Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 77–84.

А. И. Криворучко

О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ ОТРАЖЕНИЙ С ДВУМЯ ЛИНЕЙНЫМИ ОБОЛОЧКАМИ ОРБИТ НАПРАВЛЕНИЙ СИММЕТРИИ

Найдены инварианты бесконечных групп отражений, имеющих две линейные оболочки орбит направлений симметрии. Получена линейная классификация бесконечных групп отражений, действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях и имеющих две линейные оболочки орбит направлений симметрии.

УДК 514.12

Введение. Теории инвариантов бесконечных групп отражений и связанной с ней задачей о строении алгебраических поверхностей с бесконечными множествами плоскостей симметрии посвящен целый ряд работ В.Ф.Игнатенко, А.Е.Залесского, А.Е.Велесько, Т.Ю.Сысоевой, О.И.Рудницкого и других авторов (см., например, обзорные статьи [1], [2] и библиографию к ним). В частности, в [3] показано, что задача о строении нецилиндрических алгебраических гиперповерхностей с бесконечным множеством гиперплоскостей симметрии в конечномерном вещественном векторном пространстве V сводится к вычислению базисных инвариантов бесконечной группы G, которая удовлетворяет следующим условиям:

(А) Группа порождается объединением образованных отражениями попарно непересекающихся множеств $M_1, \ldots, M_k$, причем для каждого $i = 1, \ldots, k$ множество M_i определяется некоторой лежащей в V плоскостью A_i и соответствующей квадратичной формой φ_i в следующем смысле: отражение (P, d) относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда $d \in A_i$, а гиперплоскость P сопряжена d относительно φ_i, но не содержит d.

(Б) Если два отражения принадлежат $M_1 \cup \cdots \cup M_k$ и не коммутируют между собой, то некоторое M_i содержит оба эти отражения.

Для $k \leq 3$ базисные инварианты такой группы известны. Получены отдельные результаты об инвариантах группы G для $k > 3$. (см. [3], [4]). Однако вопросы линейной классификации групп, удовлетворяющих условиям (А) и (Б), за исключением случая $k = 1$, не рассматривались. В связи с этим естественно возникает *постановка следующей задачи*:

Получить линейную классификацию групп, которые удовлетворяют условиям (А) и (Б), а также алгебр полиномиальных инвариантов этих групп, если

(В) $k = 2$.

Решению этой задачи и посвящена настоящая работа.

Цель работы – построение линейной классификации групп, действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях и удовлетворяющих условиям (А)–(В), а также алгебр полиномиальных инвариантов таких групп.

Основные результаты: Вычислены базисные полиномиальные инварианты групп, удовлетворяющих условиям (А)–(В), и для таких групп, действующих на нецилиндрических алгебраических гиперповерхностях, получена линейная классификация.

Построены удовлетворяющие условиям (А)–(В) линейные алгебраические группы, имеющие вырожденные алгебры инвариантов, но не содержащие при этом сдвигов. Показано также, что удовлетворяющая условиям (А)–(В) линейная алгебраическая группа может содержать сдвиги, но ни один из таких сдвигов не является произведением каких-либо двух отражений, принадлежащих этой группе (что противоречит соответствующей гипотезе А.Е.Залесского).

1^o. Пусть группа G удовлетворяет условиям (А)–(В). Используя результаты, полученные в работе [3], зафиксируем в пространстве V базис

$$(a_{ij},\ b_{il},\ c_q\ :\ 1 \le i \le 2;\ 1 \le j \le m_i;\ 1 \le l \le s_i;\ \ 1 \le q \le m)$$

с соответствующими координатными функциями

$$x_{ij} = a^*_{ij}, \quad y_{il} = b^*_{il}, \quad z_q = c^*_q \quad (1 \le i \le 2;\ 1 \le j \le m_i;\ 1 \le l \le s_i;\ \ 1 \le q \le m), \quad (1)$$

относительно которого

$$A_1 = \langle a_{1j},\ b_{1l}\ :\ j \le k_1;\ l \le s_1 \rangle\,,$$

$$A_2 = \langle a_{2j},\ b_{1p},\ b_{2l},\ :\ j \le k_2;\ p \le s;\ l \le s_2 \rangle\,,$$

а для каждого $i \le 2$ множество M_i определяется плоскостью A_i и квадратичной формой φ_i, где

$$\varphi_1 = \sum_j \varepsilon_{1,j}\, x^2_{1,j} + 2 \sum_l y_{1,l}\, \xi_{1,l},$$

$$\varphi_2 = \sum_j \varepsilon_{2,j}\, x^2_{2,j} + 2 \sum_l y_{2,l}\, \xi_{2,s+l} + 2 \sum_{p=1}^{s} y_{1,p}\, \xi_{2,p},$$

причем для всех $i,\ j,\ l$

$$\xi_{i,l} \in \langle z_1, \ldots, z_m \rangle\,, \quad \varepsilon_{i,j} \in \{-1,\ 1\}.$$

Положим

$$h_1 = \varphi_1, \quad h_2 = \sum_j \varepsilon_{2,j}\, x_{2,j}^2 + 2\sum_l y_{2,l}\, \xi_{2,s+l},$$

$$\Lambda_1 = \langle \xi_{1,j} \,:\, j \geq 1\rangle, \quad \Lambda_2 = \langle \xi_{2,j} \,:\, j \geq 1\rangle, \quad \sigma = \dim \Lambda_1 \cap \Lambda_2;$$

$\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел, $\mathbf{K}$ – алгебра вещественных полиномиальных функций, а $\mathbf{K}_0$ – поле вещественных рациональных функций от переменных (1); $\mathbf{K}^G$ – алгебра полиномиальных инвариантов, а $\mathbf{K}_0^G$ – поле рациональных инвариантов группы G.

Подмножество X множества $\mathbf{K}_0$ называется невырожденным, если X не содержится в $\mathbb{R}(y_2, \dots, y_n)$ ни при каком выборе линейных координат $y_1, \dots, y_n$ пространства V.

Теорема 1. *Пусть либо $s > 0$ и $\xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,s}$, $\xi_{2,1}, \dots, \xi_{2,s}$ – нулевые формы, либо $s = 0$. Тогда*

$$\mathbf{K}_0^G = \mathbb{R}(h_1,\ h_2,\ z_1, \dots,\ z_m), \quad \mathbf{K}^G = \mathbb{R}[h_1,\ h_2,\ z_1, \dots,\ z_m]. \tag{2}$$

При этом если $\dim \Lambda_1 = s_1$, $\dim \Lambda_2 = s_2$, то алгебра $\mathbf{K}^G$ невырожденна, $M_1 \cup M_2$ – множество всех отражений, сохраняющих каждый полиномиальный инвариант группы G, и с точностью до линейной эквивалентности можно считать, что $\xi_{1,i} = z_i$ для всех $i \leq s_1$, $\xi_{2,j} = z_j$ для всех $j \leq \sigma$, $\xi_{2,l} = z_{l-\sigma+s_1}$ для всех $l \in \{\sigma+1, \dots, s_2\}$.

Теорема 2. *Пусть $s \geq 1$, $\xi_{2,1}$ – ненулевая форма, и найдется $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого*

$$\xi_{1,p} = \lambda\, \xi_{2,p} \quad (p = 1, \dots, s).$$

Тогда

$$\mathbf{K}_0^G = \mathbb{R}(h_1 + \lambda\, h_2,\ z_1, \dots,\ z_m), \quad \mathbf{K}^G = \mathbb{R}[h_1 + \lambda\, h_2,\ z_1, \dots,\ z_m], \tag{3}$$

т.е. каждый рациональный инвариант группы G является инвариантом группы, порожденной квадратичным множеством отражений M_0, определяемым плоскостью $A_1 + A_2$ и квадратичной формой $h_1 + \lambda\, h_2$. При этом если $\lambda \neq 0$ и $s = \sigma$, то алгебра $\mathbf{K}^G$ невырожденна, M_0 – множество всех отражений, сохраняющих каждый полиномиальный инвариант группы G, и с точностью до линейной эквивалентности можно считать, что $\xi_{1,i} = z_i$ для всех $i \leq s_1$, $\xi_{2,j} = z_j$ для всех $j \leq \sigma$, $\xi_{2,l} = z_{l-\sigma+s_1}$ для всех $l \in \{\sigma+1, \dots, s_2\}$.

Теорема 3. *Пусть $s = 1$, $\xi_{1,1} \nparallel \xi_{2,1}$. Тогда*

$$\mathbf{K}_0^G = \mathbb{R}(\xi_{2,1}\, h_1 + \xi_{1,1}\, h_2,\ z_1, \dots,\ z_m), \quad \mathbf{K}^G = \mathbb{R}[\xi_{2,1}\, h_1 + \xi_{1,1}\, h_2,\ z_1, \dots,\ z_m]. \tag{4}$$

При этом если $\dim \Lambda_1 = s_1$, $\dim \Lambda_2 = 1 + s_2$, то алгебра K^G является невырожденной, а $M_1 \cup M_2$ – множество всех отражений, сохраняющих каждый полиномиальный инвариант группы G, и с точностью до линейной эквивалентности можно считать, что выполняется одно из следующих условий:

1) $\xi_{1,1} \in \Lambda_2$, $\xi_{2,1} \in \Lambda_1$, $\xi_{1,1} = \xi_{2,2} = z_1$, $\xi_{1,2} = \xi_{2,1} = z_2$; *если* $\sigma > 2$, *то* $\xi_{1,j} = \xi_{2,j} = z_j$ *для всех* $j \in \{3, \ldots, \sigma\}$; *если* $\sigma < s_1$, *то* $\xi_{1,\sigma+j} = z_{\sigma+j}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, s_1 - \sigma\}$; *если* $\sigma < 1 + s_2$, *то* $\xi_{2,\sigma+j} = z_{s_1+j}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, s_2 - \sigma + 1\}$.

2) $\xi_{1,1} \notin \Lambda_2$, $\xi_{2,1} \notin \Lambda_1$, $\xi_{1,j} = z_j$ *для всех* $1 \in \{1, \ldots, s_1 - \sigma\}$, $\xi_{2,j} = z_{s_1-\sigma+j}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, s_2 - \sigma + 1\}$; *если* $\sigma > 0$, *то* $\xi_{1,s_1-\sigma+j} = \xi_{2,s_2-\sigma+1+j} = z_{s_1+s_2-2\sigma+j}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, \sigma\}$.

3) $\xi_{1,1} \in \Lambda_2$, $\xi_{2,1} \notin \Lambda_1$, $\xi_{1,1} = \xi_{2,2} = z_1$, $\xi_{2,1} = z_2$, $\xi_{2,\sigma+1+j} = z_{s_1+1+j}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, s_2 - \sigma\}$; *если* $\sigma > 1$, *то* $\xi_{1,j} = \xi_{2,j} = z_j$ *для всех* $j \in \{3, \ldots, \sigma + 1\}$; *если* $s_1 > \sigma$, *то* $\xi_{1,\sigma+j} = z_{\sigma+j+1}$ *для всех* $j \in \{1, \ldots, s_1 - \sigma\}$.

Теорема 4. *Пусть* $s > 1$ *и* $\xi_{1,1}\xi_{2,2} \neq \xi_{1,2}\xi_{2,1}$. *Тогда*

$$\mathbf{K}_0^G = \mathbb{R}(z_1, \ldots, z_m), \quad \mathbf{K}^G = \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_m]. \tag{5}$$

2^o**.** Докажем сформулированные выше результаты.

Если P – гиперплоскость в V, $v \in V \setminus P$, то (P, v) будет обозначать отражение относительно P в направлении v.

Пусть $f \in \mathbf{K}_0^G$, $\xi \in V^*$,

$$d = \sum_{i,j} \alpha_{i,j} a_{i,j} + \sum_{i,l} \beta_{i,l} b_{i,l} + \sum_p \gamma_p z_p,$$

где все $\alpha_{i,j}$, $\beta_{i,l}$, γ_p принадлежат $\mathbb{R}$. Если $f \in \mathbf{K}_0$, то f'_d обозначает производную функции f вдоль d.

Отметим, что

$$(h_1)'_d = 2\sum_j \alpha_{1,j}\varepsilon_{1,j}x_{1,j} + 2\sum_l \beta_{1,l}\xi_{1,l}, \tag{6}$$

$$(h_2)'_d = 2\sum_j \alpha_{2,j}\varepsilon_{2,j}x_{2,j} + 2\sum_l \beta_{2,l}\xi_{2,s+l}, \tag{7}$$

$$(z_1)'_d = \gamma_1, \ldots, (z_m)'_d = \gamma_m, \tag{8}$$

$z_1, \ldots, z_m$ – инварианты группы G.

Из ([5], предложения 1 и 2) следует, что $f \in \mathbb{R}(h_1, h_2, z_1, \ldots, z_m)$, причем если $f \in \mathbf{K}$, то $f \in \mathbb{R}[h_1, h_2, z_1, \ldots, z_m]$.

Рассмотрим теперь следующие случаи.

1. Если $s > 0$, то $\xi_{1,1}, \ldots, \xi_{1,s}$, $\xi_{2,1}, \ldots, \xi_{2,s}$ – нулевые формы.

Тогда из (6) и (7) следует, что если $\xi(d) \neq 0$ и отражение относительно гиперплоскости $\ker\xi$ в направлении d принадлежит $M_1 \cup M_2$, то $(h_1)'_d$ и $(h_2)'_d$ делятся на ξ. Поэтому h_1, h_2 принадлежат $\mathbf{K}^G$. Отсюда получаем (2).

Теперь предположим, что в рассматриваемом случае $\dim\Lambda_1 = s_1$, $\dim\Lambda_2 = s_2$ (и поэтому $s = 0$). Тогда из (6)–(8) следует, что если $(h_1)'_d$, $(h_2)'_d$, $(z_1)'_d, \ldots, (z_m)'_d$ – нулевые формы, то $d = \bar{0}$. Это значит, что K^G – невырожденная алгебра. Проверим, что всякое отражение, сохраняющее каждую из форм h_1, h_2, $z_1, \ldots, z_m$, принадлежит $M_1 \cup M_2$.

Пусть $\xi(d) \neq 0$, а отражение $(\ker\xi,\, d)$ сохраняет формы $h_1,\ h_2,\ z_1, \dots,\ z_m$. Тогда $(h_1)'_d,\ (h_2)'_d,\ (z_1)'_d, \dots,\ (z_m)'_d$ делятся на ξ, и из (8)

$$\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0. \tag{9}$$

Кроме того, $(h_1)'_d \neq 0$ или $(h_2)'_d \neq 0$ (иначе, по доказанному выше, $d = \bar{0}$). Но тогда найдется $a_{i,j}$, для которого $\xi(a_{i,j}) \neq 0$, т.к. иначе из делимости $(h_1)'_d$ и $(h_2)'_d$ на ξ следует, что $\xi \in \langle z_1, \dots, z_m\rangle$, т.е. что $\xi(d) = 0$.

Допустим, что $\xi(a_{1,1}) \neq 0$. Тогда из $(h_2)'_d(a_{1,1}) = 0$ следует, что $(h_2)'_d = 0$, и $(h_1)'_d = \lambda\xi$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Отсюда $d \in A_1$ и ξ сопряжена h_1 относительно d, т.е. $(\ker\xi,\, d) \in M_1$.

Аналогичным образом показывается, что если $\xi(a_{2,1}) \neq 0$, то $(\ker\xi,\, d) \in M_2$.

2. $s > 0$, $\xi_{2,1}$ – ненулевая форма.

По доказанному выше, $f \in \mathbb{R}(h_1,\, x_{2,1}^2, \dots,\, y_{2,1}, \dots,\, z_1, \dots,\, z_m)$, и если $f \in \mathbf{K}$, то $f \in \mathbb{R}[h_1,\, x_{2,1}^2, \dots,\, y_{2,1}, \dots,\, z_1, \dots,\, z_m]$. Но тогда из ([5], предложения 2 и 3) имеем:

$$f = g(h_1 + h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1},\, z_1, \dots,\, z_m) \in \mathbb{R}(h_1 + h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1},\, z_1, \dots,\, z_m), \tag{10}$$

причем если $f \in \mathbf{K}$, то $f \in \mathbb{R}[h_1 + h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1},\, z_1, \dots,\, z_m]$.

2.1. $\xi_{1,p} = \lambda_p\xi_{2,p}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$ и всех $p \in \{1, \dots,\, s\}$.

Тогда $h_1 + h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1} = h_1 + \lambda\, h_2$. Из (6) и (7) следует, что если $\xi(d) \neq 0$ и отражение $(\ker\xi,\, d)$ принадлежит $M_1 \cup M_2$, то форма $(h_1)'_d + \lambda\,(h_2)'_d$ делится на ξ. Поэтому $h_1 + \lambda\, h_2 \in \mathbf{K}^G$. Отсюда получаем (3).

2.2. $s = 1$, $\xi_{1,1} \nparallel \xi_{2,1}$.

В этом случае если $f \in \mathbf{K}$, то, полагая

$$F = \xi_{2,1}h_1 + \xi_{1,1}h_2,$$

имеем: $f \in \mathbb{R}[F,\, z_1, \dots,\, z_m]$ (см. [6], лемма 1). Из (6) и (7) следует, что если $\xi(d) \neq 0$ и $(\ker\xi,\, d) \in M_1 \cup M_2$, то квадратичная форма $F'_d = \xi_{2,1}(h_1)'_d + \xi_{1,1}(h_2)'_d$ делится на ξ. Поэтому $F \in \mathbf{K}^G$, и получаем (4).

Предположим теперь, что $\dim\Lambda_1 = s_1$, $\dim\Lambda_2 = 1 + s_2$. Если при этом F'_d, $(z_1)'_d, \dots,\ (z_m)'_d$ – нулевые формы, то из (8) следует (9), а из (6) и (7) получаем

$$\xi_{2,1}\Bigl(\sum_j \alpha_{1,j}\varepsilon_{1,j}x_{1,j} + \sum_l \beta_{1,l}\xi_{1,l}\Bigr) = -\xi_{1,1}\Bigl(\sum_j \alpha_{2,j}\varepsilon_{2,j}x_{2,j} + \sum_l \beta_{2,l}\xi_{2,1+l}\Bigr). \tag{11}$$

Но $\xi_{1,1} \nparallel \xi_{2,1}$. Поэтому найдется $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого линейная комбинация

$$\sum_j \alpha_{2,j}\varepsilon_{2,j}x_{2,j} + \sum_l \beta_{2,l}\xi_{2,1+l} + \lambda\,\xi_{2,1}$$

линейно независимых форм $x_{2,1}, \dots,\, x_{2,m_2},\, \xi_{2,1}, \dots,\, \xi_{2,1+s_2}$ является нулевой формой. Значит, все коэффициенты этой линейной комбинации равны 0. Но тогда из (11) получаем, что все коэффициенты линейной комбинации

$$\sum_j \alpha_{1,j}\varepsilon_{1,j}x_{1,j} + \sum_l \beta_{1,l}\xi_{1,l}$$

линейно независимых форм $x_{1,1}, \ldots, x_{1,m_1}, \xi_{1,1}, \ldots, \xi_{1,s_1}$ также равны 0. Следовательно, $d = \bar{0}$. Это значит, что K^G – невырожденная алгебра. Проверим, что всякое отражение, сохраняющее каждую из форм $F,\ z_1, \ldots,\ z_m$, принадлежит $M_1 \cup M_2$.

Пусть $\xi(d) \neq 0$, а отражение $(\ker\xi,\, d)$ сохраняет формы $F,\ z_1, \ldots,\ z_m$. Тогда $F'_d,\ (z_1)'_d, \ldots,\ (z_m)'_d$ делятся на ξ, и из (8) получаем (9). Кроме того, $F'_d \neq 0$ (иначе, по доказанному выше, $d = \bar{0}$). Но тогда найдется $a_{i,j}$, для которого $\xi(a_{i,j}) \neq 0$, т.к. иначе из делимости F'_d на ξ следует, что $\xi \in \langle z_1, \ldots,\ z_m\rangle$, т.е. что $\xi(d) = 0$.

Допустим, что $\xi(a_{1,1}) \neq 0$. Тогда $\alpha_{1,1} \neq 0$, и можно считать, что $\xi = \alpha_{1,1}\varepsilon_{1,1}x_{1,1} + \theta$, где $\theta(a_{1,1}) = 0$. Из последнего равенства и делимости F'_d на ξ следует, что $F'_d = \xi_{2,1}\xi$. Но тогда $\xi_{2,1}\left((h_1)'_d - \xi\right) + \xi_{1,1}\,(h_2)'_d = 0$. Отсюда найдется $\lambda \in \mathbb{R}$, для которого $\lambda\,\xi_{2,1} + (h_2)'_d = 0$. Учитывая линейную независимость форм $x_{2,1}, \ldots, x_{2,m_2}, \xi_{2,1}, \ldots, \xi_{2,1+s_2}$, как и выше, получаем: $\lambda = 0$, $d \in A_1$, $\xi = (h_1)'_d$, $(\ker\xi,\, d) \in M_1$.

Аналогичным образом показывается, что если $\xi(a_{2,1}) \neq 0$, то $(\ker\xi,\, d) \in M_2$.

2.3. $s > 1$, $\xi_{1,1}\xi_{2,2} \neq \xi_{1,2}\xi_{2,1}$.

Пусть t_1 и t_2 принадлежат $\mathbb{R}$. Отражения

$$T_1 = (\ker(\varepsilon_{2,1}x_{2,1} + t_1\xi_{2,1}),\, a_{2,1} + t_1 b_{1,1}),\quad T_2 = (\ker(\varepsilon_{2,1}x_{2,1} + t_2\xi_{2,1}),\, a_{2,1} + t_2 b_{1,1}),$$

$$T_3 = (\ker(\varepsilon_{2,1}x_{2,1} - t_1\xi_{2,1} + t_2\xi_{2,2}),\, a_{2,1} - t_1 b_{1,1} + t_2 b_{1,2}),\quad T_0 = (\ker x_{2,1},\, a_{2,1})$$

принадлежат M_2, и учитывая инвариантность f относительно произведения $T_0T_1T_2T_3$, из (10) для любого вещественного t получаем:

$$g(h_1 + h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1},\, z_1, \ldots,\, z_m) = g(h_1 + h_2\xi_{1,1}\xi_{2,1}^{-1} + t\,(\xi_{1,1}\xi_{2,2} - \xi_{1,2}\xi_{2,1}),\, z_1, \ldots,\, z_m).$$

Отсюда следует (5).

Утверждения о специальном базисе группы G с невырожденной алгеброй инвариантов непосредственно следуют из леммы, доказанной в [4].

3^o. Если $\dim\Lambda_1 < s_1$ или $\dim\Lambda_2 < s_2$, то G содержит сдвиги и имеет вырожденную алгебру инвариантов. В то же время из теорем 2–4 следует, что G может иметь вырожденную алгебру инвариантов и тогда, когда $\dim\Lambda_1 = s_1$, а $\dim\Lambda_2 = s_2$. Рассмотрим некоторые связанные с этой возможностью примеры. Будем при этом считать, что $m_1 = m_2 = 1$, $s_1 = s_2 = 2$.

Пример 1. В следующих четырех случаях G содержит сдвиги, но ни один из этих сдвигов не является произведением каких либо двух отражений, принадлежащих группе G.

1) $s = 1$, $\xi_{1,1} = \xi_{2,1} = z_1 + z_2$, $\xi_{1,2} = z_1$, $\xi_{2,2} = z_2$;

2) $s = 2$, $\xi_{1,1} = \xi_{2,1} = z_1$, $\xi_{1,2} = z_2$, $\xi_{2,2} = z_1 + z_2$;

3) $s = 2$, $\xi_{1,1} = \xi_{2,1} = z_1$, $\xi_{1,2} = z_2$, $\xi_{2,2} = z_3$;
4) $s = 2$, $\xi_{1,1} = \xi_{2,1} = z_1$, $\xi_{1,2} = z_2$, $\xi_{2,2} = \rho\, z_2$, $\rho \in \mathbb{R} \setminus \{0;\ 1\}$.

Пример 2. Пусть $s = 2$, $\xi_{1,1} = z_1$, $\xi_{1,2} = z_2$, $\xi_{2,1} = a\, z_1 - b\, z_2$, $\xi_{2,2} = b\, z_1 + a\, z_2$, где $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Тогда G не содержит сдвигов, но комплексификация группы G содержит сдвиги, причем ни один из этих сдвигов не является произведением каких либо двух отражений, принадлежащих комплексификации группы G.

Пример 3. Пусть $s = 2$, $\xi_{1,1} = z_1$, $\xi_{1,2} = z_2$. Тогда в следующих двух случаях группа G имеет вырожденную алгебру инвариантов, но при этом комплексификация группы G не содержит сдвигов.
1) $\xi_{2,1} = z_2$, $\xi_{2,2} = z_3$;
2) $\xi_{2,1} = z_3$, $\xi_{2,2} = z_4$.

Доказательство указанных свойств группы G использует то, что если квадратичное множество M_0 отражений в базисе $(a,\, b_1,\, b_2,\, c_1,\, c_2, \ldots,\, c_m)$ с координатными функциями $x,\, y_1,\, y_2,\, z_1,\, z_2, \ldots,\, z_m$ пространства V определяется плоскостью $\langle a,\, b_1,\, b_2\rangle$ и квадратичной формой $x^2+2\,(y_1z_1+y_2z_2)$, то всякое несобственное преобразование, принадлежащее группе G_0, порожденной множеством M_0, представимо (и только одним способом) как произведение отражения, принадлежащего M_0, и преобразования, имеющего координатное представление

$$x' = x,\ y_1' = y_1 + t\, z_2,\ y_2' = y_2 - t\, z_1,\ z_1' = z_1, \ldots,\ z_m' = z_m,$$

где $t \in \mathbb{R}$. Это позволяет найти координатное представление каждого преобразования T, принадлежащего G и удовлетворяющего условию $\mathrm{rank}(T - \mathrm{Id}) = 1$.

Заключение. *Основные результаты работы*:

Получены линейная классификация и базисные инварианты бесконечных нерасширяемых групп отражений, действующих на нецилиндрических алгебраических гиперповерхностях и имеющих две линейные оболочки орбит направлений симметрии. Построены некоторые примеры групп с вырожденными алгебрами инвариантов.

Список литературы

[1] Игнатенко В.Ф. О геометрической теории инвариантов групп, порожденных отражениями // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Пробл. геометрии. – М., 1989. – Т. 21. – С. 155–208.

[2] Игнатенко В.Ф. Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. III // Укр. математ. журн. – 1998. – Т. 50, № 10. – С. 1324–1340.

[3] Криворучко А.И. О строении множества орбит отражений бесконечной группы, порожденной отражениями // Таврический вестник информатики и математики. – 2003. – № 1. – С. 78–92.

[4] Криворучко А.И. О двойном отношении четверки линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы, порожденной отражениями // Ученые записки ТНУ. Сер. "Математика". – 2001.– Т.14, № 1. – С. 60–64.

[5] Криворучко А.И. О группах, порожденных двумя аффинными отражениями // Ученые записки ТНУ. Сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн.". – 2006. – Т.19, № 2. – С. 43–51.

[6] Криворучко А.И. О полиномиальных инвариантах специальных групп, порожденных отражениями // Динамические системы. – 2000. – Вып. 16. С. 124–129.

Побудовани інваріанти нескінченних груп віддзеркалень, що мають дві лінійні оболонки орбіт напрямів симетрій. Знайдена лінійна класифікація нескінченних груп віддзеркалень, що діють на нециліндричних алгебраїчних поверхнях та мають дві лінійні оболонки орбіт напрямів симетрій.

The invariants of infinite reflection groups having two linear spans of orbits of symmetry directions are obtained. The linear classification of infinite reflection groups acting on non-cylindrical algebraic surfaces and having two linear spans of orbits of symmetry directions is given.