

УДК 535.1

## ГЕНЕРАЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ С ПОМОЩЬЮ СКРУЧЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВОЛОКОН

*Алексеев К.Н., Лапин Б.П., Яворский М.А.*

*Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского, Симферополь, Украина  
E-mail: [c.alexeyev@yandex.ua](mailto:c.alexeyev@yandex.ua)*

В работе изучено преобразование топологического заряда поля с помощью скрученных эллиптических волокон (СЭВ). Показано, что топологический заряд поля, падающего на такое волокно, может быть изменен на двойку при выполнении условий согласования длины волны и шага скрутки. Решена задача о прохождении фундаментальной моды через СЭВ конечной длины, получены спектральные характеристики процесса. Продемонстрировано, что скрученное эллиптическое волокно может служить широкополосным генератором оптических вихрей с топологическим зарядом +2.

**Ключевые слова:** оптический вихрь, скрученное эллиптическое волокно, конверсия топологического заряда.

### ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени задача о генерации оптических вихрей (ОВ) [1,2] – сингулярностей волнового фронта – стала классической задачей сингулярной оптики. Интерес к ней вызван тем, что ОВ нашли широкое применение в самых различных областях [3-8]. Среди множества предложенных методов [9-12] можно выделить метод генерации ОВ с использованием оптических волокон [13]. В настоящей работе решена задача о прохождении фундаментальной моды через скрученное эллиптическое волокно (СЭВ) конечной длины, а также получены спектральные характеристики процесса. Волокна такого типа были рассмотрены в работе [14], где была получена структура их  $|l|=1$  мод и постоянные распространения. В ней, однако, не ставился вопрос о возможности использования данного типа волокон для генерации ОВ. В данной работе мы показываем, что СЭВ можно использовать в качестве широкополосного генератора ОВ с топологическим зарядом 2 из фундаментальной моды.

### 1. МОДЕЛЬ И ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим СЭВ, ось скрутки которого совпадает с осью волокна (Рис.1). В сечении с координатой  $z$  в локальной системе координат  $(x', y', z')$ , повернутой на угол  $\varphi_0 = qz$  ( $q = 2\pi / H$ ,  $H$  – шаг скрутки) относительно глобальной системы координат  $(x, y, z)$ , квадрат показателя преломления можно записать следующим образом:

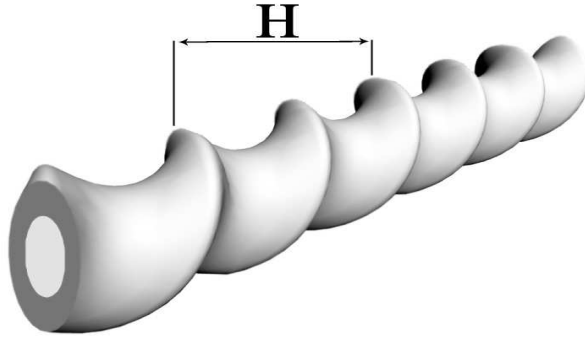


Рис. 1. Модель скрученного эллиптического волокна,  $H$  - шаг скрутки.

$$n^2(ax', by', z) = n^2 \left( \sqrt{(ax'(z))^2 + (by'(z))^2} \right), \quad (1)$$

где  $a = 1 + \delta$ ,  $b = 1 - \delta$ ,  $\delta \ll 1$  степень эллиптичности волокна, а  $x'$  и  $y'$  связаны с глобальными координатами соотношениями:

$$\begin{cases} x' = x \cos \varphi_0 + y \sin \varphi_0 \\ y' = -x \sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0 \end{cases}. \quad (2)$$

Переход в цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , связанную с глобальной системой координат  $(x, y, z)$ , и разложение показателя преломления по  $\delta$  приводят к следующему его выражению:

$$n^2(r, \varphi, z) = n_{co}^2 (1 - 2\Delta f(r)) - 2n_{co}^2 \Delta \delta \tilde{r} f'_r \cos(2(\varphi - qz)). \quad (3)$$

Замена  $\tilde{r} = r$ ,  $\tilde{z} = z$ ,  $\tilde{\varphi} = \varphi - qz$  позволяет получить трансляционно-инвариантное по  $\tilde{z}$  уравнение, которое описывает распространение света в волокне:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\varphi}^2} + \left( \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} - q \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} \right)^2 + k^2 \tilde{n}^2(\tilde{r}) - 2k^2 n_{co}^2 \tilde{r} \Delta \delta f'_r \cos 2\tilde{\varphi} \right\} \mathbf{E}(\tilde{r}, \tilde{\varphi}, \tilde{z}) = 0. \quad (4)$$

Структура уравнения (4) позволяет искать его решение в виде  $\mathbf{E} = \mathbf{e}(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) \exp(i\beta \tilde{z})$  ( $\beta$  постоянная распространения), что приводит к следующему уравнению:

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\varphi}^2} + \left( i\beta - q \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} \right)^2 + k^2 \tilde{n}^2(\tilde{r}) - 2k^2 n_{co}^2 \tilde{r} \Delta \delta f'_r \cos 2\tilde{\varphi} \right\} \mathbf{e}(\tilde{r}, \tilde{\varphi}) = 0. \quad (5)$$

Перепишем (5) в матричной форме:

$$(\hat{H}_0 + \hat{V})|\psi\rangle = \beta^2 |\psi\rangle, \quad (6)$$

$$\text{где } \hat{H}_0 = \left( \frac{\partial^2}{\partial \tilde{r}^2} + \frac{1}{\tilde{r}} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} + \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\varphi}^2} + k^2 \tilde{n}^2(r) \right) \hat{1}, \quad \hat{V} = \left( -2i\beta q \frac{\partial}{\partial \tilde{\varphi}} + q^2 \frac{\partial^2}{\partial \tilde{\varphi}^2} - 2k^2 n_{co}^2 \tilde{r} \Delta \delta f_r' \cos 2\tilde{\varphi} \right) \hat{1}.$$

В базисе линейных поляризаций [15]  $|e\rangle = \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$  решения нулевого приближения ( $\hat{V} = 0$ ) уравнени (6) могут быть представлены оптическими вихрями:

$$|\sigma, l\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ i\sigma \end{pmatrix} \exp(il\tilde{\varphi}) F_l(r), \quad (7)$$

где  $l = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  топологический заряд,  $\sigma = \pm 1$  знак круговой поляризации, а функция  $F_l(r)$  является решением уравнения [16]:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \tilde{n}^2 - \frac{l^2}{r^2} - \tilde{\beta}_l^2 \right) F_l(r) = 0. \quad (8)$$

## 2. МОДЫ СЭВ И ИХ СПЕКТР

Уравнение (6) представляет собой уравнение на собственные функции и собственные значения оператора  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$ . Для его решения воспользуемся методом теории возмущений с вырождением, учитывая, что  $\Delta, \delta \ll 1$ ,  $q \ll \beta$ . Спектр при  $l \neq 0$  четырехкратно вырожден. Чтобы изучить структуру гибридных мод, составленных из мод с  $|l| = 0, 2$  нужно, следуя [17], усреднить оператор  $\hat{H}$  по набору решений нулевого приближения  $\{|1, 0\rangle, |1, 2\rangle, |1, -2\rangle\}$ ,  $\{|-1, 0\rangle, |-1, 2\rangle, |-1, -2\rangle\}$ , а затем решить уравнение  $H\vec{x} = 0$ , где  $\vec{x}$  является 6-компонентным вектором в пространстве мод с  $|l| = 0, 2$ , и  $H = H_1 \oplus H_2$ :

$$H_1 = H_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\beta}_0^2 - \beta^2 & A & A \\ A & \tilde{\beta}_2^2 - (\beta - 2q)^2 & 0 \\ A & 0 & \tilde{\beta}_2^2 - (\beta + 2q)^2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

Для волокон со ступенчатым профилем показателя преломления  $A = -k^2 n_{co}^2 \Delta \delta / N_0 N_2$ ,  $N_i = \sqrt{\int_0^\infty x F_i^2 dx}$ . Спектр в нулевом приближении (Рис.2) имеет вид:  $\beta_{1,2} = \pm \tilde{\beta}_0$ ,  $\beta_{3,4} = \pm \tilde{\beta}_2 + 2q$ ,  $\beta_{5,6} = \pm \tilde{\beta}_2 - 2q$ .

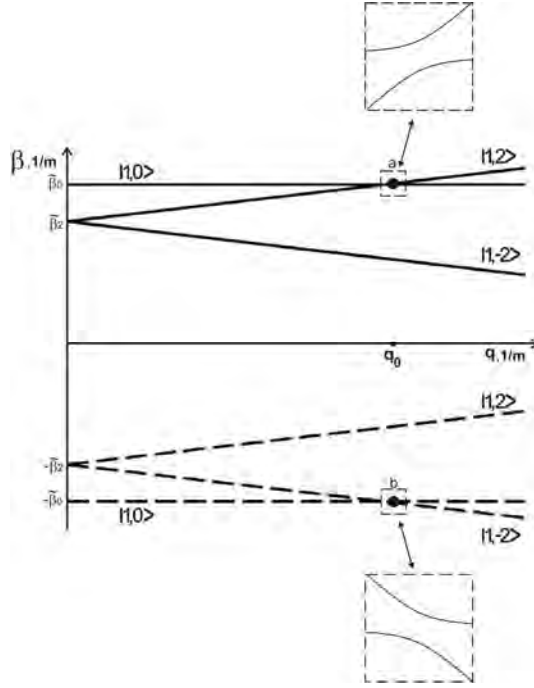


Рис. 2. Спектр матрицы  $H_1$ . На вставках показано расталкивание спектральных кривых. Параметры волокна:  $n_{co} = 1.5$ ,  $\Delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $r_0 = 8\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 632.8$  нм,  $q \approx q_0 = 11216.845$ . Тип поля обозначен рядом с соответствующей кривой.

В точках (а) и (б) ( $q = q_0 \equiv 0.5(\tilde{\beta}_0 - \tilde{\beta}_2)$ ) происходит, соответственно, интенсивная гибридизация вперед и назад рассеянных полей. На вставках показано расталкивание спектральных кривых. Вблизи точки (а) удастся снизить размерность задачи на единицу и рассматривать матрицу размерности  $2 \times 2$ . Аналогичная ситуация имеет место и вблизи точки (б). В окрестности точки (а) можно записать:

$$\begin{pmatrix} \tilde{\beta}_0^2 - \beta^2 & A \\ A & \tilde{\beta}_2^2 - (\beta - 2q)^2 \end{pmatrix} \vec{x}_a = 0. \quad (10)$$

Здесь  $\vec{x}_a = (x_1, x_2)$  соответствует полю  $x_1|1,0\rangle + x_2|1,2\rangle$ . Выбирая  $q = q_0 + \varepsilon$  и  $\beta = \tilde{\beta}_0 + \delta$ , где  $\varepsilon$  – расстройка, можно получить из (10):

$$\begin{pmatrix} 2\tilde{\beta}_0\delta & A \\ A & 2\tilde{\beta}_2(2\varepsilon - \delta) \end{pmatrix} \vec{x}_a = 0. \quad (11)$$

Моды СЭВ с  $q \approx q_0$  можно записать в виде:

$$\begin{aligned}
 |\Psi_{1a}\rangle &= \{c_1|1,0\rangle \exp[i(\tilde{\beta}_0 + \varepsilon)z] + c_2|1,2\rangle \exp[i(\tilde{\beta}_2 - \varepsilon)z]\} \exp(iz\sqrt{\varepsilon^2 + \Gamma^2}), \\
 |\Psi_{2a}\rangle &= \{-c_2|1,0\rangle \exp[i(\tilde{\beta}_0 + \varepsilon)z] + c_1|1,2\rangle \exp[i(\tilde{\beta}_2 - \varepsilon)z]\} \exp(-iz\sqrt{\varepsilon^2 + \Gamma^2}), \\
 |\Psi_{1b}\rangle &= \{-c_2|1,0\rangle \exp[-i(\tilde{\beta}_0 + \varepsilon)z] + c_1|1,-2\rangle \exp[-i(\tilde{\beta}_1 - \varepsilon)z]\} \exp(iz\sqrt{\varepsilon^2 + \Gamma^2}), \\
 |\Psi_{2b}\rangle &= \{c_1|1,0\rangle \exp[-i(\tilde{\beta}_0 + \varepsilon)z] + c_2|1,-2\rangle \exp[-i(\tilde{\beta}_1 - \varepsilon)z]\} \exp(-iz\sqrt{\varepsilon^2 + \Gamma^2}), \quad (12)
 \end{aligned}$$

где  $c_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 \mp \frac{\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Gamma^2}}}$ ,  $\Gamma^2 \approx A^2 / 4\tilde{\beta}_0^2$ , а индекс  $a$  или  $b$  обозначает точку, вблизи которой строится выражение для гибридных мод. Спектр этих мод имеет вид:

$$\beta_{1,2}^{(a)} = \tilde{\beta}_0 + \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + \Gamma^2}, \quad \beta_{1,2}^{(b)} = -\tilde{\beta}_0 - \varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + \Gamma^2}. \quad (13)$$

Два вихря: рассеянный назад  $|1,2\rangle$  и рассеянный вперед  $|1,-2\rangle$ , не подвергаются гибридизации и не претерпевают изменений. Выражения (12) позволяют решить задачу о прохождении фундаментальной моды через СЭВ конечной длины.

### 3. ГЕНЕРАЦИЯ ОПТИЧЕСКИХ ВИХРЕЙ

Рассмотрим задачу о возбуждении СЭВ с параметром скрутки  $q = q_0$  фундаментальной модой, которая при условии согласования радиусов перетяжки пучка и сердцевины волокна [18] может быть аппроксимирована полем  $|1,0\rangle$ . В этом случае поле в левом полупространстве будет представлено суперпозицией фундаментальной моды и оптических вихрей

$$|\Phi_1(z \leq 0)\rangle = |1,0\rangle e^{ikz} + R_1|1,0\rangle e^{-ikz} + R_2|1,2\rangle e^{-ikz} + R_3|1,-2\rangle e^{-ikz}. \quad (18)$$

Для поля внутри волокна имеем:

$$|\Phi_2\rangle = T_1|\Psi_{1a}\rangle + T_2|\Psi_{2a}\rangle + T_3|\Psi_{1b}\rangle + T_4|\Psi_{2b}\rangle + T_5|1,2\rangle e^{-i\tilde{\beta}_2 z} + T_6|1,-2\rangle e^{i\tilde{\beta}_2 z} \quad (19)$$

Справа от волокна поле может быть представлено как:

$$|\Phi_3(z \geq d)\rangle = (P_1|1,0\rangle + P_2|1,2\rangle + P_3|1,-2\rangle) e^{ik(z-d)}. \quad (20)$$

Коэффициенты  $R_i, T_i, P_i$  в выражениях (18-20) определяются из системы уравнений, получаемой при сшивке выражений для поля и его производных на границах волокна и вакуума. Зависимость коэффициентов прохождения показана на рисунке 3.

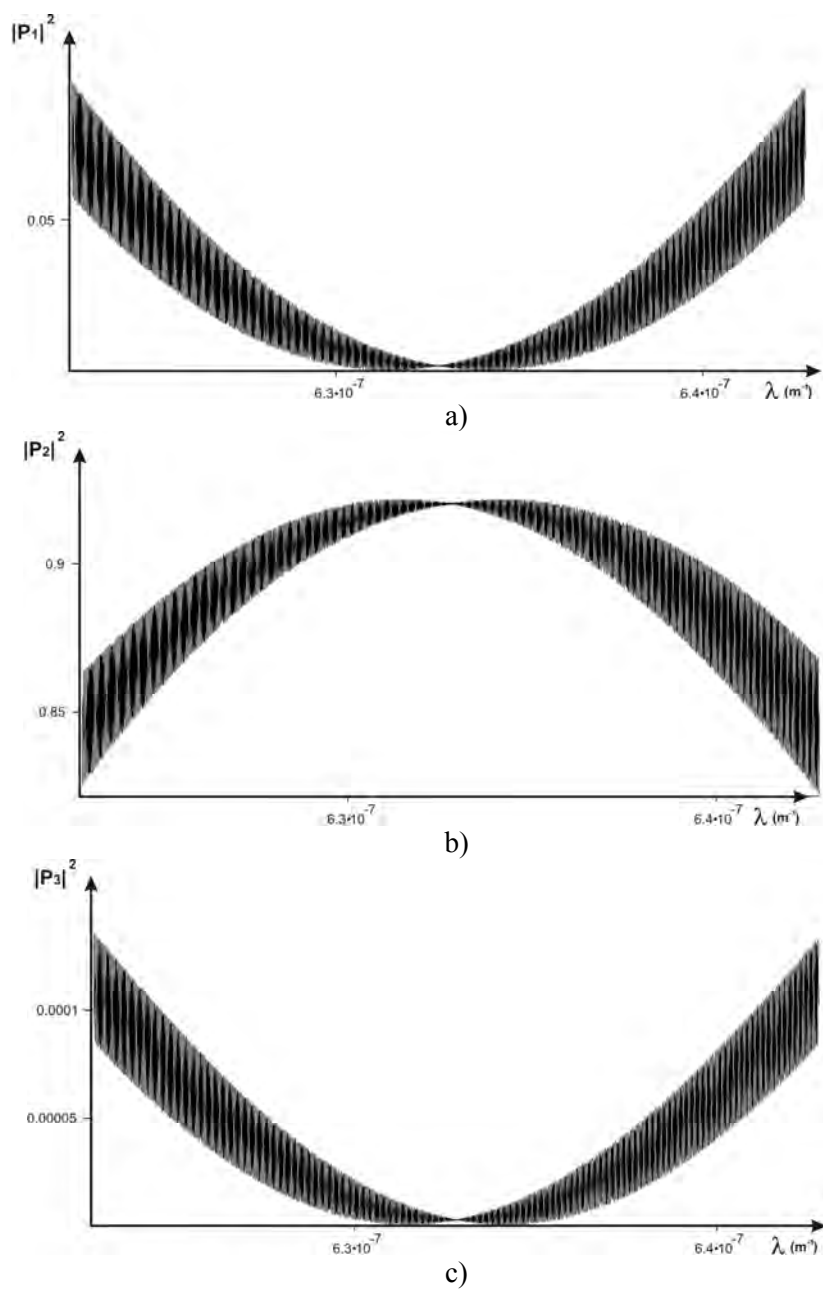


Рис. 3. Зависимость коэффициентов прохождения  $|P_i|^2$  от длины волны падающего поля  $|1,0\rangle$ . Параметры волокна:  $d_0 = 2.55$  мм,  $\Delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $r_0 = 8\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 632.8$  нм,  $q \approx q_0 = 11216.845$  м<sup>-1</sup>.

Видно, что вблизи  $q_0$  происходит конверсия фундаментальной моды в вихрь с топологическим зарядом  $+2$ . При увеличении длины волокна область эффективной конверсии суживается, и на графиках коэффициентов прохождения появляются характерные пики и провалы (Рис.4).

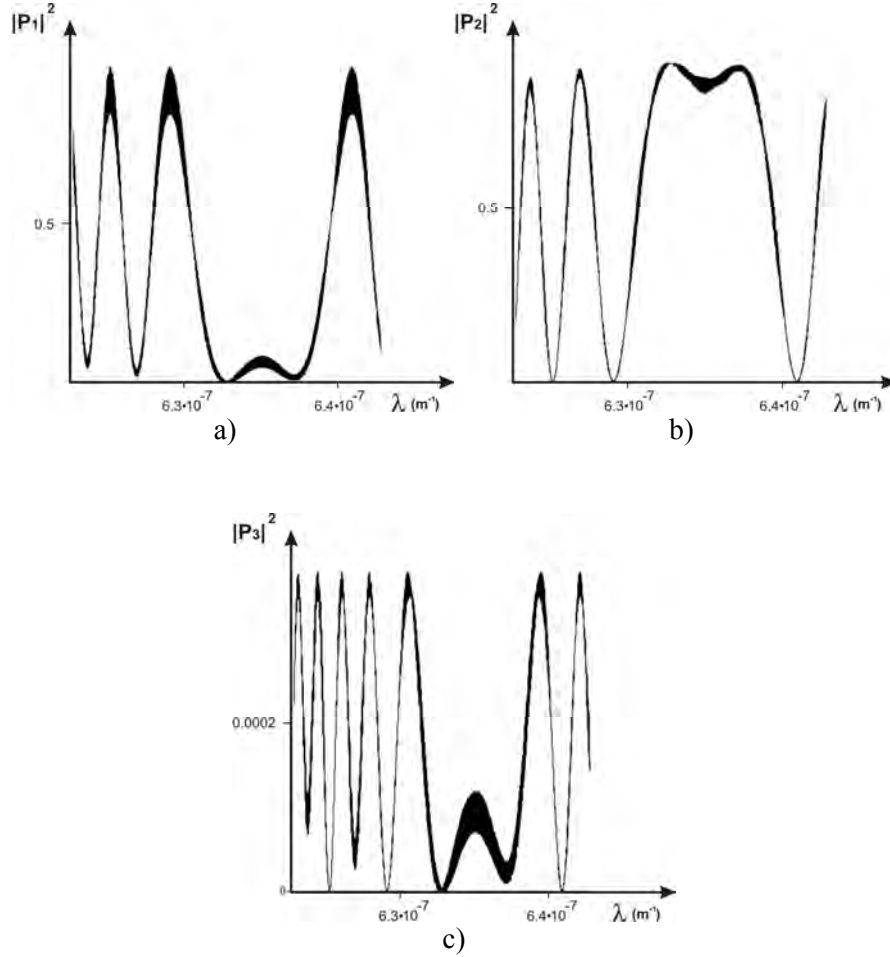


Рис. 4. Зависимость коэффициентов прохождения  $|P_i|^2$  от длины волны падающего поля  $|1,0\rangle$ . Параметры волокна:  $d_{40} = 207$  нм,  $\Delta = 0.01$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $r_0 = 8\lambda_0$ ,  $\lambda_0 = 632.8$  нм,  $q \approx q_0 = 11216.845$  м<sup>-1</sup>.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получена структура гибридных мод СЭВ и их постоянных распространения. Решена задача о прохождении фундаментальной через СЭВ конечной длины и теоретически показано, что СЭВ может служить широкополосным генератором оптических вихрей с топологическим зарядом  $+2$  из фундаментальной моды. Также получены спектральные характеристики процесса.

## Список литературы

1. Vasnetsov M.V. Optical Vortices / Vasnetsov M.V. and Staliunas K. – N.Y. : Nova Science, Huntington, 1999. – Vol. 228. – (Horizons of World Physics).
2. Soskin M.S. Singular Optics / Soskin M.S. and Vasnetsov M.V. // Prog. Opt. – 2001. – V. 42. – P. 219-276.
3. Simpson S.H. Motion of optically trapped particles in Laguerre-Gaussian beams / Simpson S.H. and Hanna S. // J. Opt. Soc. Am. – 2010. – A 27. – P. 2061-2071.
4. Spektor B. Singular beam microscopy / Spektor B., Normatov A. and Shamir J. // Appl. Opt. – 2008. – V. 47. – A78 – P. 87.
5. Metzger N.K. Observation and simulation of an optically driven micromotor / Metzger N.K., Mazilu M., Kelemen L., et al. // J. Opt. – 2011. – V. 13. – P. 044018.
6. Lee J.H. Experimental verification of an optical vortex coronagraph / Lee J.H., Foo G., Johnson E.G., and Schwartzlander G.A. // Phys. Rev. Lett. – 2006. – V. 97. – P. 053901.
7. Bouchal Z. Mixed vortex states of light as information carriers / Bouchal Z. and Chelechovsky R. // New J. Phys. – 2004. – V. 6. – P. 131.
8. Pugatch R. Storing images in warm atomic vapor / Pugatch R., Shuker M., Firstenberg O., et al. // Phys. Rev. Lett. – 2007. – V. 98. – P. 203601.
9. Beijersbergen M.W. Astigmatic laser mode converters and transfer of orbital angular momentum / Beijersbergen M.W., Allen L., van der Ween H.E.L.O. and Woerdman J.P. // Opt. Commun. – 1993. – V. 96. – P. 123-132.
10. Beijersbergen M.W. Helical-wavefront laser beams produced with a spiral phaseplate / Bejersbergen W., Coerwinkel R.P.C., Kristensen M., and Woerdman J.P. // Opt. Commun. – 1994. – V. 112. – P. 321-327.
11. Heckenberg N.R. Generation of optical phase singularities by computer-generated holograms / Heckenberg N.R., McDuff R., Smith C.P., and White A.G. // Opt. Lett. – 1992. – V. 17. – P. 221-223.
12. Izdebskaya Ya.V. Generation of higher-order optical vortices by the dielectric wedge / Izdebskaya Ya.V., Shvedov V.G., and Volyar A.V. // Opt. Lett. – 2005. – V. 30. – P. 2472-2474.
13. McGloin D. The transfer of orbital angular momentum from a stressed fibre-optic waveguide to a light beam / McGloin D., Simpson N.B., and Padgett M.J. // Appl. Opt. – V. 37. – P. 469-472.
14. Alexeyev C.N. Optical vortices and the higher order modes of twisted strongly elliptical optical fibres / Alexeyev C.N. and Yavorsky M.A. // J. Opt. A: Pure Appl. Opt. – 2004. – V. 6. – P. 824-832.
15. Alexeyev C.N., Volyar A.V., Yavorsky M.A. // in Fiber optical vortices: Laser Optics and Electro-Optics Research Trends. New York: ed. Lian I. Chen, Nova Publishers, 2007. – P. 131-223.
16. Kawano K. Introduction to optical waveguide analysis / Kawano K., Kitoh T. – New York, 2001. – 280 p.
17. Alexeyev C.N. Helical core optical fibers maintaining propagation of a solitary optical vortex / Alexeyev C.N., Lapin B.P., Yavorsky M.A. // Phys. Rev. A. – 2008. – V. 78. – P. 013813.
18. Snyder A.W. Optical Waveguide Theory / Snyder A.W., Love J.D. – London, New York: Chapman and Hall, 1985.



Алексеев К.М. Генерация оптических вихорів за допомогою скручених еліптичних волокон / Алексеев К.М., Лапін Б.П., Яворський М.А. // Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2011. – Т. 24(63), №2. – С. 58-66.

У даній статті вивчено перетворення топологічного заряду поля за допомогою скручених еліптичних волокон (СЕВ). Знайдено, що топологічний заряд поля, яке падає на таке волокно, може бути змінений на двійку при узгодженні довжини хвилі та параметрів ґрати. Розв'язано задачу о проходженні фундаментальної моди скрізь СЕВ скінченної довжини, винайдені спектральні характеристики процесу. Показано, що СЕВ може слугувати широкосмужним генератором оптичних вихорів з топологічним зарядом +2.

**Ключові слова:** оптичний вихор, скручене еліптичне волокно, конверсія топологічного заряду.

Alexeyev C.N. Optical vortices generation by twisted elliptical fibers / Alexeyev C.N., Lapin B.P., Yavorsky M.A. // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2011 – Vol. 24(63), No.2 – P. 58-66.

In this paper we have studied a conversion of a field's topological charge by twisted elliptical fibers (TEF). It has been shown that the topological charge of incident field is changed by +2 by TEF in the case of wavelength and grating parameter matching. The problem of fundamental mode passage through TEF of a finite length is solved, spectral characteristics are obtained. It has been shown that the twisted elliptical fiber can operate as a broadband generator of optical vortices with topologic charge +2 from the fundamental mode.

**Keywords:** optical vortex, twisted elliptical fiber, topologic charge conversion.

*Поступила в редакцію 05.05.2011 г.*