Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 21 (60). 2008 г. № 1. С. 80-86

УДК 539. 391+514. 764.2

АНАЛИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ СТРУНЫ ПОСТОЯННОГО РАДИУСА

Леляков А.П.

Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: lelyakov@ tnu.crimea.ua

В работе проанализирована система уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны постоянного (неизменного со временем) радиуса, которая движется вдоль оси z и в каждый момент времени t полностью лежит в плоскости, ортогональной этой оси. В результате проведенного анализа были определены условия которым должны удовлетворять искомые метрические функции, а также приведено точное решение уравнений Эйнштейна удовлетворяющее найденным условиям.
Ключевые слова: нуль-струна, точные решения, космология.

ВВЕДЕНИЕ

В современной физике уже достаточно прочно сложилось мнение о том, что исследование многомерных объектов, частью которых и являются струны, может стать еще одним недостающим кирпичиком в нашем понимании природы.

Одно из направлений теории струн состоит в исследовании роли одномерно-протяженных объектов в космологии. Калибровочные теории Великого объединения, основанные на идее спонтанного нарушения симметрии, предсказывают возможность образования в процессе фазовых переходов в ранней Вселенной одномерных топологических дефектов, которые получили название космических струн. В связи с чем, заслуживающим исследования является вопрос о влиянии или о степени влияния этих объектов на дальнейшее развитие Вселенной.

Нуль-струны реализуют предел нулевого натяжения в теории струн. В научной литературе уже обсуждаются некоторые возможности применения нуль-струн в космологии. Так например в работе [1] было показано, что рассматривая газ нуль-струн в качестве доминантного источника гравитации в D-мерных пространствах Фридмана-Робертсона-Уокера с $k=0$, можно описать механизм инфляции характерный для данных пространств, в роботе [2] газ реликтовых нуль-струн рассматривался как один из возможных кандидатов на роль носителя так называемой “черной” материи, существование которой во Вселенной, сейчас уже можно считать твердо установленным фактом. И хотя объектом исследования в приведенных примерах является уже не уединенная нуль-струна а газ нуль-струн, свойства этого газа еще остаются неясными. Первым шагом к пониманию свойств газа нуль-струн могут стать задачи о гравитационном поле, порождаемом нуль-струной, движущейся по различным траекториям, а также задачи о поиске траекторий движения пробных нуль-струн в гравитационном поле нуль-струны.

В предлагаемой работе проанализирована система уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны постоянного (неизменного со временем) радиуса R, которая движется вдоль оси z и в каждый момент времени t полностью лежит в плоскости, ортогональной этой оси. В цилиндрической системе координат ($x^0 = t,\ x^1 = \rho,\ x^2 = \theta,\ x^3 = z$) функции $x^m(\tau,\sigma)$ определяющие данную траекторию движения замкнутой нуль-струны, имеют следующий вид:

$$t = \tau,\ \rho = R = const.,\ \theta = \sigma,\ z = \pm\tau, \tag{1}$$

где τ и σ параметры на мировой поверхности нуль-струны, знак $\pm$ соответствует выбору направления движения, в дальнейшем для определенности выберем в (1) знак “-”.

Можно отметить, что траектория (1) достаточно часто реализуются при движении замкнутой нуль-струны в фоновых гравитационных полях, например, в пространстве-времени плоской гравитационной волны [3] и в лоренцевых пространствах с нетривиальной конформной группой, которые описывают распространение ударных гравитационных волн [4].

Формальный анализ, основанный на использовании свойств метрического тензора, симметрий данной задачи, а также условия того, что траектория движения замкнутой нуль-струны (1), сохраняется при движении в собственном гравитационном поле, позволяет представить квадратичную форму для решаемой задачи в следующем виде

$$dS^2 = e^{2\nu}\left((dt)^2 - (dz)^2\right) - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2, \tag{2}$$

где: $\nu = \nu(q,\rho),\ A = A(t,z,\rho),\ B = B(t,z,\rho),\ q = t + z$.

Компоненты тензора энергии импульса для (1), (2) следующие

$$\begin{aligned} &T_{00} = T_{33} = T_{03} = \gamma e^{2\nu}\delta\left(q\right)\delta\left(\rho - R\right)/\sqrt{AB}, \\ &T_{01} = T_{02} = T_{11} = T_{12} = T_{13} = T_{22} = T_{23} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Анализ системы уравнений Эйнштейна для (2), (3), позволил определить функциональную зависимость метрических функций (2), а именно

$$A = A(q,\rho),\ B = B(q,\rho),\ \nu = \nu(q), \tag{4}$$

при этом сама система уравнений Эйнштейна приводится к следующему виду

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right) - 2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^2 + \left(\frac{B_{,q}}{B}\right)^2\right) = \chi T_{00}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right)^2 - \frac{A_{,\rho}}{4}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) = 0, \tag{6}$$

$$A_{,\rho}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right) - \frac{1}{2}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{A_{,q}}{A} - \frac{B_{,q}}{B}\right) = 0, \tag{7}$$

где $A_{,q} = \partial A/\partial q$. Можно заметить, что первое из уравнений (7) можно выполнить следующими способами

$$A_{,\rho}=0,\ \mathrm{B}_{,\rho}=0,\ A=B,\ \Rightarrow\ A=B=A(q),\tag{8}$$

$$A_{,\rho}=0,\ \mathrm{B}_{,\rho}=0,\ A\neq B,\ \Rightarrow\ A=A(q),\ B=B(q),\tag{9}$$

$$A_{,\rho}\neq 0,\ \mathrm{B}_{,\rho}\neq 0,\ A=B,\ \Rightarrow\ A=B=A(q,\rho)\ ,\tag{10}$$

$$A_{,\rho}=0,\ \mathrm{B}_{,\rho}\neq 0,\ \Rightarrow\ A=A(q),\ B=B(q,\rho),\tag{11}$$

$$A_{,\rho}\neq 0,\ \mathrm{B}_{,\rho}=0,\ \Rightarrow\ A=A(q,\rho),\ B=B(q).\tag{12}$$

При этом каждое из равенств (8)-(12) приводит к своим решениям уравнений Эйнштейна, поэтому важно определить какие именно из приведенных случаев могут реализоваться в данной задаче.

Как следует из (3) вне струны ($q\neq 0,\ \rho\neq R$), все компоненты струнного тензора энергии импульса тождественно равны нулю, а отличны от нуля (стремятся к бесконечности) непосредственно на струне. Данный факт позволяет, в решении поставленной задачи, ограничится поиском внешних решений уравнений Эйнштейна, но с обязательным определением условий, которым должны удовлетворять искомые метрические функции на струне. При реализации поставленной задачи необходимо понимать, что именно отказ от трех мерности или “размазанности” струны является причиной возникновения сингулярности в струнном тензоре энергии импульса. Однако при попытке рассматривать компоненты струнного тензора энергии импульса как предел некоторого “размазанного” распределения (простая замена дельта функций дельта-функционными последовательностями) возможны неточности связанные с тем, что непонятно как учитывать возможное появление слагаемых (множителей) которые стремятся к нулю (константе) при стягивании этого “размазанного” распределения в одномерный объект. Поэтому проще изначально рассматривать некоторое “хорошо” определенное распределение, например вещественное, безмассовое скалярное поле (поскольку в решаемой задаче мы рассматриваем скалярный нуль объект) а затем стянуть его в струну требуемой конфигурации, получив при этом условия которым должны удовлетворять метрические функции на струне для внешнего решения уравнений Эйнштейна, конечно же требуя при этом, чтобы компоненты тензора энергии импульса скалярного поля в пределе такого сжатия совпали с компонентами тензора (3).

Расписывая компоненты тензора энергии импульса вещественного безмасового скалярного поля для (2), (4), и сравнивая их с компонентами (3), можно сделать вывод о том, что при стягивании скалярного поля в замкнутую нуль-струну

$$\varphi_{,\rho}\to 0,\qquad \left(\varphi_{,q}\right)^2\to\xi\delta(q)\delta(\rho-R),\tag{13}$$

где $\varphi=\varphi(q,\rho)$ потенциал скалярного поля, ξ константа равная, согласно (3), значению функции $\gamma e^{2\nu}/\sqrt{AB}$ при $q=0,\ \rho=R$. Поскольку ковариантная производная от компонент тензора Эйнштейна равна нулю, то требуя равенства нулю ковариантной производной от компонент тензора энергии импульса для вещественного безмасового скалярного поля, получим следующее уравнение

$$\left(g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\right)_{;\beta}=0, \qquad (14)$$

где точка с запятой обозначает ковариантную производную. Интегрируя (14) для (2), (4) получаем

$$A/B=\eta\left(\varphi_{,\rho}\right)^{2}. \qquad (15)$$

Из (13), (15) следует, что после процедуры стягивания скалярного поля в струну (т.е. на самой струне):

$$A/B=0. \qquad (16)$$

Математически, при стягивании “размазанного” распределения (размерность пространства 3+1) в струну (размерность пространства 1+1), ранг матрицы метрического тензора “размазанной” (внутренней) задачи, вырождается до двух. Следовательно, ранг матрицы метрического тензора искомого внешнего решения в каждой точке на струне также равен двум. Поскольку функция $e^{2\nu}$ не может обратиться в ноль, то непосредственно на струне

$$A(q,\rho)\big|_{q=0,\ \rho=R}=0,\quad B(q,\rho)\big|_{q=0,\ \rho=R}=0, \qquad (17)$$

в (17) предполагается что на струне функция $A(q,\rho)$, более высокого порядка малости чем функция $B(q,\rho)$, также следствием (16) есть и то, что случаи (8), (10), в которых предполагалось, что $A=B$ не могут быть реализованы.

1. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (5)-(7) ДЛЯ (11)

Для (11) система уравнений (5)-(7), при условии $q\neq 0,\ \rho\neq R$, имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{A_{,q}}{A}+\frac{B_{,q}}{B}\right)-2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A}+\frac{B_{,q}}{B}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^{2}+\left(\frac{B_{,q}}{B}\right)^{2}\right)=0, \qquad (18)$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right)^{2}=0;\quad \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right)-\frac{1}{2}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{A_{,q}}{A}-\frac{B_{,q}}{B}\right)=0. \qquad (19)$$

Можно заметить, что первое из уравнений (19) легко интегрируется, так при условии $B_{,\rho}\neq 0$ (случай $B_{,\rho}=0$, откуда $B=B(q)$ соответствует (9) и будет рассмотрен ниже) первый и второй интегралы соответственно равны

$$B_{,\rho}/B=2/\left(\rho+\alpha(q)\right),\quad B(q,\rho)=\beta\left(q\right)\left(\rho+\alpha\left(q\right)\right)^{2}, \qquad (20)$$

где $\alpha\left(q\right)$ и $\beta\left(q\right)$ “константы” интегрирования. Подставляя (20) во второе уравнение (19), получим

$$A_{,q}/A=\beta\left(q\right)_{,q}/\beta\left(q\right), \qquad (21)$$

откуда сразу же

$$\beta(q) = \tilde{\beta} A(q), \tag{22}$$

где $\tilde{\beta}$ положительная константа. Подставляя (20), (22) в (18) получаем

$$\left[\frac{d}{dq}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right) - 2\nu_{,q}\frac{A_{,q}}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^2\right] = \frac{-1}{(\rho+\alpha)}\left[\alpha_{,qq} - 2\nu_{,q}\alpha_{,q} + \alpha_{,q}\frac{A_{,q}}{A}\right]. \tag{23}$$

Поскольку в полученном выражении слева стоит функция, зависящая только от q а справа произведение функций одна из которых зависит только от q а вторая и от q и от ρ, то единственно возможным продолжением (23) есть

$$\frac{d}{dq}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right) - 2\nu_{,q}\frac{A_{,q}}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^2 = 0;\ \alpha(q)_{,qq} - 2\nu_{,q}\alpha(q)_{,q} + \alpha(q)_{,q}\frac{A_{,q}}{A} = 0. \tag{24}$$

Заметим, что в (24), $A_{,q} \neq 0$, поскольку в противном случае т.е. при $A = const.$, для того, чтобы выполнить (17) пришлось бы положить $A = 0$, что невозможно, а также $\alpha_{,q} \neq 0$, поскольку в противном случае т.е. при $\alpha = const.$, отношение A/B, согласно (20), (22) есть

$$A/B = 1/\tilde{\beta}(\rho+\alpha)^2, \tag{25}$$

и добиться равенства нулю этого отношения на нуль-струне (т.е. при $q = 0,\ \rho = R$) невозможно. Интегрируя (24), при условии $A_{,q} \neq 0,\ \alpha_{,q} \neq 0$, получаем

$$\lambda_1 A_{,q}/\sqrt{A} = e^{2\nu};\ \lambda_2\alpha_{,q}A = e^{2\nu}, \tag{26}$$

где λ_1, λ_2 - константы интегрирования. Приравнивая левые части полученных равенств, и интегрируя по q, получаем соотношение, связывающее функции $A(q)$ и $\alpha(q)$, а именно

$$\alpha(q) = \left(\lambda_3\sqrt{A} - 2\lambda_1/\lambda_2\right)/\sqrt{A}. \tag{27}$$

где λ_3 - константа интегрирования. Подставляя (22), (27) в (20) получаем

$$B(q,\rho) = \tilde{\beta}\left(\sqrt{A}(\rho+\lambda_3) - 2\lambda_1/\lambda_2\right)^2. \tag{28}$$

Далее заметим, что для того, чтобы (28) удовлетворяло, найденным граничным условиям (17), необходимо положить $\lambda_1 = 0$, что невозможно поскольку тогда, согласно (26) $e^{2\nu} = 0$. Таким образом из приведенного анализа следует, что случай (11) также не может быть реализован в решаемой задаче.

2. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ (5)-(7) ДЛЯ (9), (12) И ВЫВОДЫ

Для (9), (12) система уравнений (5)-(7), при условии $q \neq 0,\ \rho \neq R$, сводится к единственному уравнению, которое может быть записано в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial q}\frac{A_{,q}}{A} - 2\nu_{,q}\frac{A_{,q}}{A} + \frac{1}{2}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^2 = -\left(\frac{\partial}{\partial q}\frac{B_{,q}}{B} - 2\nu_{,q}\frac{B_{,q}}{B} + \frac{1}{2}\left(\frac{B_{,q}}{B}\right)^2\right), \qquad (29)$$

то есть имеется единственное уравнение, связывающее три искомые функции. Следовательно можно привести большое число решений этого уравнения удовлетворяющих полученным граничным условиям (16), (17). Так например легко проверить, что для (9), следующий набор метрических функций является решением уравнения (29) и удовлетворяет граничным условиям (16), (17):

$$A(q) = \mathrm{sh}^4(\alpha q),\;\; B(q) = \mathrm{sh}^2(\alpha q)\,\mathrm{ch}^2(\alpha q),\;\; e^{2\nu} = ch^2(\alpha q). \qquad (30)$$

Далее заметим, что поскольку, для (12) функция $B = B(q)$ и $\nu = \nu(q)$, то правая часть уравнения (29) есть функция только переменной q. Но тогда и левая часть этого уравнения должна зависеть только от переменной q. Тогда из (29) отношение $A_{,q}/A$ есть функция только q, а следовательно для (12) функция $A(q,\rho)$ является произведением функций

$$A(q,\rho) = L(q)F(\rho). \qquad (31)$$

В качестве примера можно привести следующий набор метрических функций который удовлетворяет граничным условиям (16), (17) и является решением уравнения (29) для случая (12):

$$A(q,\rho) = (\rho - R)^2\,\mathrm{sh}^4(\alpha q),\;\; B(q) = \mathrm{sh}^2(\alpha q)\,\mathrm{ch}^2(\alpha q),\;\; e^{2\nu} = ch^2(\alpha q). \qquad (32)$$

Таким образом, в этой работе мы проанализировали систему уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны постоянного (неизменного со временем) радиуса, которая движется вдоль оси z и в каждый момент времени t полностью лежит в плоскости, ортогональной этой оси. В результате проведенного анализа были определены условия, которым должны удовлетворять искомые метрические функции, а также приведены примеры решений уравнений Эйнштейна, удовлетворяющие найденным условиям.

Список литературы

1. Roshchupkin S.N., Zheltukhin A.A. Friedman Universes and exactly solution on string cosmology // Class. Quantum. Grav. - 1995. - Vol. 12. - p. 2519 - 2524.
2. Peebles P.S.E. Ppinciples of physical cosmology / Prinston University Press, 1994.
3. Арифов Л.Я., Леляков А.П., Рощупкин С.Н. Динамика струн и нуль-струн в поле гравитационных волн // УФЖ. - 1998. - т. 43. - с. 890 - 895.
4. Арифов Л.Я., Леляков А.П., Рощупкин С.Н. Точные решения для нуль-струны в лоренцевых пространствах с нетривиальной конформной группой // УФЖ. - 1999. - т. 44. с. 801-804.

Леляков О.П. **Аналіз системи рівнянь Ейнштейна для замкненої нуль-струни постійного радіуса** // Учені записки Таврійського національного університета ім. В.І. Вернадського. - 2008. - Серія “Фізика”. - Т. 21 (60). - № 1. - С. 80-86.

У роботі проаналізована система рівнянь Ейнштейна для замкненої нуль-струни постійного (незмінного з часом) радіуса, що прямує уздовж осі z і в кожен момент часу t цілком лежить у площині, ортогональної цієї осі. У результаті проведеного аналізу були визначені умови яким повинні

задовольняти метричні функції а також приведені приклади можливих розв'язків рівнянь Ейнштейна які задовольняють знайденим умовам.
Ключові слова: нуль-струна, точні розв'язки, космологія

Lelyakov A.P. **The analysis of system Einstein equations for the closed null-string of constant radius** // Uchenye zapiski Tavricheskogo Natsionalnogo Universiteta im. V.I. Vernadskogo. – 2008. – Series "Fizika". – V. 21 (60). - № 1. – P. 80-86.
In this article, we analyzed the system of Einstein equations for closed null string of constant radius which goes along an axis z and at each moment of time completely lays in a plane, orthogonal this axis. As a result of the carried out analysis conditions which required metric functions are determined should to satisfy and also the exact solutions of Einstein equations satisfying the found conditions is given.
Keywords: null string, exact solution, cosmology.

Поступила в редакцию 21.03.2008 г.