Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 21 (60). 2008 г. № 1. С. 73-79

УДК 531.391+514.764.2

ДИНАМИЧЕСКИЙ ХАОС В СИСТЕМЕ КОСМИЧЕСКАЯ СТРУНА-ДИЛАТОННАЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА

Жовтан А.В., Рощупкин С.Н.

Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: alex_ph@fastmail.fm, rsn@tnu.crimea.ua

Рассмотрен захват и рассеяние дилатонной черной дырой замкнутой космической струны. Изучены различные типы траекторий и получена фрактальная размерность.
Ключевые слова: динамический хаос, космическая струна, космология.

ВВЕДЕНИЕ

Космические струны представляют собой одномерные области концентрации плотности энергии и могут естественно возникать в результате спонтанного нарушения симметрии при фазовых переходах в процессе эволюции Вселенной [1]. В рамках различных моделей Теории Великого Объединения (ТВО) они проявляются как топологические дефекты (наряду с доменными стенками и монополями) и поэтому являются устойчивыми образованиями. Среди этих структур именно космические струны вызывают повышенный интерес с космологической точки зрения, поскольку обладают соответствующими характеристиками, позволяющими их рассматривать в качестве зародышей для тех неоднородностей плотности в ранней Вселенной, которые обусловили последующее образование галактик и скоплений галактик [1].

Нелинейность динамической системы (космической струны) делает возможным существование при некоторых условиях, кроме хорошо исследованных регулярных решений уравнений движения, принципиально новых динамических режимов, в которых движение космической струны не отличается от случайного, хотя имеет место полное отсутствие внешнего источника случайности [2]. Используя для термина “случайный” синонимы “хаотический”, “стохастический”, можно утверждать, что для космической струны, как и для любой нелинейной динамической системы, эти понятия адекватно отображают некоторые внутренние фундаментальные свойства.

Механизмом, который обеспечивает существование хаотического режима в строго детерминированных системах, является локальная неустойчивость, которая приводит к тому, что в начале близкие траектории экспоненциально расходятся в фазовом пространстве. Точнее под стохастичностью можно понимать возникновение в системе статистических свойств из-за локальной неустойчивости. Более того, одним из важных результатов теории КАМ (теория Колмогорова – Арнольда – Мозера) является тот факт, что при увеличении энергии увеличиваются области фазового пространства, в которых преобладает случайный характер траекторий. При некоторых критических значениях энергии возникает хаос: наблюдается экспоненциальное разбегание первоначально близких траекторий.

В настоящее время хаос в общей относительности и космологии является хорошо установленным фактом. Хаотическим режимам посвящена масса работ, начиная от пионерских работ Хоукинга и Пейджа, касающихся собственно поведения решений уравнений Эйнштейна, и заканчивая исследованием поведения траекторий тестовых частиц в пространстве-времени черных дыр.

В работе [3] была рассмотрена концептуально простейшая и наиболее симметричная система в общей относительности, которая, тем не менее, как показали авторы, ведет к хаотическому режиму. Они рассмотрели задачу двух тел: замкнутая пробная струна в поле черной дыры Шварцшильда. Струна выбиралась коаксиальной к черной дыре и, совершая осцилляции в своей плоскости, двигалась в перпендикулярном направлении. Таким образом, совокупная система была аксиально-симметричной. Авторы показали, что при определенном критическом значении внешнего контрольного параметра, который связан с сохраняющейся энергией струны, система внезапно переходит в хаотический режим.

В данной работе рассматривается похожая система, но обычная шварцшильдовская черная дыра заменяется заряженной дилатонной черной дырой. Поскольку дилатонная черная дыра обладает зарядом Q, то в данном случае он выступает еще одним свободным параметром, кроме сохраняющейся энергии струны, который можно варьировать для нахождения критического значения, при котором система переходит в хаотический режим.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Заряженная дилатонная черная дыра является статическим сферически-симметричным решением эйнштейновско - дилатонной гравитации, которая является низкоэнергетическим пределом суперструнной теории. Метрика заряженной дилатонной черной дыры может быть записана в виде:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1-\frac{2M}{r}\right)} + r\left(r-\frac{Q^2}{M}\right)\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right). \tag{1}$$

Видно, что она отличается от метрики обычной черной дыры Шварцшильда угловой частью, куда входит заряд дилатонной черной дыры Q.

Для ТВО струны с натяжением порядка $G\mu \approx 10^{-6}$, приближение пробной струны является применимым даже для струны большей в 10^4 раз за радиус горизонта черной дыры. Более того, для ТВО струны можно использовать приближение нулевой толщины, в котором космическая струна описывается хорошо известным действием Намбу-Гото

$$S = -\mu\int d\tau\, d\sigma \sqrt{-\det\left[G_{ab}\right]}\,, \tag{2}$$

где $G_{ab} = g_{\mu\nu} X^{\mu}_{,a} X^{\nu}_{,b}$ является индуцированной метрикой на мировом листе струны. В этом случае струнные уравнения движения и связи (в конформной калибровке) принимают стандартную форму

$$\ddot{X}^{\mu} - X''^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\rho\sigma}\left(\dot{X}^{\rho}\dot{X}^{\sigma} - X'^{\rho}X'^{\sigma}\right) = 0, \tag{3}$$

$$g_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}X'^{\nu} = g_{\mu\nu}\left(\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu} + X'^{\mu}X'^{\nu}\right) = 0, \tag{4}$$

где точка и штрих обозначают производные по координатам на мировом листеструны τ и σ соответственно. Используя метрику (1) и параметризируя замкнутую струну анзацем

$$t = t(\tau),\ r = r(\tau),\ \theta = \theta(\tau),\ \phi = \sigma, \tag{5}$$

находим, что струнные уравнения движения (3) и связи (4) сводятся к следующей системе обычных дифференциальных уравнений

$$\dot{t} = E \Big/ \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\ddot{r} + \left[\frac{M}{r^2}\left(r^2 - \frac{Q^2}{M}r\right) - \left(r - \frac{Q^2}{2M}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]\dot{\theta}^2 + \\ &+\left[\frac{M}{r^2}\left(r^2 - \frac{Q^2}{M}r\right) + \left(r - \frac{Q^2}{2M}\right)\left(1 - \frac{2M}{r}\right)\right]\sin^2\theta = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2r - \dfrac{Q^2}{M}}{r^2 - \dfrac{Q^2}{M}r}\,\dot{r}\dot{\theta} + \sin\theta\cos\theta = 0, \tag{8}$$

дополняющихся связью

$$\dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)\left(r^2 - \frac{Q^2}{M}r\right)\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\right) = E^2. \tag{9}$$

Возникающая здесь константа интегрирования E играет роль внешнего контрольного параметра (“параметра порядка”). Она равна общей сохраняющейся энергии струны деленной на $2\pi\mu$. В отсутствие других первых интегралов кроме (9), мы имеем дело здесь с трехмерным фазовым пространством.

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ВЫВОДЫ

Поскольку система (6-9) неинтегрируема в общем виде, анализ струнной эволюции проводился численно. При этом использовался метод РКФ45 (комбинация методов Рунге-Кутта 4 и 5 порядков). Связь (9) использовалась в качестве независимой проверки точности численного решения.

Очевидно, что в нашем случае также имеется три асимптотики струнной динамики. Струна может пройти черную дыру и уйти на бесконечность: $(r,\theta)=(\infty,\pi)$, струна также может испытать обратное рассеяние и уйти снова на бесконечность: $(r,\theta)=(\infty,0)$. Наконец, струна может быть захвачена черной дырой и уйдет под ее горизонт: $r \le 2M$. Кроме этих трех асимптотик, существует бесконечное множество нестабильных периодических орбит, которые разделяют решения с различными асимптотиками в фазовом пространстве всех решений.

Динамика струны очень чувствительна к начальным данным в областях фазового пространства, где находятся нестабильные периодические орбиты. В качестве примера рассмотрим зависимость радиуса струны $R = r\sin\theta$ (вертикальная ось графика) от ее расстояния до экваториальной плоскости черной дыры $Z = r\cos\theta$ (горизонтальная ось графика).

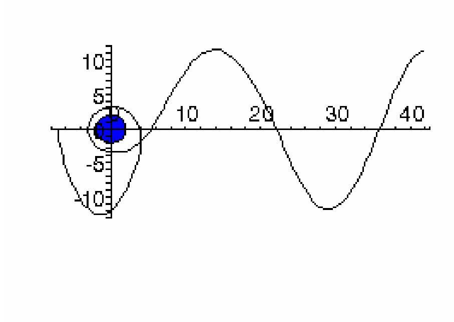

Рис.1. Пример коллапса струны на черную дыру (синий кружок), $Q=0$.

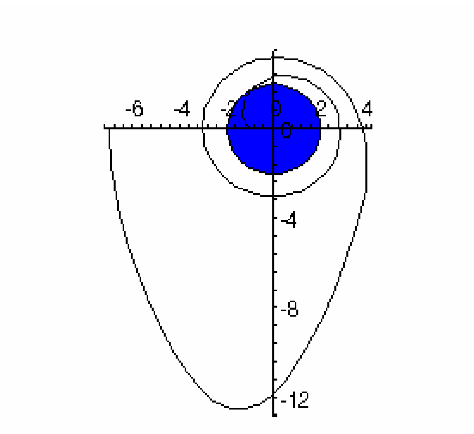

Рис.2. Струна рассеивается черной дырой и уходит на бесконечность. Начальные данные такие же, как и для рис.1. $Q=0.2$.

На обоих рисунках в начальный момент времени струна сжата в точку и находится на некотором расстоянии от горизонта черной дыры. В последующие моменты времени она начинает расширяться и двигаться в направлении экваториальной плоскости черной дыры. Пройдя экваториальную плоскость, струна продолжает удаляться от нее, одновременно сжимаясь. Затем снова возвращается к черной дыре и, в конце концов, коллапсирует на нее (рис. 1) или выбрасывается из окрестностей и уходит на бесконечность (рис. 2). При этом если взять заряд $Q = 0.1$, то струна испытает обратное рассеяние. Предсказать заранее, как поведет себя струна при произвольных начальных данных невозможно. Это есть следствие чувствительности системы к начальным данным.

Для лучшего понимания струнной динамики были рассмотрены более детально двухмерные срезы четырехмерного фазового пространства начальных условий. Для этого фиксировалась постоянная “энергия” E и использовалось соотношение между начальными значениями $\left(r,\theta,\dot{r},\dot{\theta}\right)$ при $\tau = 0$. Как и ожидалось, анализ показал сложную фрактальную структуру этих двухмерных срезов независимо от значения заряда дилатонной черной дыры Q (рис. 3,4). Это в свою очередь дает координатно-независимое указание на то, что динамика струны действительно является хаотической. Однако заряд Q оказывает значительное влияние на значение пороговой энергии E, выше которой система переходит в хаотический режим.

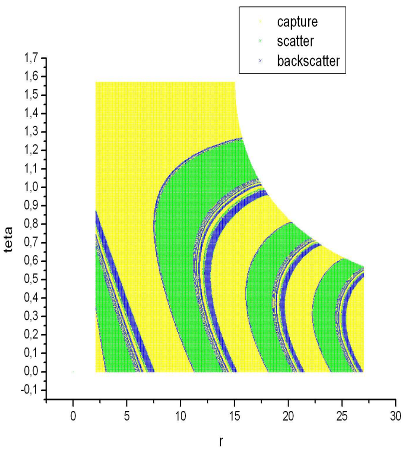

Рис.3. Двумерный срез фазового пространства начальных значений (r,θ) в случае черной дыры Шварцшильда.

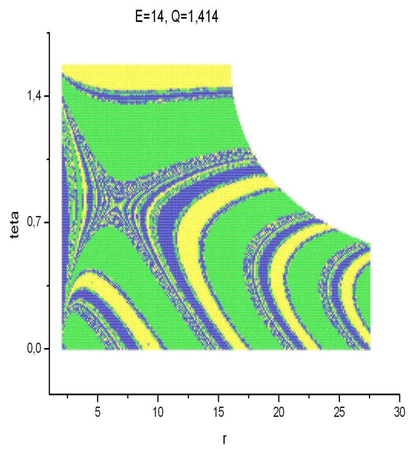

Рис.4. Двумерный срез фазового пространства начальных значений (r,θ) в случае дилатонной черной дыры при $Q = 1.414$.

Для случая черной дыры Шварцшильда значение критической энергии равно *E=5.67 M* и определяется только массой черной дыры [3]. В нашем же случае критическая энергия зависит также и от заряда Q. Расчеты показывают, что с ростом заряда критическая энергия уменьшается и при $Q = 1.4$ критическая энергия равна ≈ 2. То есть в случае заряженной дилатонной черной дыры космическая струна переходит в хаотический режим при меньшей энергии.

Зависимость критической энергии от заряда дилатонной дыры представлена на рис. 5.

Для определения количественной меры мы также вычислили фрактальную размерность для множеств типа изображенных на рис. 3-4. Определений размерности существует несколько, одно из них называется метрическим. Согласно этому определению размерности, фрактальная размерность вычисляется по формуле

$$D = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln\left(N(\varepsilon)\right)}{\ln\left(1/\varepsilon\right)} \tag{10}$$

где $N(\varepsilon)$ является числом квадратов со стороной ε необходимых для покрытия всей границы множества, размерность которого вычисляется. В нашем случае под границей подразумеваются области множества которые содержат точки по крайней мере двух различных цветов. Следует отметить, что заполнение фрактала квадратами и расчет фрактальной размерности по формуле (10) требует значительных машинных ресурсов. В работе [3] авторы для вычисления фрактальной размерности использовали множество размером 4000×3200 точек и получили значение $D = 1.65 \pm 0.03$. Мы же в своих расчетах использовали сетку размером не больше 1000×1000 точек и получили для фрактальной размерности значение $D \approx 1.4$. Однако анализ показывает что такой подход вполне правомерен и позволяет достаточно быстро проследить за изменением фрактальной размерности при изменении заряда дилатонной черной дыры. Зависимость фрактальной размерности от заряда дилатонной черной дыры представлена на рис. 6.

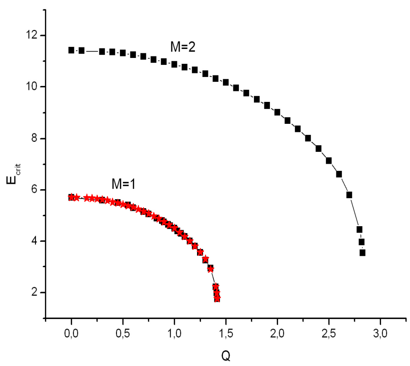

Рис.5. Зависимость критической энергии струны от заряда дилатонной черной дыры.

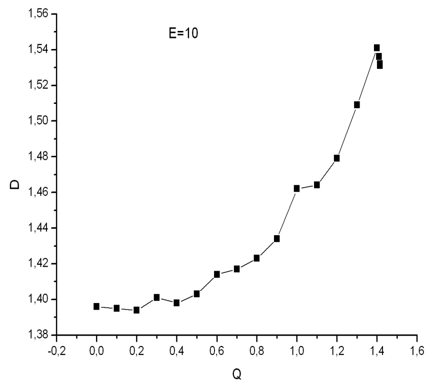

Рис.6. Зависимость фрактальной размерности от заряда дилатонной черной дыры.

Таким образом, суммируя все изложенное выше, можно сделать следующие выводы. Во-первых, независимо от типа черной дыры, замкнутая космическая струна при определенных условиях испытывает хаотическое рассеяние. В этом режиме предсказать поведение струны невозможно. Это есть следствие чувствительности нелинейной системы к начальным данным. Во-вторых, наличие заряда у дилатонной черной дыры качественно картины не меняет, однако заряд значительно влияет на значение критической энергии перехода в хаотический режим: при увеличении заряда критическая энергия довольно быстро уменьшается. Наоборот, фрактальная размерность несколько увеличивается при увеличении заряда дилатонной черной дыры.

Список литературы

1. Vilenkin A., Shellard E.P.S. Cosmic strings and other topological defects / A. Vilenkin, E.P.S. Shellard. –Cambridge Univ. Press, 1994. -534 p.
2. Ott E. Chaos in dynamical systems / E. Ott. –Cambridge Univ. Press, 1993.
3. Frolov A.V., Larsen A.L. Chaotic scattering and capture of strings by black hole / A.V. Frolov, A.L. Larsen // arXiv: gr-qc/9908039v2. -1999.

Жовтан О.В., Рощупкин С.М. **Динамічний хаос у системі космічна струна-ділатона чорна діра** // Учені записки Таврійського національного університета ім. В.І. Вернадського. - 2008. - Серія «Фізика». - Т. 21 (60). - № 1. - С. 73-79.
Розглянуто захоплення і розсіювання ділатоної чорною дірою замкнутої космічної струни. Вивчено різні типи траєкторій і отримана фрактальна розмірність.
Ключові слова: динамічний хаос, космічна струна, космологія

Zhovtan A.V., Roshchupkin S.N. **The dynamic chaos in the system circular cosmic strings by a dilatonic black hole** // Uchenye zapiski Tavricheskogo Natsionalnogo Universiteta im. V.I. Vernadskogo. – 2008. – Series «Fizika». – V. 21 (60). - № 1. – P. 73-79.
We consider scattering and capture of circular cosmic strings by a dilatonic black hole. We study the different types of trajectories and obtain the fractal dimension of the basin boundary separating the space of initial conditions according to the different asymptotic outcomes.
Keywords: Dynamic chaos, cosmic string, cosmology

Поступила в редакцию 15.09.2008г.