k_0} \times H_2^{-l_0}$. Следовательно, по теореме 1, B положительно определён в этой паре пространств. Отсюда $\varphi(h) \gg 0$ на $H_1^k \times H_2^l$. Значит, по классическому условию положительной определённости [16], $\varphi(h) \gg C_{kl} \cdot \|h\|_{kl}^2$ при $h \in H_1^k \times H_2^l$, где $C_{kl} > 0$. Поскольку последнее неравенство выполнено при всех $k, l = 1, 2, \ldots$, то. по условию положительной определённости в ЛВП [1], $\varphi \gg 0$ на E. □

2. Достаточное условие локального минимума в произведении ядерных ЛВП

Теорема 3. *Пусть E_1, E_2 — полные ядерные ЛВП, $E = E_1 \times E_2$. Если функционал $f: E \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируем в точке $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$. причём выполнены условия:*

$$\begin{cases} 1). & \partial_1 f = \partial_2 f = 0; \\ 2). & \partial_{11} f \gg 0; \quad \partial_{22} f \gg 0; \\ 3). & \Delta_1^2 f := \partial_{11} f - \partial_{12} f \cdot \partial_{22}^{-1} f \cdot \partial_{21} f \gg 0; \\ & \Delta_2^1 f := \partial_{22} f - \partial_{21} f \cdot \partial_{11}^{-1} f \cdot \partial_{12} f \gg 0; \end{cases}$$

(где все производные берутся в точке (x_1, x_2)), то f имеет строгий локальный минимум в точке (x_1, x_2).

Доказательство. В силу [1], $f''(x_1, x_2)$ — симметричная билинейная форма на E^2. При этом для ассоциированного с $f''(x_1, x_2)$ гессиана $B = (B_{ij})$. где $B_{ij} = \partial_{ij} f(x_1, x_2)$, $i, j = 1, 2$, ввиду условий 2)-3) теоремы, выполнены условия теоремы 2. Следовательно, квадратичная форма $f''(x_1, x_2) \cdot (h)^2$, $h \in E$, положительно определена.Поскольку при этом, в силу условия 1) теоремы, $f'(x_1, x_2) = 0$, то применяя достаточное условие локального минимума в ЛВП [1], получаем требуемый результат. □

Следствие 2. *Если, в предположениях теоремы 3, выполнены условия*

$$\begin{cases} 1). & \partial_1 f = \partial_2 f = 0; \\ 2). & \partial_{11} f \ll 0; \quad \partial_{22} f \ll 0; \\ 3). & \Delta_1^2 f \ll 0; \quad \Delta_2^1 f \ll 0; \end{cases}$$

(где все производные берутся в точке (x_1, x_2)), то f имеет строгий локальный максимум в точке (x_1, x_2).

Доказательство. Достаточно применить теорему 3 к функционалу $(-f)$. □

3. K-положительно определённые квадратичные формы и K-экстремумы в произведении ядерных ЛВП

Теорема 4. *Пусть E_1, E_2 – полные вещественные либо комплексные ядерные ЛВП, $E = E_1 \times E_2$, φ – K-непрерывная форма на E, порождённая симметричной билинейной формой g на E^2, B – ассоциированный с g линейный оператор из E в E_K^*, $B = (B_{ij})$, где $B_{ij} : E_j \to E_{iK}^*$ $(i,j = 1,2)$. Если*

$$\begin{cases} 1). \quad B_{11} \gg 0 \ (mod\ K); \quad B_{22} \gg 0 \ (mod\ K); \\ 2). \quad \Delta_1^2 := B_{11} - B_{12} \cdot B_{22}^{-1} \cdot B_{21} \gg 0 \ (mod\ K); \\ \qquad \Delta_2^1 := B_{22} - B_{21} \cdot B_{11}^{-1} \cdot B_{12} \gg 0 \ (mod\ K); \end{cases}$$

то форма φ K-положительно определена на E : $\varphi \gg 0 \ (mod\ K)$.

Доказательство. Для любого абсолютно выпуклого компакта C_i в E_i $(i = 1,2)$, как показано в доказательстве теоремы [3], норма $\|\cdot\|_{C_i}$ в E_{iC_i} эквивалентна некоторой норме $\|\cdot\|_{t_i}$, $t_i \in T_i$, из определяющей системы полунорм в E_i. Следовательно, система $\{E_{iC_i}\}_{C_i = C_i(0)}$ $(i = 1,2)$ также образует проективную шкалу гильбертовых пространств с ядерными вложениями. Вводя в E_i топологии проективных пределов

$$(E_i, \tau_i) = \varprojlim_{C_i = C_i(0)} (E_{iC_i}, \|\cdot\|_{C_i}) \quad (i = 1,2),$$

мы можем рассматривать φ как непрерывную квадратичную норму в $(E_1, \tau_1) \times (E_2, \tau_2)$, что позволяет применить теорему 2. □

Следствие 2. *Если, в предположениях теоремы 4, выполнены условия:*

$$\begin{cases} 1). \quad B_{11} \ll 0 \ (mod\ K); \quad B_{22} \ll 0 \ (mod\ K); \\ 2). \quad \Delta_1^2 \ll 0 \ (mod\ K); \quad \Delta_2^1 \ll 0 \ (mod\ K); \end{cases}$$

то форма φ K-отрицательно определена на E : $\varphi \ll 0 \ (mod\ K)$.

На базе полученных результатов нетрудно доказать соответствующие условия K-экстремума функций двух переменных.

Теорема 3. *Пусть E_1, E_2 – полные вещественные ядерные ЛВП, $E = E_1 \times E_2$. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно K-дифференцируем в точке $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$, причём выполнены следующие условия:*

$$\begin{cases} 1). \quad \partial_{1K} f = \partial_{2K} f = 0; \\ 2). \quad \partial_{11K} f \gg 0 \ (mod\ K); \quad \partial_{22K} f \gg 0 \ (mod\ K); \\ 3). \quad \Delta_{1K}^2 f := \partial_{11K} f - \partial_{12K} f \cdot \partial_{22K}^{-1} f \cdot \partial_{21K} f \gg 0 \ (mod\ K); \\ 4). \quad \Delta_{2K}^1 f := \partial_{22K} f - \partial_{21K} f \cdot \partial_{11K}^{-1} f \cdot \partial_{12K} f \gg 0 \ (mod\ K); \end{cases}$$

(где все производные берутся в точке (x_1, x_2)), то f имеет строгий K-минимум в точке (x_1, x_2).

Доказательство. Как отмечалось в [3], $f''_K(x_1, x_2)$ – симметричная билинейная форма на E^2. При этом для ассоциированного с $f''_K(x_1, x_2)$ гессиана $B = (B_{ij})$, где $B_{ij} = \partial_{ijK} f(x_1, x_2)$; $i, j = 1, 2$; ввиду условий 2)–4) теоремы, выполнены условия теоремы 4. Следовательно, квадратичная форма $f''_K(x_1, x_2) \cdot (h)^2$, $h \in E$, K-положительно определена. Поскольку при этом, ввиду условия 1) теоремы, $f'_K(x_1, x_2) = 0$, то применяя предложение [3], получим требуемый результат. □

Следствие 3. *Если, в предположениях теоремы 3, выполнены условия:*

$$\begin{cases} 1). & \partial_{1K} f = \partial_{2K} f = 0; \\ 2). & \partial_{11K} f \ll 0 \ (mod\ K); \quad \partial_{22K} f \ll 0 \ (mod\ K); \\ 3). & \Delta^2_{1K} f \ll 0 \ (mod\ K); \quad \Delta^1_{2K} f \ll 0 \ (mod\ K); \end{cases}$$

(где все производные берутся в точке (x_1, x_2)), то f имеет строгий K-максимум в точке (x_1, x_2).

4. K-экстремумы функционала Эйлера–Лагранжа в произведении ядерных ЛВП

В [2, 3] было получено следующее достаточное условие K-минимума функционала Эйлера Лагранжа

$$\Phi(y) = \int_a^b f\big(x, y(x), y'(x)\big)dx; \quad y \in W_2^1\big([a, b], E\big). \tag{2}$$

Теорема 4. *Пусть E – вещественное полное ЛВП, вещественная функция $u = f(x, y, z)$ дважды непрерывно нормально дифференцируема на $[a; b] \times E \times E$. Если для некоторой точки $y(\cdot) \in W_2^1\big([a; b], E\big)$ при всех $x \in [a; b]$ выполнено вариационное уравнение Эйлера-Лагранжа*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left[\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')\right] = 0, \tag{3}$$

и квадратичная форма $f''\big(x, y(x), y'(x)\big)$ положительно определена в E^2, то функционал Эйлера-Лагранжа (2) имеет строгий K-минимум в точке $y(\cdot)$.

На базе теоремы 4 там же было получено, в случае ядерного ЛВП E, достаточное условие K-минимума $\Phi(y)$ в терминах частных производных f, при условии коммутирования вторых частных производных на экстремали. Результаты, изложенные выше в п. 3, позволяют исключить это обременительное условие.

Теорема 5. *Пусть E – вещественное полное ядерное ЛВП, вещественная функция $u = f(x, y, z)$ дважды непрерывно нормально дифференцируема на $[a; b] \times E \times E$.*

Если для некоторой точки $y(\cdot) \in W_2^1\big([a;b],E\big)$ *при всех* $x \in [a;b]$ *выполнено вариационное уравнение Эйлера–Лагранжа* (3) *и выполнены условия:*

$$\begin{cases} 1). & (\partial^2 f/\partial y^2)(x,y,y'(x)) \gg 0; \quad (\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,y'(x)) \gg 0; \\ 2). & \Delta_1^2 f(x,y,(x),y'(x)) \gg 0; \quad \Delta_2^1 f(x,y,(x),y'(x)) \gg 0; \end{cases}$$

то функционал Эйлера–Лагранжа (2) *имеет строгий* K*-минимум в точке* $y(\cdot)$.

Доказательство. Как показано в теореме 3, условия 1)–2) обеспечивают положительную определённость $f''\big(x,y(x)y'(x)\big)$ при всех $x \in [a;b]$. Остаётся применить теорему 4. □

Следствие 3. *Если, в предположениях теоремы 5, выполнены условия:*

$$\begin{cases} 1). & (\partial^2 f/\partial y^2)(x,y,y'(x)) \ll 0; \quad (\partial^2 f/\partial z^2)(x,y,y'(x)) \ll 0; \\ 2). & \Delta_1^2 f(x,y,(x),y'(x)) \ll 0; \quad \Delta_2^1 f(x,y,(x),y'(x)) \ll 0; \end{cases}$$

то функционал Эйлера–Лагранжа (2) *имеет строгий* K*-максимум в точке* $y(\cdot)$.

Заключение. В работе получены достаточные условия локального экстремума и компактного экстремума в произведении двух ядерных ЛВП в случае некоммутирующих вторых частных производных. В частности, получены достаточные условия компактного экстремума функционала Эйлера-Лагранжа.

Список литературы

[1] Орлов И. В. *Теорема Юнга для нормальных производных и экстремумы функционалов в произведениях ядерных пространств.* Учёные Записки Таврического национального университета, т. 15 (54), №2 (2002), 65–74.

[2] Orlov I. V. *Extreme Problems and Scales of the Operator Spaces.* North–Holland Math. Studies, Vol. 197 (2004). – Functional Analysis and Its Applications, Amsterdam–Boston–..., Elsevier, 209–228.

[3] Орлов И. В. *K-дифференцируемость и K-экстремумы*, Украинский математический вестник, т. 2 (2005), вып. 1 (в печати).

[4] Згуровский М. З., Мельник В. С. *Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами.* Наукова Думка, Киев, 1999.

[5] Grasiano Cr., Maluza A. *Euler–Lagrange inclusions and existence of minimizers for a class of non-coercitive variational problems.* J.Convex Anal., v. 7 (2000), №1, 167–181.

[6] Wang Xiang-dong, Liang Xi-ting. *The regularity of minimiser of a class degenerate functionals.* Foshan Univ. Natur. Sci. Ed., v. 18 (2000), №3, 5–9.

[7] Rugescu R. D. *A first integral for second order extrema.* Sci. Bull. A."Politehn." Univ. Bucharest, v. 62 (2000), №1, 45–50.

[8] Cellina A., Ferriero A. *Existence of Lipschitzian solutions to the classical problem of the calculus of variations in the autonomous case.* Ann. Inst. H. Poincarè. Anal. non lineaire, v. 20 (2003), №6, 911–919.

[9] Orlov I. V. *Normal functional indices and normal duality.* Methods of Functional Analysis and Topology, v. 8 (2002), №3, 61–71.

[10] Эдвардс Р. *Функциональный анализ: теория и приложения.* Мир, Москва, 1969.

[11] Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г. *Обобщённые функции и уравнения в свёртках.* Наука, Москва, 1994.

[12] Орлов И. В. *Нормальные индексы и шкалы операторных пространств.* Функціональный аналіз: Праці Українського математичного конгресу — 2001, Київ: Інститут математики НАН України, 2002, 193–208.

[13] Орлов И. В. *Нормальные индексы и нормальное дифференцирование в локально выпуклых пространствах.* Учёные Записки Таврического национального университета, т. 15 (54), №1 (2002), 112–121.

[14] Пич А. *Ядерные локально выпуклые пространства.* Мир, Москва, 1967.

[15] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике.* Наука, Москва, 1989.

[16] Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* Мир, Москва, 1971.

E-mail: old@crimea.edu

Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 78 - 82

УДК 519.216.2

Е.А. ПАВЛОВ

К ТЕОРЕМЕ БИРКОФА-ХИНЧИНА

Введение

В данной статье теорема Биркофа-Хинчина [1] обобщена на правильные идеальные структуры, обладающие свойствами Фату и Лебега. Новый метод доказательства позволяет получить результаты в ряде конкретных классических функциональных пространствах.

В данной статье для стационарного, в узком смысле, случайного процесса η и правильной идеальной структуры $E((-\infty,\infty);P(dw))$, инвариантной относительно сдвигов S_t и обладающей свойствами Фату и Лебега устанавливается соотношение:

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta(S_tw)dt=\hat{\eta}(w) \tag{1}$$

Данное соотношение может быть переписано в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\eta\left(S_tw\right)\chi_{[-T,T]}\left(t\right)\frac{1}{2T}dt\to\hat{\eta}(w) \tag{2}$$

в норме пространства .

Рассмотрим оператор

$$(A_T\eta)(w)=\int_{-\infty}^{\infty}\eta(S_tw)f_T(t)dt, \tag{3}$$

где $f_T(t)=\frac{1}{2T}\chi_{[-T,T]}(t)$.

Оператор A_T отображает пространство случайных функций $E((-\infty,\infty);P(dw))$ в себя. Оператор (3) можно рассматривать как одно из обобщений интегрального оператора свертки

$$(A_Kf)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-s)K(s)ds=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau+t)\bar{K}(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(S_t\tau)K(\tau)d\tau, \tag{4}$$

где $S_t\tau=\tau+t$, S_t - обычные операторы сдвига на t : $S_tx(\tau)=x(\tau+t)$.

Пусть задано вероятностное пространство (Ω, U, P), где U - σ алгебра подмножеств из Ω. P - вероятностная мера на алгебре U.

Рассмотрим вероятностное пространство для случая, когда $\Omega = (-\infty, +\infty)$, $U - \sigma$ - алгебра измеримых в смысле Лебега, подмножеств из $(-\infty, +\infty)$, $P(dw)$ - вероятностная мера Стилтьеса.

Пусть S_t - семейство сдвигов множеств из U, сохраняющих вероятностную меру этих множеств. То есть $P(A) = P(S_t A)$, где $A \in U$. Обозначим U_t - семейство операторов сдвига, определенных на случайных величинах $\eta(w)$, $w \in (-\infty, +\infty)$, предел (см. [1])

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \eta(t)dt = \hat{\eta} \in L_p((-\infty, +\infty); P(dw)) \ \exists \text{ в } \ L_p, \tag{5}$$

где $\eta(t) = \eta(S_t w)$, $\hat{\eta} = \hat{\eta}(w) \in L_p$, $\eta = \eta(w) \in L_p$.

Приведем некоторые определения.

Определение 1. (см. [3]) Банахово функциональное пространство $E((-\infty, +\infty); P(dw))$ будем называть симметричным, если:

1) из неравенства $|x(w)| \le |y(w)|$, где $y(w) \in E((-\infty, +\infty); P(dw))$ следует неравенство $\|x(w)\|_E \le \|y(w)\|_E$

2) из равенства

$$P\{w : |x(w)| > \tau\} = P\{w : |y(w)| > \tau\} \tag{6}$$

для всех $\tau > 0$ следует равенство

$$\|x\|_E = \|y\|_E. \tag{7}$$

Определение 2. Будем говорить, что функциональное банахово пространство $E((-\infty, +\infty); P(dw))$ обладает свойством Лебега (кратко будем обозначать - свойством (Л)), если из сходимости

$$x_n(w) \to x(w) \tag{8}$$

почти наверное и неравенства $|x_n(w)| < |y(w)|$, где $y(w) \in E$ следует сходимость по норме

$$\|x_n(w) - x(w)\|_E \to 0, \ x_n(w) \in E, \ x \in E \tag{9}$$

Определение 3. (см. [2], [3])

Говорят, что идеальная структура обладает свойством Фату, если из того, что последовательность функций $x_n(t) \in E$ сходится почти наверное к функции $x(t)$ и ограничена по норме E, $(\|x_n\|_E \le C < \infty, \ \forall n \in N)$, следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E \le \underline{\lim} \|x_n\|_E$.

Теорема 1. Пусть $E((-\infty, \infty); P(dw))$ сепарабельное симметрическое пространство, обладающее свойством Фату и Лебега и $\eta(t)$ - стационарный, в узком смысле,

случайный процесс и $\eta(w) \in E((-\infty,\infty);P(dw))$. Тогда существует, в смысле сходимости по норме , предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta(t)dt=\hat{\eta}(w)\in E((-\infty,+\infty);P(dw)) \tag{10}$$

Доказательство. Так как $E((-\infty,\infty);P(dw))$ сепарабельно, то (см. [3]) в $E((-\infty,\infty);P(dw))$ плотно множество ограниченных функций. Пусть $\eta_0(w)$ - произвольная ограниченная функция. В силу вложения $L_\infty((-\infty,\infty);P(dw))\subset E((-\infty,\infty);P(dw))\subset L_1((-\infty,\infty);P(dw))$ имеем, что $\eta_0(w)\in E((-\infty,\infty);P(dw))$. Так как $\eta_0(w)\in E((-\infty,\infty);P(dw))$, то по теореме Биркофа-Хинча (см., например, [1]) имеем

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta_0(S_tw)dt=\eta^*(w) \tag{11}$$

почти наверное. Далее имеем

$$\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta(S_tw)dt-\eta^*(w)\right\|_E\le\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\eta(S_tw)-\eta_0(S_tw)dt\right\|_E+$$

$$+\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\eta_0(S_tw)dt-\eta_0^*(w)\right\|_E+\|\eta_0^*(w)-\eta^*(w)\|_E \tag{12}$$

В силу обобщенного неравенства Минковского (см. [4]) имеем:

$$\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}(\eta(S_tw)-\eta_0(S_tw)dt\right\|_E\le\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\eta(S_tw)-\eta_0(S_tw)\|_E\,dt=$$

$$=\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\eta(w)-\eta_0(w)\|_E\,dt=\|\eta(w)-\eta_0(w)\|_E\,. \tag{13}$$

Обозначим $\|\eta(w)-\eta_0(w)\|_E=\delta$. Далее имеем

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\eta_0(S_tw)-\eta(S_tw)]\,dt\to\eta_0^*(w)-\eta^*(w) \tag{14}$$

почти наверное.

Кроме того, справедливо неравенство:

$$\|\eta_0^*(w)-\eta^*(w)\|_E\le\varlimsup_{T\to\infty}\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}[\eta_0(S_tw)-\eta(S_tw)]\,dt\right\|_E\le$$

$$\leq \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\eta_0(S_tw)-\eta(S_tw)\|_E\,dt=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\|\eta_0(w)-\eta(w)\|_E\,dt=\delta \qquad (15)$$

Далее имеем, пользуясь обобщенным неравенством Гельдера:

$$\left|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta_0(S_tw)dt-\eta_0^*(w)\right|\leq\int_{-\infty}^{\infty}|\eta_0(S_tw)|\left|\frac{1}{2T}\chi_{[-T,T]}(t)\right|dt+|\eta_0^*(w)|\leq$$

$$\leq\|\eta_0(S_tw)\|_E\frac{\varphi_{E^1}(2T)}{2T}+|\eta_0^*(w)|\leq\eta_1(w), \qquad (16)$$

где $\eta_1(w)=|\eta_0^*(w)|+c\,\|\eta_0(w)\|_E\in E$.

Кроме того, выполняется соотношение:

$$\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta_0(S_tw)dt-\eta_0^*(w)\to 0 \qquad (17)$$

почти наверное. Из (12), (13) и того факта, что обладает свойством Лебега, следует, что

$$\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta_0(S_tw)dt-\eta_0^*(w)\right\|_E\to 0\ \ (\text{при } T\to\infty). \qquad (18)$$

Итак, получаем неравенство

$$\left\|\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta_0(S_tw)dt-\eta_0^*(w)\right\|_E\leq 3\delta \qquad (19)$$

где δ- произвольно мало.

Теорема 2. Пусть $E((-\infty,\infty);P(dw))$ - правильная идеальная структура, инвариантная относительно сдвигов S_t и обладающая свойствами Фату и Лебега.

Тогда справедливо соотношение

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}\eta(t)dt=\hat{\eta}(w)\in E, \qquad (20)$$

где $\eta(t)$ - стационарный, в узком смысле, случайный процесс и $\eta(t)=\eta(S_tw)\in E$ (t - фиксировано), $\hat{\eta}(w)\in E$.

Доказательство производится по схеме, предложенной в доказательстве теоремы 1.

Заключение. В данной статье теорема Биркофа-Хинчина обобщена на правильные идеальные структуры, обладающие свойствами Фату и Лебега.

Список литературы

[1] Гихман И.И., Скороход А.В. *Т*еория случайных поцессов. – М.: Наука, 1971, т. 1,2.

[2] Канторович Л.В., Акилов Г.П. *Ф*ункционалльный анализ. – М.: Наука, 1977г.

[3] Крейн С.Г., Петунин Ю.И., Семенов Е.М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978г.

[4] Павлов Е.А. *О*б операторах, инвариантных относительно сдвига в симметричных пространствах. – Сибирский мат журнал, 1977 г., т. 18, №1, 80 85.

Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 83-94

УДК 517.988.5 · 517.989.3 · 517.983.24

Д.В. Третьяков

ОБ ОДНОМ ОТНОШЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

1. Постановка задачи и общие сведения

Пусть $\mathfrak{H}$ - комплексное гильбертово пространство. Обозначим через $\mathbf{A}(\mathfrak{H})$ банахов бимодуль аддитивных и непрерывных на $\mathfrak{H}$ операторов, через $\mathbf{L}(\mathfrak{H})$ C^*- алгебру линейных непрерывных операторов, через $\mathbf{AL}(\mathfrak{H})$ банахово пространство всех ограниченных антилинейных операторов. Как известно [1],

$$\mathbf{A}(\mathfrak{H}) = \mathbf{L}(\mathfrak{H}) \dot{+} \mathbf{AL}(\mathfrak{H}). \tag{1}$$

причём, $\mathbf{L}(\mathfrak{H})$ и $\mathbf{AL}(\mathfrak{H})$ дополняемы в $\mathbf{A}(\mathfrak{H})$ и проекторы на указанные подпространства задаются равенствами

$$\mathbb{P}_{\mathbf{L}(\mathfrak{H})}A = \frac{1}{2i}(iA + Ai),\ \mathbb{P}_{\mathbf{AL}(\mathfrak{H})}A = \frac{1}{2i}(iA - Ai),\ A{\in}\mathbf{A}(\mathfrak{H}).$$

В дальнейшем будем использовать представление $A = L + S$, где $A{\in}\mathbf{A}(\mathfrak{H})$, $L{\in}\mathbf{L}(\mathfrak{H})$, $S{\in}\mathbf{AL}(\mathfrak{H})$, вытекающее из (1) . Аналогичное представление имеет место и для аддитивных, ограниченных на $\mathfrak{H}$ функционалов.

Хорошо известно, какую важную роль играют в квантовой физике и в теории представления групп и алгебр антилинейные операторы и функционалы. Достаточно упомянуть, в связи с этим, лемму Рисса, устанавливающую антилинейный изометрический изоморфизм между произвольным гильбертовым пространством и его сопряжённым, модулярную теорию Томиты-Такесаки в теории алгебр фон Неймана [2]. PCT-теоремы в аксиоматической квантовой теории поля [3] - [6] и др. (см. также [7] - [11], где рассматриваются различные задачи для аддитивных операторов).

Поскольку $\mathbf{AL}(\mathfrak{H})$ не является алгеброй, а резольвента любого антилинейного оператора аддитивна, то это осложняет независимое исследование таких операторов [12]. Однако $\mathbf{A}(\mathfrak{H})$ является наименьшим банаховым бимодулем над $\mathbb{C}$, содержащим $\mathbf{L}(\mathfrak{H})$ и $\mathbf{AL}(\mathfrak{H})$ [1]. Поэтому наиболее удобным представляется исследование бимодуля $\mathbf{A}(\mathfrak{H})$.

В данной работе вводится специальное понятие ортогональности в пространстве $\mathfrak{H}$, которое используется при определении и исследовании свойств сопряжённого оператора, помогает перенести с линейного случая на аддитивный классификацию спектра, изучать свойства различных классов операторов и ортонормированных систем векторов, возникающих с помощью этого нового определения.

2. Отношение $\mathbb{R}$-ортогональности и его свойства

Пусть $\mathfrak{X}$ - комплексное линейное пространство. Функционал $\hat{f} : \mathrm{dom}\,\hat{f} \longrightarrow \mathbb{C}$ действующий в $\mathfrak{X}$, называется аддитивным, если:
1)$\mathrm{dom}\,\hat{f}$-вещественный линеал ($\mathbb{R}$ - линеал);
2)$(\forall x, y \in \mathrm{dom}\,\hat{f})\ \ \hat{f}(x+y) = \hat{f}(x) + \hat{f}(y)$.
Аналогично определяется аддитивный оператор, заданный не на всём пространстве.
Пусть $\hat{f} : \mathrm{dom}\,\hat{f} \longrightarrow \mathbb{R}$ вещественный аддитивный функционал, действующий в пространстве $\mathfrak{X}$ с полунормой p, и, при этом, $\forall x \in \mathrm{dom}\,\hat{f}$

$$|\,\hat{f}(x)\,| \leq p(x). \tag{2}$$

Так как $\hat{f}$ вещественно линеен в ассоциированном вещественном пространстве $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}$, то его можно линейно продолжить по теореме Хана-Банаха на $\mathfrak{X}_{\mathbb{R}}$ с сохранением неравенства (2). Таким образом, $\hat{f}$ продолжается как аддитивный функционал на всё пространство $\mathfrak{X}$ с сохранением этого неравенства (теорема Хана-Банаха для вещественных аддитивных функционалов). Обычные рассуждения, проделанные для вещественных аддитивных функционалов и $\mathbb{R}$ - линеалов, приводят нас к справедливости следующих предложений в пространстве $\mathfrak{X}$ (следствиям их теоремы Хана-Банаха для вещественного аддитивного функционала).

Лемма 1. *Пусть $\hat{f} : \mathrm{dom}\,\hat{f} \longrightarrow \mathbb{C}$– вещественный ограниченный аддитивный функционал. Тогда $\hat{f}$ можно вещественно и аддитивно продолжить на всё пространство $\mathfrak{X}$ с сохранением нормы.*

Через $\mathfrak{X}^{(*)}$ обозначим банахово пространство всех аддитивных и непрерывных на $\mathfrak{X}$ функционалов.

Лемма 2. *Пусть $x_0 \neq \theta$ - фиксированный вектор (θ - нулевой вектор). Тогда существует $\hat{f} \in \mathfrak{X}^{(*)}$ вещественный, такой что:*
а)$\hat{f}(x_0) = \|x_0\|$;
б)$\|\,\hat{f}\| = 1$.

Лемма 3. *Если $x_0 \neq \theta$ - фиксированный вектор, $\mathfrak{L}$ – $\mathbb{R}$–линеал в $\mathfrak{X}$ и $\rho(x_0;\mathfrak{L}) = d > 0$, то существует вещественный $\hat{f} \in \mathfrak{X}^{(*)}$, такой что:*
а) $\hat{f}(x_0) = 1$;
б) $\hat{f}\,|_{\mathfrak{L}} = 0$;
в)$\|\hat{f}\| = d^{-1}$.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{X}$– банахово пространство. $\mathfrak{L}$– $\mathbb{R}$–линеал в $\mathfrak{X}$. Тогда*

$$(\overline{\mathfrak{L}} = \mathfrak{X}) \Leftrightarrow ((\forall \hat{f} \in \mathfrak{X}^{(*)} : \hat{f}\,|_{\mathfrak{L}} = 0) \Rightarrow (\hat{f} = \hat{0})).$$

Аналогичные предложения справедливы и для невещественных аддитивных функционалов.

Определим в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ отношение ортогональности $(\perp)$ следующим образом: $x(\perp)y$, если $\mathrm{Re}(x, y) = 0$. Соотношения $h(\perp)\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}(\perp)\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$– произвольные множества, а также ортогональные дополнение $\mathfrak{M}^{(\perp)}$ и разность $(-)$ определяются аналогично. Очевидно, $\mathfrak{M}^{(\perp)}$ является $\mathbb{R}$–подпространством (замкнутым $\mathbb{R}$–линеалом) и $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)} = \{\theta\}$ для любого $\mathbb{R}$–линеала $\mathfrak{L}$. Как и в случае обычной ортогональности имеет место

Теорема 1. *Если $\mathfrak{L}$ – $\mathbb{R}$–подпространство в $\mathfrak{H}$, то*

$$(\forall h \in \mathfrak{H})(\exists!\ l_h \in \mathfrak{L}) : \rho(h; \mathfrak{L}) = \|h - l_h\|.$$

При этом, любой вектор $h \in \mathfrak{H}$ единственным образом представим в виде $h = l + \tilde{l}$, где $l \in \mathfrak{L}$. $\tilde{l}(\perp)\mathfrak{L}$.

Из теоремы следует ортогональное разложение: $\mathfrak{H} = \mathfrak{L}(+)\mathfrak{L}^{(\perp)}$, где $(+)$ обозначает $\mathbb{R}$–ортогональную сумму $\mathbb{R}$–подпространств $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^{(\perp)}$.

Рассмотрим основные свойства отношения $(\perp)$ (здесь и далее, $\mathfrak{L}$ обозначает $\mathbb{R}$–линеал или $\mathbb{R}$–подпространство, а $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ - множества в пространстве $\mathfrak{H}$. $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{M}$. $\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{M}$ – $\mathbb{R}$– и $\mathbb{C}$–линейные оболочки множества $\mathfrak{M}$ соответственно):

1) $\mathfrak{H}^{(\perp)} = \{\theta\}; \{\theta\}^{(\perp)} = \mathfrak{H}$;

2) $(\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}) \Rightarrow (\mathfrak{N}^{(\perp)} \subseteq \mathfrak{M}^{(\perp)})$;

3) $\mathfrak{M}^{(\perp)} = (\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{M})^{(\perp)} = (\mathrm{clos}\,\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{M})^{(\perp)}$;

4) $\mathfrak{M}^{(\perp)(\perp)} = \mathrm{clos}\,\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\,\mathfrak{M}$;

5) $(i\mathfrak{M})^{(\perp)} = i\mathfrak{M}^{(\perp)}$;

6) $(\mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\mathfrak{M}; \mathfrak{N}\})^{(\perp)} = \mathfrak{M}^{(\perp)} \cap \mathfrak{N}^{(\perp)}$;

7) если $\mathfrak{L}$ – $\mathbb{C}$–линеал, то $\mathfrak{L}^{(\perp)} = \mathfrak{L}^{\perp}$ и, следовательно, $\mathfrak{M}^{\perp(\perp)} = \mathfrak{M}^{\perp\perp}$;

8) $\mathfrak{M}^{\perp} = \mathfrak{M}^{(\perp)} \cap i\mathfrak{M}^{(\perp)}$. Если $\mathfrak{L}$ – $\mathbb{R}$-подпространство, то $\mathfrak{L}^{(\perp)\perp} = \mathfrak{L} \cap i\mathfrak{L}$;

Доказательство. $(g \perp \mathfrak{M}) \Leftrightarrow (\forall m \in \mathfrak{M}\ \mathrm{Re}(g, m) = \mathrm{Im}(g, m) = 0) \Leftrightarrow (\mathrm{Re}(g, m) = \mathrm{Re}(g, im) = 0) \Leftrightarrow (g \in \mathfrak{M}^{(\perp)} \cap i\mathfrak{M}^{(\perp)})$. Отсюда $\mathfrak{L} \cap i\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{(\perp)(\perp)} \cap i\mathfrak{L}^{(\perp)(\perp)} = \mathfrak{L}^{(\perp)\perp}$.

9) $\mathfrak{M}^{\perp} \subseteq \mathfrak{M}^{(\perp)}$. $\mathfrak{M}^{(\perp)} = \mathfrak{M}^{\perp}(+)((\mathrm{clos}\,\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{M}^{(\perp)})$:

Доказательство. $(w \in \mathfrak{M}^{(\perp)}(-)\mathfrak{M}^{\perp}) \Rightarrow (w \in \mathfrak{M}^{\perp(\perp)} = \mathrm{clos}\,\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{M}) \Rightarrow ((w \in (\mathrm{clos}\,\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{M}^{(\perp)}) \Rightarrow (\mathfrak{M}^{(\perp)}(-)\mathfrak{M}^{\perp} \subseteq (\mathrm{clos}\,\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{M}) \cap \mathfrak{M}^{(\perp)} \subseteq \mathfrak{M}^{(\perp)}(-)\mathfrak{M}^{\perp})$.

10) $\mathrm{clos}\,\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{(\perp)\perp} \oplus (\mathrm{clos}\,\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{L}^{(\perp)} \cap \mathrm{clos}\,\mathrm{span}_{\mathbb{C}}\,\mathfrak{L}) = \mathfrak{L}^{(\perp)\perp} \oplus (\mathfrak{L}^{\perp\perp} \ominus \mathfrak{L}^{(\perp)\perp})$;

Доказательство. Так как $\operatorname{clos}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{\perp\perp} \supseteq \mathfrak{L}^{(\perp)\perp}$, то $(h \in \mathfrak{L}^{\perp\perp} \ominus \mathfrak{L}^{(\perp)\perp}) \Rightarrow (h \in \mathfrak{L}^{(\perp)\perp\perp} = \operatorname{clos}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{L}^{(\perp)}) \Rightarrow (\mathfrak{L}^{\perp\perp} \ominus \mathfrak{L}^{(\perp)\perp} \subseteq \operatorname{clos}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{L}^{(\perp)} \cap \operatorname{clos}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}^{\perp\perp} \ominus \mathfrak{L}^{(\perp)\perp})$.

11) Если $\mathfrak{L}$ – $\mathbb{R}$-подпространство, то

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L}^{(\perp)\perp} \oplus (\operatorname{clos}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{L}^{(\perp)} \cap \operatorname{clos}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{L}) \oplus \mathfrak{L}^{\perp}.$$

Аналогично доказывается свойство

12) $\operatorname{clos}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{L} \cap \operatorname{clos}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{L}^{(\perp)} = \mathfrak{L} \cap \operatorname{clos}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{L}^{(\perp)} (+) \mathfrak{L}^{(\perp)} \cap \operatorname{clos}\operatorname{span}_{\mathbb{C}}\mathfrak{L}$.

3. $\mathbb{R}$-СОПРЯЖЁННЫЙ ОПЕРАТОР И ЕГО СВОЙСТВА

Пусть $A = L + S$, где $A \in \mathbf{A}(\mathfrak{H})$, $L \in \mathbf{L}(\mathfrak{H})$, $S \in \mathbf{AL}(\mathfrak{H})$– произвольный оператор. Оператор A^* можно определить с помощью леммы Рисса для аддитивного функционала, однако, этот оператор будет уже действовать в пространстве $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ (см. [12]), что значительно затрудняет определение и исследование различных классов операторов в $\mathfrak{H}$. Sharma C.S. и Almeyda D.F. [1] определили сопряжённый оператор равенством $A^{(*)} = L^* + S^*$, где S^* вычисляется с помощью формулы $(Sx, y) = (S^*y, x)$. Более естественным и удобным, однако, представляется определение сопряжённого оператора с помощью внутреннего произведения. Покажем как это можно сделать в нашем случае, причём, полученный таким образом оператор, будет совпадать с оператором $A^{(*)}$. Легко проверяется следующая

Лемма 5. *Пусть $\hat{f} \in \mathfrak{H}^{(*)}$–произвольный вещественный функционал. Тогда*

$$\exists! f \in \mathfrak{H} : \forall x \in \mathfrak{H}\ \hat{f}(x) = \operatorname{Re}(x, f), \|\hat{f}\| = \|f\|.$$

Пусть $A \in \mathbf{A}(\mathfrak{H}), y \in \mathfrak{H}$- фиксированный вектор. Рассмотрим вещественный ограниченный аддитивный функционал $\hat{f}_y(x) = \operatorname{Re}(Ax, y), \|\hat{f}_y\| \leq \|A\|\|y\|$. По лемме 5 $\exists!\ y^{(*)} \in \mathfrak{H} : \hat{f}_y(x) = \operatorname{Re}(Ax, y) = \operatorname{Re}(x, y^{(*)})$. Таким образом, определён оператор $A^{(*)} : y \to y^{(*)}$, где y и $y^{(*)}$ связаны равенствами $y^{(*)} = A^{(*)}y$ и $\operatorname{Re}(Ax, y) = \operatorname{Re}(x, A^{(*)}y)$ и, при этом, $\|A^{(*)}\| \leq \|A\|$. Отсюда следует существование оператора $A^{(*)(*)}$ и $\forall x, y \in \mathfrak{H}$

$$\operatorname{Re}(x, Ay - A^{(*)(*)}y) = \operatorname{Re}(Ay, x) - \operatorname{Re}(A^{(*)}x, y) = \operatorname{Re}(y, A^{(*)}x) - \operatorname{Re}(A^{(*)}x, y) = 0.$$

Следовательно, $A^{(*)(*)} = A$ и $\|A^{(*)}\| = \|A\|$. Так как $A = L + S$, то

$$\operatorname{Re}(Ax, y) = \operatorname{Re}(Lx + Sx, y) = \operatorname{Re}(x, L^*y) + \operatorname{Re}(S^*y, x) = \operatorname{Re}(x, (L^* + S^*)y),$$

то есть, $A^{(*)} = L^* + S^*$. Таким образом, определение сопряжённого оператора, приведённое здесь, и определение, данное в [1], приводят к одному и тому же оператору. Перечислим без доказательства основные свойства оператора $A^{(*)}$, обычным образом проверяемые:

а) $(A \in \mathbf{A}(\mathfrak{H})) \Rightarrow (A^{(*)} \in \mathbf{A}(\mathfrak{H})) \wedge (A^{(*)(*)} = A) \wedge (\|A^{(*)}\| = \|A\|)$;
б) $\forall A, B \in \mathbf{A}(\mathfrak{H}), \forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$(A+B)^{(*)} = A^{(*)} + B^{(*)},\ (\lambda A)^{(*)} = A^{(*)}\bar{\lambda},\ (AB)^{(*)} = B^{(*)}A^{(*)};$$

в) если $A \in \mathbf{A}(\mathfrak{H})$ непрерывно обратим, то $(A^{-1})^{(*)} = (A^{(*)})^{-1}$, $\rho(A^{(*)}) = \overline{\rho(A)}$; если $\sigma(A) \neq \emptyset$, то $\sigma(A^{(*)}) = \overline{\sigma(A)}$, где $\overline{M} = \{\bar{\lambda} | \lambda \in M\}$:
г) $(A \in \mathbf{A}(\mathfrak{H})) \Rightarrow (\mathfrak{H} = \ker A(+) \operatorname{clos} \operatorname{Ran} A^{(*)} = \ker A^{(*)}(+) \operatorname{clos} \operatorname{Ran} A)$;
д) если $A \in \mathbf{A}(\mathfrak{H})$, то $\|A^{(*)}A\| = \|A\|^2$, то есть, $\mathbf{A}(\mathfrak{H})$ является C^*–бимодулем.

В [12] была дана классификация спектра аддитивного оператора. Напомним её. Обозначим через $\mathbf{D}_+(\mathbf{D}_-)$ - правый (левый) идеал одноимённых делителей нуля бимодуля $\mathbf{A}(\mathfrak{H})$. Тогда :

$$\sigma_p(A) := \{\lambda | A - \lambda I \in \mathbf{D}_-\};\ \sigma_r(A) := \{\lambda | A - \lambda I \in \mathbf{D}_+ \setminus \mathbf{D}_-\};\ \sigma_c(A) := \{\lambda | A - \lambda I \in \mathbf{D}_- \cup \mathbf{D}_+\};$$

$$\sigma_s(A) := \{\lambda | A - \lambda I \in \mathbf{D}_- \cap \mathbf{D}_+\};\ \sigma_u(A) := \{\lambda | A - \lambda I \in \mathbf{D}_- \setminus \mathbf{D}_+\}.$$

Во всех равенствах $\lambda \in \sigma(A)$. Последние две компоненты называются устойчивым и неустойчивым точечными спектрами оператора A, соответственно (см. также [13]). Имеет место

Теорема 2. *Если* $A \in \mathbf{A}(\mathfrak{H})$, *то справедливы равенства* $(\lambda \in \sigma(A))$:

$$\sigma_p(A) = \{\lambda | \ker(A - \lambda I) \neq \{\theta\}\};\ \sigma_r(A) = \{\lambda | (\exists (A - \lambda I)^{-1}) \wedge (\operatorname{clos} \mathfrak{D}_{(A-\lambda I)^{-1}} \neq \mathfrak{H})\};$$

$$\sigma_c(A) = \{\lambda | (\exists (A - \lambda I)^{-1}) \wedge (\operatorname{clos} \mathfrak{D}_{(A-\lambda I)^{-1}} = \mathfrak{H}) \wedge (\|(A - \lambda I)^{-1}\| = \infty)\};$$

$$\sigma_s(A) = \sigma_p(A) \cap \overline{\sigma_p(A^{(*)})};\ \sigma_u(A) = \sigma_p(A) \setminus \sigma_s(A).$$

Доказательство. Действительно, пусть $A - \lambda I \in \mathbf{D}_-$. Тогда при некотором $G \in \mathbf{A}(\mathfrak{H}) \setminus \{\mathbb{O}\}$ и произвольном $x \in \mathfrak{H}$ $(A - \lambda I)Gx = \theta$ и, следовательно, $AGx = \lambda Gx$. Если, наоборот, существует $x_0 \in \mathfrak{H}$, такой что $(A - \lambda I)x_0 = \theta$, то $(A - \lambda I)Fx = \theta$ для любого x, где $Fx = \operatorname{Re}(x, x_0)x_0$. Отсюда

$$(\ (A - \lambda I \in \mathbf{D}_-) \Leftrightarrow (\lambda \in \sigma_p(A))\ ) \wedge (\ (A - \lambda I \in \mathbf{D}_+) \Leftrightarrow (\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^{(*)}))\ ).$$

Если $A - \lambda I \in \mathbf{D}_- \cup \mathbf{D}_+$, то $A^{(*)} - \bar{\lambda} I \in \mathbf{D}_-$. На основании свойства г) $\mathbb{R}$–сопряжённого оператора $\operatorname{clos} \operatorname{Ran}(A - \lambda I) = \mathfrak{H}$. Так как оператор $A - \lambda I$ обратим, то $\lambda \in \sigma_c(A)$ в смысле второго определения, так как предположение ограниченности $(A - \lambda I)^{-1}$ приводит к противоречивому включению $\lambda \in \rho(A)$. Очевидно, эти рассуждения обратимы. Теорема доказана.

4. Различные классы операторов и их свойства

Определение 1. Оператор $A \in \mathbf{A}(\mathfrak{H})$ называется:
а) нормальным, если $A^{(*)}A = AA^{(*)}$;
б) самосопряжённым (кососамосопряжённым), если $A^{(*)} = A$ ($A^{(*)} = -A$);
в) унитарным, если $A^{(*)}A = AA^{(*)} = I$;
г) проектором, если $A^2 = I$;
д) вещественным (мнимым), если $AJ = JA$ ($AJ = -JA$), где J– оператор сопряжения [14].

В связи с данным определением отметим, что любой оператор $A \in \mathbf{A}(\mathfrak{H})$ единственным образом представим в виде суммы вещественного и мнимого операторов $A = A_R + A_I$, где $A_{R,\ I} = \frac{1}{2}(A \pm JAJ)$.

Лемма 6. $(A = A^{(*)} \in \boldsymbol{A}(\mathfrak{H})) \wedge (\forall x \in \mathfrak{H}\ \mathrm{Re}(Ax, x) = 0) \Rightarrow (A = \mathbb{O})$.

Доказательство. Пусть, вначале, $A = S = S^* \in \mathbf{AL}(\mathfrak{H})$. Тогда, если $\omega^2 = -i$, то $\mathrm{Im}(Sx, x) = \mathrm{Re}(-i)(Sx, x) = \mathrm{Re}(S\overline{\omega}x, \overline{\omega}x) = 0$, то есть, $(Sx, x) = 0$ для любого $x \in \mathfrak{H}$. Произвольный вектор $x \in \mathfrak{H}$ представим в виде $x = u_+ + u_-$, где $u_\pm = \frac{1}{2}(x \pm Jx)$. Поэтому

$$0 = (Su_+ + Su_-, u_+ + u_-) = (Su_+, u_-) + (Su_-, u_+) = 2(Su_+, u_-).$$

Аналогично,

$$(SJx, x) = (Sx, Jx) = (Su_+ + Su_-, u_+ - u_-) = (Su_+, u_-) - (Su_-, u_+) = 0.$$

Так как $SJ \in \mathbf{L}(\mathfrak{H})$, то $SJ = \mathbb{O}$ и, следовательно, $S = \mathbb{O}$.
В общем случае для любого $e^{i\varphi} \in \mathbb{T} = \{z|\ |z| = 1\}$ рассмотрим отображение $\Gamma_\varphi : \mathbf{A}(\mathfrak{H}) \to \mathbf{A}(\mathfrak{H})$, определяемое равенством

$$\Gamma_\varphi(A) := L + e^{i\varphi}S = A_\varphi = e^{\frac{i\varphi}{2}}Ae^{\frac{-i\varphi}{2}},\ A = L + S,$$

которое является изометрическим изоморфизмом $\mathbf{A}(\mathfrak{H})$. В частности, $A_\pi = L - S$ и $\forall x \in \mathfrak{H}\ \mathrm{Re}(A_\pi x, x) = \mathrm{Re}(Aix, ix) = 0$. Отсюда

$$2\,\mathrm{Re}(Sx, x) = \mathrm{Re}((A - A_\pi)x, x) = 0$$

и, значит, $S = \mathbb{O}$. Поэтому, $\mathrm{Re}(Lx, x) = (Lx, x) = 0\ \forall x \in \mathfrak{H}$, то есть, $L = \mathbb{O}$. Лемма доказана.

Следствие 1. $(S = S^* \in \boldsymbol{AL}(\mathfrak{H})) \wedge (\forall x \in \mathfrak{H}\ (Sx, x) = 0) \Rightarrow (S = \mathbb{O})$.

Следствие 2. $(A \in \boldsymbol{A}(\mathfrak{H})) \wedge (\forall x, y \in \mathfrak{H}\ \mathrm{Re}(Ax, y) = 0) \Rightarrow (A = \mathbb{O})$.

Требование самосопряжённости оператора A в предыдущей лемме существенно.

Лемма 7. $(A^{(*)} = -A \in \boldsymbol{A}(\mathfrak{H})) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathfrak{H}\ \mathrm{Re}(Ax, x) = 0)$

Доказательство. Если $A^{(*)} = -A$. то $\forall x \in \mathfrak{H}$

$$\mathrm{Re}(Ax, x) = -\mathrm{Re}(x, Ax) = -\mathrm{Re}(Ax, x).$$

Наоборот. из равенства $\mathrm{Re}(Ax, x) = 0$ $\forall x \in \mathfrak{H}$ следует, что

$$\mathrm{Re}((A + A^{(*)})x, x) = \mathrm{Re}(Ax, x) + \mathrm{Re}(x, Ax) = 0.$$

откуда $A + A^{(*)} = \mathbb{O}$.

Следствие 3. $(S^* = -S \in \boldsymbol{AL}(\mathfrak{H})) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathfrak{H}\ (Sx, x) = 0)$

Следствие 4. *Пусть* $A \in \boldsymbol{A}(\mathfrak{H})$. *Тогда:*
а) $\forall \alpha \in \{p.s.u.c.r\}$, $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$ $\sigma_\alpha(A) = \sigma_\alpha(A_\varphi)$;
б) *(A-нормальный)* $\Leftrightarrow$ *(A_φ-нормальный* $\forall \varphi \in [0. 2\pi]$*):*
в) $(A^{(*)} = -A) \wedge (\lambda \in \sigma_p(A)) \Rightarrow (\mathrm{Re}\,\lambda = 0)$. *Спектр оператора A симметричен относительно мнимой оси;*
г) *если A– кососамосопряжённый оператор* , $\sigma_p(A) \neq \emptyset$, $Ax = icx$, $Ay = idy$, $c \neq d$. $cd \neq 0$. $x \neq \theta$, $y \neq \theta$, *то* $\mathrm{Im}(x, y) = 0$;
д) *если A– вещественный (мнимый) оператор, то* $\rho(A)$, $\sigma_\alpha(A)$, $\alpha \in \{p, s, u, c, r\}$ *симметричны относительно вещественной (мнимой) оси. Если. дополнительно,* $A = A^{(*)}$, *то* $\sigma_r(A) = \sigma_u(A) = \emptyset$.

Доказательство. г) $d\,\mathrm{Im}(x, y) = \mathrm{Re}(-i)(x, dy) = \mathrm{Re}(x, idy) = \mathrm{Re}(x, Ay) = -\mathrm{Re}(Ax, y) = \mathrm{Re}(-i)(cx, y) = c\,\mathrm{Im}(x, y)$.

д) действительно, уравнения $Ax - \lambda x = f$ и $AJx - \overline{\lambda}Jx = Jf$ одновременно разрешимы для любого $f \in \mathfrak{H}$ или нет. Если $Ax = \lambda x$, $x \neq \theta$, то $AJx = \overline{\lambda}Jx$. Предположим, что $A - \lambda I \in \mathbf{D}_+ \setminus \mathbf{D}_-$. Тогда $G(A - \lambda I) = \mathbb{O}$ при некотором $G \in \mathbf{A}(\mathfrak{H})$. откуда $GJ(A - \overline{\lambda}I) = \mathbb{O}$, то есть $A - \overline{\lambda}I \in \mathbf{D}_+$. Аналогично проверяется, что $A - \overline{\lambda}I \overline{\in} \mathbf{D}_-$ и, что $(\lambda \in \sigma_s(A)) \Leftrightarrow (\overline{\lambda} \in \sigma_s(A))$. Если $\lambda \in \sigma_u(A)$, то $\overline{\lambda} \in \sigma_r(A^{(*)})$. Отсюда $\overline{\lambda} \in \sigma_u(A)$.

Следствие 5. а) *если* $U \in \boldsymbol{AL}(\mathfrak{H})$ *- унитарный кососамосопряжённый оператор, то* $\sigma(U) = \emptyset$;
б) *операторы* $W_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(I \pm U)$, *где* $U \in \boldsymbol{AL}(\mathfrak{H})$, *являются унитарными тогда и только тогда, когда U- унитарный кососамосопряжённый оператор. Если это условие выполнено, то* $\sigma(W_\pm) = \emptyset$.

Доказательство. а) если $Uy = \lambda y$, $y \neq \theta$, то

$$0 = (Uy, y) = \lambda\|y\|^2 = -(Uy, y) = -\lambda\|y\|^2,$$

откуда $\lambda = 0$. Так как U- непрерывно обратим, то $\sigma_p(U) = \emptyset$. Оператор $U - \lambda I$ также непрерывно обратим для любого $\lambda \in \mathbb{T}$, так как

$$\frac{1}{2}(U^* - \overline{\lambda}I)(U - \lambda I) = I = (U - \lambda I)\frac{1}{2}(U^* - \overline{\lambda}I).$$

Очевидно, оператор $U - \lambda I$ непрерывно обратим при $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ и

$$(U - \lambda I)^{-1} = -(1 + |\lambda|^2)^{-1}(U + \overline{\lambda} I);$$

б) если $U-$ унитарный кососамосопряжённый оператор, то $W_{\pm}-$ унитарные. Резольвенту оператора W_+ найдём из системы:

$$\begin{cases} (1 - \sqrt{2}\,\lambda)x + Ux &= \sqrt{2}\,y \\ x - (1 - \sqrt{2}\,\overline{\lambda})\,Ux &= -\sqrt{2}\,Ux. \end{cases}$$

Очевидно,

$$R_\lambda(W_+)y = \frac{2}{1 + |1 - \sqrt{2}\,\lambda|^2}(W_- - \overline{\lambda} I)y.$$

Таким образом, $\sigma(W_{\pm}) = \emptyset$. Наоборот, если, например, W_- – унитарный и $U \in \mathbf{AL}(\mathfrak{H})$, то

$$I = W_-^{(*)}W_- = \frac{1}{2}(I - (U^* + U) + U^*U) = W_-W_-^{(*)} = \frac{1}{2}(I - (U + U^*) + UU^*),$$

откуда $UU^* = U^*U$. Поскольку $L_{W_-} = \frac{1}{\sqrt{2}} I, S_{W_-} = \frac{1}{\sqrt{2}} U$ и из условия унитарности вытекает, что

$$I = L^*_{W_-}L_{W_-} + S^*_{W_-}S_{W_-} = \frac{1}{2}(I + U^*U) = \frac{1}{2}(I + UU^*) = L_{W_-}L^*_{W_-} + S_{W_-}S^*_{W_-},$$

то $U^*U = UU^* = I$. Следствие доказано.

Легко привести пример оператора из части а) последнего следствия. Если $\mathfrak{H} = l_2$, то оператор U, действующий по формуле $Ux = (\overline{x_2}, -\overline{x_1}, \overline{x_4}, -\overline{x_3}, \ldots)$, является унитарным и кососамосопряжённым. Часть б) же последнего следствия указывает на достаточно широкий класс унитарных аддитивных операторов с пустым спектром.

Теорема 3. *Пусть $N \in \boldsymbol{A}(\mathfrak{H})$. Тогда:*

1) $(N$ *– нормальный*$) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathfrak{H}\ \|Nx\|^2 = \|N^{(*)}x\|^2)$;

2) $(N$ *– нормальный*$) \Rightarrow (\forall \lambda \in \mathbb{R}\ \ker(N - \lambda I) = \ker(N^{(*)} - \lambda I))$;

3) *если N - нормальный, то собственные векторы, отвечающие различным вещественным собственным значениям, $\mathbb{R}-$ортогональны;*

4) $(N$ *– нормальный*$) \Rightarrow (\sigma_r(N) \cap \mathbb{R} = \sigma_u(N) \cap \mathbb{R} = \emptyset)$.

5) *если $N = L + S-$ нормальный и $Nx = \lambda x$, где $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}, x \neq \theta$, то*

$$(N^{(*)}x = \lambda x) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(Lx, x) = 0); (N^{(*)}x = \overline{\lambda}x) \Leftrightarrow (\mathrm{Im}(Sx, x) = 0).$$

Доказательство. 1) Если $NN^{(*)} = N^{(*)}N$ и $N = L + S$, то отделяя линейную и антилинейную части, получим систему $(\forall x \in \mathfrak{H})$:

$$\begin{cases} (LL^* + SS^*)x = (L^*L + S^*S)x \\ (LS^* + SL^*)x = (L^*S + S^*L)x \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \|L^*x\|^2 + \|S^*x\|^2 & = \|Lx\|^2 + \|Sx\|^2 \\ (S^*x, L^*x) & = (Sx, Lx). \end{cases}$$

Отсюда

$$\|Nx\|^2 = \|Lx\|^2 + \|Sx\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(Lx, Sx) = \|L^*x\|^2 + \|S^*x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(L^*x, S^*x) = \|N^{(*)}x\|^2.$$

Наоборот, если выполнено последнее равенство , то заменяя в нём x на ix, получим:

$$\begin{cases} \|Lx\|^2 + \|Sx\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(Lx, Sx) = \|L^*x\|^2 + \|S^*x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(L^*x, S^*x) \\ \|Lx\|^2 + \|Sx\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(Lx, Sx) = \|L^*x\|^2 + \|S^*x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(L^*x, S^*x). \end{cases}$$

Производя почленное сложение и вычитание, приходим к системе

$$\begin{cases} \|Lx\|^2 + \|Sx\|^2 & = \|L^*x\|^2 + \|S^*x\|^2 \\ \mathrm{Re}(Sx, Lx) & = \mathrm{Re}(S^*x, L^*x), \end{cases}$$

откуда $((L^*L + S^*S - LL^* - SS^*)x, x) = 0$ и, значит, $L^*L + S^*S = LL^* + SS^*$ $\forall x \in \mathfrak{H}$.
Если $\omega^2 = -i$, то

$$\mathrm{Im}(Sx, Lx) = \mathrm{Re}[-i(Sx, Lx)] = \mathrm{Re}(S\overline{\omega}x, L\overline{\omega}x) = \mathrm{Re}(S^*\overline{\omega}x, L^*\overline{\omega}x) =$$

$$= \mathrm{Re}[-i(S^*x, L^*x)] = \mathrm{Im}(S^*x, L^*x).$$

Отсюда $((L^*S + S^*L - LS^* - SL^*)x, x) = 0\ \forall x \in \mathfrak{H}$ и, поэтому, $L^*S + S^*L = LS^* + SL^*$,
Таким образом. N– нормальный оператор;
3) пусть $Nx = \lambda x$, $Ny = \mu y$, $x \neq \theta$, $y \neq \theta$, $\{\lambda, \mu\} \subset \mathbb{R}$. Тогда

$$\lambda\,\mathrm{Re}(x, y) = \mathrm{Re}(\lambda x, y) = \mathrm{Re}(Nx, y) = \mathrm{Re}(x, N^{(*)}y) = \mu\,\mathrm{Re}(x, y).$$

Следовательно, $x\,(\perp)\,y$.
Часть 4) следует из соотношений (см. также [12]):

$$\sigma_r(N) \cap \mathbb{R} = \overline{\sigma_u(N^{(*)})} \cap \mathbb{R} = \sigma_u(N^{(*)}) \cap \mathbb{R} \subset \sigma_p(N^{(*)}) \cap \mathbb{R} = \sigma_p(N) \cap \mathbb{R}.$$

5)если $\lambda = \gamma + i\eta$, $\mu = \gamma + i\delta$, где $|\,\eta\,| = |\,\delta\,|$, то для любого вектора $y \in \mathfrak{H}$

$$\|Ny - \lambda y\|^2 - \|N^{(*)}y - \mu y\|^2 = 2\,\mathrm{Re}[(N^{(*)}y - \gamma y, i\delta y) - (Ny - \gamma y, i\eta y)] =$$

$$2\,\mathrm{Re}[((L^* + S^* - \gamma I)y, i\delta y) - ((L + S - \gamma I)y, i\eta y)] =$$

$$2\,\mathrm{Im}[\delta(y, Ly) - \eta(Ly, y) - (\eta - \delta)(Sy, y)] = -2(\delta + \eta)\,\mathrm{Im}(Ly, y) - 2(\eta - \delta)\,\mathrm{Im}(Sy, y) =$$

$$= \begin{cases} -4\delta\,\mathrm{Im}(Ly, y), & \mu = \lambda \\ 4\delta\,\mathrm{Im}(Sy, y), & \mu = \overline{\lambda}. \end{cases}$$

Теорема доказана.

Отметим, что собственные значения самосопряжённого оператора, если они существуют, уже не обязательно вещественны, однако спектр такого оператора симметричен относительно вещественной оси [12]. Приведём, в связи с этим, следующий пример аддитивного "диагонального" оператора в l_2.

Пусть $\alpha = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ ...)$ - фиксированный вектор комплексного пространства m. Рассмотрим оператор

$$Nx = (\alpha_1 x_1,\ \alpha_2\overline{x_2},\ \alpha_3 x_3,\ \alpha_4\overline{x_4},\ ...).$$

Очевидно,

$$N^{(*)}x = (\overline{\alpha_1}x_1,\ \alpha_2\overline{x_2},\ \overline{\alpha_3}x_3,\ \alpha_4\overline{x_4},\ ...)$$

Поэтому, данный оператор является самосопряжённым тогда и только тогда, когда $\alpha_{2j-1} \in \mathbb{R},\ \forall j \geq 1$. В общем же случае оператор N является нормальным ($N^{(*)}N$ и $NN^{(*)}$ линейные). Вычисления показывают, что

$$\sigma_s(N) = \sigma_p(N) = (\ \cup_{k=1}^{\infty}\{\alpha_{2k-1}\}\ )\ \cup\ (\ \cup_{k=1}^{\infty}\mathbb{T}(0;|\ \alpha_{2k}\ |\ )\ ),$$

$$\sigma_r(N) = \emptyset.\ \sigma(N) = \operatorname{clos}\sigma_p(N).$$

Таким образом, $\sigma(N)$– объединение спектров линейной и антилинейной частей оператора N. Обратно, если $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$, где σ_1– компактное множество, являющееся объединением замкнутых кругов или замкнутых колец с центрами в начале координат, а σ_2– произвольное компактное множество в $\mathbb{C}$, то с помощью выделения счётных, всюду плотных множеств в σ_1 (счётного числа окружностей с центрами в начале координат) и в σ_2 легко построить нормальный оператор N, такой, что $\sigma(N) = \sigma_1 \cup \sigma_2$.

Так же как и в линейном случае проверяется справедливость следующего предложения

Теорема 4. *Следующие предложения эквивалентны:*

1) $U \in \boldsymbol{A}(\mathfrak{H})$ - *унитарный оператор;*

2) $(\forall\ x, y \in \mathfrak{H}) : (\ \mathrm{Re}(Ux, Uy) = \mathrm{Re}(x, y)\ ) \wedge (\ \mathrm{Ran}\,U = \mathfrak{H}\ )$;

3) $(\forall\ x, y \in \mathfrak{H}) : (\ \|Ux\| = \|x\|\ ) \wedge (\ \mathrm{Ran}\,U = \mathfrak{H}\ )$.

Очевидно, для унитарного оператора U имеет место включение $\sigma_p(U) \subseteq \mathbb{T}$.

Если $\mathfrak{L}$ произвольное $\mathbb{R}$– подпространство в $\mathfrak{H}$, то существование аддитивного ортопроектора P на это подпространство вытекает из теоремы 1.

Положим $\sigma = \mathbb{T}(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ и $\sigma^* = \sigma\ \setminus \{0, 1\}$

Лемма 8. *Пусть P- аддитивный ортопроектор. Тогда:*

а) P- *самосопряжённый проектор;*

б) $\sigma_p(P) \subseteq \sigma\ .\sigma_u(P) = \sigma_r(P) = \emptyset$;

Если $P \in \boldsymbol{A}(\mathfrak{H})$-самосопряжённый проектор, то P–ортопроектор на $\mathbb{R}$–подпространство $\mathfrak{L} = \{x|\ Px = x\}$;

в) $(\lambda \in \sigma_p(P) \cap \sigma^*) \Leftrightarrow (i\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)} \neq \{\theta\})$ *и* $\mathfrak{L}_\lambda = (1-\bar{\lambda})\left(i\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)}\right)$ *-соответствующий собственный линеал;*

г) $(\sigma_p(P) = \{0.1\}) \Leftrightarrow (i\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)} = \{\theta\})$.

Доказательство. б) если $Px = \lambda x$, то

$$|\lambda|^2\|x\|^2 = \|Px\|^2 = \mathrm{Re}(Px, x) = \mathrm{Re}(\lambda x, x) = (\mathrm{Re}\,\lambda)\|x\|^2.$$

Сравнивая крайние части равенств, приходим к выводу, что $\lambda \in \sigma$.

в) пусть $Px = \lambda x$, где $\lambda \in \sigma^*$. Тогда $x = \lambda x + (1-\lambda)x$ - разложение вектора x в сумму проекций на $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^{(\perp)}$, то есть, $x \in \lambda\mathfrak{L}$, $(1-\lambda)x \in \mathfrak{L}^{(\perp)}$. Отсюда

$$(1-\lambda)x \in (1-\lambda)\bar{\lambda}\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)} = (\bar{\lambda} - |\lambda|^2)\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)} = (\bar{\lambda} - \mathrm{Re}\,\lambda)\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)} = (-i\,\mathrm{Im}\,\lambda)\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)}.$$

Полученное включение возможно тогда и только тогда, когда $i\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)} \neq \{\theta\}$. Если это условие выполнено, то $(1-\lambda)x = \tilde{g} \in i\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)}$, откуда $x = (1-\lambda)^{-1}\tilde{g}$. Очевидно, любой вектор $g \in i\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)}$ будет порождать собственный вектор $x = (1-\lambda)^{-1}g$ оператора P, отвечающий собственному значению λ. Действительно, $(1-\lambda)x \in i\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)} = (1-\lambda)\bar{\lambda}\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)}$, откуда $(1-\lambda)x \in \mathfrak{L}^{(\perp)}, x \in \bar{\lambda}\mathfrak{L}$ и $x = \lambda x + (1-\lambda)x$ - разложение в сумму проекций на $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}^{(\perp)}$. Лемма доказана.

Следствие 6. $(i\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{(\perp)} \neq \{\theta\}) \Leftrightarrow (\sigma_p(P) = \sigma)$.

Рассмотрим, например, в пространстве l_2 следующие $\mathbb{R}-$подпространства:

$$\mathfrak{L}_1 = \{l \in l_2 \mid l = (l_1,\ \alpha\overline{l_1},\ l_3,\ \alpha\overline{l_3}, \ldots)\},$$

где $\alpha \in \mathbb{T}-$ произвольное фиксированное комплексное число,

$$\mathfrak{L}_2 = \{l \in l_2 \mid l = (l_1,\ -\overline{l_1},\ l_3,\ (2+i)\overline{l_3},\ l_5,\ -\overline{l_5}, \ldots)\}.$$

$$\mathfrak{L}_3 = \{l \in l_2 \mid l = (l_1,\ -\overline{l_1},\ l_3,\ l_4,\ l_5,\ (2+i)\overline{l_5},\ 0,\ 0,\ l_9,\ -\overline{l_9}, \ldots)\}$$

Вычисления показывают, что

$$\mathfrak{L}_1 \cap i\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_1^{(\perp)} \cap i\mathfrak{L}_1^{(\perp)} = \mathfrak{L}_1 \cap i\mathfrak{L}_1^{(\perp)} = i\mathfrak{L}_1 \cap \mathfrak{L}_1^{(\perp)} = \{\theta\},$$

$$\mathfrak{L}_2 \cap i\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{L}_2^{(\perp)} \cap i\mathfrak{L}_2^{(\perp)} = \{\theta\},\ \mathfrak{L}_2 \cap i\mathfrak{L}_2^{(\perp)} \neq \{\theta\},\ i\mathfrak{L}_2 \cap \mathfrak{L}_2^{(\perp)} \neq \{\theta\},$$

$$\mathfrak{L}_3 \cap i\mathfrak{L}_3 \neq \{\theta\},\ \mathfrak{L}_3^{(\perp)} \cap i\mathfrak{L}_3^{(\perp)} \neq \{\theta\};\ \mathfrak{L}_3 \cap i\mathfrak{L}_3^{(\perp)} \neq \{\theta\},\ i\mathfrak{L}_3 \cap \mathfrak{L}_3^{(\perp)} \neq \{\theta\},$$

и для любого $h = (h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4, \ldots) \in l_2$

$$P_1 h = \left(\frac{h_1 + \alpha\overline{h_2}}{1+|\alpha|^2},\ \frac{\alpha(\overline{h_1} + \overline{\alpha}h_2)}{1+|\alpha|^2},\ \frac{h_3 + \alpha\overline{h_4}}{1+|\alpha|^2},\ \frac{\alpha(\overline{h_3} + \overline{\alpha}h_4)}{1+|\alpha|^2}, \ldots\right),$$

$$P_2 h = \left(\frac{h_1 - \overline{h_2}}{2},\ \frac{h_2 - \overline{h_1}}{2},\ \frac{h_3 + (2+i)\overline{h_4}}{6},\ \frac{(2+i)\overline{h_3} + 5h_4}{6}, \ldots\right),$$

$$P_3 h = \left(\frac{h_1 - \overline{h_2}}{2},\ \frac{h_2 - \overline{h_1}}{2},\ h_3,\ h_4,\ \frac{(1+i)h_5 + (3+i)\overline{h_6}}{8},\ \frac{(3-i)\overline{h_5} + (7+i)h_6}{8},\ 0,\ 0, \ldots\right)$$

где $P_i : l_2 \to \mathfrak{L}_i$, $i = 1, 2-$ аддитивные ортопроекторы.

Отметим в заключение, что действия над аддитивными ортопроекторами (сложение, умножение, вычитание) обладают такими же свойствами как и в линейном случае [14] с заменой $\oplus, \ominus$ на $(+), (-)$ соответственно.

Список литературы

[1] Sharma C.S., Almeyda D.F. *Semilinear operators* //J. Math. Phys.. 1988., v. 29., n. 11, pp. 2411-2420.

[2] Брателли У., Робинсон Д. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика* "Мир", М., 1982. 511 с.

[3] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики т.1* - "Мир", М., 1977. 357 с.

[4] Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики т.2* - "Мир", М., 1978. 395 с.

[5] Йост Р. *Общая теория квантованных полей* - "Мир", М., 1967. - 236 с.

[6] Стритер Р., Вайтман А.С. *PCT, спин и статистики и всё такое* - "Наука", М., 1966. 251 с.

[7] Вигнер Е. *Теория групп и её приложение к квантовомеханической теории атомных спектров* "ИЛ", М., 1961. - 444 с.

[8] Рихтмайер Р. *Принципы современной математической физики т.2* - "Мир", М., 1984. 381 с.

[9] Omladič M., Šemrl P. *Additive mapping preserving operators of rank one* //Linear Algebra Appl., 1993., 182, pp. 239-256.

[10] Timmermann W. *Additive mapping in algebras of unbounded operators preserving operators of rank one* , arXiv:math.OA/0405545 v1 28 May 2004.

[11] Omladič M., Šemrl P. *On nonlinear perturbations of isometries* //Math. Annalen., 1995., 303, pp. 617-628.

[12] Третьяков Д.В. *Классификация и свойства спектра аддитивных операторов* // Динамические системы. Межведомств. научн. сб. 1994. вып. 13. стр. 123-127.

[13] Кужель А.В. *Классификация спектра в алгебрах* // Докл. АН УССР, 1983, сер. "А", № 10, стр. 11-14.

[14] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. т.1* - Изд-во при Харьковском гос. ун-те издательского объединения "Вища школа", Харьков. 1977. - 315 с.

E-mail: tretyakov@crimea.edu

Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) 95 – 122

УДК 517.983

Д. Л. Тышкевич

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Введение

В данной работе мы рассматриваем вопрос, связанный с описанием максимальных инвариантных (более точно, приводящих) подпространств непрерывного оператора в пространстве с индефинитной метрикой, индуцирующих унитарный оператор. На пространства мы не накладываем никаких ограничений, исключая ограничения категорного характера, заключающиеся в том, что мы рассматриваем классы пространств, в которых можно строить элементарные ротации непрерывных операторов ([3]). Описание *всех* максимальных приводящих подпространств непрерывного оператора в пространстве с индефинитной метрикой, индуцирующих унитарный оператор, удаётся построить на основе конструкции *элементарной ротации* непрерывного оператора.

В теории пространств Крейна элементарная ротация — это унитарный оператор (в смысле индефинитной метрики), дополнительно удовлетворяющий определённым условиям и содержащий исходный оператор в качестве компоненты. Элементарная ротация существует для любого непрерывного оператора и является важнейшим инструментом при исследовании таких базовых вопросов современной теории операторов в пространствах Крейна как: вопрос существования сжимающих, изометрических и унитарных расширений операторов, теория дилатаций, лифтинг коммутанта, теория унитарных узлов и др. Интересные и важные приложения находит понятие элементарной ротации в теории аналитических функций (в том числе и функций со значениями в векторных пространствах), здесь можно указать на такие разделы как: теория унивалентных функций, теория интерполяции в различных классах аналитических функций, теория воспроизводящих ядер, алгоритм Шура. Подробную информацию по данному кругу вопросов и многочисленные ссылки можно найти в курсе лекций [4] (см. также домашнюю страницу [5] в сети Интернет одного из авторов [4]).

В работе [3] нами были определены основные конструктивные моменты построения элементарной ротации оператора в классе пространств Крейна а также наиболее общие и естественные классы пространств и операторов, на которые эти конструктивные моменты распространяются. Более точно, были определены основные категории *п*ространств с *в*нутренним *п*роизведением (ПВП) и изучены некоторые их свойства. В частности, были введены понятия *матричной категории* и *категории с квадратичным расщеплением*, а также рассмотрены примеры, иллюстрирующие естественность введённых определений. Самыми общими категориями пространств, в которых для любого линейного непрерывного оператора существует элементарная ротация, являются категории с квадратичным расщеплением. О результатах, касающихся категории правильных банаховых пространств, было доложено в [6].

1. Обозначения, определения и вспомогательные результаты

Все обозначения и определения, специально не оговоренные в данной работе, взяты нами из монографий [1, 2].

1.1. **Некоторые специальные обозначения.** Через $\mathfrak{X} \overset{e}{+} \mathfrak{Y}$ обозначается прямая (внешняя) сумма линейных пространств $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$: $\{\langle x, y\rangle \mid x \in \mathfrak{X},\ y \in \mathfrak{Y}\}$.

$\mathrm{l}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — совокупность *всех* линейных операторов с областью определения — *всем* линейным пространством $\mathfrak{X}$ и областью значений, лежащей в линейном пространстве $\mathfrak{Y}$. Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — линейные *топологические* пространства, то $\mathrm{lc}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$ — совокупность всех *непрерывных* в соответствующих топологиях операторов из $\mathrm{l}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$.

$\mathrm{Subsp}(\mathfrak{X})$ — совокупность всех подпространств (замкнутых линеалов) топологического пространства $\mathfrak{X}$.

Если $\mathfrak{X}$ — пространство Крейна, то через $\kappa(\mathfrak{X}) = \langle \kappa_-(\mathfrak{X}), \kappa_+(\mathfrak{X})\rangle$ будет обозначаться (гильбертов) индекс инерции пространства $\mathfrak{X}$, где $\kappa_-(\mathfrak{X})$ и $\kappa_+(\mathfrak{X})$ — соответственно число отрицательных и число положительных квадратов пространства $\mathfrak{X}$.

Если A — самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве, то через S_A будем обозначать *строгий знак* оператора A, т.е. оператор, определяемый равенствами: $S_A|\overline{\mathrm{R}(A)} := \mathrm{sgn}(A)|\overline{\mathrm{R}(A)}$, $S_A|\ker A := I_{\ker A}$.

Если $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — линейные пространства, то через $\mathrm{Inv}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ будем обозначать совокупность всех обратимых операторов из $\mathrm{l}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$. Если же $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — топологические линейные пространства, то через $\mathrm{CInv}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ будет обозначаться множество всех обратимых операторов из $\mathrm{lc}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$, обратные к которым лежат в $\mathrm{lc}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$. Если $\mathfrak{X}$ совпадает с $\mathfrak{Y}$, то будем использовать сокращённую запись: $\mathrm{Inv}(\mathfrak{X})$, $\mathrm{CInv}(\mathfrak{X})$.

Если $\mathfrak{X}$ — ПВП, то через $\mathrm{Sadj}(\mathfrak{X})$ будет обозначено множество всех самосопряжённых операторов из $\mathrm{lc}(\mathfrak{Y}, \mathfrak{X})$.

Пусть $\mathcal{K}$ — категория. Через $\mathrm{Obj}(\mathcal{K})$ и $\mathrm{Ar}(\mathcal{K})$ обозначаются соответственно совокупности объектов и стрелок категории $\mathcal{K}$. Через $\mathcal{K}(a,b)$ будет обозначаться совокупность всех стрелок категории $\mathcal{K}$ с началом a и концом b $(a,b \in \mathrm{Obj}(\mathcal{K}))$.

1.2. **Разложение Вольда.**

Теорема 1. *Пусть V — (полу)унитарный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда пространство $\mathfrak{H}$ разлагается в сумму:*

$$\mathfrak{H} = M_+(V) \oplus \mathfrak{R}(V),$$

где $M_+(V) := \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{N}_+} V \ker V^*$, $\mathfrak{R}(V) := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_+} V^n\mathfrak{H}$. Подпространства $M_+(V)$ и $\mathfrak{R}(V)$ приводят V, и при этом $V|M_+(V)$ является чистым сдвигом, а $V|\mathfrak{R}(V)$ — унитарным оператором.

Пусть $Q := I - VV^*$ — ортопроектор на $\ker V^*$. Теорема 1 означает, что для любого $h \in \mathfrak{H}$ имеет место представление: $h = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}_+} V^k h_k + \widetilde{h}$, $h_k \in \ker V^*$, $\widetilde{h} \in \mathfrak{R}(V)$. При этом $h_k = QV^{*k}h$ $(k \in \mathbb{N}_+)$ — т.н. *k*-й *коэффициент Фурье* вектора h. Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \ker V^*$ — некоторое непустое подмножество. Через $\mathcal{F}_V^k(\mathfrak{M})$ будем обозначать совокупность всех векторов из $\mathfrak{H}$, k й коэффициент Фурье которых лежит в $\mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{M}$ — подпространство, то и $\mathcal{F}_V^k(\mathfrak{M})$ является подпространством. Имеют место следующие элементарные утверждения.

Предложение 1.

(1) $h \in M_+(V) \Leftrightarrow V^n h \in M_+(V)$ $(h \in \mathfrak{H},\ n \in \mathbb{N})$

(2) $V^{*n}\big(\mathrm{R}(V^n) \cap M_+(V)\big) = M_+(V)$ $(n \in \mathbb{N})$.

(3) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}_+} \mathcal{F}_V^n(\{0\}) = \mathfrak{R}(V)$.

1.3. **О пространстве Крейна.** Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, J — некоторая симметрия пространства $\mathfrak{H}$. Через $\mathrm{Kr}(\mathfrak{H}, J)$ будем обозначать пространство Крейна с носителем $\mathfrak{H}$ и канонической симметрией J.

1.4. **Операторы, унитарные на подмножествах.**

Определение 1. Пусть $T \in \mathrm{l}(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$ — некоторое подмножество. Будем говорить, что T — *изометрический* на $\mathfrak{M}$, если для любых $x,\ y \in \mathfrak{M}$ $[Tx, Ty] = [x, y]$. Если $T \in \mathrm{adj}(\mathfrak{X})$, то назовём T — *коизометрическим* на $\mathfrak{M}$, если $T^\sharp$ — изометрический на $\mathfrak{M}$. Оператор $T \in \mathrm{adj}(\mathfrak{X})$ будем называть *унитарным* на $\mathfrak{M}$, если T одновременно изометрический и коизометрический на $\mathfrak{M}$.

Предложение 2. *Любой оператор из $\mathrm{l}(\mathfrak{X})$ является изометрическим на любом инвариантном нейтральном подмножестве.*

Предложение 3. *Пусть $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{X}$ — некоторое подмножество. Оператор T — является изометрическим (коизометрическим) на $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда, когда $\delta_T \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^{[\perp]}$ ($\delta_{T^\sharp} \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}^{[\perp]}$).*

Предложение 4. *Пусть $T \in \mathrm{lc}(\mathfrak{X})$, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{X}$ — некоторый линеал, и T — унитарен на $\mathfrak{L}$. Тогда T — унитарен на $\mathrm{Clos}\,\mathfrak{L}$.*

1.5. **Элементарная ротация оператора.** Следующее ниже определение является распространением известного определения (см. [4]) на случай матричных категорий ([3]).

Пусть $\mathcal{K}$ — матричная категория, $\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2 \in \mathrm{Obj}(\mathcal{K})$.

Определение 2. *Элементарной ротацией (elementary rotation, Julia operator)* оператора $T \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2)$ назовём оператор $U \in \mathcal{K}(\mathfrak{N}_1 \overset{c}{[+]} \mathfrak{X}_1, \mathfrak{N}_2 \overset{c}{[+]} \mathfrak{X}_2)$, представимый матрицей

$$U = \begin{bmatrix} T & A \\ C & B \end{bmatrix} \tag{1}$$

и удовлетворяющий условиям:

1. U — унитарный оператор.

2. $\mathrm{Clos}\,\mathrm{R}(A^\sharp) = \mathfrak{X}_1$. $\mathrm{Clos}\,\mathrm{R}(C) = \mathfrak{X}_2$.

(последние соотношения равносильны соотношениям: $\ker A = \{0\}$, $\ker C^\sharp = \{0\}$).

В работе [3] нами был доказан следующий результат для произвольной категории с квадратичным расщеплением ([3, теор. 3]).

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{K}$ — категория с квадратичным расщеплением. Для любого оператора $T \in \mathrm{Ar}(\mathcal{K})$ существует $U \in \mathrm{Ar}(\mathcal{K})$ — элементарная ротация T.*

1.6. **Решётки подпространств.** Пусть $\mathrm{Neutr}(\mathfrak{X})$ — совокупность всех *нейтральных* подпространств ПВП $\mathfrak{X}$.

Предложение 5. $\mathrm{Neutr}(\mathfrak{X})$ *и* $\mathrm{Subsp}(\mathfrak{X})$ *являются полными решётками относительно операций:*

$$\bigvee_{i \in I} \mathfrak{L}_i := \mathrm{Clos}\,\mathrm{Lin} \bigcup_{i \in I} \mathfrak{L}_i;$$

$$\bigwedge_{i \in I} \mathfrak{L}_i := \bigcap_{i \in I} \mathfrak{L}_i.$$

1.7. **Вспомогательные результаты.**

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ — топологические пространства, $T \in \mathrm{l}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$ — непрерывный оператор, $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{Y}$ — некоторое подпространство. Тогда $T^{-1}(\mathfrak{L})$ — подпространство.*

Предложение 7. *Пусть* $\mathfrak{X}$ – *некоторое невырожденное ПВП,* $T \in \mathrm{lc}(\mathfrak{X})$, *и* $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{Y}$ – *некоторое подпространство. Тогда*

$$T^{-1}(\mathfrak{L}) = (T^{\sharp}\mathfrak{L}^{[\perp]})^{[\perp]}.$$

Предложение 8. *Пусть* L – *самосопряжённый оператор в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, $\widetilde{L} := L|\overline{\mathrm{R}(L)}$ *и* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{H}$ – *некоторое подмножество. Справедлива следующая эквиваленция:*

$$Lh \in \mathfrak{N} \;\Leftrightarrow\; h \in \ker L + \widetilde{L}^{-1}(\mathfrak{N} \cap \mathrm{R}(L)).$$

Доказательство. Пусть $h = h_0 + h_1$, где $h_0 \in \ker L$, $h_1 \in \overline{\mathrm{R}(L)}$. Тогда

$$Lh \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow Lh \in (\mathfrak{N} \cap \mathrm{R}(L)) \Leftrightarrow \widetilde{L}h_1 \in (\mathfrak{N} \cap \mathrm{R}(L)) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow h_1 \in \widetilde{L}^{-1}(\mathfrak{N} \cap \mathrm{R}(L)) \Leftrightarrow h = h_0 + h_1 \in \ker L + \widetilde{L}^{-1}(\mathfrak{N} \cap \mathrm{R}(L)).$$

Предложение 9. *Пусть* V – *(полу)унитарный оператор в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *и* $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$ – *некоторое подмножество. Имеют место следующие эквиваленции:*

$$V^n h \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow h \in V^{*n}(\mathfrak{N} \cap \mathrm{R}(V^n)),$$
$$V^{*n} h \in \mathfrak{N} \Leftrightarrow h \in \ker V^{*n} + V^n \mathfrak{N}.$$

Предложение 10. *Пусть* $\mathfrak{H}$ – *гильбертово пространство,* $\mathfrak{L}$ – *подпространство* $\mathfrak{H}$, $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\{Y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *семейства из* $\mathrm{Subsp}(\mathfrak{L})$, $\mathrm{Subsp}(\mathfrak{L}^{\perp})$ *соответственно. Тогда*

$$\bigcap_{\alpha\in A}(X_\alpha \oplus Y_\alpha) = \bigcap_{\alpha\in A} X_\alpha \oplus \bigcap_{\alpha\in A} Y_\alpha.$$

Предложение 11. *Пусть* $\mathfrak{H}$ – *гильбертово пространство,* V – *произвольный унитарный оператор, а* J – *произвольная симметрия в* $\mathfrak{H}$. *Имеет место следующая эквиваленция:*

$$\mathcal{E} \in \mathrm{Kr}(\mathfrak{H}, J) \Leftrightarrow V\mathcal{E} \in \mathrm{Kr}(\mathfrak{H}, VJV^*).$$

Эта эквиваленция задаёт биективное соответствие между $\mathrm{Kr}(\mathfrak{H}, J)$ *и* $\mathrm{Kr}(\mathfrak{H}, VJV^*)$.

Предложение 12. *Пусть* $\mathfrak{H}$ – *гильбертово пространство,* $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ – *некоторое фиксированное разложение* $\mathfrak{H}$, *причём* $\dim \mathfrak{H}_1 = \dim \mathfrak{H}_2$. *Пусть* $K \in B(\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2)$ – *фиксированный унитарный оператор,* B – *произвольный самосопряжённый и обратимый оператор в* $\mathfrak{H}_1$. *Рассмотрим самосопряжённый оператор* $N_B \in B(\mathfrak{H})$:

$$N_B := \begin{bmatrix} |B| & iBK^* \\ -iKB & K|B|K^* \end{bmatrix}.$$

Тогда

(a): $0 \in \rho(B)$ *тогда и только тогда, когда* $0 \in \rho\,(N_B|\overline{\mathrm{R}(N_B)}\,)$;

(b): $0 \in \sigma_e(B)$ *тогда и только тогда, когда* $0 \in \sigma_e(N_B|\overline{\mathrm{R}(N_B)})$;

(c): *соответствие* ν: $\mathrm{Sadj}(\mathfrak{H}_1) \longrightarrow \mathrm{Sadj}(\mathfrak{H})$, $\nu(B) := N_B$, $B \in \mathrm{Sadj}(\mathfrak{H}_1)$, *является инъективным.*

Доказательство. Непосредственная проверка показывает, что из обратимости оператора B следуют равенства:

$$\begin{aligned} \ker N_B &= \{h_1 + iKS_Bh_1 \mid h_1 \in \mathfrak{H}_1\}, \\ \overline{\mathrm{R}(N_B)} &= \{h_1 - iS_BK^*h_1 \mid h_1 \in \mathfrak{H}_1\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Отсюда

$$N_B \begin{pmatrix} h_1 \\ -iS_BK^*h_1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} |B|h_1 \\ -iKBh_1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Утверждение (c) непосредственно вытекает из равенства (3).

Из (3) также следует равенство

$$\left\| N_B \begin{pmatrix} h_1 \\ -iS_BK^*h_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 8\|Bh_1\|^2,$$

которое вместе с очевидным равенством

$$\left\| \begin{pmatrix} h_1 \\ -iS_BK^*h_1 \end{pmatrix} \right\|^2 = 2\|h_1\|^2$$

приводит, после несложных стандартных рассуждений, к утверждениям (a) и (b).

Предложение 13. *Пусть* $\mathfrak{H}$ — *гильбертово пространство,* J — *некоторая (произвольная) симметрия в* $\mathfrak{H}$. *Для любого максимального нейтрального подпространства* $\mathcal{N}$ *пространства* $\mathfrak{X} := \mathrm{Kr}(\mathfrak{H}, J)$ *существуют (гильбертово) унитарный оператор* V *в* $\mathfrak{H}$ *и максимальное нейтральное подпространство* $\mathcal{M}$ *в* $\mathfrak{X}$, *удовлетворяющие условиям:*

(1) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V^n\mathcal{N} = \{0\}$.

(2) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V^n\mathcal{M} \neq \{0\}$, *и существуют такие вектора* $h \in \mathfrak{H}$, $h' \in \mathcal{M}$, *что* $\mathrm{Re}(h, h') \neq 0$.

(3) *Если* $\kappa_-(\mathfrak{X}) = \kappa_+(\mathfrak{X})$, *то в* $\mathfrak{X}$ *существуют такие проекционно полные дефинитные подпространства* $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ *(рассматриваемые в соответствующих местах как гильбертовы подпространства* $\mathfrak{H}$*),* $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1^{[\perp]} = \mathfrak{H}_1^{\perp}$, *и гильбертово унитарный оператор* K: $\mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$, *что для произвольного* $B \in \mathrm{Sadj}(\mathfrak{H}_1)$ *выполняются равенства*

$$\begin{aligned} &VN_B = N_BV(I_{\mathfrak{H}} - JN_B), \\ &N_BJN_B = 0, \\ &N_BVJV^*N_B = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

где N_B — оператор из предложения 12.

Доказательство.

(1) Пусть $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_-[\oplus]\mathfrak{H}_+$ — каноническое разложение пространства $\mathfrak{X}$. Не ограничивая общности, предположим, что $\dim \mathfrak{H}_- \leqslant \dim \mathfrak{H}_+$ (в противном случае во всём доказательстве меняем ролями $\mathfrak{H}_-$ и $\mathfrak{H}_+$). Пусть $K\colon \mathfrak{H}_- \to \mathfrak{H}_+$ — угловой оператор максимального подпространства $\mathcal{N}$, и $\mathfrak{N}_+ := \mathrm{R}(K)$, $\mathfrak{L}_+ := \mathfrak{H}_+ \ominus \mathfrak{N}_+$. Из нейтральности $\mathcal{N}$ следует, что $K\colon \mathfrak{H}_- \to \mathfrak{N}_+$ — унитарный оператор. Зададим операторы V и $\widetilde{K}$ матрицами относительно разложения $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_- \oplus \mathfrak{N}_+ \oplus \mathfrak{L}_+$:

$$V := \begin{bmatrix} 0 & -iK^* & 0 \\ iK & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{\mathfrak{L}_+} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{K} := \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{H}_-} & 0 & 0 \\ K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Простая проверка показывает, что V — унитарный оператор, и

$$V^2 = I_{\mathfrak{H}}, \tag{5}$$

$$\mathcal{N} = \widetilde{K}\mathfrak{H}, \tag{6}$$

$$\widetilde{K}^* V \widetilde{K} = 0. \tag{7}$$

(таким образом, V — симметрия). Из (5) следует, что $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V^n\mathcal{N} = \mathcal{N} \cap V\mathcal{N}$, а из (6), (7) вытекает ортогональность подпространств $\mathcal{N}$ и $V\mathcal{N}$, что и доказывает справедливость рассматриваемого равенства.

(2) Пусть S — некоторая симметрия в пространстве $\mathfrak{H}_-$. Положим $R := iKS$, и определим оператор $\widetilde{R}$ в $\mathfrak{H}$ матрицей относительно разложения в п. (1):

$$\widetilde{R} := \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{H}_-} & 0 & 0 \\ R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда $\mathcal{M} := \mathrm{R}(\widetilde{R})$ — максимальное нейтральное подпространство, и R — угловой оператор $\mathcal{M}$ (см. (5)–(7)).

Так как S — симметрия, то существует ненулевой собственный вектор h'_- оператора S, соответствующий собственному значению 1 : $Sh' = h'_-$, откуда следуют равенства

$$-iK^*Rh'_- = h'_-,$$

$$iKh'_- = Rh'_-.$$

Эти равенства означают, что $0 \neq h'_- + Rh'_- \in \mathcal{M} \cap V\mathcal{M} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V^n\mathcal{M}$. Пусть $h = h'_- + h_+$ ($h_+ \in \mathfrak{H}_+$) — вектор, для которого $\|h_+\| < \|h'_-\|$. Тогда

$$\mathrm{Re}(h, h') = \|h'_-\|^2 + \mathrm{Re}(h_+, Rh'_-),$$

и $|\mathrm{Re}(h_+, Rh'_-)| \leqslant \|h_+\|\|Rh'_-\| = \|h_+\|\|h'_-\| < \|h'_-\|^2$, поэтому $\mathrm{Re}(h, h') \neq 0$.

(3) Если положительный и отрицательный индексы инерции $\mathfrak{X}$ совпадают, то, очевидно, в разложении из п.(1) $\mathfrak{L}_+ = \{0\}$, и операторы V, J приобретают вид:

$$V := \begin{bmatrix} 0 & -iK^* \\ iK & 0 \end{bmatrix}, \quad J := \begin{bmatrix} -I_{\mathfrak{H}_-} & 0 \\ 0 & I_{\mathfrak{H}_+} \end{bmatrix}.$$

Положим $\mathfrak{H}_1 := \mathfrak{H}_-$, $\mathfrak{H}_2 := \mathfrak{H}_+$, и пусть K — угловой оператор подпространства $\mathcal{N}$, тот же, что и в п.(1). Справедливость равенств (4) устанавливается непосредственной проверкой. (Заметим, что $VJV^* = VJV = -J$, поэтому достаточно доказать лишь первые два равенства из (4)).

1.8. **Условие Цорна.** Говорят, что подмножество Z упорядоченного множества A *удовлетворяет условию Цорна*, если точная верхняя грань любой цепи лежит в Z.

Через $\operatorname{Max} A$ обозначено множество всех максимальных элементов ч.у. множества A.

Предложение 14. *Полная решётка удовлетворяет условию Цорна.*

Предложение 15. *Пусть каждое подмножество Z_i из семейства подмножеств $\{Z_i\}_{i\in I}$ ч.у. множества A удовлетворяет условию Цорна. Тогда пересечение $\bigcap\limits_{i\in I} Z_i$ также удовлетворяет условию Цорна.*

Предложение 16. *Пусть $\{A_i\}_{i\in I}$ — семейство ч.у. множеств, $A := \prod\limits_{i\in I} A_i$ — соответствующее произведение (как ч.у. множеств). Пусть $\{Z_i\}_{i\in I}$, $Z_i \subseteq A_i$, некоторое семейство множеств, удовлетворяющих условию Цорна. Тогда соответствующее произведение $Z := \prod\limits_{i\in I} Z_i$ удовлетворяет условию Цорна.*

Предложение 17. *Пусть A — ч.у. множество, $a \in A$ — произвольный элемент. Обозначим $A_a := \{a' \in A \mid a \leqslant a'\}$. Если A удовлетворяет условию Цорна, то A_a также удовлетворяет условию Цорна, и*

$$\operatorname{Max} A_a \subseteq \operatorname{Max} A. \tag{8}$$

Предложение 18. *Пусть A, B — ч.у. множества, множество A удовлетворяет условию Цорна, и $f\colon A \to B$ — монотонная функция, обладающая свойством:*

$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad b \leqslant f(a). \tag{9}$$

Тогда

$$\operatorname{Max} B \subseteq f(\operatorname{Max} A) \tag{10}$$

Доказательство. Если $\operatorname{Max} B = \emptyset$, то включение (10) тривиально.

Допустим, $\operatorname{Max} B \neq \emptyset$, и $b \in \operatorname{Max} B$. Тогда по (9) существует $a \in A$: $b \leqslant f(a)$. Так как b — максимальный элемент, то $b = f(a)$. Рассмотрим множество A_a. Нетрудно видеть, что для любого $a' \in A_a$ $b = f(a')$. Действительно, если $a \leqslant a'$, то в силу

монотонности f $b = f(a) \leqslant f(a')$, а в силу максимальности b $b = f(a')$. Тогда, в силу (8) предложения 17, $b \in f(\operatorname{Max} A_a) \subseteq f(\operatorname{Max} A)$.

Замечание 1. Включение (10), как показывают простые примеры, в общем случае не обязано быть равенством. Пусть, к примеру, $n \in \overline{2,\infty}$, A — множество $\overline{1,2n}$, упорядоченное отношением делимости, B — то же множество с естественным порядком, f — тождественная функция на $\overline{1,2n}$. Тогда выполняются все условия предложения 18, однако, $\operatorname{Max} B = \{2n\}$, $f(\operatorname{Max} A) = \operatorname{Max} A = \overline{n+1,2n}$ $(n > 1!)$.

Предложение 19. *Пусть $\mathcal{L}$ — полная решётка. $f\colon \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ — отображение, удовлетворяющее свойству:*

$$f(\bigvee_{i\in I} a_i) \leqslant \bigvee_{i\in I} f(a_i) \tag{11}$$

для произвольного семейства $\{a_i\}_{i\subset I}$ из $\mathcal{L}$. Пусть Z_1, Z_2 — некоторые подмножества $\mathcal{L}$, удовлетворяющие условию Цорна. Определим множества:

$$\overrightarrow{\mathfrak{s}}(f, Z_1, Z_2) := \{\langle a_1, a_2\rangle \in Z_1 \times Z_2 \mid f(a_1) \leqslant a_2\},$$
$$\overleftarrow{\mathfrak{s}}(f, Z_1, Z_2) := \{\langle a_1, a_2\rangle \in Z_1 \times Z_2 \mid f(a_2) \leqslant a_1\}.$$

Тогда каждое из множеств $\overrightarrow{\mathfrak{s}}(f, Z_1, Z_2)$, $\overleftarrow{\mathfrak{s}}(f, Z_1, Z_2)$ удовлетворяет условию Цорна. (На $\mathcal{L}^2$ естественным образом определяется частичный порядок, равный квадрату частичного порядка на $\mathcal{L}$).

Доказательство. Пусть $\{\langle a_{1i}, a_{2i}\rangle\}_{i\in I}$ — некоторая цепь из $\overrightarrow{\mathfrak{s}}(f, Z_1, Z_2)$. Тогда $\{a_{1i}\}_{i\in I}$, $\{a_{2i}\}_{i\in I}$ — цепи из Z_1, Z_2 соответственно. Положим $a_k := \bigvee_{i\in I} a_{ki}$ $(k \in \overline{1,2})$. Тогда, очевидно, $\langle a_1, a_2\rangle = \bigvee_{i\in I} \langle a_{1i}, a_{2i}\rangle$ и $\langle a_1, a_2\rangle \in Z_1 \times Z_2$; далее, в силу (11) и каждого из соотношений $f(a_{1i}) \leqslant a_{2i}$ $(i \in I)$, $f(a_1) = f(\bigvee_{i\in I} a_{1i}) \leqslant \bigvee_{i\in I} f(a_{1i}) \leqslant \bigvee_{i\in I} a_{2i} = a_2$. Таким образом, $\langle a_1, a_2\rangle$, — верхняя грань цепи $\{\langle a_{1i}, a_{2i}\rangle\}_{i\in I}$, — принадлежит $\overrightarrow{\mathfrak{s}}(f, Z_1, Z_2)$.

Для множества $\overleftarrow{\mathfrak{s}}(f, Z_1, Z_2)$ доказательство проводится аналогично.

1.9. **Нетривиальность совокупностей подпространств.** Пусть $n \in \mathbb{N}$, $\{\mathfrak{X}_i\}_{i\in\overline{1,n}}$ — некоторая система топологических пространств. Пусть $\mathcal{A} \subseteq \prod_{i\in\overline{1,n}} \operatorname{Subsp}(\mathfrak{X}_i)$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (т.е. $\mathcal{A}$ — некоторая непустая совокупность n-ок подпространств). Будем говорить, что множество $\mathcal{A}$ — *нетривиально*, если оно содержит набор, отличный от $\langle \overset{n}{\{0\}}, \ldots, \{0\}\rangle$.

2. Приводящие подпространства, индуцирующие унитарный оператор

2.1. **Мотивировка и исходные результаты.** Важную роль при исследовании сжимающих операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ играет теорема о разбиении произвольного сжатия T в ортогональную сумму вполне неунитарного и унитарного слагаемых (в частности, только вполне неунитарное сжатие полностью, с

точностью до унитарной эквивалентности, восстанавливается по своей характеристической функции). Это разбиение получается благодаря тому, что существует наибольшее (по включению) приводящее подпространство $\mathcal{H}_T^0$, на котором T унитарен. Традиционно это подпространство определяется следующим образом:

$$\mathcal{H}_T^0 := \{h \in \mathfrak{H} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad \|T^n h\| = \|T^{*n} h\| = \|h\|\}. \tag{12}$$

При попытке непосредственного обобщения данного результата на случай, когда $\mathfrak{H}$ — пространство с *индефинитной* метрикой, возникает следующая проблема: множество

$$\{h \in \mathfrak{H} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad [T^n h, T^n h] = [T^{\sharp n} h, T^{\sharp n} h] = [h, h]\}, \tag{13}$$

определяемое по прямой аналогии с (12) (цепочка $\|T^n h\| = \|T^{*n} h\| = \|h\|$ эквивалентна цепочке $(T^n h, T^n h) = (T^{*n} h, T^{*n} h) = (h, h)$), будучи однородным, может не оказаться, даже в самых простых случаях, линеалом.

Пример 1. Рассмотрим произвольное ПВП $\mathfrak{X}$ и скалярный оператор $T := aI$, $a \in \mathbb{C}$, $|a| \neq 1$. Тогда $T^\sharp = \bar{a}I$, и $[T^n h, T^n h] = [T^{\sharp n} h, T^{\sharp n} h] = |a|^{2n}[h, h]$, каждое из равенств $|a|^{2n}[h, h] = [h, h]$ может иметь место, лишь когда h — нейтральный вектор. Таким образом, множество (13) представляет собой совокупность всех нейтральных векторов пространства $\mathfrak{X}$, которая, как известно, не является линеалом, если размерность $\mathfrak{X}$ превышает единицу.

В силу очевидных цепочек:

$$(T^{n+1} h, T^{n+1} h) = (T^n h, T^n h) \Leftrightarrow ((I - T^*T)T^n h, T^n h) = 0 \Leftrightarrow D_T T^n h = 0,$$
$$(T^{*n+1} h, T^{*n+1} h) = (T^{*n} h, T^{*n} h) \Leftrightarrow ((I - TT^*)T^{*n} h, T^{*n} h) = 0 \Leftrightarrow D_{T^*} T^n h = 0,$$

где $D_T := (I - T^*T)^{\frac{1}{2}}$ (тогда $D_{T^*} = (I - TT^*)^{\frac{1}{2}}$), пространство (12) можно записать также в виде:

$$\mathcal{H}_T^0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \ker D_T T^n \bigcap \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \ker D_{T^*} T^{*n}. \tag{14}$$

Положим $\delta_T := I - T^*T$. Как известно, для неотрицательного самосопряжённого оператора A $\ker A^{\frac{1}{2}} = \ker A\,(= \mathrm{R}(A)^\perp)$. Поэтому (14) можно также записать в виде

$$\mathcal{H}_T^0 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \ker \delta_T T^n \bigcap \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \ker \delta_{T^*} T^{*n}. \tag{15}$$

(15) легко обобщается на *произвольный* всюду заданный сопрягаемый оператор T в *произвольном* ПВП $\mathfrak{X}$. Именно, полагая для общего случая $\delta_T := I - T^\sharp T$, рассмотрим подпространство

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \ker \delta_T T^n \bigcap \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} \ker \delta_{T^\sharp} T^{\sharp n}, \tag{16}$$

которое мы также обозначим через $\mathcal{H}_T^0$.

Предложение 20. *Подпространство (16) является приводящим для T, и T индуцирует в (16) унитарный оператор.*

Доказательство. Заметим, что операторы T, δ_T, $\delta_{T^\sharp}$ связаны следующим соотношением:

$$T\delta_T = \delta_{T^\sharp} T\,. \tag{17}$$

Пусть $h \in \mathcal{H}_T^0$. Рассмотрим вектор Th.

(1) $\delta_T T^n Th = \delta_T T^{n+1} h = 0$ $(n \in \mathbb{N}_+)$;

(2) $\delta_{T^\sharp} T^{\sharp\, n} Th = \delta_{T^\sharp} T^{\sharp(n-1)} h = 0$ $(n \in \mathbb{N})$, так как $h \in \ker \delta_T$, т.е. $h = T^\sharp Th$;

(3) В силу (17) $\delta_{T^\sharp} Th = T\delta_T h = 0$.

Таким образом, $Th \in \mathcal{H}_T^0$.

Доказательство принадлежности $T^\sharp h$ пространству $\mathcal{H}_T^0$ обосновывается аналогично с заменой T на $T^\sharp$ в силу симметричности строения $\mathcal{H}_T^0$ относительно перехода $T \leftrightarrows T^\sharp$.

Таким образом, $\mathcal{H}_T^0 \in \operatorname{Lat} T \cap \operatorname{Lat} T^\sharp$.

Унитарность оператора T на $\mathcal{H}_T^0$ тривиально следует из включений $\mathcal{H}_T^0 \subseteq \ker \delta_T$, $\mathcal{H}_T^0 \subseteq \ker \delta_{T^\sharp}$ и предложения 3.

Рассмотрим семейство подпространств

$$\mathfrak{U}_T := \{\mathfrak{L} \mid \mathfrak{L} \in \operatorname{Lat} T \cap \operatorname{Lat} T^\sharp,\ T \text{ унитарен на } \mathfrak{L}\}. \tag{18}$$

Предложение 20 означает, что $\mathcal{H}_T^0 \in \mathfrak{U}_T$. Однако, в отличии от гильбертова случая, $\mathcal{H}_T^0$ может не оказаться *наибольшим* элементом $\mathfrak{U}_T$, как показывает следующий пример.

Пример 2. Рассмотрим бесконечномерное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{L}$ некоторое (собственное бесконечномерное) подпространство пространства $\mathfrak{H}$ со свойством: $\dim \mathfrak{L} = \dim \mathfrak{L}^\perp$, и $Z\colon \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}^\perp$ некоторый унитарный оператор.

Положим $\mathfrak{X} := \operatorname{Kr}(\mathfrak{H}, J)$, где симметрия J задана относительно разложения

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{L} \oplus \mathfrak{L}^\perp \tag{19}$$

матрицей

$$J := \begin{bmatrix} 0 & Z^* \\ Z & 0 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим оператор T, заданный матрицей относительно разложения (19):

$$T := \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{bmatrix}, \tag{20}$$

где T_{11}, T_{12} T_{22} – некоторые операторы, действующие в соответствующих пространствах, конкретный вид которых мы зададим немного позже. Тогда, как показывает непосредственная проверка,

$$T^n = \begin{bmatrix} T_{11}^n & \sum\limits_{k\in\overline{0,n-1}} T_{11}^k T_{12} T_{22}^{n-1-k} \\ 0 & T_{22}^n \end{bmatrix}, \tag{21}$$

$$T^{\sharp\, n} = \begin{bmatrix} Z^* T_{22}^{*\, n} Z & Z^*\Big(\sum\limits_{k\in\overline{0,n-1}} T_{22}^{*\, k} T_{12}^* T_{11}^{*\,(n-1-k)}\Big) Z^* \\ 0 & Z T_{11}^{*\, n} Z^* \end{bmatrix}, \tag{22}$$

$$\delta_T = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}} - Z^* T_{22}^* Z T_{11} & -Z^*(T_{22}^* Z T_{12} + T_{12}^* Z^* T_{22}) \\ 0 & I_{\mathfrak{L}^\perp} - Z T_{11}^* Z^* T_{22} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

$$\delta_{T^\sharp} = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}} - T_{11} Z^* T_{22}^* Z & -(T_{11} Z^* T_{12}^* + T_{12} Z T_{11}^*) Z^* \\ 0 & I_{\mathfrak{L}^\perp} - T_{22}^* Z T_{11} Z^* \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Из (21), (22) непосредственно видно, что

$$\mathfrak{L} \in \operatorname{Lat} T \cap \operatorname{Lat} T^\sharp. \tag{25}$$

Положим теперь

$$T_{11} := V, \quad T_{12} := -\frac{1}{2} V L Z^*, \quad T_{22} := Z V Z^*, \tag{26}$$

где V – (гильбертово) (полу)унитарный, а L – (гильбертово) самосопряжённый оператор в $\mathfrak{L}$, дополнительно удовлетворяющий следующим условиям. Обозначим $\mathfrak{L}_0 := \mathfrak{R}(V)$ и пусть $Q = I_{\mathfrak{L}} - VV^*$ – ортопроектор в $\mathfrak{L}$ на $\ker V^*$. Выберем оператор L таким, чтобы

$$\ker L = M_+(V). \tag{27}$$

Тогда

$$\overline{\mathrm{R}(L)} = \mathfrak{L}_0, \tag{28}$$

откуда следуют равенства

$$Q V^{*k} L = 0 \ (k \in \mathbb{N}_+). \tag{29}$$

Из (21), (22) получим

$$T^n = \begin{bmatrix} V^n & -\frac{1}{2}\sum\limits_{k\in\overline{0,n-1}} V^{k+1} L V^{n-1-k} Z^* \\ 0 & Z V^n Z^* \end{bmatrix}, \tag{30}$$

$$T^{\sharp\, n} = \begin{bmatrix} V^{*n} & -\frac{1}{2}\sum\limits_{k\in\overline{0,n-1}} V^{*k} L V^{*(n-k)} Z^* \\ 0 & Z V^{*n} Z^* \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Далее, из (23), (24), (29)–(31), в силу (полу)унитарности V и самосопряжённости L, следуют равенства

$$\delta_T T^n = \begin{bmatrix} 0 & LV^n Z^* \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{32}$$

$$\delta_{T^\sharp} T^{\sharp n} = \begin{bmatrix} QV^{*n} & VLV^{*(n+1)}Z^* \\ 0 & ZQV^{*n}Z^* \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Теперь, согласно предложению 1 и формулам (27), 32),

$$\delta_T T^n \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow V^n Z^* x_2 \in M_+(V) \Leftrightarrow x_2 \in ZM_+(V),$$

откуда

$$\ker \delta_T T^n = \mathfrak{L} \oplus ZM_+(V). \tag{34}$$

Далее, в силу предложения 1, (27) и (33),

$$\delta_{T^\sharp} T^{\sharp n} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} QV^{*n}x_1 + VLV^{*(n+1)}Z^*x_2 &= 0 \\ ZQV^{*n}Z^*x_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} QV^{*n}x_1 &= 0 \\ VLV^{*(n+1)}Z^*x_2 &= 0 \\ ZQV^{*n}Z^*x_2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &\in \mathcal{F}_V^n(\{0\}) \\ x_2 &\in ZM_+(V) \\ x_2 &\in Z\mathcal{F}_V^n(\{0\}) \end{cases},$$

откуда

$$\ker \delta_{T^\sharp} T^{\sharp n} = \mathcal{F}_V^n(\{0\}) \oplus Z\big(M_+(V) \cap \mathcal{F}_V^n(\{0\})\big). \tag{35}$$

Применяя к формулам (34), (35) предложения 10, 1, получим:

$$\mathcal{H}_T^0 = \mathfrak{L}_0.$$

Варьируя в данном примере подпространство $\mathfrak{L}_0$ (за счёт V), мы будем получать экземпляры операторов T со "сколь угодно большим" или "сколь угодно малым" "отклонением" фиксированного подпространства $\mathfrak{L}$ от подпространства $\mathcal{H}_T^0$. Два "крайних" случая таковы. Если V — чистый сдвиг, то $\mathcal{H}_T^0 = \{0\}$, и поэтому $\mathfrak{L} \cap \mathcal{H}_T^0 = \{0\}$. Если V — унитарный оператор, то $\mathfrak{L} = \mathcal{H}_T^0$.

Мы видим, что в качестве приводящих подпространств в "патологическом" примере 2 фигурируют нейтральные (и даже гипернейтральные) подпространства. Некоторый свет на данное обстоятельство проливает следующее утверждение. Обозначим через $\mathfrak{U}_T^{nond}$ множество всех *невырожденных* подпространств из $\mathfrak{U}_T$.

Предложение 21. *$\mathcal{H}_T^0$ является верхней гранью множества $\mathfrak{U}_T^{nond}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{L} \in \mathfrak{U}_T^{nond}$. Из того, что $\mathfrak{L}$ — приводящее подпространство, следуют включения $\delta_T T^n \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$, $\delta_{T^\sharp} T^{\sharp n} \mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$, откуда

$$\delta_T T^n \mathfrak{L}[\perp]\mathfrak{L}^{[\perp]}, \quad \delta_{T^\sharp} T^{\sharp n} \mathfrak{L}[\perp]\mathfrak{L}^{[\perp]} \quad (n \in \mathbb{N}_+). \tag{36}$$

Далее, из унитарности операторов T, $T^\sharp$ на $\mathfrak{L}$ и включений $T^n\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$, $T^{\sharp n}\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$, элементарно следуют соотношения

$$\delta_T T^n \mathfrak{L}[\perp]\mathfrak{L}, \quad \delta_{T^\sharp} T^{\sharp n} \mathfrak{L}[\perp]\mathfrak{L} \quad (n \in \mathbb{N}_+). \tag{37}$$

Невырожденность $\mathfrak{L}$ и соотношения (36), (37) влекут равенства

$$\delta_T T^n \mathfrak{L} = \{0\}, \quad \delta_{T^\sharp} T^{\sharp n} \mathfrak{L} = \{0\} \quad (n \in \mathbb{N}_+). \tag{38}$$

(38) и означает, что $\mathfrak{L} \in \mathcal{H}_T^0$.

Следствие 1. *Если $\mathcal{H}_T^0$ — нейтральное (в том числе и нулевое) подпространство, то не существует ненулевых невырожденных приводящих оператор T подпространств, на которых T унитарен (т.е. $\mathfrak{U}_T^{nond}$ состоит из одного $\{0\}$).*

Замечание 2. Как показывает пример 2, в общем случае само $\mathcal{H}_T^0$, будучи верхней гранью $\mathfrak{U}_T^{nond}$, может и не лежать в последнем, т.е. не являться *наибольшим* элементом $\mathfrak{U}_T^{nond}$.

Следующие далее результаты проясняют эту ситуацию.

2.2. **Структура максимальных приводящих подпространств, индуцирующих унитарный оператор.** Рассмотрим семейство

$$\mathfrak{N}_T := \{\mathfrak{L} \mid \mathfrak{L} \in \operatorname{Lat} T \cap \operatorname{Lat} T^\sharp,\ \mathfrak{L} \text{ — нейтральный линеал}\}. \tag{39}$$

Предложение 22. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) $\mathfrak{N}_T \subseteq \mathfrak{U}_T$;

(2) $\mathfrak{N}_T$ *удовлетворяет условию Цорна;*

(3) $\mathfrak{U}_T$ *удовлетворяет условию Цорна.*

Доказательство. Первое утверждение следует из предложения 2.

Тогда, очевидно,

$$\mathfrak{N}_T = \operatorname{Lat} T \cap \operatorname{Lat} T^\sharp \cap \operatorname{Neutr}(\mathfrak{X}). \tag{40}$$

Известно, что $\operatorname{Neutr}(\mathfrak{X})$ удовлетворяет условию Цорна. Так как полная решётка также удовлетворяет условию Цорна, то утверждение 2 следует из (40) и предложения 15.

Пусть $\{\mathfrak{L}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — некоторая цепь из $\mathfrak{U}_T \subseteq \operatorname{Lat} T \cap \operatorname{Lat} T^\sharp$. $\operatorname{Lat} T \cap \operatorname{Lat} T^\sharp$ — полная решётка, поэтому $\bigvee\limits_{\alpha\in A} \mathfrak{L}_\alpha \in \operatorname{Lat} T \cap \operatorname{Lat} T^\sharp$. Покажем, что T — унитарен на $\bigvee\limits_{\alpha\in A} \mathfrak{L}_\alpha$. Так как T унитарен на каждом $\mathfrak{L}_\alpha$, $\alpha \in A$, и семейство $\{\mathfrak{L}_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — линейно упорядочено, то очевидным образом T унитарен на $\operatorname{Lin}\Big(\bigcup\limits_{\alpha\in A} \mathfrak{L}_\alpha\Big)$. Унитарность оператора T на

$\bigvee\limits_{\alpha\in A}\mathfrak{L}_\alpha = \operatorname{Clos}\operatorname{Lin}\Big(\bigcup\limits_{\alpha\in A}\mathfrak{L}_\alpha\Big)$ следует из предложения 4. Последнее утверждение 3 предложения доказано.

Мотивировкой следующих далее определений и результатов служит следующее простое наблюдение.

Пусть T — сжатие в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}_T := \overline{\mathrm{R}(D_T)}$, $\mathfrak{D}_{T^*} := \overline{\mathrm{R}(D_{T^*})}$. Тогда оператор $U \in B(\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{D}_{T^*}, \mathfrak{H}\oplus\mathfrak{D}_T)$,

$$U := \begin{bmatrix} T & D_{T^*}|\mathfrak{D}_{T^*} \\ D_T & -T^*|\mathfrak{D}_{T^*} \end{bmatrix},$$

является элементарной ротацией T.

С другой стороны, для линейного оператора A — $\ker A = A^{-1}(\{0\})$. В случае гильбертовых пространств $\{0\}$ — это единственное нейтральное подпространство. В общем случае произвольного непрерывного оператора T из произвольного невырожденного ПВП, подставляя в (14) вместо D_T и $D_{T^*}|\mathfrak{D}_{T^*}$ соответствующие компоненты элементарной ротации, а вместо $\{0\}$ — определённого типа нейтральные подпространства, мы получим описание максимальных элементов из $\mathfrak{U}_T$.

Итак, пусть $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ — невырожденные ПВП из некоторой категории с квадратичным расщеплением. В дальнейшем нам не важны сами категории, а имеет значение лишь факт существования элементарной ротации для любого непрерывного оператора. Также в дальнейшем мы этого оговаривать специально не будем, надеясь, что это не вызовет недоразумений.

Пусть

$$U = \begin{bmatrix} T & A \\ C & B \end{bmatrix} \in \operatorname{adj}(\mathfrak{X}\overset{e}{[+]}\mathfrak{N}_1, \mathfrak{X}\overset{c}{[+]}\mathfrak{N}_2)$$

— некоторая элементарная ротация оператора T. Пусть $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ — некоторые подпространства из $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ соответственно. Определим по U и $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ подпространство из $\mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2) := \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} (CT^n)^{-1}(\mathcal{E}_2) \bigcap \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} (A^\sharp T^{\sharp n})^{-1}(\mathcal{E}_1).$$

Тем самым определено отображение $\mathfrak{u}_U$: $\operatorname{Subsp}(\mathfrak{N}_1)\times\operatorname{Subsp}(\mathfrak{N}_2)\to\operatorname{Subsp}(\mathfrak{X})$.

Пусть множество $\mathfrak{E}_U$ состоит из всех пар подпространств $\langle\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\rangle$, $\mathcal{E}_i \in \operatorname{Subsp}\mathfrak{N}_i$ $(i\in\overline{1.2})$, удовлетворяющих соотношениям:

$$B\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2\,,\quad B^\sharp\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1\,; \tag{41}$$

$$CT^nA\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2\,,\quad A^\sharp T^{\sharp n}C^\sharp\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1 \quad (n\in\mathbb{N}_+)\,. \tag{42}$$

Очевидно, множество $\mathfrak{E}_U$ непусто, так как, по меньшей мере, пара нулевых подпространств входит в $\mathfrak{E}_U$.

Предложение 23. *Множество $\mathfrak{E}_U$ удовлетворяет условию Цорна.*

Доказательство. Положим $Z_i := \mathrm{Subsp}(\mathfrak{N}_i)$, $i \in \overline{1,2}$. Отметим, что произвольный оператор $T \in \mathrm{lc}(\mathfrak{X})$ порождает решёточное отображение $f_T\colon \mathrm{Subsp}\,\mathfrak{X} \to \mathrm{Subsp}\,\mathfrak{X}$, $f_T(\mathfrak{L}) := T\mathfrak{L}$, $\mathfrak{L} \in \mathrm{Subsp}\,\mathfrak{X}$, удовлетворяющее свойству (11) предложения 19. Тогда множество $\mathfrak{E}_U$ можно записать в виде:

$$\mathfrak{E}_U = \overrightarrow{\mathfrak{S}}(f_B, Z_1, Z_2) \bigcap \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} \overrightarrow{\mathfrak{S}}(f_{CT^nA}, Z_1, Z_2) \bigcap$$
$$\bigcap \overleftarrow{\mathfrak{S}}(f_{B^\sharp}, Z_1, Z_2) \bigcap \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} \overleftarrow{\mathfrak{S}}(f_{A^\sharp T^{\sharp n} C^\sharp}, Z_1, Z_2).$$

Далее применяем предложения 15 и 19.

Теорема 3. *Пусть* $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\rangle \in \mathfrak{E}_U$. *Тогда* $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \in \mathrm{Lat}\,T \cap \mathrm{Lat}\,T^\sharp$. *Иными словами,*

$$\mathfrak{u}_U(\mathfrak{E}_U) \subseteq \mathrm{Lat}\,T \cap \mathrm{Lat}\,T^\sharp.$$

Доказательство. Пусть

$$h \in \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2). \tag{43}$$

Рассмотрим вектор Th. Из свойств компонент элементарной ротации следуют соотношения:

(1) $CT^n(Th) = CT^{n+1}h$ $(n \in \mathbb{N}_+)$;
(2) $A^\sharp T^{\sharp n}(Th) = A^\sharp T^{\sharp(n-1)}(I_\mathfrak{X} - \delta_T)h = A^\sharp T^{\sharp(n-1)}h - A^\sharp T^{\sharp(n-1)}C^\sharp(Ch)$ $(n \in \mathbb{N})$;
(3) $A^\sharp(Th) = -B^\sharp(Ch)$.

В силу (43) и определения $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ (согласно последним трём соотношениям), $CT^{n+1}h \in \mathcal{E}_2$, $A^\sharp T^{\sharp(n-1)}h \in \mathcal{E}_1$. $Ch \in \mathcal{E}_2$. Используя определяющие свойства (41), (42) множества $\mathfrak{E}_U$, получим включение $Th \in \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. Таким образом, $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \in \mathrm{Lat}\,T$.

Доказательство включения $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \in \mathrm{Lat}\,T^\sharp$ проводится аналогично с использованием симметрии относительно перехода $U \rightleftarrows U^\sharp$ свойств (41), (42) и всех операторных тождеств, определяющих U.

Рассмотрим теперь множество $\mathfrak{E}_U^{neutr} := \mathfrak{E}_U \bigcap \Big(\mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_1) \times \mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_2)\Big)$.

Следствие 2. $\mathfrak{E}_U^{neutr}$ *удовлетворяет условию Цорна.*

Доказательство. Следует из предложений 16 и 23.

Теорема 4. *Пусть* $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$. *Тогда* $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \in \mathfrak{U}_T$, *т.е.*

$$\mathfrak{u}_U(\mathfrak{E}_U^{neutr}) \subseteq \mathfrak{U}_T.$$

Доказательство. По теореме 3 $\mathfrak{u}_U(\mathfrak{E}_U^{neutr}) \subseteq \mathfrak{u}_U(\mathfrak{E}_U) \subseteq \mathrm{Lat}\,T \cap \mathrm{Lat}\,T^\sharp$. Осталось показать, что T унитарен на любом $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$.

Пусть $h, h' \in \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \subseteq C^{-1}(\mathcal{E}_2) \cap (A^\sharp)^{-1}(\mathcal{E}_1)$. Тогда, очевидно, $Ch, Ch' \in \mathcal{E}_2$, $A^\sharp h, A^\sharp h' \in \mathcal{E}_1$, и в силу нейтральности $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$,

$$0 = [Ch, Ch'] = [\delta_T h, h'] = [h, h'] - [Th, Th'],$$

$$0 = [A^\sharp h, A^\sharp h'] = [\delta_{T^\sharp} h, h'] = [h, h'] - [T^\sharp h, T^\sharp h'],$$

т.е. T унитарен на $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$.

Предложение 24. *Пусть* $\mathfrak{L}$ — *приводящее подпространство оператора* $T \in \mathrm{adj}(\mathfrak{X})$. *Тогда выполняются включения:*

$$C\mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq (C\mathfrak{L})^{[\perp]}, \tag{44}$$

$$A^\sharp \mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq (A^\sharp \mathfrak{L})^{[\perp]}, \tag{45}$$

$$B(A^\sharp \mathfrak{L})^{[\perp]} \subseteq (C\mathfrak{L})^{[\perp]}, \tag{46}$$

$$B^\sharp (C\mathfrak{L})^{[\perp]} \subseteq (A^\sharp \mathfrak{L})^{[\perp]}. \tag{47}$$

Доказательство. Пусть $h \in \mathfrak{L}$, $g \in \mathfrak{L}^{[\perp]}$ — произвольные вектора. Так как $\mathfrak{L}$ — приводящее подпространство, то $\delta_{T^\sharp} h, \delta_T h \in \mathfrak{L}$, поэтому

$$[Cg, Ch] = [g, \delta_T h] = 0,$$
$$[A^\sharp g, A^\sharp h] = [g, \delta_{T^\sharp} h] = 0.$$

т.е. $Cg \in (C\mathfrak{L})^{[\perp]}$, $A^\sharp g \in (A^\sharp \mathfrak{L})^{[\perp]}$ для произвольного $g \in \mathfrak{L}^{[\perp]}$. Включения (44) и (45) доказаны.

Пусть теперь $x \in (A^\sharp \mathfrak{L})^{[\perp]}$, $y \in (C\mathfrak{L})^{[\perp]}$, $h \in \mathfrak{L}$ — произвольные вектора. Так как $Th, T^\sharp h \in \mathfrak{L}$, то

$$[Bx, Ch] = [x, B^\sharp Ch] = -[x, A^\sharp Th] = 0,$$
$$[B^\sharp y, A^\sharp h] = [y, BA^\sharp h] = -[y, CT^\sharp h] = 0,$$

откуда, в силу произвольности x, y и h вытекают включения (46), (47).

Следствие 3. *Если* $\mathfrak{L} \in \mathfrak{U}_T$, *то* $C \operatorname{Is} \mathfrak{L} \subseteq \operatorname{Is} C\mathfrak{L}$, $A^\sharp \operatorname{Is} \mathfrak{L} \subseteq \operatorname{Is} A^\sharp \mathfrak{L}$.

Доказательство. В силу определения $\operatorname{Is} \mathfrak{L}$, обычных теоретико множественных рассуждений и (44), (45) предложения 24,

$$C \operatorname{Is} \mathfrak{L} = C(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{[\perp]}) \subseteq C\mathfrak{L} \cap C\mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq C\mathfrak{L} \cap (C\mathfrak{L})^{[\perp]} = \operatorname{Is} C\mathfrak{L},$$
$$A^\sharp \operatorname{Is} \mathfrak{L} = A^\sharp(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{[\perp]}) \subseteq A^\sharp \mathfrak{L} \cap A^\sharp \mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq A^\sharp \mathfrak{L} \cap (A^\sharp \mathfrak{L})^{[\perp]} = \operatorname{Is} A^\sharp \mathfrak{L}.$$

Следствие 4. *Если* $\mathfrak{L} \in \mathfrak{U}_T$, *то* $A^\sharp \mathfrak{L}$, $C\mathfrak{L}$ — *нейтральные линеалы.*

Будем говорить, что пара подпространств $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle$ — *непривиальна*, если хотя бы одно из подпространств $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ отлично от нулевого.

Лемма 1. *Имеет место следующее включение:*

$$\{\langle \operatorname{Is} \operatorname{Clos} A^\sharp \mathfrak{L}, \operatorname{Is} \operatorname{Clos} C\mathfrak{L} \rangle \mid \mathfrak{L} \in \mathfrak{U}_T\} \subseteq \mathfrak{E}_U^{neutr}.$$

Доказательство. Положим

$$\mathcal{E}_1 := \operatorname{Is}\operatorname{Clos} A^\sharp\mathfrak{L}, \tag{48}$$

$$\mathcal{E}_2 := \operatorname{Is}\operatorname{Clos} C\mathfrak{L}. \tag{49}$$

Из предложения 24 и свойств элементарной ротации вытекают следующие цепочки соотношений:

$$BA^\sharp\mathfrak{L} = CT^\sharp\mathfrak{L} \subseteq C\mathfrak{L}; \tag{50}$$

$$B(A^\sharp\mathfrak{L})^{[\perp]} \subseteq (C\mathfrak{L})^{[\perp]}; \tag{51}$$

$$CT^nAA^\sharp\mathfrak{L} = CT^n\delta_T{}^\sharp\mathfrak{L} \subseteq C\mathfrak{L}; \tag{52}$$

$$CT^nA(A^\sharp\mathfrak{L})^{[\perp]} = CT^nAA^{-1}(\mathfrak{L}^{[\perp]}) = CT^n\mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq C\mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq (C\mathfrak{L})^{[\perp]}; \tag{53}$$

$$B^\sharp C\mathfrak{L} = A^\sharp T\mathfrak{L} \subseteq A^\sharp\mathfrak{L}; \tag{54}$$

$$B^\sharp(C\mathfrak{L})^{[\perp]} \subseteq (A^\sharp\mathfrak{L})^{[\perp]}; \tag{55}$$

$$A^\sharp T^{\sharp n}C^\sharp C\mathfrak{L} = A^\sharp T^{\sharp n}\delta_T\mathfrak{L} \subseteq A^\sharp\mathfrak{L}; \tag{56}$$

$$A^\sharp T^{\sharp n}C^\sharp(C\mathfrak{L})^{[\perp]} = A^\sharp T^{\sharp n}C^\sharp(C^\sharp)^{-1}(\mathfrak{L}^{[\perp]}) = A^\sharp T^{\sharp n}\mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq A^\sharp\mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq (A^\sharp\mathfrak{L})^{[\perp]}. \tag{57}$$

В силу непрерывности всех фигурирующих в доказательстве операторов, включения $B\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$, $CT^nA\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$ и $B^\sharp\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1$, $A^\sharp T^{\sharp n}C^\sharp\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1$ следуют из (50)$\wedge$(51), (52)$\wedge$(53) и (54)$\wedge$(55), (56)$\wedge$(57) соответственно. Таким образом, $\langle\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$.

Следствие 5. $\{\langle\operatorname{Clos} A^\sharp\mathfrak{L}, \operatorname{Clos} C\mathfrak{L}\rangle \mid \mathfrak{L} \in \mathfrak{N}_T\} \subseteq \mathfrak{E}_U^{neutr}$.

Доказательство. Вытекает из п. 1 предложения 22, следствия 4 и леммы 1.

Теорема 5. *Для любого подпространства $\mathfrak{L}$ из $\mathfrak{U}_T$ существует такая пара $\langle\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$, что*

$$\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2). \tag{58}$$

Доказательство. Покажем, что для подпространств $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ из (48), (49) выполняется включение (58). Так как $\mathfrak{L}$ — приводящее подпространство,

$$CT^n\mathfrak{L} \subseteq C\mathfrak{L}, \tag{59}$$

$$A^\sharp T^{\sharp n}\mathfrak{L} \subseteq A^\sharp\mathfrak{L}. \tag{60}$$

Далее, используя условие унитарности T на $\mathfrak{L}$, получим:

$$CT^n\mathfrak{L} \subseteq (C\mathfrak{L})^{[\perp]}, \tag{61}$$

$$A^\sharp T^{\sharp n} \subseteq (A^\sharp\mathfrak{L})^{[\perp]}. \tag{62}$$

(59)$\wedge$(61) и (60)$\wedge$(62) дают включения $CT^n\mathfrak{L} \subseteq \mathcal{E}_2$, $A^\sharp T^{\sharp n}\mathfrak{L} \subseteq \mathcal{E}_1$ ($n \in \mathbb{N}_+$), откуда, в силу леммы 1 и согласно определению $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$, следует (58).

Теорема 6. *Все максимальные приводящие подпространства, на которых оператор T унитарен, исчерпываются подпространствами вида $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1^m, \mathcal{E}_2^m)$, где $\langle \mathcal{E}_1^m, \mathcal{E}_2^m \rangle$ – максимальная пара из $\mathfrak{E}_U^{neutr}$. Иными словами,*

$$\operatorname{Max} \mathfrak{U}_T \subseteq \mathfrak{u}_U(\operatorname{Max} \mathfrak{E}_U^{neutr}) . \tag{63}$$

Доказательство. Положим $A := \mathfrak{E}_U^{neutr}$, $B := \mathfrak{U}_T$, $f := \mathfrak{u}_U | \mathfrak{E}_U^{neutr}$. Простые теоретико множественные соображения показывают, что функция f – монотонна (вообще, $\mathfrak{u}_U$ монотонно как отображение из $\operatorname{Subsp}(\mathfrak{N}_1) \times \operatorname{Subsp}(\mathfrak{N}_2)$ в $\operatorname{Subsp}(\mathfrak{X})$). В силу предложения 22, следствия 2 и теоремы 5 множества A, B и функция f удовлетворяют условиям предложения 18, из которого и следует (63).

Предложение 25. $\mathcal{H}_T^0 = \mathfrak{u}_U(\{0\}, \{0\})$ *для любой элементарной ротации U оператора T.*

Доказательство. Так как $\ker C = \ker \delta_T$, $\ker A^\sharp = \ker \delta_{T^\sharp}$, то для любого $n \in \mathbb{N}_+$

$$(CT^n)^{-1}(\{0\}) = \ker CT^n = \ker \delta_T T^n ,$$
$$(A^\sharp T^n)^{-1}(\{0\}) = \ker A^\sharp T^{\sharp n} = \ker \delta_{T^\sharp} T^{\sharp n} .$$

Следствие 6. *Если для некоторой элементарной ротации U оператора T множество $\mathfrak{E}_U^{neutr}$ тривиально, то подпространство $\mathcal{H}_T^0$ является наибольшим элементом $\mathfrak{U}_T$.*

Доказательство. Следует из предложения 25 и теоремы 6.

Замечание 3. Общие соображения (см. замечание 1) показывают, что для некоторых максимальных элементов $\langle \mathcal{E}_1^m, \mathcal{E}_2^m \rangle$ из $\mathfrak{E}_U^{neutr}$ подпространство $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1^m, \mathcal{E}_2^m)$, в принципе, не обязано быть максимальным элементом $\mathfrak{U}_T$. Более того, мы построим пример оператора T и его элементарной ротации U, для которых множество $\mathfrak{E}_U^{neutr}$ нетривиально, $\mathcal{H}_T^0 \notin \operatorname{Max} \mathfrak{U}_T$, но существует пара $\langle \mathcal{E}_1^m, \mathcal{E}_2^m \rangle$ из $\operatorname{Max} \mathfrak{E}_U^{neutr}$, для которой $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1^m, \mathcal{E}_2^m) = \mathcal{H}_T^0$, т.е. значение $\mathfrak{u}_U$ на наименьшем элементе совпадает со значением на максимальном элементе (см. далее п.(а) в примере 4).

Лемма 2. *Пусть $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$. Тогда*

$$\operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} T^n A \mathcal{E}_1 \bigcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} T^{\sharp n} C^\sharp \mathcal{E}_2 \Big) \subseteq \operatorname{Is} \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) . \tag{64}$$

Доказательство. Из определения $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$ следуют включения

$$A^\sharp T^{\sharp n} \Big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} T^{\sharp m} C^\sharp \mathcal{E}_2 \Big) \subseteq \mathcal{E}_1 , \tag{65}$$

$$CT^n \Big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} T^m A \mathcal{E}_1 \Big) \subseteq \mathcal{E}_2 \tag{66}$$

($n \in \mathbb{N}_+$). Далее, в силу свойств компонент элементарной ротации, справедливы следующие соотношения:

$$A^\sharp T^{\sharp n} T^m A = \begin{cases} I_{\mathfrak{N}_1} - B^\sharp B, & n = m = 0 \\ -B^\sharp (C T^{m-1} A), & n = 0,\ m > 0 \\ -(A^\sharp T^{\sharp(n-1)} C^\sharp) B. & n > 0,\ m = 0 \\ A^\sharp T^{\sharp(n-1)} T^{(m-1)} A - (A^\sharp T^{\sharp(n-1)} C^\sharp)(C T^{m-1} A), & n > 0,\ m > 0 \end{cases},$$

$$C T^m T^{\sharp m} C^\sharp = \begin{cases} I_{\mathfrak{N}_2} - B B^\sharp, & n = m = 0 \\ -B(A^\sharp T^{\sharp(m-1)} C^\sharp), & n = 0,\ m > 0 \\ -(C T^{n-1} A) B^\sharp, & n > 0,\ m = 0 \\ C T^{n-1} T^{\sharp(m-1)} C^\sharp - (C T^{n-1} A)(A^\sharp T^{\sharp(m-1)} C^\sharp), & n > 0,\ m > 0 \end{cases}.$$

Из этих соотношений и определения $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, применяя индукцию, получим включения

$$A^\sharp T^{\sharp n} \Big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} T^m A \mathcal{E}_1 \Big) \subseteq \mathcal{E}_1, \tag{67}$$

$$C T^m \Big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}_+} T^{\sharp m} C^\sharp \mathcal{E}_1 \Big) \subseteq \mathcal{E}_2 \tag{68}$$

($n \in \mathbb{N}_+$). Комбинируя (65) и (67), (66) и (68), получим включение

$$\operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} T^n A \mathcal{E}_1 \bigcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} T^{\sharp n} C^\sharp \mathcal{E}_2 \Big) \subseteq \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2). \tag{69}$$

С другой стороны, в силу предложения 7 и свойств ортогональных дополнений,

$$\begin{aligned} \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^{[\perp]} &= \Big(\bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} (C T^n)^{-1}(\mathcal{E}_2) \bigcap \bigcap_{n \in \mathbb{N}_+} (A^\sharp T^{\sharp n})^{-1}(\mathcal{E}_1) \Big)^{[\perp]} = \\ &= \operatorname{Clos} \operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} ((A^\sharp T^{\sharp n})^{-1}(\mathcal{E}_1))^{[\perp]} \bigcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} ((C T^n)^{-1}(\mathcal{E}_2))^{[\perp]} \Big) = \\ &= \operatorname{Clos} \operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} T^n A \mathcal{E}_1^{[\perp]} \bigcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} T^{\sharp n} C^\sharp \mathcal{E}_2^{[\perp]} \Big), \end{aligned}$$

поэтому из включений $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_1^{[\perp]}$, $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_2^{[\perp]}$ (подпространства $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ — нейтральны!) получим

$$\operatorname{Lin}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} T^n A \mathcal{E}_1 \bigcup \bigcup_{n \in \mathbb{N}_+} T^{\sharp n} C^\sharp \mathcal{E}_2 \Big) \subseteq \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)^{[\perp]}. \tag{70}$$

(64) следует из (69) и (70).

Следствие 7. *Если пара* $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$ *— нетривиальна, то* $\operatorname{Is} \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \neq \{0\}$.

Доказательство. Из равенств $\ker A = \{0\}$, $\ker C^\sharp = \{0\}$ следует, что $\mathrm{Lin}(A\mathcal{E}_1 \cup C^\sharp\mathcal{E}_2) \neq \{0\}$, поэтому по лемме 2

$$\{0\} \neq \mathrm{Lin}(A\mathcal{E}_1 \cup C^\sharp\mathcal{E}_2) \subseteq \mathrm{Is}\,\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)\,.$$

Обозначим через $\mathfrak{U}_T^d$ множество всех *вырожденных* подпространств из $\mathfrak{U}_T$ (т.е. $\mathfrak{U}_T^d = \mathfrak{U}_T \backslash \mathfrak{U}_T^{nond}$).

Теорема 7. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) $\mathfrak{U}_T^d$ *нетривиально тогда и только тогда, когда нетривиально* $\mathfrak{N}_T$.

(2) *Если для некоторой элементарной ротации* U *оператора* T $\mathfrak{E}_U^{neutr}$ *нетривиально, то и* $\mathfrak{U}_T^d$ *нетривиально.*

(3) *Если* $\mathfrak{U}_T$ *содержит подпространства, не являющиеся подпространствами* $\mathcal{H}_T^0$ *(т.е.* $\mathfrak{U}_T \backslash \mathrm{Subsp}(\mathcal{H}_T^0) \neq \emptyset$*), то для любой элементарной ротации* U *оператора* T *множество* $\mathfrak{E}_U^{neutr}$ *нетривиально.*

Доказательство.

(1) Пусть $\mathfrak{L} \in \mathfrak{U}_T^d$. Тогда $\mathrm{Is}\,\mathfrak{L} \neq \{0\}$, и

$$T\,\mathrm{Is}\,\mathfrak{L} = T(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{[\perp]}) \subseteq T\mathfrak{L} \cap T\mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{[\perp]} = \mathrm{Is}\,\mathfrak{L}\,,$$
$$T^\sharp\,\mathrm{Is}\,\mathfrak{L} = T^\sharp(\mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{[\perp]}) \subseteq T^\sharp\mathfrak{L} \cap T^\sharp\mathfrak{L}^{[\perp]} \subseteq \mathfrak{L} \cap \mathfrak{L}^{[\perp]} = \mathrm{Is}\,\mathfrak{L}\,.$$

Обратная импликация очевидна.

(2) Пусть $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$ - нетривиальная пара. Тогда по следствию 7 $\mathrm{Is}\,\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \neq \{0\}$, таким образом, $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) \in \mathfrak{U}_T^d$.

(3) Это, фактически, переформулировка следствия 6.

2.3. **Примеры.**

Пример 3. Пусть T — некоторый непрерывный оператор в невырожденном ПВП $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий соотношению:

$$T^\sharp T = TT^\sharp = 0 \tag{71}$$

(нетривиальный пример такого оператора в случае пространства Крейна будет приведён чуть ниже). Тогда

$$\delta_T = \delta_{T^\sharp} = I_{\mathfrak{X}}\,. \tag{72}$$

Из (72) следует равенство

$$\mathfrak{U}_T = \mathfrak{N}_T\,.$$

Действительно, если $\mathfrak{L} \in \mathfrak{U}_T$, то согласно предложению 3, $\mathfrak{L} = \delta_T\mathfrak{L}\,(= \delta_{T^\sharp}\mathfrak{L}) \subseteq \mathfrak{L}^{[\perp]}$.

Вследствие (72) любая элементарная ротация U оператора T будет иметь вид:

$$U = \begin{bmatrix} T & A \\ C & -CT^\sharp A \end{bmatrix} \in \mathrm{adj}\,(\mathfrak{X}[\overset{e}{+}]\mathfrak{N}_1, \mathfrak{X}[\overset{e}{+}]\mathfrak{N}_2)\,, \tag{73}$$

где A и C – (произвольные) унитарные операторы, действующие в соответствующих пространствах. В данном случае легко описать множество $\mathfrak{E}_U^{neutr}$. Именно,

$$\mathfrak{E}_U^{neutr} = \{\langle A^\sharp \mathcal{E}, C\mathcal{E}\rangle \mid \mathcal{E} \in \mathfrak{N}_T\}. \tag{74}$$

Включение в (74) справа налево вытекает из следствия 5. Рассмотрим включение слева направо. Пусть $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$. Из включений $CA\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$, $A^\sharp C^\sharp \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1$ (формулы (42) при $n = 0$) и унитарности A, C следует равенство $A\mathcal{E}_1 = C^\sharp \mathcal{E}_2$. Положим $\mathcal{E} := A\mathcal{E}_1 (= C^\sharp \mathcal{E}_2)$. Тогда $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\rangle = \langle A^\sharp \mathcal{E}, C\mathcal{E}\rangle$. Из нейтральности $\mathcal{E}_1$ и унитарности A следует нейтральность $\mathcal{E}$. Включение $\mathcal{E} \in \operatorname{Lat} T \cap \operatorname{Lat} T^\sharp$ следует из включений $CTA\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$, $A^\sharp T^\sharp C^\sharp \mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1$ (формулы (42) при $n = 1$).

Легко видеть, что если оператор T – ненулевой, то множество $\mathfrak{N}_T$ – нетривиально, ибо из равенств (71) следует, что $\mathrm{R}(T)$, $\mathrm{R}(T^\sharp)$ – нейтральные линеалы, поэтому, по меньшей мере, $\operatorname{Clos}\mathrm{R}(T).\operatorname{Clos}\mathrm{R}(T^\sharp) \in \mathfrak{N}_T$ (см. предложение 2). Следовательно, нетривиально и множество $\mathfrak{E}_U^{neutr}$. Согласно (73), (74),

$$\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} (T^n)^{-1}(\mathcal{E}) \bigcap \bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} (T^{\sharp n})^{-1}(\mathcal{E}) \tag{75}$$

для $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\rangle = \langle A^\sharp \mathcal{E}, C\mathcal{E}\rangle$, $\mathcal{E} \in \mathfrak{N}_T$.

Если $\mathfrak{X}$ – пространство Крейна из примера 2, то полагая в (20) $T_{12} = 0$, а в качестве T_{11}, T_{22} выбирая (гильбертово) самосопряжённые операторы, удовлетворяющие соотношению

$$T_{22} Z T_{11} = 0,$$

мы получим пример оператора T, удовлетворяющего равенствам (71). В частности, можно положить $T_{11} := P_1$, $T_{22} := ZP_2Z^*$, где P_1, P_2 – (гильбертовы) ортопроекторы в $\mathfrak{L}$ на некоторые взаимно ортогональные подпространства $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$. В этом случае, очевидно, T и $T^\sharp$ – гильбертовы ортопроекторы в $\mathfrak{X}$ соответственно на подпространства $\mathfrak{L}_1 \oplus Z\mathfrak{L}_2$ и $\mathfrak{L}_2 \oplus Z\mathfrak{L}_1$. Формула (75) в этом случае упрощается:

$$\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \mathcal{E} \cap T^{-1}(\mathcal{E}) \cap (T^\sharp)^{-1}(\mathcal{E}), \tag{76}$$

а согласно предложению 8,

$$T^{-1}(\mathcal{E}) = \ker T + \mathcal{E} \cap \mathrm{R}(T) = (\mathfrak{L}_1^\perp \oplus Z\mathfrak{L}_2^\perp) \oplus \mathcal{E} \cap (\mathfrak{L}_1 \oplus Z\mathfrak{L}_2), \tag{77}$$

$$(T^\sharp)^{-1}(\mathcal{E}) = \ker T^\sharp + \mathcal{E} \cap \mathrm{R}(T^\sharp) = (\mathfrak{L}_2^\perp \oplus Z\mathfrak{L}_1^\perp) \oplus \mathcal{E} \cap (\mathfrak{L}_2 \oplus Z\mathfrak{L}_1) \tag{78}$$

(ортогональные дополнения взяты относительно $\mathfrak{L}$).

Множество $\mathfrak{N}_T$ достаточно сложно описать конструктивно (ср. далее (84), (88)), во всяком случае, оно состоит в биективном соответствии $\mathcal{E} \leftrightarrow P\mathfrak{X}$ со множеством всех гильбертовых ортопроекторов P в $\mathfrak{X}$, удовлетворяющих соотношениям: $PTP = TP$, $PT^\sharp P = T^\sharp P$, $PJP = 0$. Отметим некоторые частные примеры. Нетрудно убедиться, что подпространства вида $\overrightarrow{\mathcal{E}} := \mathfrak{N}_1 \oplus Z\mathfrak{N}_2$, $\overleftarrow{\mathcal{E}} := \mathfrak{N}_2 \oplus Z\mathfrak{N}_1$, где $\mathfrak{N}_i \in$

$\mathrm{Subsp}(\mathfrak{L}_i)$ $(i \in \overline{1.2})$, лежат в $\mathfrak{N}_T$. В этом случае, согласно (77), (78) (см. также предложение 10), $T^{-1}(\overrightarrow{\mathcal{E}}) = \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $(T^\sharp)^{-1}(\overleftarrow{\mathcal{E}}) = \overleftarrow{\mathcal{E}}$, поэтому, по (76),

$$u_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \overrightarrow{\mathcal{E}}\,,$$
$$u_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \overleftarrow{\mathcal{E}}$$

для пары $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle$, равной либо $\langle A^\sharp \overrightarrow{\mathcal{E}}, C\overrightarrow{\mathcal{E}} \rangle$, либо $\langle A^\sharp \overleftarrow{\mathcal{E}}, C\overleftarrow{\mathcal{E}} \rangle$ соответственно.

Отметим, что множество $\mathfrak{N}_T$ далеко не исчерпывается подпространствами $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, $\overleftarrow{\mathcal{E}}$. Так, например, подпространства $\mathcal{E}_S := \{l + ZSl \mid l \in \mathfrak{L}\}$, где S – (гильбертово) кососамосопряжённый оператор в $\mathfrak{L}$, удовлетворяющий условиям: $S\mathfrak{L}_1 \subseteq \mathfrak{L}_2$, $S\mathfrak{L}_1^\perp \subseteq \mathfrak{L}_2^\perp$, также лежат в $\mathfrak{N}_T$ и не являются подпространствами вида $\overrightarrow{\mathcal{E}}$, $\overleftarrow{\mathcal{E}}$.

Пример 4. Пусть T – оператор (20), (26) из примера 2. Непосредственная проверка показывает, что

$$\Delta_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & ZLZ^* \end{bmatrix}; \qquad \Delta_{T^*} = \begin{bmatrix} VLV^* & QZ^* \\ ZQ & 0 \end{bmatrix}; \tag{79}$$

$$D_T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & Z|L|^{\frac{1}{2}}Z^* \end{bmatrix}; \qquad D_{T^*} = \begin{bmatrix} Q + V|L|^{\frac{1}{2}}V^* & 0 \\ 0 & ZQZ^* \end{bmatrix}; \tag{80}$$

$$J_T = \begin{bmatrix} I_{\mathfrak{L}} & 0 \\ 0 & ZS_LZ^* \end{bmatrix}; \qquad J_{T^*} = \begin{bmatrix} VS_LV^* & QZ^* \\ ZQ & ZPZ^* \end{bmatrix}. \tag{81}$$

где S_L – строгий знак оператора L, а J_T, J_{T^*} – строгие знаки операторов Δ_T, Δ_{T^*} соответственно.

Исходя из (79)–(81), мы построим элементарную ротацию оператора T. Положим

$$\mathfrak{N}_1 := \mathfrak{L}_0 \overset{e}{\oplus} \ker V^* \overset{e}{\oplus} Z\ker V^*,$$
$$\mathfrak{N}_2 := Z\mathfrak{L}_0,$$

и определим симметрии в пространствах $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$:

$$J_{\mathfrak{N}_1} := \begin{bmatrix} \widetilde{V}S_{\widetilde{L}}\widetilde{V}^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \widehat{Z}^* \\ 0 & \widehat{Z} & 0 \end{bmatrix}; \qquad J_{\mathfrak{N}_2} := \widetilde{Z}S_{\widetilde{L}}\widetilde{Z}^*.$$

Здесь $\widetilde{Z} := Z|\mathfrak{L}_0$, $\widehat{Z} := Z|\ker V^*$, $\widetilde{L} := L|\mathfrak{L}_0$. При этом, очевидно, $\widetilde{V} = V|\mathfrak{L}_0$, $\widetilde{Z} \in B(\mathfrak{L}_0, Z\mathfrak{L}_0)$, $\widehat{Z} \in B(\ker V^*, Z\ker V^*)$, $\widetilde{L} \in B(\mathfrak{L}_0)$, и $\widetilde{V}^* = V^*|\mathfrak{L}_0$, $\widetilde{Z}^* = Z^*|Z\mathfrak{L}_0$, $\widehat{Z}^* := Z^*|Z\ker V^*$; $\widetilde{L}$ – обратимый оператор ($\overline{\mathrm{R}(L)} = \mathfrak{L}_0$ вследствие определения L, см. (27) в примере 2), $|\widetilde{L}|^{\frac{1}{2}} = |L|^{\frac{1}{2}}|\mathfrak{L}_0$, $S_{\widetilde{L}} = S_L|\mathfrak{L}_0$.

Тогда, как показывает непосредственная проверка, оператор $U = \begin{bmatrix} T & A \\ C & B \end{bmatrix} \in B(\mathfrak{H} \overset{e}{\oplus} \mathfrak{N}_1, \mathfrak{H} \overset{e}{\oplus} \mathfrak{N}_2)$, где компоненты C, A, B определяются относительно соответствующих разложений пространств следующим образом:

$$C := \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{Z}|L|^{\frac{1}{2}}Z^* \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} V|L|^{\frac{1}{2}}\widetilde{V}^* & I_{\ker V^*} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Z\ker V^*} \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} -\widetilde{Z}S_{\widetilde{L}}\widetilde{V}^* & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

является элементарной ротацией оператора T. При этом сопряжённые операторы $C^\sharp$, $A^\sharp$, $B^\sharp$ определяются соответствующими матрицами:

$$C^\sharp = \begin{bmatrix} |L|^{\frac{1}{2}}S_L\widetilde{Z}^* \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^\sharp = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{V}|L|^{\frac{1}{2}}S_LV^*Z^* \\ Q & 0 \\ 0 & ZQZ^* \end{bmatrix}, \quad B^\sharp = \begin{bmatrix} -\widetilde{V}S_{\widetilde{L}}\widetilde{Z}^* \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Из равенств (27), (29), (30), (31) примера 2 вытекают равенства

$$CT^n = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{Z}|L|^{\frac{1}{2}}V^nZ^* \end{bmatrix}, \quad A^\sharp T^{\sharp n} = \begin{bmatrix} 0 & \widetilde{V}|L|^{\frac{1}{2}}S_LV^{*(n+1)}Z^* \\ QV^{*n} & 0 \\ 0 & ZQV^{*n}Z^* \end{bmatrix}, \tag{82}$$

откуда, в частности, следует, что

$$CT^nA = 0, \quad A^\sharp T^{\sharp n}C^\sharp = 0 \ (n \in \mathbb{N}_+). \tag{83}$$

Благодаря соотношениям (83) множество $\mathfrak{E}_U^{neutr}$ описывается достаточно просто. Пусть π_0 — гильбертов ортопроектор в $\mathfrak{N}_1$ на $\mathfrak{L}_0$.

Покажем, что

$$\mathfrak{E}_U^{neutr} = \{\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle \in \mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_1) \times \mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_2) \mid VS_LZ^*\mathcal{E}_2 = \pi_0\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_1\}. \tag{84}$$

Действительно, пусть $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$. Тогда

$$\mathcal{E}_2 \supseteq B\mathcal{E}_1 = B\pi_0\mathcal{E}_1 = \widetilde{Z}S_{\widetilde{L}}\widetilde{V}^*\pi_0\mathcal{E}_1 = ZS_LV^*\pi_0\mathcal{E}_1.$$

Из этой цепочки вытекает включение $V^*\pi_0\mathcal{E}_1 \subseteq S_LZ^*\mathcal{E}_2$; домножая его слева на V, получим включение

$$\pi_0\mathcal{E}_1 \subseteq VS_LZ^*\mathcal{E}_2. \tag{85}$$

Так как $VS_LZ^*\mathcal{E}_2 \subseteq VS_L\mathfrak{L}_0 \subseteq \mathfrak{L}_0$, то

$$\mathcal{E}_1 \supseteq B^\sharp\mathcal{E}_2 = \widetilde{V}S_{\widetilde{L}}\widetilde{Z}^*\mathcal{E}_2 = VS_LZ^*\mathcal{E}_2, \tag{86}$$

$$\pi_0\mathcal{E}_1 \supseteq \pi_0VS_LZ^*\mathcal{E}_2 = VS_LZ^*\mathcal{E}_2. \tag{87}$$

формулы (85) – (87) означают, что выполняется включение в (84) слева направо.

Обратное включение в (84) обосновывается с помощью похожих рассуждений при выводе формул $B\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$, $B^\sharp\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1$; включения же $CT^nA\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_2$, $A^\sharp T^{\sharp n}C^\sharp\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_1$, в силу (83), — тривиальны .

Равенство (84) можно использовать для более прозрачного описания множества $\mathfrak{E}_U^{neutr}$, когда соответствующие пары подпространств образуются при помощи "свободных параметров" , "пробегающих" некоторые решётки $\mathrm{Neutr}(\cdot)$. А именно, определим пространства

$$\mathfrak{N}_L := \mathrm{Kr}(\mathfrak{L}_0, S_{\widetilde{L}}), \quad \mathfrak{N}_{V\cdot} := \mathrm{Kr}\Big(\ker V^* \overset{e}{\oplus} Z\ker V^*, \left[\begin{smallmatrix} 0 & \widehat{Z}^* \\ \widehat{Z} & 0 \end{smallmatrix}\right]\Big).$$

Пусть $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$. В силу включения $\pi_0\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_1$, для некоторого $\mathcal{E}_0 \in \mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_{V\cdot})$ $\mathcal{E}_1 = \pi_0\mathcal{E}_1 \overset{e}{\oplus} \mathcal{E}_0$. Положим $\mathcal{E} := V^*\pi_0\mathcal{E}_1$. В силу предложения 11 $\mathcal{E} \in \mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_L)$. Тогда $\mathcal{E}_2 = ZS_LV^*\pi_0\mathcal{E}_1 = ZS_L\mathcal{E}$. Таким образом, $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\rangle = \langle V\mathcal{E} \overset{e}{\oplus} \mathcal{E}_0, ZS_L\mathcal{E}\rangle$. И, обратно, произвольная пара $\langle V\mathcal{E} \overset{e}{\oplus} \mathcal{E}_0, ZS_L\mathcal{E}\rangle$, где $\mathcal{E} \in \mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_L)$ и $\mathcal{E}_0 \in \mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_{V\cdot})$, как нетрудно убедиться, является элементом $\mathfrak{E}_U^{neutr}$. Итак, множество $\mathfrak{E}_U^{neutr}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{E}_U^{neutr} = \{\langle V\mathcal{E} \overset{e}{\oplus} \mathcal{E}_0, ZS_L\mathcal{E}\rangle \mid \mathcal{E} \in \mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_L),\ \mathcal{E}_0 \in \mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_{V\cdot})\}. \tag{88}$$

Приведём теперь конструктивное описание подпространств $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$. Обозначим через $\varkappa$ и $\varkappa_Z$ гильбертовы ортопроекторы в $\mathfrak{N}_{V\cdot}$ соответственно на $\ker V^*$ и $Z\ker V^*$.

Пусть $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2\rangle = \langle V\mathcal{E} \overset{e}{\oplus} \mathcal{E}_0, ZS_L\mathcal{E}\rangle$, где $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_0$ — некоторые элементы соответственно $\mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_L)$ и $\mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_{V\cdot})$. Из (82) получим эквиваленции

$$CT^n \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_2 \Leftrightarrow (y_1 \in \mathfrak{L}) \wedge (\widetilde{Z}|L|^{\frac{1}{2}}V^nZ^*y_2 \in ZS_L\mathcal{E}), \tag{89}$$

$$A^{\natural}T^{\natural n} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{E}_1 \Leftrightarrow (\widetilde{V}|L|^{\frac{1}{2}}S_LV^{*(n+1)}Z^*y_2 \in V\mathcal{E}) \wedge (QV^{*n}y_1 \in \varkappa\mathcal{E}_0) \wedge \\ \wedge (ZQV^{*n}Z^*y_2 \in \varkappa_Z\mathcal{E}_0). \tag{90}$$

Определим следующие множества:

$$\mathcal{T}_n(\mathfrak{M}) := \begin{cases} V^{*|n|}\Big(\mathrm{R}(V^{|n|}) \cap \Big(\ker L + |\widetilde{L}|^{-\frac{1}{2}}\big(S_L\mathfrak{M} \cap \mathrm{R}(|L|^{\frac{1}{2}})\big)\Big)\Big), & n \in \overline{-\infty, 0} \\ \ker V^{*n} + V^n\Big(\ker L + |\widetilde{L}|^{-\frac{1}{2}}\big(S_L\mathfrak{M} \cap \mathrm{R}(|L|^{\frac{1}{2}})\big)\Big), & n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

($\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L}_0$ — произвольное непустое подмножество). Тогда, используя предложения 8, 9, получим цепочки эквиваленций:

$\widetilde{Z}|L|^{\frac{1}{2}}V^nZ^*y_2 \in ZS_L\mathcal{E} \Leftrightarrow |L|^{\frac{1}{2}}V^nZ^*y_2 \in S_L\mathcal{E} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V^nZ^*y_2 \in \ker L + |\widetilde{L}|^{-\frac{1}{2}}(S_L\mathcal{E} \cap \mathrm{R}(|L|^{\frac{1}{2}})) \Leftrightarrow y_2 \in Z\mathcal{T}_{-n}(\mathcal{E})$;

$\widetilde{V}|L|^{\frac{1}{2}}S_LV^{*(n+1)}Z^*y_2 \in V\mathcal{E} \Leftrightarrow |L|^{\frac{1}{2}}V^{*(n+1)}Z^*y_2 \in S_L\mathcal{E} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow V^{*(n+1)}Z^*y_2 \in \ker L + |\widetilde{L}|^{-\frac{1}{2}}(S_L\mathcal{E} \cap \mathrm{R}(|L|^{\frac{1}{2}})) \Leftrightarrow y_2 \in Z\mathcal{T}_{n+1}(\mathcal{E})$;

$QV^{*n}y_1 \in \varkappa\mathcal{E}_0 \Leftrightarrow y_1 \in \mathcal{F}_{V\cdot}^n(\varkappa\mathcal{E}_0)$;

$ZQV^{*n}Z^*y_2 \in \varkappa_Z\mathcal{E}_0 \Leftrightarrow y_2 \in Z\mathcal{F}_{V\cdot}^n(Z^*\varkappa_Z\mathcal{E}_0)$.

Таким образом, эквиваленции (89) и (90) приводят к равенству:

$$\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_-} \mathcal{F}_1^n(\varkappa\mathcal{E}_0) \oplus Z\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}_+} \mathcal{F}_1^n(\varkappa_Z\mathcal{E}_0) \bigcap \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{T}_n(\mathcal{E})\Big). \tag{91}$$

Рассмотрим частный случай, когда оператор V – унитарен. Тогда, очевидно, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{L}$, $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{L}^{[\perp]}$, $J_{\mathfrak{N}_1} = VS_LV^*$, $J_{\mathfrak{N}_2} = ZS_LZ^*$, и

$$\mathfrak{E}_U^{neutr} = \{\langle V\mathcal{E}, ZS_L\mathcal{E}\rangle \mid \mathcal{E} \in \mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_L)\}, \tag{92}$$

$$\mathcal{T}_n(\mathcal{E}) = V^n|L|^{-\frac{1}{2}}\big(S_L\mathcal{E} \cap \mathrm{R}(|L|^{\frac{1}{2}})\big) \quad (n \in Z). \tag{93}$$

Равенство (91) значительно упрощается, когда L – симметрия (тогда $S_L = L$, $|L| = I_{\mathfrak{L}}$). В этом случае, согласно (91)–(93),

$$\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2) = \mathfrak{L} \oplus Z\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V^nL\mathcal{E}\Big). \tag{94}$$

Если выбрать симметрию L отличной от тождественного оператора (в противном случае $\mathfrak{E}_U^{neutr}$ тривиально), то можно построить примеры операторов с достаточно богатой и "поучительной" структурой множеств $\mathfrak{E}_U^{neutr}$ и $\mathfrak{U}_T$. Пусть $\mathcal{E}$ – произвольное максимальное подпространство из $\mathrm{Neutr}(\mathfrak{N}_L)$. Положим $\mathcal{N} := L\mathcal{E}$, $J := L$. Выберем оператор V согласно предложению 13.

(a) Согласно п.(1) предложения (13), $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V^nJ\mathcal{E} = \{0\}$, таким образом, для данного оператора T и его элементарной ротации U существует пара $\langle\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2\rangle = \langle V\mathcal{E}, ZJ\mathcal{E}\rangle$ из $\mathrm{Max}\,\mathfrak{E}_U^{neutr}$, для которой $\mathcal{H}_T^0 = \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2)$ (см. замечание 3).

(b) Для данного оператора T множество $\mathfrak{U}_T^d\backslash\mathfrak{N}_T$ – *нетривиально*. Действительно, пусть $\mathcal{E}' := J\mathcal{M}$, где $\mathcal{M}$ – соответствующее (максимальное) нейтральное подпространство из предложения (13). Тогда $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V^nJ\mathcal{E}' \neq \{0\}$, и согласно п.(2) существуют такие вектора $l \in \mathfrak{L}$, $l' \in \bigcap_{n\in\mathbb{Z}} V^nJ\mathcal{E}'$, что $\mathrm{Re}(l,l')_{\mathfrak{L}} \neq 0$. Отсюда, по (94), $l + Zl' \in \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2')$, где $\langle\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2'\rangle = \langle V\mathcal{E}', ZJ\mathcal{E}'\rangle$, и

$$[l + Zl', l + Zl']_{\mathfrak{X}} = \mathrm{Re}(l,l')_{\mathfrak{L}} \neq 0.$$

По следствию 7 $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2')$ – ненулевое подпространство, а из последнего неравенства следует, что $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1',\mathcal{E}_2')$ не является нейтральным.

(c) В случае, если положительный и отрицательный индексы инерции пространства $\mathrm{Kr}(\mathfrak{L}, J)$ совпадают, можно получить гораздо более сильные сведения о строении множества $\mathfrak{U}_T$.

Рассмотрим пространства

$$sp(N,\mathfrak{L}') := \{l' + 2ZNl' \mid l' \in \mathfrak{L}'\},$$

где $\mathfrak{L}' \in \mathrm{Subsp}(\mathfrak{L})$, а N — оператор из $B(\mathfrak{L})$. Как показывает прямая проверка, равенства

$$VN = NV(I - JN), \qquad VN^* = N^*V(I - JN^*);$$
$$N^*JN = 0, \qquad N^*VJV^*N = 0$$

обеспечивают (соответственно горизонталям): инвариантность $sp\,(N, \mathfrak{L})$ относительно T и $T^\sharp$; изометричность и коизометричность оператора T на $sp\,(N, \mathfrak{L}')$ (для того, чтобы пространство $sp\,(N, \mathfrak{L}')$ было инвариантным относительно T и $T^\sharp$, необходимы дополнительные условия $(V - VJN)\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{L}'$, $(V^* - JV^*N)\mathfrak{L}' \subseteq \mathfrak{L}'$). При этом

$$[l'_1 + 2ZNl'_1, l'_2 + 2ZNl'_2]_{\mathfrak{X}} = 2((N + N^*)l'_1, l'_2)_{\mathfrak{L}},$$

и в случае самосопряжённого N

$$[l'_1 + 2ZNl'_1, l'_2 + 2ZNl'_2]_{\mathfrak{X}} = 4(Nl'_1, l'_2)_{\mathfrak{L}}. \tag{95}$$

Тогда из (95) с помощью стандартных рассуждений можно вывести следующие соотношения:

$$sp\,(N, \mathfrak{L}) = sp\,(N, \ker N) \oplus sp\,(N, \overline{R(N)}),$$
$$\mathrm{Is}\, sp\,(N, \mathfrak{L}) = sp\,(N, \ker N),$$
$$sp\,(N, \overline{R(N)}) \text{ — проекционно полно} \Leftrightarrow 0 \in \rho\,(N|\overline{R(N)}).$$

Полагая $N := N_B$, $B \in \mathrm{Sadj}(\mathfrak{L})$, и применяя предложения 12, 13, мы получим серию пространств из $\mathfrak{U}_T$, зависящую от самосопряжённого оператора B; нетрудно видеть, что соответствие $N \to sp\,(N, \mathfrak{L})$ определяет инъекцию, таким образом, существует инъективное отображение φ: $\mathrm{Sadj}(\mathfrak{L}_\star) \to \mathfrak{U}_T$, определяемое формулой

$$\varphi(B) := sp\,(N_B, \mathfrak{L}),$$

где $\mathfrak{L}_\star$ — какое-либо фиксированное подпространство из канонического разложения $\mathrm{Kr}(\mathfrak{L}, J)\,(= \mathfrak{N}_L)$. При этом, как следует из (94), ни одно из пространств $sp\,(N_B, \mathfrak{L})$, $B \in \mathrm{Sadj}(\mathfrak{L}_\star)$, не совпадает ни с одним из пространств $\mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$, $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle \in \mathfrak{E}_U^{neutr}$. И, наконец, из построений предложения 13 следует равенство $V\overline{R(N_B)} = \overline{R(N_B)}$, а из (3) предложения 12 — включение $\overline{R(N_B)} \in \mathrm{Max\,Neutr}(\mathfrak{N}_L)$ (следовательно, $L\overline{R(N_B)} \in \mathrm{Max\,Neutr}(\mathfrak{N}_L)$), поэтому, полагая $\mathcal{E} := L\overline{R(N_B)}$, $\langle \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \rangle = \langle V\mathcal{E}, ZL\mathcal{E} \rangle$, получим:

$$sp\,(N_B, \mathfrak{L}) \subset \mathfrak{L} \oplus Z\overline{R(N_B)} = \mathfrak{u}_U(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2).$$

Заключение. В данной работе изучается структура максимальных приводящих подпространств непрерывного линейного оператора в пространстве с индефинитной метрикой, индуцирующих унитарный оператор.

Список литературы

[1] Т. Я. Азизов, И. С. Йохвидов. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука. — 1986. — 352 с.

[2] Bognar J. Indefinite inner product spaces. — Berlin.: Springer. — 1974. — 225 p.

[3] Тышкевич Д. Л. Элементарные ротации операторов в категориях с квадратичным расщеплением// Таврический Вестник Математики и Информатики (ТВИМ). — 2004, №1. — С. 112–124

[4] Dritschel M. A. and Rovnyak J. Operators on indefinite inner product spaces, Lectures on operator theory and its applications (Waterloo, ON, 1994).—Fields Institute Monographs, Amer. Math. Soc., Providence, RI,—1996.—Vol.3—P. 141–232

[5] James Rovnyak
http://www.people.virginia.edu/~jlr5m/

[6] Тышкевич Д. Л. Элементарные ротации операторов в правильных банаховых пространствах// Сборник тезисов международной конференции, посв. 103-летию И.Г. Петровского (XXI совместное заседание Московского математического общества и семинара им. И.Г. Петровского), 16-22 мая 2004 г., Москва.— С.229

E-mail: ltyshk@crimea.edu

Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

Серия "Математика. Механика. Информатика и Кибернетика" N 1 (2004) с.123–126

УДК 517.43

А.С. Тихонов

СВОЙСТВО МАКСИМАЛЬНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ (СЛУЧАЙ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ)

В работе [1] Набоко ввел спектральные компоненты $N_\pm$ для операторов, близких к самосопряженным. Несколькими годами позже, рассматривая параллельный случай почти унитарных операторов, Макаров [2] нашел следующую характеризацию этих инвариантных подпространств: подпространство N_+ есть максимальное среди всех рационально инвариантных подпространств H' оператора S, для которых сужение $S|H'$ есть деформация слабого волне неунитарного сжатия.

Напомним, что оператор S называется деформацией оператора T (мы будем записывать это в виде $S \prec T$), если существует квазиаффинент X такой, что $SX = XT$ (ограниченный оператор X называется квазиаффинентом, если $\operatorname{Ker} X = \{0\}$, $\operatorname{Ker} X^* = \{0\}$). Операторы S и T называются квазиподобными, если $S \prec T$ и $T \prec S$.

В статье [3] указанная выше характеризация для подпространств $N_\pm$ была получена для случая ядерных возмущений нормальных операторов со спектром на простой замкнутой кривой. Целью данной работы является распространение этого результата на более общий случай, когда непрерывный спектр лежит на границе многосвязной области. Отметим, что операторы, у которых спектр связан естественным образом с многосвязными областями в комплексной плоскости изучались ранее (см., например, [4] и соответствующие ссылки там). Мотивацией для изучения такого рода абстрактных операторов служат периодические дифференциальные и разностные операторы (см. [4]).

Перейдем к точным утверждениям. Пусть C - простая замкнутая $C^{4+\varepsilon}$ гладкая кривая, $G_+ = \operatorname{Int} C$ ($G_- = \operatorname{Ext} C$) – внешность (внутренность) кривой C. Пусть $U \in [H]$ – нормальный (т.е., $U^*U = UU^*$) оператор, действующий в гильбертовом пространстве H и пусть $\sigma(U) \subset C$. Мы будем рассматривать ядерные возмущения $S = U + V$, $V \in \mathfrak{S}_1$ такие, что $\rho(S) \cap G_+ \neq \emptyset$. Для такого класса операторов мы определяем спектральные компоненты:

$$N_\pm(S) = \operatorname{clos}\{ f \in H : \forall g \in H \;\; ((S - z)^{-1} f, g) \in E^2(G_\pm) \},$$

где $E^2(G_\pm)$ есть классы Харди-Смирнова [5, 6]. Это (слабое) описание спектральных компонент дается в терминах самого оператора S и не использует никакой дополнительной информации типа представимости оператора S в виде возмущения какого-либо вспомогательного оператора (ср. с описаниями в [1, 2]). Если S есть почти унитарный оператор, рассматриваемые нами подпространства совпадают с соответствующими подпространствами, определенными в [1, 2]. Для читателей, знакомых с теорией С.-Надя-Фояша [7], отметим, что $N_+(T_0) = H_{\cdot 1}$, $N_-(T_0) = H$ в случае, если T_0 есть вполне неунитарное сжатие.

Чтобы сформулировать главный результат этой статьи, нам необходимо ввести некоторые понятия и обозначения. Для односвязных областей естественным аналогом сжимающих операторов являются операторы, представимые в виде $\varphi_\pm(T_0)$, где T_0 есть сжатие и $\varphi_\pm$ – конформные отображения единичного круга $\mathbb{D}$ на области $G_\pm$. Однако в случае многосвязных областей, мы уже не можем воспользоваться теоремой Римана о существовании конформного отображения. Здесь на помощь приходит другая характеризация сжатий – через существование унитарной дилатации: $T_0 = P_H U_0|H$, где U_0 – унитарный оператор, а H – полуинвариантное (т.е. представимое в виде ортогональной разности инвариантных подпространств) подпространство для него.

Пусть G_+ конечносвязная область, границей которой является спрямляемая жорданова кривая C, состоящая из внешнего контура C_0 и внутренних контуров C_k, $k = 1, \ldots, n$. Будем говорить, что оператор T является G_+-сжатием, если он представим в виде $T = P_H U|H$, где U – нормальный оператор со спектром на C, а H – полуинвариантное подпространство для $(U - a)^{-1}$, $a \in G_-$. В случае односвязных областей это определение согласовано с приведенной выше характеризацией через конформные отображения. Оператор T назовем G_+-вполне неунитарным сжатием, если у него нет нетривиальных приводящих подпространств, на которых T индуцирует нормальный оператор со спектром на кривой C. Для области G_- соответствующие определения даются аналогичным образом. Обозначим

$$\mathcal{G}_\pm = \{\, T : T \text{ – } G_\pm\text{-вполне неунитарное сжатие} \,\}.$$

и через

$$\operatorname{Lat}_\pm S = \{\, H' \in \operatorname{Lat} S : \exists T \in \mathcal{G}_\pm \;\; S|H' \prec T \,\}$$

класс инвариантных подпространств оператора S таких, что сужение S на них есть деформация операторов из $\mathcal{G}_\pm$. Следующее утверждение является основным результатом данной работы.

Теорема. *1)* $N_\pm(S) = \bigvee_{H' \in \operatorname{Lat}_\mp S} H'$; *2)* $N_\pm(S) \in \operatorname{Lat}_\mp S$; *3) оператор* S *квазиподобен оператору из* $\mathcal{G}_\pm \iff N_\mp(S) = N_\mp(S^*) = H$.

Таким образом подпространства $N_\pm(S)$ являются *минимальными* инвариантными подпространствами, которые содержат все инвариантные подпространства, где оператор S индуцирует операторы, являющиеся деформациями операторов из класса $\mathcal{G}_\mp$. С другой стороны, подпространства $N_\pm(S)$ являются *максимальными* среди тех инвариантных подпространств, на которых оператор S индуцирует операторы являющиеся деформациями операторов из класса $\mathcal{G}_\mp$.

Замечание. Справедливы аналогичные утверждения для спектральных компонент $N(S)$ и $NM_\pm(S)$ (определения см. в [3, 8]). Соответствующие утверждения могут быть получены, если мы заменим $\mathcal{G}_\pm$ на $\mathcal{G}_e$ или на $\mathcal{G}_{i\pm}$, где

$$\mathcal{G}_e = \{T : T^*T = TT^*,\ \sigma(T) \subset C,\ \sigma_p(T) = \emptyset,\ \sigma_{sing}(T) = \emptyset\},$$
$$\mathcal{G}_{i\pm} = \{T : T \text{ — } G_\pm\text{-вполне неунитарное сжатие класса } C_{00}\}.$$

Доказательство теоремы производится путем сведения к случаю односвязной области, который уже рассмотрен в [3]. Следующая теорема позволяет произвести это сведение.

Теорема. *Пусть* $S - U \in \mathfrak{S}_1$, $\sigma_c(S) \subset C$, $U^*U = UU^*$, $\sigma(U) \subset C$, *где* $C = \bigcup_{k=0}^{n} C_k$ *есть* $C^{2+\varepsilon}$*-гладкая кривая, ограничивающая конечносвязную область* G_+. *Тогда существует оператор* $\bigoplus_{k=0}^{n} Y_k$, *осуществляющий подобие операторов* S *и* $\bigoplus_{k=0}^{n} S_k$, *где* $S_k - U_k \in \mathfrak{S}_1$, $\sigma_c(S_k) \subset C_k$, $U_k^*U_k = U_kU_k^*$, $\sigma(U_k) \subset C_k$.

Поясним некоторые моменты доказательства этого утверждения. Пусть L_k контуры лежащие в резольветном множестве оператора S и отделяющие компоненту границы C_k от остальных ее компонент. Положим

$$P_k = -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{L_k}(S-\lambda)^{-1}\,d\lambda, \qquad Q_k = -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{L_k}(U-\lambda)^{-1}\,d\lambda,$$
$$\widetilde{S}_k = -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{L_k} S(S-\lambda)^{-1}\,d\lambda, \qquad \widetilde{U}_k = -\tfrac{1}{2\pi i}\int_{L_k} U(U-\lambda)^{-1}\,d\lambda.$$

Определим подпространства $H_k^s = \operatorname{Ran} P_k$ и $H_k^u = \operatorname{Ran} Q_k$ и операторы $V_k = Q_k|H_k^s : H_k^s \to H_k^u$. Почти обратным к V_k будут операторы вида $Z_k = P_k|H_k^u$ в том смысле, что $I - Z_kV_k \in \mathfrak{S}_1$ и $I - V_kZ_k \in \mathfrak{S}_1$. Эти соотношения позволяют рассматривать для операторов V_k конечный индекс $\operatorname{ind}(V_k) = \operatorname{codim}\operatorname{Ran} V_k - \dim\operatorname{Ker} V_k$. В случае, если $\operatorname{ind}(V_k) = 0$, мы можем рассмотреть конечномерные возмущения Y_k операторов V_k, которые уже являются обратимыми операторами. Основным препятствием является возможность того, что $\operatorname{ind}(V_k) \neq 0$. В этом случае необходимо модифицировать подпространства H_k^u и операторы $\widetilde{U}_k$. Необходимая реконструкция может быть достигнута с использованием следующей леммы.

Лемма. *Пусть C - $C^{2+\varepsilon}$-гладкая кривая, $\widetilde{U}$ - нормальный оператор, $\sigma(\widetilde{U}) \subset C$. Тогда существует нормальный оператор U такой, что $\sigma(U) \subset C$, $\sigma_p(U) \neq \emptyset$ и $\widetilde{U} - U \in \mathfrak{S}_1$.*

Применяя лемму, построим конечномерные обратимые возмущения Y_k для V_k и определим $S_k = Y_k \widetilde{S}_k Y_k^{-1}$, которые и удовлетворяют всем условиям теоремы.

Отметим, что доказанная теорема открывает возможность другого описания спектральных компонент для ядерных возмущений нормальных операторов, а, именно, в терминах конформных отображений:

$$\mathrm{Lat}_{\pm} S = \{ H' \in \mathrm{Lat}\, S : \exists T \in \widetilde{\mathcal{G}}_{\pm} \;\; S|H' \prec T \}$$

где

$$\widetilde{\mathcal{G}}_{\pm} = \{ T : T = \varphi_{0\pm}(T_0) \oplus (\bigoplus_{k=1}^{n} \varphi_{k\mp}(T_k)), \;\; T_k \text{ - вполне неунитарные сжатия} \}.$$

Здесь $\varphi_{k\mp}$ – конформные отображения единичного круга на области $G_{\pm}$.

Заключение. В работе установлено, что операторы близкие к нормальным с непрерывным спектром на кривой обладают максимальными инвариантными подпространсвами, соответствующими внешней и внутринней областям, ограниченных данной кривой. Результаты статьи являются обобщением соответствующих результатов Набоко и Макарова.

Список литературы

[1] S. N. Naboko, On spectral analysis of non-selfadjoint operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **232** (1977) 36-39; English transl. in: *Sov. Math. Dokl.* **18** (1977) 32-36.

[2] N. G. Makarov, Canonical subspaces of almost unitary operators, in: *A. Haar Memorial Conference. Vol. 1, 2 (Budapest, 1985), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 49* (North-Holland, Amsterdam–New York, 1985) 611–621.

[3] A. S. Tikhonov, Property of maximality for spectral components, in: V. Kadets, W. Zelazko, eds., *Functional analysis and its applications* (Elsevier, 2004) 287–293.

[4] С. И. Федоров, О гармоническом анализе в многосвязной области характер-автоморфных пространствах Харди. Алгебра и Анализ, т. 9 (1997), No. 2, с. 192-240.

[5] P. L. Duren, *Theory of H^p spaces* (Academic Press, New York–London, 1970).

[6] S. D. Fisher, *Function theory on planar domains* (John Wiley and Sons, New York, 1983).

[7] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space* (North-Holland, Amsterdam–London, 1970).

[8] А. С. Тихонов, Функциональная модель и двойственность спектральных компонент для операторов с непрерывным спектром на кривой. Алгебра и Анализ, т. 14 (2002), No. 4, с. 158-195.

УДК 517.988.6

Вронский Б.М. **О малых движениях системы "жидкость-газ"в ограниченной области** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", Т.17(56), № 1, 3 - 10.

В работе изучены малые движения и собственные колебания системы "жидкость-газ"в ограниченной области, исследованы структура спектра, получены асимптотические формулы для собственных значений.

Ключевые слова: сжимаемая жидкость, дискретный спектр, асимптотика, задача Коши.

Вронский Б.М. **Про малі рухи і власні коливання системи "рідина-газ"в обмеженої області.** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", Т.17(56), № 1, 3 - 10.

В роботі розглянута задача про малі рухи і власні коливання системи "рідина-газ"в обмеженої області, досліджено структуру спектру, здобуті асимптотичні формули для власних значень.

Ключові слова: стислива рідина, дискретний спектр, асимптотика.

Wronsky B.M. **On problem on small motions and proper oscillations of system "fluid-gas"in the bounded region.** //Uchenye zapiski TNU, 2004, series "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics", T.17(56), issue 1, 3 - 10.

In the article the problem on small motions and proper oscillations of system "fluid-gas"in the bounded region is considered. It was show spectrum consists of a countable set of eigenvalues. Asymptotic formulas for eigenvalues were obtained.

keywords: compressible fluid, discrete spectrum, asymptotic formulas.

УДК 517.984.4, 517.968.7

Закора, Д.А., Копачевский, Н.Д. **О спектральной задаче, связанной с интегродифференциальным уравнением второго порядка** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", Т.17(56), № 1, 11 - 29.

Рассмотрена задача Коши

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s)\, ds = f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1.$$

Сформулирована ассоциированная спектральная задача. Для спектральной задачи установлена локализация спектра, получены асимптотические формулы для ветвей собственных значений, доказаны утверждения о базисности Рисса и кратной полноте части собственных и присоединенных элементов.
Ключевые слова: спектральная задача.

Закора, Д.О., Копачевський, М.Д. **Про спектральну задачу, пов'язану з інтегродиференціальним рівнянням другого порядку** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", Т.17(56), № 1, 11 – 29.

Розглянуто задачу Коші

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s)\, ds = f(t), \;\; u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1.$$

Сформульована асоційована спектральна задача. Для спектральної задачі встановлена локалізація спектру, одержані асимптотичні формули для гілок власних значень, доведені твердження про базисність Риса і кратну повноту частини власних та приєднаних елементів.

Ключові слова: спектральна задача.

Kopachevsky, N.D., Zakora, D.A. **On spectral problem connected with the second order integro-differential equation** //Uchenye zapiski TNU, 2004, series "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics", T.17(56), issue 1, 11 – 29.

The Cauchy problem

$$\frac{d^2u}{dt^2} + Au + \sum_{k=1}^{m} \int_0^t e^{-\gamma_k(t-s)} A_k u(s)\, ds = f(t), \;\; u(0) = u^0, \;\; u'(0) = u^1,$$

is considered. The associated spectral problem is formulated. Localization of a spectrum, asymptotic formulas for branches of eigenvalues are received. Statements on Riesz basis property and multiple completeness of a part of eigenvalues and adjoint elements are proved.

keywords: spectral problem.

УДК 517.983

Карпенко И.И., Сухтаев А.И., Тышкевич Д.Л. **Об одном подходе к дифференцированию функций кватернионного переменного** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", Т.17(56), №1, 30–37

В настоящей работе вводится понятие дифференцируемости функции кватернионного переменного по направлению, охватывающее достаточно широкий класс функций. Получены различные критерии дифференцируемости функций.

Ключевые слова: тело кватернионов, дифференцируемость функции кватернионного переменного.

Карпенко І.І., Сухтаев А.І.,Тишкевич Д.Л. **Про один підхід к діфференцірованию функцій кватерніонного змінного** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", Т.17(56), № 1, 30–37

У даній роботі вводиться поняття діференцируємості функції кватерніонного змінного по напряму, охоплююче достатньо широкий клас функцій. Одержані різні критерії діференцируємості функцій.

Ключові слова: тіло кватерніонов, діференцируємость функції кватерніонного змінного.

Karpenko I.I., Sukhtaev A.I., Tyshkevich D.L. **On one approach for differentiability of functions of quaternion variables** // Uchenye zapiski TNU, 2004, series of "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics", T.17(56), № 1, 30–37

In this paper the new approach for differentiability of functions defined on region of the real quaternion skew-field is suggested. It's proved different criteria for functions of a quaternion variable to be differentiable.

Keywords: quaternion skew-field, differentiability of functions of quaternion variables.

УДК 514.12

Криворучко А.И. **О нецентроаффинных группах, порожденных отражениями относительно прямых** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", Т.17(56), №1, 38–46

Найдены базисные полиномиальные инварианты группы преобразований H аффинного пространства в случае, когда H удовлетворяет следующим условиям:

a) H порождена аффинными отражениями относительно прямых и нецентроаффинна;

b) H действует на нецилиндрической алгебраической поверхности.

Ключевые слова: отражение, группа, орбита, инвариант.

Криворучко А.І. **Про нецентроафінни групи, що породжені віддзеркаленнями відносно прямих** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", Т.17(56), № 1, 38–46

Знайдені базисні поліноміальні інваріанти групи перетворювань H афінного простору в випадку, коли H задовольняє наступним умовам:

a) H породжена віддзеркаленнями відносно прямих і нецентроафінна;

b) H діє на нециліндричній алгебраїчній поверхні.

Krivoruchko A.I. **On the non-centroaffine groups generated by reflections with respect to the straight lines** // Uchenye zapiski TNU, 2004, series of "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics", T.17(56), № 1, 38–46

The basic polynomial invariants of a transformation group H of the affine space are found in the case when H satisfies the following conditions:

a) H is the non-centroaffine group generated by affine reflections with respect to straight lines;

b) H acts on some non-cylindrical algebraic surface.

УДК 514.747:574.583

Лях, А.М. **Деформации пространства и их применение для моделировании формы клеток фитопланктона** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", Т.17(56), №1, 47 – 58.

В статье рассматривается теория кривых, поверхностей и тел Безье, и описываются два способа деформации трехмерного пространства, — деформация

свободной формы и осевая деформация, которые используются для моделирования формы клеток фитопланктона. Предлагается способ создания трехмерных моделей клеток фитопланктона на основе фотографического изображения. Данные модели могут использоваться для точного вычисления объемов и площадей поверхности фитопланктона.

Ключевые слова: деформация свободной формы, осевая деформация, деформации пространства, кривые Безье, поверхности Безье, тела Безье, 3D–модели клеток фитопланктона

Лях, А.М. **Деформації простору та їх застосування для моделювання форми кліток фітопланктону** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", Т.17(56), № 1, 47 - 58.

В статті розглядається теорія кривих, поверхонь та тіл Без'е, і описуються два способи деформації тривимірного простору, — деформація вільної форми й осьова деформація, які використовуються для моделювання форми кліток фітопланктону. Пропонується спосіб створення тривимірних моделей фітопланктону на основі фотографічного зображення. Данні моделі фітопланктону використовуються для точного обчислення його об'ємов й площадей поверхні.

*Ключові слова:*деформація вільної форми, осьова деформація, деформація простору, криві Без'е, поверхні Без'е, тіла Без'ье, 3D–моделі кліток фітопланктону

Lyakh, A.M. **Space Deformations and their application to phytoplankton shape modeling** // Uchenye zapiski TNU, 2004, series of "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics", T.17(56), № 1, 47 - 58.

The theory of Bézier curves, pathes and volumes is investigated, and two methods of 3D space deformation, — Free Form Deformation and Axial Deformation, which are used for phytoplankton cells shape modeling, are considered. The method of 3D phytoplankton models building, on the basis of a photographic images, is described. These models are used for accurate calculating phytoplankton volumes and surfaces area.

keywords:Free Form Deformation, Axial Deformation, Space Deformations, Bézier curves, Bézier patches, Bézier volumes, phytoplankton 3D–models

УДК 517.98

Муратов М. А., Рубштейн Б. А. **Аналоги доминантной эргодической теоремы в перестановочно инвариантных пространствах измеримых функций** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", т.17 (56), № 1, 59 – 67

В настоящей работе рассматриваются аналоги доминантной эргодической теоремы для последовательностей абсолютных сжатий в перестановочно инвариантных пространствах измеримых функций на положительной полуоси.

Муратов М. А., Рубштейн Б. А. **Про один клас максимальних інваріантних підпросторів неперервного оператора у просторі з індефінітною метрикою** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", т.17 (56), № 1, 59 – 67

В роботі вивчаються аналоги домінантної ергодичної теореми, які розглядаються для послідовністей абсолютніх стисків у перестановочно-інваріантних просторах вимірних функцій на додатній напівосі.

Muratov M. A., Rubshtain B. A. **On one class of maximal invariant subspaces of continuous operator in indefinite inner product space** // Uchenye zapiski TNU, 2004, series of "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics", т.17 (56), № 1, 59 – 67

We study analogs of Dominated Ergodic Theorems in rearrangement invariant spaces of a measurable functions for sequence absolute contraction on the positive semiaxis.

УДК 519.216.2

Павлов Е.А. **К теореме Биркофа-Хинчина** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", т.17 (56), № 1, 78 – 82.

В данной статье теорема Биркофа-Хинчина обобщена на правильные идеальные структуры, обладающие свойствами Фату и Лебега.

Павлов Е.А. **До теореми Біркофа-Хінчина** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", т.17 (56), № 1, 78 – 82.

В даній статті теорема Биркофа-Хінчина узагальнена на правильні іднальні структури, що володіють властивостями Фату і Лебега.

Pavlov, E.A. **On Birkof-Hinchin theorem** // Uchenye zapiski TNU, 2004, series of "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics", т.17 (56), № 1, 78 – 82.

In this paper Birkof-Hinchin theorem is generalized on ideal Banach functional spaces.

УДК 517.98

Орлов, И.В. **Достаточные условия экстремума и K-экстремума в произведении двух ядерных ЛВП (общий случай)** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", Т.17(56), № 1, 68 – 77.

В работе получены достаточные условия локального экстремума и компактного экстремума в произведении двух ядерных ЛВП в случае некоммутирующих вторых частных производных. В частности, получены достаточные условия компактного экстремума функционала Эйлера–Лагранжа.

Ключевые слова: локальный экстремум, K-экстремум, ядерное пространство, функционал Эйлера–Лагранжа.

Орлов, І.В. **Достатні умови екстремуму і K-екстремум в добутку двох ядерних ЛОП (загальний випадок)** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", Т.17(56), № 1, 68 – 77.

У роботі знайдені достатні умови локального екстремуму і компактного екстремуму в добутку двох ядерних просторів у випадку некомутуючих других частинних похідних. Зокрема, знайдені достатні умови компактного екстремуму функціонала Ейлера–Лагранжа.

Ключові слова: локальний екстремум, K-екстремум, ядерний простір, функціонал Ейлера–Лагранжа.

Orlov, I.V. **Sufficient conditions of extremum and K-extremum in the product of two nuclear LCS (general case)** //Uchenye zapiski TNU, 2004, series "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics", T.17(56), issue 1, 68 – 77.

In the work the sufficient conditions of extremum and compact extremum in the product of two nuclear LCS for the case of non-commuting second partial derivatives are proposed. In particular, the sufficient conditions of compact extremum for Euler–Lagrange functional are proved.

keywords:local extremum, K-extremum, nuclear space, Euler–Lagrange functional.

УДК 517.988.6

Третьяков, Д.В. **Об одном отношении ортогональности в гильбертовом пространстве и некоторых свойствах аддитивных операторов** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", Т.17(56), № 1, 83 – 94.

В произвольном комплексном гильбертовом пространстве определено отношение ортогональности с помощью специального внутреннего произведения. Используя указанное произведение, на бимодуле всех непрерывных аддитивных операторов определены и изучены инволюция и различные классы аддитивных операторов. В том числе предложена классификация спектра ограниченного аддитивного оператора.

Ключевые слова: аддитивный оператор, бимодуль, ортогональность, сопряжённый оператор, спектр

Третяков, Д.В. **Про одне відношення ортогональності у гільбертовому просторі і деяких властивостях адитивних операторів** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", Т.17(56), № 1, 83 – 94.

В довільному комплексному гільбертовому просторі визначається відношення ортогональності за допомогою спеціального внутрішнього добутку. Застосовуя цей добуток, на бімодулі усіх адитивних обмежених операторів визначається інволюція та різні класи операторів, досліджуються їх властивості. Запропоновуна також класифікація спектра адитивного оператора.

Tretyakov, D.V. **On the orthogonality relation in Hilbert space and some properties of additive operators** //Uchenye zapiski TNU, 2004, series "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics", T.17(56), issue 1, 83 - 94.

The special inner product and orthogonality relation in complex Hilbert space were defined. With the help of this product it's defined and studied involution and different classes of operators on the bimodulne of all continued additive operators. The classification of spectrum of bounded additive operator is proposed too.

keywords:additive operator,bimoduln,orthogonality, adjoint operator, spectrum

УДК 517.983

Тышкевич Д.Л. **Об одном классе максимальных инвариантных подпространств непрерывного оператора в пространстве с индефинитной метрикой** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", Т.17(56), №1, 95–122

В данной работе изучается структура максимальных приводящих подпространств непрерывного линейного оператора в пространстве с индефинитной метрикой, индуцирующих унитарный оператор.

Ключевые слова: Пространства с индефинитной метрикой, инвариантные подпространства, приводящие подпространства, унитарные операторы.

Тишкевич Д.Л. **Про один клас максимальних інваріантних підпросторів неперервного оператора у просторі з індефінітною метрикою** // Вчені записки ТНУ, 2003, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", Т.17(56), №1, 95–122

У даній роботі вивчається структура індукуючих унітарний оператор максимальних підпросторів неперервного лінійного оператора у просторі з індефінітною метрикою, які приводять заданий оператор.

Ключові слова: Простори з індефінітною метрикою, інваріантні підпростори, простори, які приводять оператор, унітарні оператори.

Tyshkevich D.L. **On one class of maximal invariant subspaces of continuous operator in indefinite inner product space** // Uchenye zapiski TNU, 2003, series of "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics", T.17(56), №1, 95–122

In this paper we study the structure of maximal reducing subspaces of continuous linear operator in indefinite inner product space inducing unitary operator.

Keywords: Indefinite inner product spaces, invariant subspaces, reducing subspaces, unitary operators.

УДК 517.43

Тихонов, А.С. **Свойство максимальности спектральных компонент (случай многосвязных областей)** // Ученые записки ТНУ, 2004, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика", Т.17(56), №1, 123 – 126.

В работе установлено, что операторы близкие к нормальным с непрерывным спектром на кривой обладают максимальными инвариантными подпространсвами, соответствующими внешней и внутринней областям, ограниченных данной кривой. Результаты статьи являются обобщением соответствующих результатов Набоко и Макарова.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, спектральная компонента, оператор, гильбертово пространство

Тіхонов, О.С. **Властивість максимальнисти спектральних компонент (випадок многозв'язних областей)** // Вчені записки ТНУ, 2004, серія "Математика. Механіка. Інформатика і кібернетика", Т.17(56), №1, 123 – 126.

В роботі установлено, що оператори близькі до нормальних з неперервним спектром на кривої володіють максимальними інваріантними підпросторами, відповідними зовнішноі та внутрішноі областям, обмеженим даною кривою. Результати статті виявляються узагальненнями відповідних результатів Набоко та Макарова.

Ключові слова: інваріантний підпростор, спектральна компонента, гільбертов простор

Tikhonov, A.S. Zroperty of maximality for spectral components (case of multiply connected domains) //Uchenye zapiski TNU, 2004, series "Mathematics. Mechanics. Computer Science & Cybernetics"T.17(56), №1, 123 – 126.

The aim of this paper is to show that operators closed to normal ones with spectrum on a curve possess certain maximal invariant subspaces, which are related to the interior and the exterior of the curve. We generalize the corresponding results (for the real axis and the unit circle) established by Naboko and Makarov.

keywords: invariant subspace, spectral component, operator, Hilbert space

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ

Б.М. Вронский	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; асс. каф. математического анализа.
Д.А. Закора	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; к.ф.-м.н., доц. каф. математического анализа.
И.И. Карпенко	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; к.ф.-м.н., доц. каф. алгебры и функционального анализа.
А.И. Криворучко	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; к.ф.-м.н., доц. каф. геометрии.
Н.Д. Копачевский	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; д.ф.-м.н., проф., зав. каф. математического анализа.
А.М. Лях	Морской гидрофизический институт НАН Украины, аспирант.
М.А. Муратов	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; к.ф.-м.н., доц. каф. математического анализа.
И.В. Орлов	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; к.ф.-м.н., доц. каф. математического анализа.
Е.А. Павлов	Симферопольский экон. институт Киевского нац. экон. университета, проф., зав. кафедрой математики.

Б.А. Рубштейн	Беер-Шева, Израиль.
А.И. Сухтаев	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; студент.
Д.В. Третьяков	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; к.ф.-м.н., доц. каф. алгебры и функционального анализа.
А.С. Тихонов	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; к.ф.-м.н., доц. каф. математического анализа.
Д.Л. Тышкевич	Таврический нац. университет им. В.И. Вернадского; асс. каф. алгебры и функционального анализа.

СОДЕРЖАНИЕ

О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ СИСТЕМЫ "ЖИДКОСТЬ-ГАЗ" В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ
Вронский Б.М. 3

О СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА
Закора Д.А., Копачевский Н.Д. 11

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЮ ФУНКЦИЙ КВАТЕРНИОННОГО ПЕРЕМЕННОГО
Карпенко И.И., Сухтаев А.И.,Тышкевич Д.Л. 30

О НЕЦЕНТРОАФФИННЫХ ГРУППАХ, ПОРОЖДЕННЫХ ОТРАЖЕНИЯМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЯМЫХ
Криворучко А.И. 38

ДЕФОРМАЦИИ ПРОСТРАНСТВА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФОРМЫ КЛЕТОК ФИТОПЛАНКТОНА
Лях А.М. 47

АНАЛОГИ ДОМИНАНТНОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ В ПЕРЕСТАНОВОЧНО ИНВАРИАНТНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ
Муратов М. А., Рубштейн Б. А. 59

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА И *K*-ЭКСТРЕМУМА В ПРОИЗВЕДЕНИИ ДВУХ ЯДЕРНЫХ ЛВП (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)
Орлов И.В. 68

К ТЕОРЕМЕ БИРКОФА-ХИНЧИНА
Павлов Е.А. 78

ОБ ОДНОМ ОТНОШЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ АДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ
Третьяков Д.В. 83

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ МАКСИМАЛЬНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ НЕПРЕРЫВНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ
Тышкевич Д. Л. 95

СВОЙСТВО МАКСИМАЛЬНОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ (СЛУЧАЙ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ)
Тихонов А.С. 123

ИНФОРМАЦИЯ ОБ АВТОРАХ 137

УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ

ТАВРИЧЕСКОГО
НАЦИОНАЛЬНОГО УНИВЕРСИТЕТА
им. В. И. Вернадского

Том 17 (56). № 1

МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. ИНФОРМАТИКА И КИБЕРНЕТИКА

Симферополь
2004