

УДК 535.1

**ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ И МОДОВАЯ КОНВЕРСИЯ В  
ОПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ ВЗАИМНОЙ  
ОРИЕНТАЦИЕЙ ОСЕЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ АНИЗОТРОПИИ И  
АНИЗОТРОПИИ ФОРМЫ**

*Алексеев К.Н., Лапин Б.П., Яворский М.А.*

*Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина  
E-mail: alexeyev@ccssu.crimea.ua, lapinboris@gmail.com, maxyavorsky@yahoo.com*

Получены моды анизотропного эллиптического волокна с произвольной ориентацией осей материальной анизотропии и анизотропии формы, подсчитан угловой момент произвольной комбинации  $l = 1$  оптических вихрей

**Ключевые слова:** угловой момент, оптический вихрь

**ВВЕДЕНИЕ**

Угловой момент оптического излучения является одной из важных его характеристик, обеспечивающих широкое практическое применение пучков с собственным моментом количества движения [1-5]. Преобразование углового момента излучения тесно связано с модовой конверсией оптических пучков [6-9]. Кроме этих стандартных способов преобразования углового момента, экспериментально была продемонстрирована способность оптических волокон с анизотропией формы и материала преобразовывать угловой момент оптического излучения [10-11]. Конверсия углового момента в волокнах с перпендикулярной и параллельной ориентацией осей материальной анизотропии и анизотропии формы была теоретически рассмотрена в работе [12].

Целью данной работы является изучение конверсии углового момента оптического излучения в слабо направляющих волокнах с произвольной ориентацией осей анизотропии формы и материала.

**1. МОДЫ АНИЗОТРОПНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ВОЛОКНА**

Регулярный способ получения мод слабо направляющего эллиптического анизотропного волокна (рис.1)

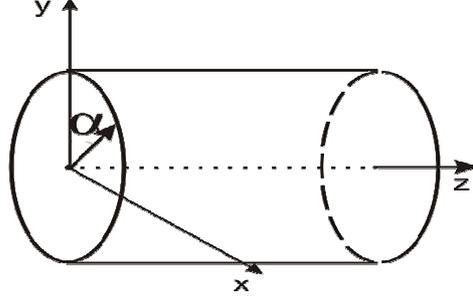


Рис.1. Модель анизотропного эллиптического волокна, жирной стрелкой указано направление оси анизотропии

состоит в решении векторного волнового уравнения [13]:

$$\left(\vec{\nabla}^2 + n^2(x, y, z)k^2\right)\vec{E}(x, y, z) = -\vec{\nabla}\left(\vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{\nabla} \ln n^2(x, y, z)\right), \quad (1)$$

где  $\vec{E}$  - напряженность электрического поля,  $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ ,  $k = 2\pi/\lambda$  - волновое число,  $\lambda$  - волновое число.

В оптических волокнах показатель преломления записывается в виде  $n^2(x, y, z) = n_{co}^2(1 - 2\Delta f(x, y, z))$ ,  $\Delta = (n_{co}^2 - n_{cl}^2)/2n_{co}^2$  - высота профиля показателя преломления,  $n_{co}$  и  $n_{cl}$  - показатели преломления сердцевины и оболочки,  $f(x, y, z)$  - функция профиля. Представим показатель преломления в виде:  $\hat{n}^2 = \bar{n}^2 + \Delta\hat{n}^2$ , где  $\Delta\hat{n}^2$  описывает влияние эллиптичности и анизотропии:

$$\Delta\hat{n}^2 = -2k^2n_{co}^2\delta f' \cos(2\varphi)\hat{\sigma}_0 + (1 - \Delta f)k^2\Delta n^2 \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где  $\hat{\sigma}_i$  - матрицы Паули, малые параметры  $\Delta\hat{n}^2 \ll 1$  и  $\delta \ll 1$  характеризуют анизотропию и эллиптичность волокна, соответственно. В (2) подразумеваются полярные координаты. Представив поле в виде  $\vec{E}(x, y, z) = \vec{e}(x, y, z)\exp(i\beta z)$ , где  $\beta$  - постоянная распространения, получим матричное уравнение в базисе циркулярных поляризаций:

$$\left(\hat{H}_0 - 2k^2n_{co}^2\delta f' \cos(2\varphi)\hat{\sigma}_0 + (1 - \Delta f)k^2\Delta n^2 \begin{pmatrix} 0 & e^{i2\alpha} \\ e^{-i2\alpha} & 0 \end{pmatrix}\right)|\Psi\rangle = \beta^2|\Psi\rangle, \quad (3)$$

где  $\beta$  играет роль собственного значения,

$$\hat{H}_0 = (\vec{\nabla}_t^2 + k^2n^2(r))\hat{\sigma}_0, \quad \vec{\nabla}_t = (\partial/\partial x, \partial/\partial y), \quad |\Psi\rangle = \begin{pmatrix} e_+ \\ e_- \end{pmatrix}, \quad e_{\pm} = (e_x \mp e_y)/\sqrt{2}.$$

Решения уравнения (1) в нулевом приближении можно записать в виде [14]:

$$\begin{aligned} |1\rangle \equiv |1, l\rangle &= \begin{pmatrix} e^{il\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} F_l(R), \quad |2\rangle \equiv |1, -l\rangle = \begin{pmatrix} e^{-il\varphi} \\ 0 \end{pmatrix} F_l(R) \\ |3\rangle \equiv |-1, -l\rangle &= \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-il\varphi} \end{pmatrix} F_l(R), \quad |4\rangle \equiv |-1, l\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{il\varphi} \end{pmatrix} F_l(R), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $F_l(R)$  подчиняется уравнению:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + k^2 \bar{n}^2(R) \right) F_l(R) = \tilde{\beta}^2 F_l(R), \quad (5)$$

где  $R = r/r_0$ ,  $r_0$  - радиус сердцевины волокна. Определим скалярное произведение

как  $\langle \Phi | \Psi \rangle = \iint_S dx dy (\Phi_+^*, \Phi_-^*) \begin{pmatrix} \Psi_+^* \\ \Psi_-^* \end{pmatrix}$ . В результате усреднения оператора

возмущения по основному состоянию получим уравнение на моды:

$$\begin{pmatrix} 0 & D & 0 & E \\ D & 0 & E & 0 \\ 0 & E^* & 0 & D \\ E^* & 0 & D & 0 \end{pmatrix} |\Psi_i\rangle = \Delta\beta_i^2 |\Psi_i\rangle, \quad (6)$$

$$E = k^2 \Delta n^2 e^{2i\alpha}, \quad D = -\frac{\Delta \delta n_{co}^2 k^2 F_l^2(R=1)}{Q_l}, \quad Q_l = \int_0^\infty R F_l^2(R) dR. \quad \text{Решая это}$$

уравнение, можно получить поляризационные поправки к скалярной постоянной распространения:

$$\Delta\beta_1^2 = |E|(1-\kappa), \quad \Delta\beta_2^2 = |E|(\kappa-1), \quad \Delta\beta_3^2 = |E|(1+\kappa), \quad \Delta\beta_4^2 = -|E|(1+\kappa), \quad (7)$$

где  $\kappa = |D/E|$ . После элементарных алгебраических преобразований моды волокна приводятся в циркулярном базисе к следующему виду:

$$|\Psi_1\rangle = \begin{pmatrix} K \\ K \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_c e^{i\beta_1 z}, \quad |\Psi_2\rangle = \begin{pmatrix} -K \\ K \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_c e^{i\beta_2 z}, \quad |\Psi_3\rangle = \begin{pmatrix} -K \\ -K \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_c e^{i\beta_3 z}, \quad |\Psi_4\rangle = \begin{pmatrix} K \\ -K \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_c e^{i\beta_4 z}, \quad (8)$$

где  $\beta_i = \tilde{\beta}_i + \frac{\Delta\beta_i^2}{2\tilde{\beta}_i}$ ,  $K = e^{2i\alpha}$ . В линейном базисе моды будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \cos \varphi \begin{pmatrix} 1+K \\ i(K-1) \end{pmatrix}_L, & \vec{e}_2 &= \sin \varphi \begin{pmatrix} i(1-K) \\ 1+K \end{pmatrix}_L, \\ \vec{e}_3 &= \cos \varphi \begin{pmatrix} 1-K \\ -i(1+K) \end{pmatrix}_L, & \vec{e}_4 &= \sin \varphi \begin{pmatrix} i(1+K) \\ 1-K \end{pmatrix}_L. \end{aligned} \quad (9)$$

Как видно, эти поля имеют однородную поляризацию. Для вычисления азимута эллипса поляризации, степени эллиптичности и интенсивности мод необходимо вычислить параметры Стокса. После вычислений получим:  $I_1 \sim F_l^2(R) \cos^2 \varphi$  для  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_3$ ,  $I_2 \sim F_l^2(R) \sin^2 \varphi$  для  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_4$ . Угол линейной поляризации  $\vec{e}_1$  и  $\vec{e}_4$  составляет  $\theta = -\alpha$ , а для  $\vec{e}_2$  и  $\vec{e}_3$   $\theta = -\alpha + \pi/2$ , степень эллиптичности  $Q = 0$ . Минимум интенсивности направлен либо по  $E_y$  (рис.2а), либо по  $E_x$  (рис.2б).

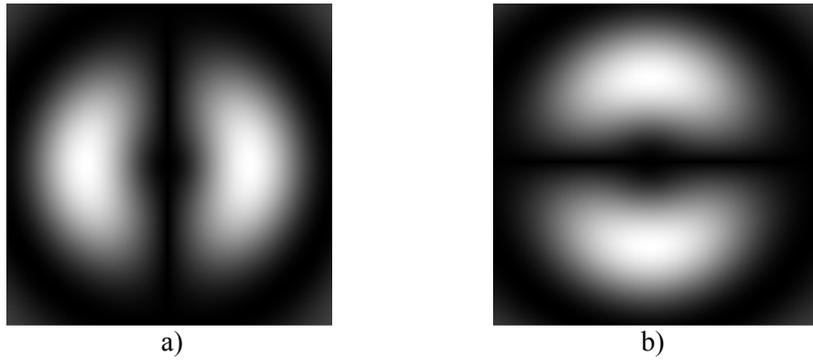


Рис.2. а) Распределение интенсивности  $I_1$ ; б) Распределение интенсивности  $I_2$

## 2. КОНВЕРСИЯ ОРБИТАЛЬНОГО УГЛОВОГО МОМЕНТА В АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВОЛОКНАХ

Изучим эволюцию углового момента произвольной комбинации оптических вихрей [14,15]  $|\Phi\rangle = a|1,1\rangle + b|1,-1\rangle + c|-1,-1\rangle + d|-1,1\rangle$ , падающей на входной торец волокна. Для этого разложим поле  $|\Phi\rangle$  по модам волокна при  $z=0$ :  $|\Phi\rangle = \sum_i \tilde{C}_i |\Psi_i\rangle$ . Это дает нам систему уравнений относительно неизвестных коэффициентов разложения  $\tilde{C}_i$ . При распространении в волокне поле  $|\Phi\rangle$  имеет вид:

$$|\Phi\rangle = \sum_i \tilde{C}_i |\Psi_i\rangle \exp(i\beta_i z). \quad (10)$$

Наиболее интересный случай – это волокно, состоящее из двух частей, имеющих различный угол между осью материальной анизотропии и главной осью эллипса (рис.3).

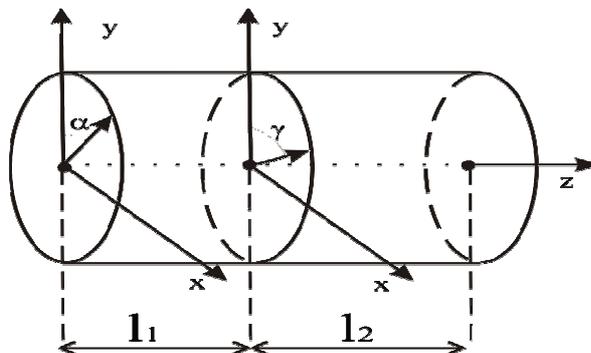


Рис.3. Модель волокна, состоящего из двух частей, имеющих различные углы наклона оси анизотропии и главной оси эллипса.

В результате разложения получим:

$$|\Phi\rangle = A \cos \varphi \begin{pmatrix} M \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\beta l_2} + iB \sin \varphi \begin{pmatrix} -M \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\beta l_2} + C \cos \varphi \begin{pmatrix} -M \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\beta l_2} + iG \sin \varphi \begin{pmatrix} M \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\beta l_2}, \quad (11)$$

где  $M = e^{2i\gamma}$ ,  $\gamma$  - угол между осью анизотропии и главной осью эллипса второго участка волокна,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(KM^*(C_1 - C_3) + C_1 + C_3), \quad B = \frac{1}{2}(KM^*(C_2 - C_4) + C_2 + C_4), \\ C &= \frac{1}{2}(-KM^*(C_1 - C_3) + C_1 + C_3), \quad G = \frac{1}{2}(-KM^*(C_2 - C_4) + C_2 + C_4), \\ C_1 &= \frac{1}{2}(K^*(a+b) + c + d)e^{i\beta l_1}, \quad C_2 = \frac{1}{2}(K^*(b-a) + d - a)e^{i\beta l_1}, \\ C_3 &= \frac{1}{2}(-K^*(a+b) + c + d)e^{i\beta l_1}, \quad C_4 = \frac{1}{2}(-K^*(b-a) + d - c)e^{i\beta l_1} \end{aligned}$$

$l_1$  и  $l_2$  - длины первой и второй частей волокна.

Вычислим теперь орбитальный момент поля  $|\Phi\rangle$ , используя формулы [16]:

$$L_z = \frac{\langle \Phi | \left( -i \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) | \Phi \rangle}{\langle \Phi | \Phi \rangle}. \quad (12)$$

Орбитальный угловой момент поля после прохождения первого участка волокна есть:

$$L_z = \frac{a^2 - b^2 + d^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \cos\left(\frac{\kappa|E|l_1}{\tilde{\beta}}\right), \quad (13)$$

Полагая  $a=1$ ,  $b=c=d=0$ , получим эволюцию орбитального момента циркулярно поляризованного оптического вихря:

$$L_z = \cos\left(\frac{\kappa|E|l_1}{\tilde{\beta}}\right), \quad (14)$$

что совпадает с результатом работы [12]. Аналогично можно получить орбитальный момент линейно поляризованного вихря, положив  $a=c=1$ ,  $b=d=0$ .

Орбитальный угловой момент поля  $|\Phi\rangle$  после прохождения двух частей волокна равен:

$$L_z = \frac{a^2 - b^2 + d^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \cos\left(\frac{\kappa|E|(l_1 + l_2)}{\tilde{\beta}}\right). \quad (15)$$

Полагая  $a=1$ ,  $b=c=d=0$ , получим эволюцию орбитального момента циркулярно поляризованного вихря:

$$L_z = \cos\left(\frac{\kappa|E|(l_1 + l_2)}{\tilde{\beta}}\right). \quad (16)$$

## ВЫВОДЫ

Таким образом, в данной работе была изучена конверсия орбитального углового момента оптического излучения в слабо направляющих оптических волокнах с произвольной взаимной ориентацией осей анизотропии формы и материала. Формулы (13), (15) позволяют сделать вывод, что при пренебрежении эффектом спин-орбитального взаимодействия ориентация оси анизотропии по отношению к главной оси эллипса не влияет на эволюцию орбитального углового момента поля.

## Список литературы

1. L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, and J.P. Woerdman The optical angular momentum of paraxial beams // Phys. Rev. A.-1992.-V.45, p.8185-8189.
2. M.W. Beijersbergen, L. Allen, H.E.L.O. van der Veen, J.P. Woerdman Astigmatic Laser Mode Converters and Transfer of Orbital Angular Momentum // Opt. Comm.- 1993.-V.96.p. 126-32
3. L. Allen, M.J. Padgett, M. Babiker The optical angular momentum of light // Progress in Optics -1999-.V.39,p. 291-372
4. L. Allen, S.M. Barnett, and M.J. Padgett Optical angular momentum. – Bristol: Institute of Physics Publishing, 2003
5. A. Bekshaev, M. Soskin, M. Vasnetsov Paraxial light beams with angular momentum // <http://arXiv.org/abs/0801.2309>.- 2008.
6. M.W. Beijersbergen, R.P.C. Coerwinkel, M. Kristensen, J.P. Woerdman Helical-wave-front laser-beams produced with a spiral phaseplate // Opt. Comm.- 1994.-V.112, p.321-327
7. N.R. Heckenberg, R. McDuff, C.P. Smith, A.G. White Generation of optical-phase singularities by computer-generated holograms // Opt.Lett.- 1992.-V.17,p. 221-223

8. E. Abramochkin, V. Volostnikov Beam transformations and nontransformed beams // Opt. Comm.- 1991.-V.83, p.123-135
9. J. Courtial, M.J. Padgett Performance of a cylindrical lens mode converter for producing Laguerre-Gaussian laser modes // Opt. Comm.- 1998.-V.159,p.13-18
10. McGloin, N.B. Simpson, M.J. Padgett Transfer of orbital angular momentum from a stressed fiber-optic waveguide to a light beam // Appl. Opt.- 1998.-V.37(3),p.469-472
11. A.V. Carpentier, H. Michinel, J.R. Salgueiro, S. Doval, A. Ferrando Inversion of a guided optical vortex // J. Eur. Opt. Soc.- Rap. Publ.- 2006.-V.1.-06031
12. C.N. Alexeyev, A. N. Alexeyev, B. P. Lapin, M. A. Yavorsky Optical angular momentum and mode conversion in optical fibers with competing form and material anisotropy // J.Opt.A: Pure Appl Opt.- 2008.- V.10.-055009.
13. A.W. Snyder, J.D. Love Optical Waveguide Theory. London, New York: Chapman and Hall, 1985
14. C.N. Alexeyev, A.V. Volyar, M.A. Yavorsky Fiber Optical Vortices: Lasers// Optics and Electro-Optics Research Trends. New York : ed. Lian I. Chen, Nova Publishers,2007.-p. 131-223
15. M.V. Vasnetsov, K. Staliunas Optical Vortices // New York: Nova Science Publishers, 1999.
16. M.V. Berry Paraxial beams of spinning light // Proc. SPIE.- 1998.-V.3487,p. 6-11

*Алексеев К.М., Лапін Б.П., Яворський М.А. Орбітальний кутовий момент та мода конверсія в оптичних волокнах з довільною орієнтацією вісей матеріальної анізотропії матеріала та форми // Учені записки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського. - 2008. - Серія «Фізика». - Т. 21 (60). - № 1. - С. 27-33.*

Були винайдені моди анізотропного еліптичного волокна з довільною орієнтацією вісей матеріальної анізотропії та форми, підрахован кутовим момент довільної комбінації  $l = 1$  вихорів

**Ключові слова:** кутовий момент, оптичний вихор

*Alexeyev C.N., Lapin B.P., Yavorsky M.A. Orbital angular momentum and mode conversion in optical fibers with arbitrary orientation of form and material anisotropy axes // Uchenye zapiski Tavricheskogo Natsionalnogo Universiteta im. V.I. Vernadskogo. – 2008. – Series «Fizika». – V. 21 (60). - № 1. – P. 27-33.*  
It has been found the modes of elliptical anisotropic fibers at an arbitrary orientation of form and material anisotropy axes. It has been obtained the evolution of the orbital angular momentum of a superposition of an arbitrary superposition of  $l=1$  optical vortices.

**Key words:** angular momentum, optical vortex

*Поступила в редакцію 10.11.2008 г.*