Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 102–113.

Ф. С. Стонякин

К-СВОЙСТВО РАДОНА-НИКОДИМА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ ФРЕШЕ

В данной работе рассматриваются новые характеристики отображений в локально выпуклые пространства: сильная компактная абсолютная непрерывность и К-свойство Радона-Никодима. Доказано, что любое пространство Фреше обладает К-свойством Радона-Никодима. Установлена почти всюду дифференцируемость сильно компактно абсолютно непрерывного отображения в пространстве, порождённом абсолютно выпуклым компактным множеством. Получена обобщённая формула Лагранжа с компактной выпуклой оценкой для дифференцируемых отображений в пространства Фреше.

Введение

Хорошо известно, что для вещественнозначных функций множество всех неопределённых интегралов Лебега совпадает со множеством всех абсолютно непрерывных функций (с точностью до константы). Для отображений как в банаховы, так и в локально выпуклые пространства (ЛВП) имеется достаточно эффективный аналог интеграла Лебега — интеграл Бохнера. Подобно интегралу Лебега в вещественном случае, неопределённый интеграл Бохнера является абсолютно непрерывным отображением относительно нормы (AC^s). Однако, в отличие от классического случая, уже не всякое абсолютно непрерывное отображение представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера [1].

В связи с этим был выделен класс пространств, имеющих *свойство Радона-Никодима* (RNP), которые характеризуются тем, что всякое абсолютно непрерывное отображение представимо в виде интеграла Бохнера [2, 3]. (RNP) имеют, например, такие важные пространства, как ℓ_p ($1 \leqslant p < \infty$), $L_p[a;b]$ ($1 < p < \infty$). Однако к примеру пространства c_0, $L_1[a;b]$ и $C[a;b]$ не обладают (RNP) [2, 3].

Таким образом, класс пространств с (RNP) недостаточно широк. Ввиду этого возникает естественная задача описания множества абсолютно непрерывных отображений, представимых в виде интеграла Бохнера в общем случае для пространств без свойства Радона-Никодима.

Для отображений пространств с мерой в банаховы пространства, а также — в пространства Фреше, в качестве вариантов решения данной задачи были предложены так называемые теоремы типа Радона-Никодима [4] — [9]. Среди недавних исследований по данной проблематике следует отметить удобное проективное описание банаховых пространств [10, 11], разновидности слабого (RNP) [12], полезные результаты для специальных пространств последовательностей [13] и, особенно, разработки теории компактных множеств с (RNP) [14].

В статье [15] была рассмотрена задача описания интеграла Бохнера отображений вещественного отрезка $I = [a; b] \subset \mathbb{R}$ в произвольные отделимые ЛВП E и использованы для её решения новые выпуклые компактные характеристики таких отображений — *компактный субдифференциал* и *компактная вариация*. Среди основных результатов данной работы отметим достаточное условие представимости сильно абсолютно непрерывного отображения в виде неопределённого интеграла Бохнера для произвольных отделимых ЛВП ([15], теорема 3.1) и соответствующий критерий для пространств Фреше ([15], теорема 3.2).

Далее в [16] исследования [15] развиваются в новом направлении. В [16] вводятся новые сильные компактные характеристики ЛВП-значных отображений: *сильная К-вариация* (V_K^s) и *сильная К-абсолютная непрерывность* (AC_K^s), а также выделяется класс ЛВП, обладающих *К-свойством Радона-Никодима* $(RNP)_K$, которые характеризуются совпадением множества всех *сильно компактно абсолютно непрерывных отображений* $F : I = [a; b] \to E$ (AC_K^s) со множеством всех *неопределённых интегралов Бохнера отображений* $F : I = [a; b] \to E$ $(\mathcal{I}_B)$. Было показано также, что $(RNP)_K$ отличается от классического (RNP) и построен пример отделимого ЛВП, не являющегося пространством Фреше, которое не обладает $(RNP)_K$. В то же время остался открытым вопрос о характеризации пространств Фреше, имеющих свойство $(RNP)_K$.

В настоящей работе мы показываем, что любое пространство Фреше обладает $(RNP)_K$ (теорема 4). Более того, показана дифференцируемость почти всюду всякого отображения из AC_K^s в некотором пространстве $E_C = (spanC, \|\cdot\|_C)$ (теорема 8), где C является некоторым абсолютно выпуклым компактом в E, а $\|\cdot\|_C$ — функционалом Минковскго, порождённым C. Также получена теорема о конечных приращениях с компактной выпуклой оценкой для дифференцируемых отображений в пространства Фреше (теорема 9). Напомним, что пространством Фреше называется всякое полное ЛВП со счётной определяющей системой полунорм $\|\cdot\|_j$. Через $\mathcal{C}(E)$ будем обозначать множество всех абсолютно выпуклых компактов $C \subset E$.

1. Сильная K-абсолютная непрерывность и K-свойство Радона-Никодима для пространств Фреше

Введём понятие сильно компактно абсолютно непрерывного отображения $F : I \to E$. Через $AC^s(I, E)$ будем обозначать класс отображений $F : I \to E$, имеющих обычное свойство сильной абсолютной непрерывности (относительно каждой непрерывной полунормы на E).

Определение 1. Будем говорить, что отображение F *сильно компактно абсолютно непрерывно* на I, если для некоторого $C \in \mathcal{C}(E)$, $F : I \to F(a) + E_C$ и $F \in AC^s(I, E_C)$. Примем обозначение: $F \in AC^s_K(I, E)$.

Предлагаемое нами доказательство существенно опирается на следующий известный результат из [18].

Теорема 1. *Любое сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно некоторому замкнутому подпространству* $\widetilde{E}$ *пространства* $C[0;1]$ *всех вещественных непрерывных функций, заданных на отрезке* $[0;1]$ *с нормой*

$$\|\varphi\|_{C[0;1]} = \sup_{x \in [0;1]} |\varphi(x)|.$$

Будем рассуждать по схеме ([16], теорема 3.3), где рассмотрен случай $E = c_0$. Сначала введём понятие *эллипсоида* в $\widetilde{E} \subset C[0;1]$. Обозначим через

$$w_\varphi(\delta) := \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant \delta} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|, \ \delta > 0, \tag{1}$$

δ-модуль непрерывности функции $\varphi \in C[0;1]$. Фиксируем некоторую последовательность $\delta = (\delta_k)_1^\infty$, $\delta_k \to +0$.

Определение 2. Для произвольной числовой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^\infty$ назовём (невырожденным) *δ-эллипсоидом* в $\widetilde{E} \subset C[0;1]$ множество

$$C_\varepsilon = \left\{ \varphi \in \widetilde{E} \;\middle|\; \max\left(|\varphi(0)|, \sup_k \frac{w_\varphi(\delta_k)}{\varepsilon_k} \right) \leqslant 1 \right\}.$$

Отметим вспомогательную лемму.

Лемма 1. *Если последовательность ε сходится к нулю, то множество C_ε является компактным в $\widetilde{E}$.*

Доказательство. Во-первых, $\forall \varphi \in C_\varepsilon$: $\|\varphi\| \leqslant |\varphi(0)| + \frac{w_\varphi(\delta_1)}{\delta_1 \cdot \varepsilon_1}$, т.е. множество C_ε ограничено.

Во-вторых, т.к. $\varepsilon_k \to 0$, то $\forall \eta > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \geqslant k_0$ $(\eta > \varepsilon_k)$. Поэтому $\forall \eta > 0$ существует окрестность нуля $U(0) \subset \mathbb{R}$ такая, что

$$\sup_{\varphi \in C_\varepsilon} \sup_{t-s \in U(0)} |\varphi(s) - \varphi(t)| < \eta,$$

то есть множество C_ε *равностепенно непрерывно* и, следовательно, относительно компактно в $\widetilde{E}$ (см. [18], с. 289).

Покажем, что C_ε *замкнуто* в $\widetilde{E}$. Пусть $\varphi_m \in C_\varepsilon$, $\varphi_m \to \varphi$ при $m \to \infty$. В таком случае, если $x_1, x_2 \in [0;1]$ и $|x_1 - x_2| \leqslant \delta_k$, $k \in \mathbb{N}$, то $|\varphi_m(x_1) - \varphi_m(x_2)| \leqslant \varepsilon_k$. Отсюда в пределе, $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant \varepsilon_k$ при $|x_1 - x_2| \leqslant \delta_k$, то есть $\varphi \in C_\varepsilon$ и, следовательно, множество C_ε замкнуто.

Поскольку C_ε замкнуто и относительно компактно в $\widetilde{E}$, то C_ε компактно в $\widetilde{E}$. □

Замечание 6. Ясно, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порождённая эллипсоидом в $E_{C_\varepsilon} = spanC_\varepsilon$, имеет вид $\|\varphi\|_{C_\varepsilon} := \max\left(|\varphi(0)|,\ \sup\limits_k \frac{w_\varphi(\delta_k)}{\varepsilon_k}\right)$.

Ранее в [16] было показано, что любое компактно абсолютно непрерывное отображение $F : I = [a;b] \to E$ представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера. Проверим теперь обратное утверждение для случая пространств Фреше. Для этого докажем вспомогательную теорему. Здесь и всюду далее условимся обозначать через S некоторое множество, Σ — σ-алгебру подмножеств S и μ — конечную меру на Σ. Напомним, что любое пространство Фреше E является проективным пределом банаховых пространств $\widehat{E}_j$, где E_j является пополнением пространства $E_j = E/ker\|\cdot\|_j$ $\forall j \in \mathbb{N}$ по соответствующей фактор-норме. Отметим также, что интегрируемость отображений $f : S \to E$ по Бохнеру в E определяется как интегрируемость f в любом $\widehat{E}_j$.

Теорема 2. *Пусть E — пространство Фреше и $1 \leqslant p < \infty$. Если отображение $f : S \to E$ интегрируемо по Бохнеру, причём $\forall j \in \mathbb{N}$ $\int\limits_S \|f(t)\|_j^p\ d\mu(t) < \infty$, то существует такой компакт $C \subset E$, что $\int\limits_S \|f(t)\|_C^p\ d\mu(t) < \infty$.*

Доказательство. 1) Начнём доказательство со случая, когда пространство E банахово, то есть $\int\limits_S \|f(t)\|^p\ d\mu(t) < \infty$. Поскольку отображение f является интегрируемым по Бохнеру на S, то оно является μ-почти всюду сепарабельнозначным, то есть μ-почти все значения f на S содержатся в некотором замкнутом сепарабельном подпространстве $E_0 \subset E$ (см. [1], стр. 102). Пространство E_0, в свою очередь, изометрически изоморфно некоторому замкнутому подпространству $\widetilde{E} \subset C[0;1]$ [18]; пусть $\psi : E_0 \to \widetilde{E}$ — соответствующая изометрия.

Это означает, что множество $C \subset E_0$ компактно тогда и только тогда, когда компактно $\psi(C) \subset \widetilde{E}$. Более того, если C абсолютно выпукло, то

$$\|x\|_C = \|\psi(x)\|_{\psi(C)} \quad (\forall x \in spanC).$$

Поэтому, не уменьшая общности рассуждений, можно заменить E_0 на $\widetilde{E} \subset C[0;1]$ и рассуждать по аналогии с доказательством теоремы 3.3 из [16], привлекая понятие *эллипсоида* $C_\varepsilon \subset \widetilde{E}$.

2) Далее будем полагать, что $f : S \to \widetilde{E}$ и что отображение f является конечным на S (поскольку f μ-почти всюду конечно на S ввиду интегрируемости по Бохнеру). Покажем, что функционалы $w_\varphi(\delta_k) : \widetilde{E} \to \mathbb{R}$ из (1) непрерывны по φ. Действительно,

$$w_\varphi(\delta_k) = \sup_{|x_1 - x_2| \leqslant \delta_k} |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leqslant 2 \sup_{x \in [0;1]} |\varphi(x)| = 2\|\varphi\|_E. \tag{2}$$

Поскольку f интегрируемо по Бохнеру на S, то существует последовательность простых отображений $f_m : S \to \widetilde{E}$ такая, что $\lim\limits_{m\to\infty} \|f(t) - f_m(t)\|_{\widetilde{E}} = 0$ для μ-почти всех $t \in S$. Поэтому для μ-почти всех $t \in S$, в силу (2), верно

$$|w_{f(t)}(\delta_k) - w_{f_m}(\delta_k)| \leqslant w_{f(t)-f_m(t)}(\delta_k) \leqslant 2\|f(t) - f_m(t)\| \to 0 \quad \text{при } m \to \infty,$$

откуда ввиду измеримости простых функций $w_{f_m(\cdot)}(\delta_k)$ вытекает измеримость всех функций $w_{f(\cdot)}(\delta_k)$.

Итак, $w_{f(\cdot)}(\delta_k)$ измерима $\forall k \in \mathbb{N}$ и поэтому функция $\|f(\cdot)\|_{C_\varepsilon}$ (C_ε — произвольный невырожденный эллипсоид; см. определение 2) также является измеримой как супремум последовательности измеримых функций $w_{f(\cdot)}(\delta_k)$ и функции $\|f(\cdot)\|$, которая является измеримой в силу интегрируемости по Бохнеру f на S. По условию теоремы,

$$K_p := \int\limits_S \|f(t)\|^p_{\widetilde{E}} d\mu(t) = \int\limits_S \left(\sup_{s\in[0;1]} |f(t)(s)|\right)^p d\mu(t) < \infty$$

ввиду (B)-интегрируемости f в $\widetilde{E}$.

3) Подберём такую последовательность $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^\infty$, сходящуюся к нулю, чтобы

$$\int\limits_S \|f(t)\|^p_{C_\varepsilon} d\mu(t) < \infty.$$

Обозначим через $\varepsilon^k = (0, 0, ..., 0, \overbrace{1}^{k \text{ место}}, 1, 1, ...)$ и

$$I^k(f) = \int\limits_S \|f(t)\|^p_{C_{\varepsilon^k}}\, d\mu(t), \quad f : S \to \widetilde{E}.$$

Ясно, что $\forall t \in I$: $\|f(t)\|_{C_{\varepsilon^1}} \geqslant \|f(t)\|_{C_{\varepsilon^2}} \geqslant ... \geqslant 0$. Поэтому последовательность интегралов $\{I^k\}_{k=1}^\infty$ монотонно убывает при $k \to \infty$ и имеет верхнюю грань

$$I^1(f) = \int\limits_S \|f(t)\|^p_{C_{\varepsilon^1}}\, dt \leqslant 2^p \cdot K_p < \infty, \tag{3}$$

так как $\forall \varphi \in \widetilde{E}$

$$\|\varphi\|_{C_{\varepsilon^1}} = \max\left(|\varphi(0)|,\ \sup_k\ w_{\delta_k}(\varphi)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \max\left(|\varphi(0)|,\ \sup_k \sup_{|x_1-x_2|\leqslant\delta_k} |\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|\right) \leqslant 2\sup_{x\in[0;1]}|\varphi(x)| = 2\|\varphi\|,$$

т.е.

$$\|\varphi\|_{C_{\varepsilon^1}} \leqslant 2\|\varphi\| \qquad \forall\varphi\in\widetilde{E}. \tag{4}$$

Из (3) следует, что $\forall t\in I$ существует предел

$$\varphi_1(t) = \lim_{k\to\infty}\|f(t)\|_{C_{\varepsilon^k}} = 0, \tag{5}$$

поскольку $w_{f(t)}(\delta_k)\to 0$ при $k\to\infty$. По следствию из теоремы Б.Леви [17], ввиду (3) и (5) справедливо

$$\lim_{k\to\infty} I^k(f) = 0 \quad \forall f: I\to\widetilde{E}. \tag{6}$$

Воспользовавшись (6), построим последовательность $\{k_m\}_{m=1}^\infty$ так, чтобы $\forall m\in\mathbb{N}\ \exists k_m\in\mathbb{N}$:

$$I^k(f) < \frac{1}{2^m(m+1)^p} \quad \forall k\geqslant k_m.$$

Положим $\varepsilon = (\varepsilon_\ell)_{\ell=1}^\infty$:

$$\varepsilon = \left(1,\ \dots, 1;\ \overbrace{\frac{1}{2}}^{k_1\ \text{место}},\ \dots, \frac{1}{2};\ \overbrace{\frac{1}{3}}^{k_2\ \text{место}},\ \dots, \frac{1}{3}; \dots;\ \overbrace{\frac{1}{n+1}}^{k_n\ \text{место}},\ \dots\ \frac{1}{n+1};\ \dots\right).$$

Последовательность ε сходится к нулю и поэтому множество C_ε является компактным в $\widetilde{E}$. Как показано ранее, функция $\|f(t)\|_{C_\varepsilon}$ измерима. Далее,

$$I(f) := \int_S \|f(t)\|^p_{C_\varepsilon} d\mu(t) = \int_S \max\left(|f(t)(0)|^p,\ \left(\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\frac{w_{f(t)}(\delta_\ell)}{\varepsilon_\ell}\right)^p\right) d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant \int_S \|f(t)\|^p_{\widetilde{E}} d\mu(t) + \int_S \left(\sup_{\ell\in\mathbb{N}}\frac{w_{f(t)}(\delta_\ell)}{\varepsilon_\ell}\right)^p d\mu(t) \leqslant$$

$$\leqslant K_p + \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{2^m} = K_p + 2 < \infty.$$

Для банаховых пространств теорема доказана.

4) Перейдём теперь к случаю, когда E — пространство Фреше. Поскольку теорема доказана для банаховых пространств, то $\forall j\in\mathbb{N}$ существует такой абсолютно выпуклый компакт $\widehat{C}_j\subset\widehat{E}_j$, что

$$\int_S \|f(t)\|^p_{\widehat{C}_j} d\mu(t) < \infty.$$

Заметим, что $\|\cdot\|_{\lambda C} = \frac{1}{\lambda}\|\cdot\|_{\lambda C}\ \forall\lambda>0$ и подберём числа $n_j\ \forall j\in\mathbb{N}$ так, чтобы

$$\int_S \|f(t)\|^p_{n_j\widehat{C}_j} d\mu(t) < \frac{1}{j^2} \quad \forall j\in\mathbb{N}.$$

Рассмотрим множество

$$C=\left\{x\in E\;\middle|\;\sup_{j\in\mathbb{N}}\|x\|_{n_j\widehat{C}_j}\leqslant 1\right\}.$$

Поскольку E является проективным пределом пространств $\widehat{E}_j$ и поэтому может быть плотно и непрерывно вложено в $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}}\widehat{E}_j$, то C может быть инъективно (ввиду отделимости пространства E), непрерывно и плотно вложено в произведение $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}}n_j\widehat{C}_j$, которое является компактным по теореме Тихонова. Следовательно, C является непустым абсолютно выпуклым компактом в E.

5) Функция $\|f(t)\|_C=\sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\|f(t)\|_{n_j\widehat{C}_j}$ измерима как супремум последовательности измеримых функций $\|f(t)\|_{n_j\widehat{C}_j}$. Далее, воспользовавшись теоремой Б.Леви, имеем

$$\int\limits_S\|f(t)\|_C^p d\mu(t)=\int\limits_S\sup_{j\in\mathbb{N}}\|f(t)\|^p_{n_j\widehat{C}_j}d\mu(t)\leqslant\int\limits_S\sum_{j=1}^{\infty}\|f(t)\|^p_{n_j\widehat{C}_j}d\mu(t)=$$

$$=\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_S\|f(t)\|^p_{n_j\widehat{C}_j}d\mu(t)<\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}<\infty.$$

□

Далее, в [16] получен следующий критерий сильной компактной абсолютной непрерывности.

Теорема 3. *Пусть E — отделимое ЛВП. Тогда $F\in AC_K^s(I,E)$ если и только если*

(i) F представимо в виде неопределённого интеграла Бохнера, т.е. $F(x)=F(a)+(B)\int\limits_a^x f(t)dt\quad(a\leqslant x\leqslant b)$*;*

(ii) $\int\limits_a^b\|f(t)\|_C dt<\infty$ для некоторого $C\in\mathcal{C}(E)$.

Из теорем 2 и 3 вытекает основной результат работы

Теорема 4. *Пусть E — пространство Фреше. Для любого интегрируемого по Бохнеру отображения $f:S\to E$ существует такой компакт $C\in\mathcal{C}(E)$, что*

$$F(x)=(B)\int\limits_a^x f(t)d\mu(t)\in AC_K^s(I,C),\ \text{где } a\leqslant x\leqslant b,$$

то есть любое пространство Фреше обладает свойством $(RNP)_K$.

2. Дифференцируемость отображений из AC_K^s в подходящих пространствах E_C, $C \in \mathcal{C}(E)$

Возникает естественный вопрос: а не будет ли отображение f из теоремы 4 в общем случае интегрируемым по Бохнеру в E_C или, что то же самое, не обладает ли всякое E_C свойством Радона-Никодима? Это так в случае $E = \ell_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ и $C = C_\varepsilon$ — компактного эллипсоида в E (см. [16]). Однако, если $E = C[0;1]$, то $E_{C_\varepsilon} \cong \ell_\infty$, а пространство ℓ_∞ не обладает свойством Радона-Никодима (см. [3]).

Однако, как оказалось, в данном направлении можно получить некоторый интересный результат.

Теорема 5. *Если E — пространство Фреше, то $\forall C' \in \mathcal{C}(E)$ $\exists C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что для любого $F \in AC(I, E_{C'})$ его производная $f = F'$ интегрируема по Бохнеру в пространстве E_C.*

Для доказательства теоремы нам потребуется ввести новое свойство для ЛВП и установить его справедливость для всех пространств Фреше. Далее символ $\hookrightarrow\hookrightarrow$ означает компактное вложение пространств, а $\overline{co}A$ — замкнутую выпуклую облочку множества A.

Определение 3. Будем говорить, что ЛВП E обладает *свойством компактной аппроксимации* ($E \in K_{ap}$), если $\forall C \in \mathcal{C}(E)$ $\exists C' \in \mathcal{C}(E)$ такое, что имеет место компактное вложение: $E_C \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C'}$.

Теорема 6. *Любое пространство Фреше E обладает свойством компактной аппроксимации. Точнее говоря, для всякого $C \in \mathcal{C}(E)$ существует непрерывное отображение $\varphi : E \to E$ такое, что:*

(i) *для любого $C \in \mathcal{C}(E)$ вложение $E_C \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C_\varphi}$ компактно, где $C_\varphi = \overline{co}\ \varphi(C)$;*

(ii) *$\varphi(x) = x/\psi(x)$ (при $x \neq 0$), где $0 < \psi(x) < 1$, ψ непрерывна, $\psi(0) = 0$, $\psi(\infty) = 1$;*

(iii)
$$\big(x \in C \Rightarrow (\|x\|_{C_\varphi} \leqslant \psi(x)\big). \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $\{\|\cdot\|_j\}_{j=1}^\infty$ — определяющая система полунорм в E. Введём отображения ($\forall x \in E$):

$$\psi(x) = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\sqrt{\|x\|_j}}{1 + \sqrt{\|x\|_j}}, \quad \varphi(x) = \frac{x}{\psi(x)}\ (x \neq 0), \varphi(0) = 0. \quad \text{Имеем:}$$

1). Функция $\psi(x)$ непрерывна как сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций:

$$\left|\frac{1}{2^j} \cdot \frac{\sqrt{\|x\|_j}}{1 + \sqrt{\|x\|_j}}\right| < \frac{1}{2^j}\ (\forall j \in \mathbb{N}), \quad 0 \leqslant \psi(x) < \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{2^j} = 1,\ \psi(0) = 0.$$

При этом $\forall N \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 \geqslant \lim_{x\to\infty} \psi(x) \geqslant \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2^j} \cdot \lim_{\|x\|_j\to\infty} \frac{\sqrt{\|x\|_j}}{1+\sqrt{\|x\|_j}} = 1 - \frac{1}{2^{N-1}}\right) \Rightarrow \left(\lim_{x\to\infty} \psi(x) = 1\right).$$

2). Функция $\varphi(x) = \frac{x}{\psi(x)}$ непрерывна при $x \neq 0$. Проверим непрерывность при $x = 0$: $\forall j \in \mathbb{N}$ верно

$$\|\varphi(x)\|_j = \frac{\|x\|_j}{\psi(x)} \leqslant \frac{\|x\|_j}{\frac{1}{2^j}\cdot\frac{\sqrt{\|x\|_j}}{1+\sqrt{\|x\|_j}}} = 2^j \cdot \sqrt{\|x\|_j} \cdot \left(1+\sqrt{\|x\|_j}\right) \to 0 \quad \text{при} \quad x \to 0.$$

3). Обозначим $C_\varphi = \overline{co}\,\varphi(C) \in \mathcal{C}(E)$ и докажем, что вложение $E_C \hookrightarrow E_{C_\varphi}$ является компактным.

a). Пусть $\widetilde{x} \in \partial^{co}C$ ($\partial^{co}C$ — выпуклая граница C). Тогда при некотором $\lambda \geqslant \frac{1}{\psi(\widetilde{x})}$ верно $\lambda \cdot x \in \partial^{co}C_\varphi$. Отсюда

$$\|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \leqslant \psi(\widetilde{x}). \tag{8}$$

Если же $x \in C$, $\widetilde{x} = \mu x$ (при некотором $\mu \geqslant 1$), то подставляя $\widetilde{x} = \mu x$ в (8), получаем: $\mu \cdot \|x\|_{C_\varphi} = \|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \leqslant \psi(\mu x)$, откуда

$$\|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \leqslant \frac{1}{\mu}\psi(\mu\widetilde{x}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{\sqrt{\mu}\sqrt{\|x\|_j}}{1+\sqrt{\mu}\sqrt{\|x\|_j}} \leqslant \psi(x), \tag{9}$$

т.е. (7) верно. Заметим также, что из (9) следует при $\mu \leqslant 1$: $\psi(x) \geqslant \psi(\mu x) \geqslant \mu\psi(x)$.

b). Пусть $\{x_k\}_1^\infty \subset C$. Тогда существует подпоследовательность x_{k_n} сходящаяся к некоторому $x_0 \in C$, т.е. $x_{k_n} - x_0 \xrightarrow{E} 0$. При этом $x_{k_n} - x_0 \in C - C = 2C$, т.е. $\frac{x_{k_n}-x_0}{2} \in C$ ($n \in \mathbb{N}$). Применяя (7) к $x = \frac{x_{k_n}-x_0}{2}$, получаем:

$$\left\|\frac{x_{k_n}-x_0}{2}\right\|_{C_\varphi} \leqslant \psi\left(\frac{x_{k_n}-x_0}{2}\right), \text{ откуда } \quad \|x_{k_n}-x_0\|_{C_\varphi} \leqslant 2\psi\left(\frac{x_{k_n}-x_0}{2}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$ ввиду непрерывности ψ. Таким образом, $x_{k_n} - x_0 \xrightarrow{E_{C_\varphi}} 0$, т.е. C предкомпактно в E_{C_φ} и, следовательно, вложение $E_C \hookrightarrow E_{C_\varphi}$ компактно. $\square$

Теперь перейдём к доказательству теоремы 5.

Доказательство. По теореме 6, существует такой компакт $C = \varphi(C') \in \mathcal{C}(E)$, что $E_{C'} \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow E_C$. Это позволяет нам рассмотреть банахово пространство E_C как основное; при этом $C' \in \mathcal{C}(E_C)$, $(E_C)_{C'} = E_{C'}$, $F \in AC(I,(E_C)_{C'}) = AC(I, E_{C'})$. Следовательно, по теореме 4, $f = F'$ интегрируемо по Бохнеру в E_C. $\square$

Отметим пару следствий из теоремы 5.

Теорема 7. *Пусть E — пространство Фреше, и отображение $f : I \to E$ интегрируемо по Бохнеру. Тогда существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что f интегрируемо по Бохнеру в пространстве E_C.*

Теорема 8. *Пусть E — пространство Фреше, а отображение $F : I = [a;b] \to E$ сильно абсолютно непрерывно и почти всюду дифференцируемо на I. Тогда $F \in$ $\in AC_K^s(I, E)$ и существует абсолютно выпуклый компакт $C \subset E$ такой, что F почти всюду дифференцируемо на I в пространстве E_C.*

3. Обобщённая формула Лагранжа с компактной выпуклой оценкой для дифференцируемых отображений в пространства Фреше

Далее рассмотрим одно приложение полученных результатов. В работе [19] была получена для отображений $F : [a;b] \to E$ (E — отделимое ЛВП) обобщённая формула Лагранжа

$$F(b) - F(a) \in \left(\int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(x)dx \right) \cdot B, \tag{10}$$

в предположении непрерывности F на $[a;b]$, дифференцируемости на $[a;b]\setminus e$, нулевой слабой меры $F(e)$ и локальной оценки $F'(x) \in \varphi(x) \cdot B$, где $\varphi(x)$ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\setminus e$, а множество B замкнуто и выпукло в E. Оказывается, если E — пространство Фреше, то в случае, когда множество e имеет нулевую меру, а множество B абсолютно выпукло и ограничено, то оценку (10) можно усилить, заменив B на некоторое его компактное подмножество. Обозначим через mes меру Лебега на вещественной прямой. Справедлива следующая

Теорема 9. *Пусть E — пространство Фреше, а отображение $F : [a;b] \to E$ непрерывно на $[a;b]$, дифференцируемо на $[a;b]\setminus e$, причём $mes(e) = 0$ и множество $F(e)$ имеет скалярную меру нуль. Если $F'(x) \in \varphi(x) \cdot B$ при $x \in [a;b]\setminus e$, где $\varphi(x)$ неотрицательна и суммируема на $[a;b]\setminus e$, множество B замкнуто, абсолютно выпукло и ограничено в E, то существует такое компактное подмножество $C \in \mathcal{C}(E)$, $C \subset B$, что*

$$F(b) - F(a) \in \left(\int\limits_{[a;b]\setminus e} \varphi(t)dt \right) \cdot C. \tag{11}$$

Доказательство. 1). Покажем сначала, что $F \in AC(I, E)$. Пусть $\{\| \cdot \|\}_{j=1}^{\infty}$ — определяющая система полунорм в E, $E = \varprojlim\limits_{j\to\infty} \widehat{E}_j$ — соответствующее каноническое представление E. Тогда из оценки (10) и ограниченности B в каждом $\widehat{E}_j$ вытекает, что для всякой неперекрывающейся системы отрезков $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} [\alpha_k; \beta_k] \subset [a;b]$ верно при любом $j \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|F(\beta_k) - F(\alpha_k)\|_j \leqslant \|B\|_j \;\cdot\; \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{[\alpha_k;\beta_k]\setminus e} \varphi(t)dt \right) \longrightarrow 0 \ \text{ при } \ \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \to 0,$$

то есть $F \in AC([a;b], \widehat{E}_j)$ $\forall j \in \mathbb{N}$, а значит, $F \in AC(I, E)$.

2). Так как F по условию почти всюду дифференцируемо на $[a;b]$, то, согласно известной теореме о представимости интеграла Бохнера ([1], теорема 3.8.6),

$$F(x) = F(a) + (B)\int_a^x F'(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Тогда по теореме 7 F' интегрируемо по Бохнеру в некотором пространстве E_C, $C \in \mathcal{C}(E)$. При этом можно считать, что $F'(x) \in \varphi(x) \cdot C \quad x \in [a;b]\backslash e$. (в противном случае можно просто заменить множество C на $\overline{abs.co}\ (B \bigcap C)$).

3). Теперь остаётся применить оценку (10) с заменой B на C. □

Следствие 1. *(***Теорема о среднем.***) Пусть E — пространство Фреше, отображение $F : [a;b] \to E$ непрерывно на $[a;b]$, дифференцируемо на $[a;b]\backslash e$, причём $mes(e) = 0$, множество $F(e)$ имеет скалярную меру нуль, а множество $F'([a;b]\backslash e)$ ограничено. Тогда существует такое $C \in \mathcal{C}(E)$, что*

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} \in \overline{co}_{E_{\widetilde{C}}}\ F'([a;b]\backslash e), \tag{12}$$

а также

$$\|F(b) - F(a)\|_C \ \leqslant \sup_{x \in [a;b]\backslash e} \|F'(x)\| \cdot (b - a). \tag{13}$$

Заметим, что в качестве C, в соответствии с доказательством теоремы 9 можно взять $C = \overline{abs.co}\ (F'([a;b]\backslash e)$. Заметим также, что оценка (12) точнее оценки из [19] за счёт того, что замыкание в пространстве E_C меньше, чем замыкание в E.

Список литературы

[1] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле , Р. Филлипс. — М: ИЛ, 1962. — 829 с.

[2] Diestel J. Vector Measures / J. Diestel, J.J. Uhl. — Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[3] Davis W.J. The Radon-Nikodym property / W.J. Davis // Seminaire d'analyse fonctionelle (Polytechnique) — 1973 – 1974. — exp no. 0. — P. 1 — 12.

[4] Chi G. A geometric characterization of Frechet spaces with the RNT / G. Chi // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 48. — P. 371 — 380.

[5] Dunford N. Linear operations on summable functions / N. Dunford, B.J. Pettis. — Trans. Amer. Math. Soc. — 1940. — Vol. 47. — P. 323 — 392.

[6] Phillips R.S. On weakly compact subsets of a Banach space / R.S. Phillips // Amer. J. Math. — 1943. — Vol. 65, no. 3. — P. 108 — 136.

[7] Rieffel M.A. The Radon – Nikodym theorem for the Bochner integral / M.A. Rieffel // Trans. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 131. — P. 466 — 487.

[8] Moedomo S. Radon – Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals / S. Moedomo, J.J. Uhl // Pacific J. of Math. — 1971. — Vol. 38, no. 2. — P. 531 — 536.

[9] Gilliam D. Geometry and the Radon – Nikodym theorems in strict Mackey convergence spaces / D. Gilliam // Pacific J. of Math. — 1976. — Vol. 65, no. 2. — P. 353 — 364.

[10] Cheeger J. Characterization of the Radon-Nikodym property in terms of inverse limits / J. Cheeger, B. Kleiner // arXiv:0706.3389v3 [math.FA]. — 11 Jan 2008. — P. 1 — 12.

[11] Cheeger J. Differentiability of Lipschitz maps from metric measure spaces to Banach spaces with the Radon-Nikodym property / J. Cheeger, B. Kleiner // arXiv:0808.3249v1 [math.MG]. — 24 Aug 2008. — P. 1 — 17.

[12] Chakraborty N.D. Type II-Λ-Weak Radon-Nikodym Property in a Banach Space Associated with a Compact Metrizable Abelian Group / N.D. Chakraborty, Sk. Jaker Ali // Extracta Mathematicae. — 2008. — Vol. 23, no. 3. — P. 201 — 216.

[13] Bu Q. The Radon-Nikodym Property for Tensor Products of Banach Lattices II / Q. Bu, G. Buskes and Wei-Kai Lai // Positivity. — 2008. — Vol. 12. — P. 45 -— 54.

[14] Arvanitakis A.D. Some examples of continuous images of Radon-Nikodym compact spaces / A.D. Arvanitakis, A. Aviles // arXiv:0903.0653v1 [math.GN]. — 3 Mar 2009. — P. 1 — 11.

[15] Orlov I.V. Compact variation, compact subdifferential and indefinite Bochner integral / I.V. Orlov, F.S. Stonyakin // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15, no. 1. — P. 74 — 90.

[16] Orlov I.V. Strong compact properties of the mappings and K-property of Radon-Nikodym / I.V. Orlov, F.S. Stonyakin // Methods of Functional Analysis and Topology. — to appear.

[17] Березанский Ю.М. Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. — К: Выща шк., 1990. — 600 с.

[18] Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория. / Н. Данфорд, Дж.Т. Шварц. — М.: ИЛ, 1962. — 896с.

[19] Орлов И.В. Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств / И.В. Орлов // Мат. физика, анализ, геометрия. — 2001. — Т. 8, № 4. — С. 419 — 439.

У данній роботі розглядаються нові характеристики відображень у локально опуклі простори: сильна компактна абсолютна неперервність та K-властивість Радона-Нікодима. Доведено, що довільний простір Фреше має K-властивість Радона-Нікодима. Встановлено диференційовність майже скрізь кожного сильно компактно абсолютно неперервного відображення у просторі, породженому абсолютно опуклою компактною множиною. Отримано узагальнену формулу Лагранжа з компактною опуклою оцінкою для відображень у простори Фреше.

In this paper the new properties of compact absolutely continuity and K-property of Radon-Nikodym for mappings into locally convex spaces are considered. It is proved that each Frechet space possesses K-property of Radon-Nikodym. The differentiability almost everywhere of each strong compact absolutely continuous mapping in the topology of some subspace, generated by absolutely convex compact set is asserted. The generalized Lagrange formula with compact estimation for differentiable mappings into Frechet spaces is obtained.