Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 21 (60). 2008 г. № 1. С. 87-95

УДК 539. 391+514. 764.2

КОСМИЧЕСКАЯ НУЛЬ-СТРУНА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ В ПРИБЛИЖЕНИИ СЛАБОГО ПОЛЯ

Петраш А.Н.[1], Рощупкин С.Н.[2]

[1]Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности, Севастополь, Украина
[2]Таврический национальный университет им.В.И.Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: rsn@ tnu.crimea.ua

В роботе изучена деформация космической нуль-струны вращающейся черной дырой в приближении слабого поля. Получены общие уравнения описывающие динамику нуль-струны. Показано, что решение описывающее нуль-струну не зависит от ее массы.
Ключевые слова: нуль-струна, черная дыра, космология.

ВВЕДЕНИЕ

Гипотеза о струнной природе механизма инфляции вызывает большой интерес к исследованию динамики струн в искривленных пространствах. В связи с этим актуальными являются вопросы о решении уравнений движения струны в различных искривленных пространствах и самосогласованном рассмотрении струн в качестве доминантных источников гравитации в рассматриваемых пространствах [1]. Однако уравнения движения, описывающие струну в искривленном пространстве, представляют собой сложную систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных для которых получены только отдельные частные решения [2].

Ситуация значительно упрощается если перейти к рассмотрению нуль-струн, которые реализуют предел нулевого натяжения струн. Поскольку натяжение струн меряется отрицательными степенями планковской массы M_{pl}, то с физической точки зрения предел нулевого натяжения соответствует асимптотически большим масштабам энергии $E >> M_{pl}$. Поэтому естественно предположить, что нуль-струны реализуют высокотемпературную фазу теории струн, характеризуемую отсутствием размерных параметров. Нарушение конформной симметрии приводит к возникновению ненулевого натяжения у нуль-струны, причем роль параметра характеризующего это натяжение, играет M_{pl}. Качественно эту картину можно пояснить, если предположить, что нуль-струны могут взаимодействовать со скалярным полем, обладающим отличным от нуля вакуумным средним $< \varphi > \approx M_{pl}$. Тогда свободные струны и нуль-струны можно рассматривать как различные вакуумные состояния струны, взаимодействующей со скалярным полем посредством действия следующего вида:

$$S = \frac{1}{2}\int d\tau d\sigma \left[\frac{\det\left(\partial_\mu \vec{x} \partial_\nu \vec{x}\right)}{E(\tau,\sigma)} - \lambda E(\tau,\sigma)\varphi^4 + \frac{1}{\alpha'} E(\tau,\sigma)\varphi^2 + ... \right]. \qquad (1)$$

Вакуумные ожидания поля φ, отвечающие различным экстремалям потенциальной энергии поля φ, даются выражениями

$$<\varphi>_0 = 0, \quad <\varphi>_\pm = \pm\sqrt{\frac{1}{2\lambda\alpha'}}, \qquad (2)$$

первое из которых отвечает симметричной фазе, а второе – фазе с нарушенной конформной и дискретной ($\varphi \to -\varphi$) симметриями. Тогда в окрестности первого вакуума действие (1) совпадает с действием нуль-струны [3,4], а в окрестности второго вакуума – со стандартным представлением Намбу-Готто

$$S \approx <\varphi>_+ \int d\tau d\sigma \sqrt{-\det\left(\partial_\mu \vec{x} \partial_\nu \vec{x}\right)}, \qquad (3)$$

после исключения вспомогательного поля $E(\tau,\sigma)$. Откуда видно, что роль параметра натяжения при таком сценарии играет вакуумное среднее $<\varphi>_+$.

1. ДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СВЯЗИ ДЛЯ СТРУН И НУЛЬ СТРУН

Свободная струна, движущаяся в плоском пространстве Минковского заметает мировую поверхность. Действие для свободной замкнутой суперструны определяется выражением

$$S = \frac{T}{2}\int d\tau d\sigma \eta_{\mu\nu}\sqrt{h}\left[h^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu + i\bar{\Psi}^\mu \gamma^\alpha \partial_\alpha \Psi^\nu \right], \qquad (4)$$

где $T = 1/2\pi\alpha'$ – натяжение струны, $x^0 = \tau$ и $x^1 = \sigma$ пространственно и времени подобные координаты струны, $h^{\alpha\beta}$ – двумерная метрика мировой поверхности ($\alpha,\beta = 0,1$), $x^\mu(\tau,\sigma)$ ($\mu,\nu = 0,1,...,D-1$) координаты мировой поверхности струны распространяющейся в D-мерном пространстве Минковского с метрикой $\eta_{\mu\nu}$. Спиноры на мировой поверхности обозначаются $\Psi^\mu = \Psi^\mu(\tau,\sigma)$, а γ^α – 2×2 матрицы Дирака с алгеброй $\left\{\gamma_\alpha, \gamma_\beta\right\} = 2\eta_{\alpha\beta}$. Действие (4) связывает пространственные (бозонные) координаты $x^\mu(\tau,\sigma)$ с фермионными координатами $\Psi^\mu = \Psi^\mu(\tau,\sigma)$ и инвариантно при бесконечно малых суперсимметричных преобразованиях

$$\delta x^\mu = i\bar{\varepsilon}\Psi^\mu, \quad \delta\Psi^\mu = \gamma^\alpha \partial_\alpha x^\mu \varepsilon, \qquad (5)$$

в которых ε - постоянный антикоммутирующий спинор.

В дальнейшем ограничимся бозонным сектором и рассмотрим движение струны в искривленном пространстве-времени с метрикой $g_{\mu\nu}$. В этом случае действие (4) может быть представлено формулой

$$S = \frac{T}{2}\int d\tau d\sigma g_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha x^\mu \partial_\beta x^\nu . \qquad (6)$$

В действии (6) использована конформная калибровка $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ которая позволяет заменить 2-мерную метрику мировой поверхности $h^{\alpha\beta}$ на плоскую метрику $\eta^{\alpha\beta}$. Это возможно в силу того, что действие (6) инвариантно относительно Вейлевских преобразований $h^{\alpha\beta} \to f(\sigma)h^{\alpha\beta}$ и зависимость от $h^{\alpha\beta}$ может быть откалибрована. Фактически действие (6) описывает нетривиальную квантовую теорию поля известную как нелинейная σ- модель [5]. В $D = 4$ мерном пространстве-времени действие (6) приводит к следующим уравнениям движения струны и связям

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}\dot{x}^\rho \dot{x}^\nu = \lambda(x''^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho}x'^\rho x'^\nu), \qquad (7)$$

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -\lambda(g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu), \qquad (8)$$

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu x'^\nu = 0, \qquad (9)$$

где $(...)^{\cdot} \equiv \partial/\partial\tau$, $(...)^{/} \equiv \partial/\partial\sigma$. $\lambda = 1$ соответствует струне с натяжением, а $\lambda = 0$ - нуль-струне. Эволюция струны, описываемая уравнениями (7)-(9), даже в простейшем искривленном фоновом пространстве описывается сложной системой нелинейных уравнений в частных производных. Даже в пространстве Шварцшильда система (7)-(9) фактически неинтегрируема и имеет хаотическое поведение. Однако, возможно найти точную эволюцию для некоторых особых конфигураций [6]. Хаотическое поведение означает, что найти полную классификацию возможных классических траекторий струн в пространстве Шварцшильда безнадежно. В случае нуль-струн ситуация значительно упрощается. Хотя каждая индивидуальная точка нуль-струны движется по светоподобной геодезической, нуль-струна в целом может иметь совершенно нетривиальную динамику. Ситуация качественно подобна той, которая имеет место в ОТО. Хорошо известно, что каждый луч в пучке движется по геодезической, тогда как распространение пучка в целом может быть крайне нетривиально в виду действия приливных сил. Динамика нуль-струн в искривленном пространстве может быть получена из динамики точечных частиц. Это по существу вопрос интерпретации хорошо известных результатов для точечных частиц в пространстве размерных объектов. Существуют две физически различные ситуации. Они различаются тем, что связь (9) выполняется автоматически или нет. Если она выполняется автоматически, то эволюция нуль-струны почти тривиальна в том смысле, что каждая точка нуль-струны движется по светоподобной геодезической (траектория безмассовой частицы) без какой либо корреляции с другими точками струны. Тогда движение нуль-струны сводится попросту к движению коллектива безмассовых точечных частиц, совершенно независимых друг от друга. Если же связь (9) не выполняется автоматически, тогда возникает нетривиальная корреляция между различными точками нуль-струны, природа которой чисто «струнная».

2. ПРИБЛИЖЕНИЕ СЛАБОГО ПОЛЯ ДЛЯ НУЛЬ СТРУНЫ

Как уже было отмечено выше, уравнения описывающие динамику нуль-струны соответствуют $\lambda = 0$ в формулах (7)-(9) и имеют вид

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\nu\rho}\dot{x}^{\rho}\dot{x}^{\nu} = 0, \qquad (10)$$

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0, \qquad (11)$$

$$g_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}x'^{\nu} = 0. \qquad (12)$$

В отсутствии внешнего гравитационного поля $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$, где $\eta_{\mu\nu}$ - метрика плоского пространства-времени. В декартовых координатах $\eta_{\mu\nu} \equiv diag\left(-1,1,1,1\right)$ и $\Gamma^{\mu}_{\nu\rho} = 0$. Легко убедиться, что

$$x_0^{\mu}(\tau,\sigma) = (\tau, \quad \tau\cos\sigma, \quad \tau\sin\sigma, \quad c), \qquad (13)$$

где c - некоторая константа, является решением уравнений (10)-(12) и описывает замкнутую нуль-струну в пространстве Минковского. Далее рассмотрим как это решение модифицируется когда замкнутая нуль-струна движется в слабом гравитационном поле. С этой целью представим метрический тензор и мировые координаты нуль-струны в виде:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \theta_{\mu\nu}, \qquad (14)$$

$$x^{\mu}(\tau,\sigma) = x_0{}^{\mu}(\tau,\sigma) + x_1{}^{\mu}(\tau,\sigma), \qquad (15)$$

где $\theta_{\mu\nu}$ и $x_1{}^{\mu}(\tau,\sigma)$ соответствуют малым возмущениям метрики и мировых координат нуль-струны соответственно. Подставляя (14), (15) в уравнения (10)-(12) приходим к следующим уравнениям описывающим деформацию мировой поверхности струны в слабом гравитационном поле

$$\ddot{x}_1{}^{\mu} = F^{\mu}, \qquad F^{\mu} = \frac{1}{2}\eta^{\mu\lambda}\Gamma_{\lambda\nu\rho}(\theta)\dot{x}^{\rho}\dot{x}^{\nu} = 0, \qquad (16)$$

$$2\eta_{\mu\nu}\dot{x}_0{}^{\mu}\dot{x}_1{}^{\nu} + \theta_{\mu\nu}\dot{x}_0{}^{\mu}\dot{x}_0{}^{\nu} = 0, \qquad (17)$$

$$\eta_{\mu\nu}(\dot{x}_0{}^{\mu}x_1'^{\nu} + x_0'^{\nu}\dot{x}_1{}^{\mu}) + \theta_{\mu\nu}\dot{x}_0{}^{\mu}x_0'^{\nu} = 0, \qquad (18)$$

где символы Кристоффеля вычисляются для метрического тензора $\theta_{\mu\nu}$.

Линеаризованные уравнения (16)-(18) могут быть использованы для изучения движения нуль-струны на больших расстояниях от черной дыры. В этом случае гравитационное поле черной дыры может быть аппроксимировано следующим образом

$$dS^2 = -\left(1-\frac{2M}{R}\right)dt^2 + \left(1+\frac{2M}{R}\right)\left(dx^2+dy^2+dz^2\right) - \frac{4J}{R^3}\left(xdy-ydx\right)dt\,, \quad (19)$$

где $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$, а M и J - масса и угловой момент черной дыры соответственно. Фактически это асимптотическая форма для метрики пригодная для описания произвольного локализованного стационарного распределения материи. В соответствии с (19) возмущающее поле может быть представлено в виде двух слагаемых

$$\theta_{\mu\nu} = \theta_{1\mu\nu} + \theta_{2\mu\nu}\,, \quad (20)$$

где первый член представляет Ньютоновскую часть

$$\theta_{1\mu\nu} = \frac{2M}{R}\delta_{\mu\nu}\,, \quad (21)$$

а второй связан с вращением черной дыры

$$\theta_{2\mu\nu} = \frac{4J}{R^3}\delta^0{}_{(\mu\ \varepsilon_\nu)\alpha 03}x^\alpha\,. \quad (22)$$

Подставляя (13), (20)-(22) в уравнения (16)-(18) и интегрируя их, находим поправки к нулевому приближению

$$t_1(\tau,\sigma) = M\ln(\tau + \sqrt{c^2+\tau^2}) + \tau C_{1t}(\sigma) + C_{2t}(\sigma)\,, \quad (23)$$

$$x_1(\tau,\sigma) = -M\cos\sigma\ln(\tau+\sqrt{c^2+\tau^2}) - \frac{J\sqrt{c^2+\tau^2}\sin\sigma}{c^2} + \tau C_{1x}(\sigma) + C_{2x}(\sigma)\,, \quad (24)$$

$$y_1(\tau,\sigma) = -M\sin^3\sigma\ln(\tau+\sqrt{c^2+\tau^2}) - \frac{2J\sqrt{c^2+\tau^2}\cos\sigma}{c^2} + \tau C_{1y}(\sigma) + C_{2y}(\sigma)\,, \quad (25)$$

и связи

$$-\frac{M}{c} - c_{1t}(\sigma) + \cos\sigma\left(c_{1x}(\sigma) - \frac{M\cos\sigma}{c}\right) + \sin\sigma\left(c_{1y}(\sigma) - \frac{M\sin^3\sigma}{c}\right) = 0\,, \quad (26)$$

$$\begin{aligned}&\cos\sigma\left(-\frac{J\cos\sigma}{c} + M\ln c\cdot\sin\sigma + c'_{2x}(\sigma)\right) + \\ &+\sin\sigma\left(-\frac{2J\sin\sigma}{c} - 3M\ln c\cdot\cos\sigma\sin^2\sigma + c'_{2y}(\sigma)\right) - c'_{2t}(\sigma) = 0,\end{aligned} \quad (27)$$

Связи (26), (27) позволяют довольно просто найти «константы» интегрирования

$$\begin{aligned}&c_{1t} = -M/c,\ \ c_{2t} = 0,\ \ c_{1x}(\sigma) = M\cos\sigma/c,\ \ c_{1y}(\sigma) = M\sin^3\sigma/c, \\ &c_{2x}(\sigma) = J\sin\sigma/c + M\ln c\cdot\cos\sigma,\ \ c_{2y}(\sigma) = 2J\cos\sigma/c + M\ln c\cdot\sin^3\sigma.\end{aligned} \quad (28)$$

Формулы (23)-(25), (28) дают окончательный результат для поправки первого приближения по возмущающему гравитационному полю. Общий вид мировой поверхности заметаемой нуль-струной и описываемой формулами (13), (23)-(28) представлен на рис.1.

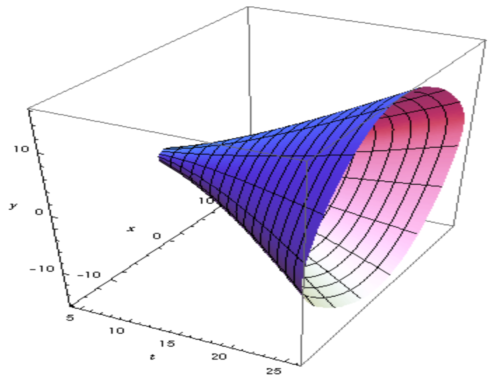

Рис.1. Общий вид мировой поверхности заметаемой нуль-струной и описываемой формулами (13), (23)-(28) .

На рисунках 2-5 изображена замкнутая нуль-струна лежащая в плоскости параллельной плоскости xoy при различных значениях углового момента черной дыры и фиксированных значениях параметров M и c. Из рисунков видно, что с ростом углового момента черной дыры, начальная конфигурация нуль-струны (окружность) деформируется, а ее радиус увеличивается.

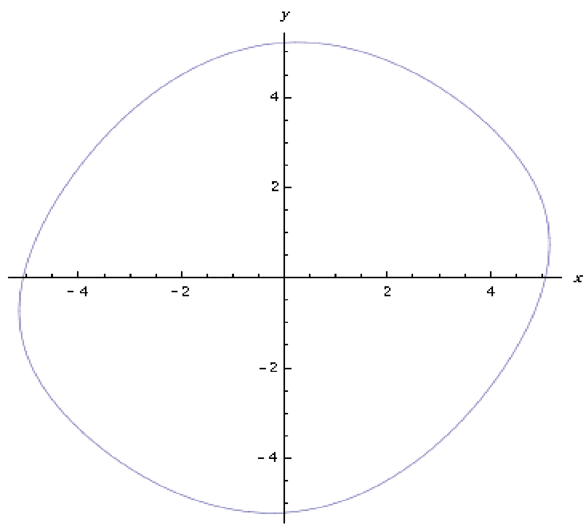

Рис.2. Замкнутая нуль-струна лежащая в плоскости параллельной плоскости xoy при значении углового момента черной дыры $J = 1$.

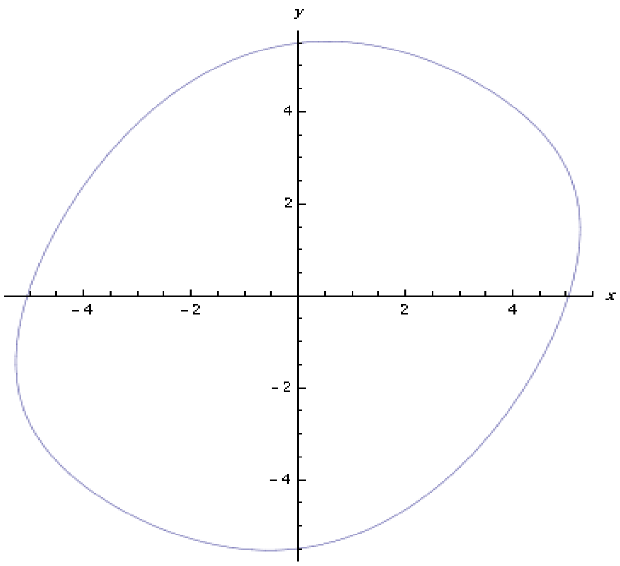

Рис.3. Замкнутая нуль-струна лежащая в плоскости параллельной плоскости xoy при значении углового момента черной дыры $J = 2$.

Рис.4. Замкнутая нуль-струна лежащая в плоскости параллельной плоскости xoy при значении углового момента черной дыры $J = 3$.

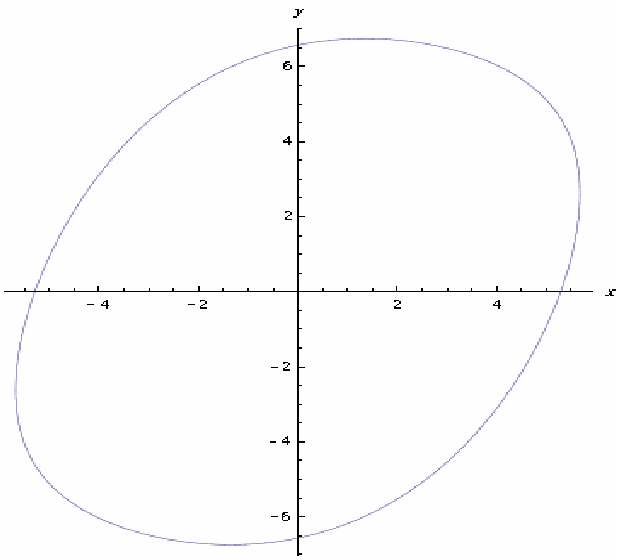

Рис.5. Замкнутая нуль-струна лежащая в плоскости параллельной плоскости xoy при значении углового момента черной дыры $J = 4$.

ВЫВОДЫ

В работе получены общие уравнения описывающие в приближении слабого поля замкнутую нуль-струну в гравитационных полях. Полученные уравнения применены к исследованию динамики нуль-струны в гравитационном поле вращающейся черной дыры. Показано, что начальная конфигурация нуль-струны деформируется, а мировая поверхность нуль-струны раздувается, причем раздувание мировой поверхности происходит за счет Ньютоновской части метрического тензора, а деформация обусловлена вращением черной дыры. Показано, что решение слабо зависит от параметров задачи. Полученные решения могут быть использованы в качестве тестовых при анализе численных решений описывающих динамику нуль-струны в гравитационных полях.

Список литературы

1. M.P. Dabrowski, A.L. Larsen Strings in homogeneous background space time. Phys. Rev. D., v.57, №8, p. 5108-5117, 1998.
2. P. Prozhilov Exact string solutions in nontrivial backgrounds, e-print: hep-th/0103154.
3. Roshchupkin S.N., Zheltukhin A.A. Friedman Universes and exactly solution on string cosmology // Class. Quantum. Grav. – 1995. – Vol. 12. – p. 2519–2524.
4. Roshchupkin S.N., Zheltukhin A.A. Varionational principle and a perturbative solution of non-linear string equations curved space. // Nucl. Phys. Grav. – 1999. – V. 543 B. – P. 365–386.
5. *Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.* Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987. –175 с.
6. M.P. Dabrowski Null string in Schwarzschild space time. Phys. Rev. D., v.55, №10, p. 6409-6414, 1997.

Петраш О.М., Рощупкин С.М. **Космічна нуль-струна в гравітаційному полі чорної діри, що обертається в наближенні слабкого поля** // Учені записки Таврійського національного університета ім. В.І. Вернадського. - 2008. - Серія «Фізика». - Т. 21 (60). - № 1. - С. 87-95.
У роботі вивчена деформація космічної нуль-струни в гравітаційному полі чорної діри, що обертається в наближенні слабкого поля. Отримано загальні рівняння нуль-струни, що описують динаміку. Показано, що розв'язок який описує нуль-струну не залежить від її маси.
Ключові слова: нуль-струна, чорна діра, космологія.

Petrash A.N., RoshchupkinS.N. **Cosmic null string in the gravitational field rotating black hole in weak field approximation**// Uchenye zapiski Tavricheskogo Natsionalnogo Universiteta im. V.I. Vernadskogo. – 2008. – Series «Fizika». – V. 21 (60). - № 1. – P. 87-95.
We study the deformation of a cosmic null string by a nearly rotating black hole in the weak field approximation. The general null string equations were find. It is shown that null string solution do not depend from black hole mass.
Keywords: null string, black hole, cosmology.

Поступила в редакцию 17.09.2008 г.