Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 36–52.

О. А. Дудик

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ МАЛЫХ ДВИЖЕНИЙ И НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАЯТНИКА С ПОЛОСТЬЮ, ЗАПОЛНЕННОЙ СИСТЕМОЙ ИЗ КАПИЛЛЯРНЫХ ВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

В работе рассматривается задача о малых движениях и нормальных колебаниях маятника с полостью, заполненной системой из капиллярных вязких жидкостей. Доказана сильная разрешимость исследуемой гидросистемы. Приведена асимптотика собственных значений и доказана теорема о базисности Абеля–Лидского системы корневых элементов. Доказано также обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

В работе рассматривается пространственная задача о малых движениях и нормальных колебаниях тела с полостью, заполненной системой из капиллярных вязких жидкостей. Доказана сильная разрешимость исследуемой начально–краевой задачи. Приведена асимптотика собственных значений и доказана теорема о базисности Абеля–Лидского системы собственных и присоединенных элементов. Получено также обращение теоремы Лагранжа об устойчивости.

1. Постановка задачи. Закон баланса полной энергии системы

Будем считать, что пространственный маятник с полостью, заполненной системой из $m+1$ капиллярных вязких жидкостей, совершает малые движения относительно неподвижной точки O, являющейся точкой подвеса. Наряду с неподвижной системой координат $Oy_1y_2y_3$ введем подвижную систему $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с телом и расположенную так, что ось Ox_3 проходит через центр масс C в состоянии покоя.

Учитывая действие однородного гравитационного поля $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, малого момента внешних сил $\vec{M}(t)$ и малого внешнего поля массовых сил $\vec{f}_k(t,x)$, а также используя введенные в [1], [2] обозначения, сформулируем полную математическую постановку исследуемой задачи:

$$\rho_k\frac{\partial\vec{u}_k}{\partial t}+\rho_k\left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}\right)+\nabla p_k=\nu\rho_k^0\triangle\vec{u}_k+\rho_k\vec{f}_k,\quad \operatorname{div}\vec{u}_k=0\quad (\text{в } \Omega_k;\ k=\overline{1,m+1}),\ (1)$$

$$\vec{u}_k=\vec{0}\quad (\text{на } S_k;\ k=\overline{1,m+1}),\quad \vec{u}_{j+1}=\vec{u}_j\quad (\text{на } \Gamma_j;\ j=\overline{1,m}),\qquad (2)$$

$$p_j-p_{j+1}+2\nu\left(\rho_j^0u_{3,3}^j-\rho_{j+1}^0u_{3,3}^{j+1}\right)=-\mathcal{L}_j\zeta_j-(\rho_j-\rho_{j+1})\,g\left[\left(P_2\vec{\delta}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e}_3\right]:=$$
$$:=\sigma_j\triangle_{\Gamma_j}\zeta_j-\sigma_j\left((k_j^1)^2+(k_j^2)^2\right)\zeta_j+(\rho_j-\rho_{j+1})\,g\cos\widehat{(\vec{n}_j,\vec{e}_3)}\,\zeta_j-\qquad (3)$$
$$-(\rho_j-\rho_{j+1})\,g\left[\left(P_2\vec{\delta}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e}_3\right]\quad (\text{на } \Gamma_j;\ j=\overline{1,m}),$$

$$\frac{\partial\zeta_j}{\partial t}=u_n^j:=\vec{u}_j\cdot\vec{n}_j=\vec{u}_{j+1}\cdot\vec{n}_j\quad (\text{на } \Gamma_j;\ j=\overline{1,m}),\qquad (4)$$

$$\int\limits_{\Gamma_j}\zeta_j d\Gamma_j=0,\quad \zeta_j=0\quad (\text{на } \partial\Gamma_j;\ j=\overline{1,m}),\qquad (5)$$

$$\nu\rho_j^0\left(u_{i,3}^j+u_{3,i}^j\right)-\nu\rho_{j+1}^0\left(u_{i,3}^{j+1}+u_{3,i}^{j+1}\right)=0\quad (\text{на } \Gamma_j;\ j=\overline{1,m};\ i=1,2),\qquad (6)$$

$$\sum_{k=1}^{m+1}\rho_k\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega_k}(\vec{r}\times\vec{u_k})d\Omega_k+\vec{J}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}-$$
$$-g\sum_{j=1}^{m}(\rho_j-\rho_{j+1})\int\limits_{\Gamma_j}(\vec{e_3}\times\vec{r})\zeta_j d\Gamma_j=\vec{M}(t),\qquad (7)$$

$$\frac{dP_2\vec{\delta}}{dt}=P_2\vec{\omega},\quad \frac{d}{dt}\delta_3=\omega_3,\qquad (8)$$

$$\vec{u}_k(0,x)=\vec{u}_k{}^0(x)\quad (x\in\Omega_k;\ k=\overline{1,m+1}),\quad \zeta_j(0,\xi)=\zeta_j^0(\xi)\quad (\xi\in\Gamma_j;\ j=\overline{1,m}),\qquad (9)$$

$$\vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0,\quad \vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^0,\quad \vec{u}_j^0=\vec{u}_{j+1}^0\quad (\text{на } \Gamma_j;\ j=\overline{1,m}).\qquad (10)$$

Здесь ρ_k — плотность жидкости, занимаемой область Ω_k, $k=\overline{1,m+1}$; ρ_k^0 — фиксированная величина размерности плотности; $\nu>0$ — средняя кинематическая вязкость системы; $\vec{u}_k(t,x)$ — поля скоростей жидкостей, $p_k(t,x)$ — динамические давления, $u_{i,k}^j$ — ковариантная производная вектора u_i^j по переменной ξ^k; $\sigma_j>0$ — коэффициент поверхностного натяжения на границе двух соседних жидкостей; k_j^1, k_j^2 — главные кривизны равновесной поверхности Γ_j ($j=\overline{1,m}$); $P_2\vec{\delta}=\sum\limits_{k=1}^{2}\delta_k\vec{e}_k$ — проекция вектора $\vec{\delta}$ на плоскость Ox_1x_2 ($\vec{\delta}=P_2\vec{\delta}+\vec{\delta}_3$, $\vec{\delta}_3=\delta_3\vec{e}_3$); $\vec{r}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+x_3\vec{e}_3$ — радиус–вектор точки области Ω_k, $S=\bigcup\limits_{k=1}^{m+1}S_k$ — твердая стенка сосуда Ω; $\zeta_j(t,\xi)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)\in\Gamma_j$, — функции, заданные на Γ_j и определяющие отклонения вдоль нормалей $\vec{n}_j$ к Γ_j возмущенных движущихся поверхностей $\Gamma_j(t)$ от невозмущенных поверхностей Γ_j; $\quad m := m_{\text{т}} + \sum\limits_{k=1}^{m+1}(m_{\text{ж}})_k$ — масса всей системы, равная сумме массы тела $m_{\text{т}}$ и массы всех жидкостей $\sum\limits_{k=1}^{m+1}(m_{\text{ж}})_k$, $(m_{\text{ж}})_k = \rho_k\,|\Omega_k|$; $\vec{J} := \vec{J}_{\text{т}} + \sum\limits_{k=1}^{m+1}(\vec{J}_{\text{ж}})_k > 0$ — тензор инерции тела $\vec{J}_{\text{т}}$ и тензор инерции жидкостей $(\vec{J}_{\text{ж}})_k \quad (k=\overline{1,m+1})$, $\quad \vec{\omega} = \sum\limits_{i=1}^{3}\omega_i\vec{e}_i$ — вектор угловой скорости всей системы.

Таким образом, задача о малых движениях маятника с полостью, заполненной системой из капиллярных вязких жидкостей, состоит в решении уравнений Навье–Стокса (1), уравнения момента количества движения (7) при краевых условиях (2)–(6), а также кинематических связей (8) и начальных условиях (9), (10).

Прежде чем исследовать задачу (1)–(10), установим закон баланса полной энергии для ее классического решения. С этой целью умножим обе части уравнения (7) на $\vec{\omega}$ (скалярно в $\mathbb{R}^3$), а обе части (1) на $\vec{u}_k$ и проинтегрируем по Ω_k, приходим к закону баланса полной энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=k}^{m+1}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}|\vec{u}_k|^2 d\Omega_k + 2\sum_{i=k}^{m+1}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}(\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{u}_k d\Omega_k + \vec{J}|\vec{\omega}|^2\right\} +$$
$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\sum_{j=1}^{m}\int\limits_{\Gamma_j}\left[\sigma_j|\nabla_{\Gamma_j}\zeta_j|^2 + a_{\Gamma_j}|\zeta_j|^2\right]d\Gamma_j + mgl|P_2\vec{\delta}|^2 + \right.$$
$$\left. +2g\sum_{j=1}^{m}(\rho_j-\rho_{j+1})\int\limits_{\Gamma_j}\left[(P_2\vec{\delta}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]\zeta_j d\Gamma_j\right\} = \tag{11}$$
$$= \sum_{i=k}^{m+1}\rho_k\int\limits_{\Omega_k}\vec{f}_k\cdot\vec{u}_k d\Omega_k + \vec{M}(t)\cdot\vec{\omega} - \left[\sum_{i=k}^{m+1}\mu_k E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k) + \alpha|\vec{\omega}|^2\right],$$

где билинейный функционал

$$\widehat{E}\left(\widehat{u},\widehat{v}\right) := \sum_{k=1}^{m}\mu_k E_k\left(\vec{u}_k,\vec{v}_k\right), \tag{12}$$

$$E_k(\vec{u}_k,\vec{u}_k) := \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_k}\sum_{q,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_q^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_q}\right)^2 d\Omega_k. \tag{13}$$

В (11) первое слагаемое слева в фигурных скобках есть удвоенная кинетическая энергия системы, а слагаемое во вторых скобках — ее потенциальная энергия.

Справа стоит выражение, равное мощности внешних сил, действующих на систему, и скорости диссипации энергии за счет вязкости жидкости и трения в шарнире.

2. Переход к задаче Коши для системы дифференциально–операторных уравнений

Исследование задачи (1)–(10) будем проводить методами функционального анализа, в частности, методами теории дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве, теории полугрупп операторов.

Будем считать, что наборы векторных полей скоростей жидкостей $\widehat{u} = \{\vec{u}_k(t,x)\}_{k=1}^{m+1}$ при каждом t являются элементами гильбертова пространства $\widehat{L}_2(\Omega)$, ортогональное разложение которого аналогично разложению пространства вектор–функций $\vec{L}_2(\Omega)$ (см. [3], с. 106):

$$\widehat{L}_2(\Omega) := \widehat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{14}$$

$$\widehat{J}_{0,S}(\Omega) := \Big\{ \widehat{v} \in \widehat{L}_2(\Omega) : \quad \operatorname{div} \vec{v}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k),$$
$$\vec{v}_k \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S_k), \quad \vec{v}_j \cdot \vec{n}_j = \vec{v}_{j+1} \cdot \vec{n}_j \quad (\text{на } \Gamma_j) \} , \tag{15}$$

$$\widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega) := \Big\{ \widehat{w} = \{\vec{w}_k\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{L}_2(\Omega) : \quad \vec{w}_k = \nabla \varphi_k \quad (\text{в } \Omega_k),$$
$$k = \overline{1, m+1}, \quad \rho_j\, \varphi_j - \rho_{j+1}\, \varphi_{j+1} = 0 \quad (\text{на } \Gamma_j), \quad j = \overline{1, m} \Big\} . \tag{16}$$

При исследовании проблемы малых движений рассматриваемой гидромеханической системы нам понадобится плотное в $\widehat{J}_{0,S}(\Omega)$ пространство

$$\widehat{J}^1_{0,S}(\Omega) := \Big\{ \widehat{u} = \{\vec{u}_k(x)\}_{k=1}^{m+1} : \quad \operatorname{div} \vec{u}_k = 0 \quad (\text{в } \Omega_k), \quad \vec{u}_k = \vec{0} \quad (\text{на } S_k),$$
$$E_k\left(\vec{u}_k, \vec{v}_k\right) < \infty \quad (k = \overline{1, m+1}), \quad \vec{u}_j = \vec{u}_{j+1} \quad (\text{на } \Gamma_j;\ j = \overline{1, m}) \Big\} \tag{17}$$

со скалярным произведением

$$(\widehat{u}, \widehat{v})_{\widehat{J}^1_{0,S}(\Omega)} := \sum_{k=1}^{m+1} \mu_k E_k\left(\vec{u}_k, \vec{v}_k\right). \tag{18}$$

Далее, введем ортопроекторы $\theta_j : L_2(\Gamma_j) \to L_{2,\Gamma_j}$ $\big(L_{2,\Gamma_j} := \{\varphi_j \in L_2(\Gamma_j) : (\varphi_j, 1_{\Gamma_j})_0 = 0\}\big)$ и операторы $B_j := \theta_j \mathcal{L}_j \theta_j$, $\mathcal{D}(B_j) = H^2(\Gamma_j) \cap H^1_0(\Gamma_j) \cap L_{2,\Gamma_j}$. С учетом соотношения

$$p_j - p_{j+1} = \varphi_j - \varphi_{j+1} \quad (\text{на } \Gamma_j), \quad \int\limits_{\Gamma_j} (p_j - p_{j+1})\, d\Gamma_j = 0 \quad (j = \overline{1, m}), \tag{19}$$

преобразуем группу динамических условий (3):

$$\varphi_j - \varphi_{j+1} + 2\nu \left[\rho^0_j u^j_{3,3} - \rho^0_{j+1} u^{j+1}_{3,3} \right] = -B_j \zeta_j - (\rho_j - \rho_{j+1}) g \theta_j \left[(P_2 \vec{\delta} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3 \right] \quad (\text{на } \Gamma_j). \tag{20}$$

Будем считать, как и в [2], что наборы функций $\widehat{u} := \{\vec{u}_k(t,x)\}_{k=1}^{m+1}$, $\widehat{\nabla_\rho p} = \widehat{\nabla_\rho p}(t,x) = \left\{\rho_k^{-1} \nabla p_k\right\}_{k=1}^{m+1}$, т.е. решения задачи (1)–(10), при каждом t являются элементами гильбертова пространства (14). Тогда уравнения (1) можно записать в виде одного уравнения в гильбертовом пространстве $\widehat{L}_2(\Omega)$:

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t} + \widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} = -\widehat{\nabla_\rho p} + \nu \left(\widehat{\triangle u}\right) + \widehat{f}, \tag{21}$$

где

$$\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} := \left\{ \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}\bigg|_{\Omega_k} \right\}_{k=1}^{m+1}, \quad \nu \left(\widehat{\triangle u}\right) := \nu \left\{ \frac{\rho_k^0}{\rho_k} \, \vec{u}_k \right\}_{k=1}^{m+1}, \tag{22}$$

$$\widehat{f} := \left\{ \vec{f}_k(t,\, x) \right\}_{k=1}^{m+1}, \qquad \widehat{\nabla_\rho p} := \left\{ \rho_k^{-1} \, \nabla p_k(t,x) \right\}_{k=1}^{m+1}. \tag{23}$$

Далее предполагаем, что все слагаемые в (21) являются функциями переменной t со значениями в гильбертовом пространстве $\widehat{L}_2(\Omega)$.

Как следует из уравнений и граничных условий проблемы (1)–(10), а также определений подпространств (15), (16), для ее решений выполнены свойства

$$\widehat{u}(t,x) \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{\nabla_\rho p} \in \widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega) \oplus \widehat{G}_{h,S}(\Omega) =: \widehat{G}(\Omega), \tag{24}$$

где

$$\widehat{G}_{h,S}(\Omega) = \{ \widehat{v} = \{ \vec{v}_k(x) \}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{L}_2(\Omega) : \; \vec{v}_k = \nabla \varphi_k, \; \Delta \varphi_k = 0 \; (\Omega_k), \; k = \overline{1, m+1},$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial n} = 0 \; (S_k), \; \frac{\partial \varphi_j}{\partial n_j} = \frac{\partial \varphi_{j+1}}{\partial n_j} \; (\Gamma_j), \; \int\limits_{\Gamma_j} (\rho_j \varphi_j - \rho_{j+1} \varphi_j) d\Gamma_j = 0, \; \int\limits_{\Gamma_m} \rho_{m+1} \varphi_{m+1} d\Gamma_j = 0 \}. \tag{25}$$

Представим потенциальное поле $\widehat{\nabla_\rho p}$ в виде

$$\widehat{\nabla_\rho p} = \widehat{\nabla_\rho \varkappa} + \widehat{\nabla_\rho \varphi}, \qquad \widehat{\nabla_\rho \varkappa} = \left\{ \frac{1}{\rho_k} \, \nabla \varkappa_k(t,x) \right\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{26}$$

$$\widehat{\nabla_\rho \varphi} = \left\{ \frac{1}{\rho_k} \, \nabla \varphi_k(t,x) \right\}_{k=1}^{m+1} \in \widehat{G}_{h,S}(\Omega), \tag{27}$$

и введем ортопроекторы $\widehat{P}_{0,S}$ и $\widehat{P}_{0,\Gamma}$ на подпространства $\widehat{J}_{0,S}(\Omega)$ и $\widehat{G}_{0,\Gamma}(\Omega)$ соответственно (см. (14)–(16)). В результате действия этими ортопроекторами на обе части уравнения (21) имеем:

$$\frac{d\widehat{u}}{dt} + \widehat{P}_{0,S} \left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} \right) = -\widehat{\nabla_\rho \varphi} + \nu \widehat{P}_{0,S} \left(\widehat{\triangle u}\right) + \widehat{P}_{0,S} \widehat{f}, \tag{28}$$

$$\widehat{P}_{0,\Gamma} \left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}} \right) = -\widehat{\nabla_\rho \varkappa} + \nu \widehat{P}_{0,\Gamma} \left(\widehat{\triangle u}\right) + \widehat{P}_{0,\Gamma} \widehat{f}. \tag{29}$$

Отсюда следует, что если поля $\widehat{u}$, $\widehat{f}$ и вектор $\vec{\omega}$ известны, то поле $\widehat{\nabla_\rho \varkappa}$ находится непосредственно из (29); в то же время это поле не входит в (28), а также в условия (20). Поэтому в дальнейшем рассматриваем начально–краевую задачу (7), (28), (20), (2), (4)–(10).

Воспользуемся теперь методом вспомогательных задач С.Г. Крейна (см., например, [3], с. 277–280). Представим решение исследуемой задачи в виде

$$\widehat{u} = \widehat{v} + \widehat{w}, \tag{30}$$

где функция $\widehat{v} = \{\vec{v}_k\}_{k=1}^{m+1} = \nu^{-1}\widehat{A}^{-1}\widehat{f}_u$, $\widehat{f}_u := -d\widehat{u}/dt - \widehat{P}_{0,S}\left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}\right) + \widehat{P}_{0,S}\widehat{f}$, и функция $\widehat{w} = \{\vec{w}_k\}_{k=1}^{m+1} = \nu^{-1}\widehat{V}\widehat{\psi}$, $\widehat{\psi} := \left\{-B_j\zeta_j - (\rho_j - \rho_{j+1})g\theta_j\left[(P_2\vec{\delta} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3\right]\right\}_{k=1}^{m+1}$, являются решениями первой и второй вспомогательных задач С.Г. Крейна соответственно.

Отметим, что оператор $\widehat{V}$ второй вспомогательной задачи С.Г. Крейна ограниченно действует из $\left(\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) \cap \widehat{L}_{2,\Gamma}\right)^* =: \left(\widehat{H}_\Gamma^{1/2}\right)^* = \widehat{H}_\Gamma^{-1/2}$ в $\widehat{M}_1(\Omega) \subset \widehat{J}_{0,S}^1(\Omega)$.

Отметим также, что оператор $\widehat{A}$ первой вспомогательной задачи С.Г. Крейна является оператором гильбертовой пары пространств $\left(\widehat{J}_{0,S}^1(\Omega); \widehat{J}_{0,S}(\Omega)\right)$; при этом $0 < \widehat{A}^{-1}$ — компактный оператор, а собственные значения $\left\{\lambda_k(\widehat{A})\right\}_{k=1}^{\infty}$ положительны и имеют асимптотическое поведение

$$\lambda_k(\widehat{A}) = c_{\widehat{A}}^{-2/3}k^{2/3}[1 + o(1)] \quad (k \to \infty), \quad c_{\widehat{A}} := \frac{1}{3\pi^2}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\frac{\rho_\alpha^0}{\rho_\alpha}|\Omega_\alpha| > 0. \tag{31}$$

Введем в пространстве $\widehat{J}_{0,S}^1(\Omega)$ его подпространство

$$\widehat{N}_1(\Omega) := \left\{\widehat{v} \in \widehat{J}_{0,S}^1(\Omega) : \quad \widehat{\gamma}_n\widehat{v} = \left\{(\vec{v}_j \cdot \vec{n}_j)_{\Gamma_j}\right\}_{j=1}^m = 0\right\}, \tag{32}$$

а также ортогональное дополнение $\widehat{M}_1(\Omega)$:

$$\widehat{J}_{0,S}^1(\Omega) = \mathcal{D}(\widehat{A}^{1/2}) = \widehat{N}_1(\Omega) \oplus \widehat{M}_1(\Omega),\ \dim \widehat{N}_1(\Omega) = \infty. \tag{33}$$

Опираясь на (33), введем ортогональное разложение

$$\widehat{J}_{0,S}(\Omega) = \widehat{A}^{1/2}\widehat{J}_{0,S}^1(\Omega) = \widehat{N}_0(\Omega) \oplus \widehat{M}_0(\Omega) := \widehat{A}^{1/2}\widehat{N}_1(\Omega) \oplus \widehat{A}^{1/2}\widehat{M}_1(\Omega). \tag{34}$$

Далее введем обозначения:

$$\widehat{\rho} := \operatorname{diag}\left(\rho_k\, I_k\right)_{k=1}^{m+1}, \quad \widehat{\triangle\rho} := \operatorname{diag}\left((\rho_j - \rho_{j+1})\, I_j\right)_{j=1}^m,$$

$$\widehat{\zeta} := \{\zeta_j(t)\}_{j=1}^m \in \widehat{L}_{2,\Gamma} := \oplus_{j=1}^m L_{2,\Gamma_j}, \quad \widehat{\theta} := \operatorname{diag}\{\theta_j\}_{j=1}^m, \quad \widehat{B}_\sigma := \operatorname{diag}\{B_j\}_{j=1}^m.$$

Тогда взамен задачи (7), (28), (20), (2), (4)–(10) возникает задача Коши для следующей системы дифференциально–операторных уравнений:

$$\frac{d\widehat{v}}{dt} + \frac{d\widehat{w}}{dt} + \widehat{P}_{0,S}\left(\widehat{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}}\right) + \nu\widehat{A}\widehat{v} = \widehat{P}_{0,S}\widehat{f}, \tag{35}$$

$$\frac{d\widehat{w}}{dt} + \frac{1}{\nu}\widehat{V}\widehat{B}_\sigma\widehat{\gamma}_n(\widehat{v} + \widehat{w}) + \frac{g}{\nu}\widehat{\triangle\rho}\widehat{V}\widehat{\theta}\left[(P_2\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3\right] = \vec{0}, \tag{36}$$

$$\widehat{\rho}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}[\vec{r}\times(\widehat{v}+\widehat{\omega})]\,d\Omega+\vec{J}\frac{d\vec{\omega}}{dt}+\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}-g\widehat{\triangle\rho}\int\limits_{\Gamma}(\vec{e_3}\times\vec{r})\widehat{\zeta}d\Gamma=\vec{M}(t), \quad (37)$$

$$\frac{d\widehat{\zeta}}{dt}-\widehat{\gamma}_n\,(\widehat{v}+\widehat{w})=0, \quad \frac{dP_2\vec{\delta}}{dt}=P_2\vec{\omega}, \quad \frac{d}{dt}\delta_3=\omega_3, \quad (38)$$

$$\widehat{w}(0)=\widehat{w}^0, \quad \widehat{v}(0)=\widehat{v}^0, \quad \widehat{\zeta}(0)=\widehat{\zeta}^0, \quad \vec{\delta}(0)=\vec{\delta}^0, \quad \vec{\omega}(0)=\vec{\omega}^0. \quad (39)$$

3. Теорема о сильной разрешимости

Введем в рассмотрение следующие операторы

$$\widehat{Q}:=\widehat{\gamma}_n\widehat{A}^{-1/2}:\,\widehat{J}_{0,S}(\Omega)\to\widehat{H}_{\Gamma}^{1/2},\ \widehat{Q}^*:=\widehat{A}^{1/2}\widehat{V}:\,\widehat{H}_{\Gamma}^{-1/2}\to\widehat{M_0}(\Omega)\subset\widehat{J}_{0,S}(\Omega), \quad (40)$$

а также неограниченный положительно определенный оператор

$$\widehat{B}:=\widehat{Q}^*\widehat{B}_{\sigma}Q\mid_{\widehat{M_0}(\Omega)}, \quad \mathcal{D}(\widehat{B})=\mathcal{R}(\widehat{B}^{-1})\subset\widehat{M_0}(\Omega), \quad \mathcal{R}(\widehat{B})=\widehat{M_0}(\Omega). \quad (41)$$

Отметим, что оператор $\widehat{B}$ имеет дискретный спектр и его собственные значения $\Big\{\lambda_k(\widehat{B})\Big\}_{k=1}^{\infty}$ имеют степенную асимптотику (см. [4]):

$$\lambda_k(\widehat{B})=\left(\sum_{j=1}^{m}\sigma_j\frac{|\Gamma_j|}{\pi}\right)^{-1/2}k^{1/2}[1+o(1)] \quad (k\to\infty). \quad (42)$$

Известно, что операторы $\widehat{Q}$ и $\widehat{Q}^*$ взаимно сопряжены и компактны (см., например, [3], с. 282), оператор $\widehat{B}_{\sigma}$ положительно определен в $\widehat{L}_{2,\Gamma}$, а оператор $\widehat{B}_1:=\widehat{A}^{-1/2}\widehat{B}\widehat{A}^{1/2}:\ \widehat{M_1}(\Omega)\to\widehat{M_1}(\Omega)$ “подобен” оператору $\widehat{B}$.

Введем также ортопроектор $\widehat{P}:\ \widehat{J}_{0,\,S}(\Omega)\to\widehat{M_0}(\Omega)$ и операторы

$$\widehat{R}:=\widehat{B}^{1/2}\widehat{P}\widehat{A}^{-1/2}:\ \widehat{J}_{0,\,S}(\Omega)\to\widehat{M_0}(\Omega),\ \widehat{R}^+:=\widehat{A}^{-1/2}\widehat{P}\widehat{B}^{1/2}:\ \mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2})\to\widehat{M_1}(\Omega). \quad (43)$$

Операторы $\widehat{R}$ и $\widehat{R}^+$ обладают свойствами (см. [4]):

$$\widehat{R}\in\mathfrak{S}_{\infty}(\widehat{J}_{0,\,S}(\Omega);\,\widehat{M_0}(\Omega)), \quad \widehat{R}^+=\widehat{R}^*\mid\mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2}), \quad \overline{\widehat{R}^+}=\widehat{R}^*. \quad (44)$$

С помощью введенных операторов осуществим в задаче (35)–(39) следующие формальные преобразования, позволяющие перейти от нее к задаче Коши для абстрактного параболического уравнения. Осуществим в этой задаче замену

$$\widehat{w}=\nu^{-1}\widehat{R}^+\widehat{z}, \quad \widehat{z}\in\mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2})\subset\widehat{M_0}(\Omega), \quad (45)$$

и учтем соотношение

$$\frac{d}{dt}\left(\widehat{R}^+\widehat{z}\right)=\widehat{R}^*\frac{d\widehat{z}}{dt}. \quad (46)$$

В итоге приходим вместо (35)–(39) к системе уравнений и начальных условий, которые для искомого объекта

$$x=(\widehat{v};\widehat{z};\vec{\omega};\widehat{\zeta};P_2\vec{\delta})^t\in\widehat{J}_{0,\,S}(\Omega)\oplus\widehat{M_0}(\Omega)\oplus\mathbb{C}^3\oplus\widehat{L}_{2,\Gamma}\oplus\mathbb{C}^2=:\widehat{\mathcal{H}} \quad (47)$$

можно представить в виде задачи Коши

$$\widetilde{A}\frac{dx}{dt} + \widetilde{B}x = \tilde{f}(t), \quad x(0) = x^0, \quad \tilde{f}(t) := \left(\widehat{P}_{0,S}\widehat{f}; \widehat{0}; \vec{M}(t); 0; \vec{0}\right)^t, \tag{48}$$

$$\widetilde{A}x = \begin{pmatrix} \widehat{v} + \nu^{-1}\widehat{R}^*\widehat{z} + \widehat{P}_{0,S}(\vec{\omega}\times\vec{r}) \\ \widehat{z} \\ \widehat{\rho}\int\limits_{\Omega}\vec{r}\times\left(\widehat{v} + \nu^{-1}\widehat{R}^*\widehat{z}\right)d\Omega + \vec{J}\vec{\omega} \\ \widehat{\zeta} \\ P_2\vec{\delta} \end{pmatrix}, \tag{49}$$

$$\widetilde{B}x = \begin{pmatrix} \nu\widehat{A}\widehat{v} \\ \widehat{B}^{1/2}\widehat{A}^{1/2}\left(\widehat{v} + \nu^{-1}\widehat{A}^{-1/2}\widehat{B}^{1/2}\widehat{z}\right) + g\widehat{\rho}\widehat{B}^{-1/2}\widehat{P}\widehat{Q}^*\left[\widehat{\theta}\left(P_2\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\cdot\vec{e}_3\right] \\ \alpha\vec{\omega} + mglP_2\vec{\delta} - g\widehat{\rho}\int\limits_{\Gamma}(\vec{e}_3\times\vec{r})\widehat{\zeta}d\Gamma \\ -\widehat{\gamma}_n\left(\widehat{v} + \nu^{-1}\widehat{R}^{+}\widehat{z}\right) \\ -P_2\vec{\omega} \end{pmatrix}. \tag{50}$$

Приведем теперь свойства операторных коэффициентов $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ задачи (48).

Лемма 1. *Оператор $\widetilde{A}$ является обратимым и*

$$\widetilde{A} = A_0 + R_1, \quad A_0 = \mathrm{diag}(\widehat{I};\, \widehat{I};\, \vec{J};\, \widehat{I};\, I) \gg 0, \quad R_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}). \tag{51}$$

Доказательство. Оно проводится по схеме, изложенной в работе [1]. В самом деле, достаточно рассмотреть следующую однородную систему уравнений:

$$\begin{cases} \widehat{A}_{11}\,\widehat{v} + \widehat{A}_{12}\,\widehat{z} + A_{13}\vec{\omega} = \vec{0}, \\ \widehat{A}_{22}\,\widehat{z} = \vec{0}, \\ \widehat{A}_{31}\widehat{v} + \widehat{A}_{32}\,\widehat{z} + A_{33}\,\vec{\omega} = \vec{0}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \widehat{v} + \nu^{-1}\,R^*\,\widehat{z} + \widehat{A}_{13}\vec{\omega} = \vec{0}, \\ \widehat{z} = \vec{0}, \\ \widehat{A}_{31}\widehat{v} + \nu^{-1}\,\widehat{A}_{31}\,R^{+}\,\widehat{z} + \vec{J}\,\vec{\omega} = \vec{0}. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\begin{cases} \widehat{z} = \vec{0}, \\ \widehat{v} + \widehat{A}_{13}\vec{\omega} = \vec{0}, \\ \widehat{A}_{31}\widehat{v} + \vec{J}\,\vec{\omega} = \vec{0}. \end{cases} \tag{52}$$

Как было доказано в [1], получаем, что оператор $\begin{pmatrix} \widehat{A}_{11} & A_{13} \\ \widehat{A}_{31} & A_{33} \end{pmatrix}$ положителен в $\widehat{J}_{0,\,S}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3$. Далее, согласно определению (49), для оператора $\widetilde{A}$ следуют утверждения леммы. $\square$

Лемма 2. *Оператор $\widetilde{B}$ можно представить в виде:*

$$\widetilde{B} = (I + R_2)\,\widetilde{B}_0 + \widetilde{B}_1,\ \widetilde{B}_0 = \mathrm{diag}(\nu\widehat{A}; \nu^{-1}\widehat{B}; \alpha; \widehat{I}; I),\ \widetilde{B}_1 \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}}),\ R_2 \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}). \tag{53}$$

Доказательство. Оно проводится аналогично доказательству соответствующей леммы для случая, когда плоский маятник заполнен одной капиллярной вязкой жидкостью (см. [1]).

В самом деле, оператор $\widetilde{B}$ можно представить в виде суммы $\widetilde{B} = \widetilde{B}_1 + \widetilde{B}_2$, где

$$\widetilde{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g\widehat{\Delta\rho}\widehat{B}^{-1/2}\widehat{Q}^*[\widehat{\theta}((...) \times \vec{r}) \cdot \vec{e}_3] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -g\widehat{\Delta\rho}\int\limits_{\Gamma}(\vec{e}_3 \times \vec{r})(\ldots)d\Gamma & mgl \\ 0 & 0 & 0 & -\widehat{I} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -I \end{pmatrix} \tag{54}$$

является ограниченным оператором, а оператор

$$\widetilde{B}_2 = \begin{pmatrix} \nu\,\widehat{A} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \widehat{R}\widehat{A} & \nu^{-1}\,\widehat{B} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 & 0 \\ -\widehat{\gamma}_n & -\nu^{-1}\,\widehat{\gamma}_n R^+ & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\widetilde{B}_2) = \mathcal{D}(\widehat{A}) \oplus \mathcal{D}(\widehat{B}) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \widehat{L}_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2. \tag{55}$$

Далее, оператор $\widetilde{B}_2$ представим в виде:

$$\widetilde{B}_2 = (I + R_2)\widetilde{B}_0, \tag{56}$$

где

$$\widetilde{B}_0 = \operatorname{diag}(\nu\,\widehat{A};\, \nu^{-1}\,\widehat{B};\, \alpha;\, \widehat{I};\, I), \quad \mathcal{D}(\widetilde{B}_0) = \mathcal{D}(\widehat{A}) \oplus \mathcal{D}(\widehat{B}) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \widehat{L}_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2, \tag{57}$$

и

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu^{-1}\,\widehat{R} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu^{-1}\,\widehat{Q}\widehat{A}^{-1/2} & \widehat{Q}\widehat{B}^{-1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{58}$$

является компактным оператором. $\square$

С учетом лемм 1 и 2 задача (48) принимает вид

$$(A_0 + R_1)\,\frac{dx}{dt} + (I + R_2)\widetilde{B}_0 x + \widetilde{B}_1 x = \tilde{f}(t), \quad x(0) = x^0, \tag{59}$$

$$x(t) = (\widehat{v}; \widehat{z}; \vec{\omega}; \widehat{\zeta}; P_2\vec{\delta})^t \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \widehat{M}_0(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \widehat{L}_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2 := \widehat{\mathcal{H}}. \tag{60}$$

Далее, задача (59)–(60) равносильна задаче Коши:

$$\frac{dy}{dt} = -(I + T)\widehat{B}_0 y - \widehat{C}_0 y + \widehat{f}_0, \quad y(0) = y^0, \tag{61}$$

$$y := A_0^{1/2} x = (A_0^{1/2}\widehat{v};\, A_0^{1/2}\widehat{z};\, A_0^{1/2}\vec{\omega};\, P_2 A_0^{1/2}\widehat{\zeta};\, A_0^{1/2}\vec{\delta})^t, \tag{62}$$

$$I + T := (I + \widehat{R}_1)^{-1}(I + \widehat{R}_2), \quad T \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}), \quad \widehat{f}_0 := (I + \widehat{R}_1)^{-1} A_0^{-1/2}\widetilde{f}, \tag{63}$$

$$\widehat{B}_0 := A_0^{-1/2}\widetilde{B}_0 A_0^{-1/2}, \quad \widetilde{B}_0 = \mathrm{diag}(\nu\,\widehat{A};\ \nu^{-1}\widehat{B};\ \alpha;\ \widehat{I};\ I), \tag{64}$$

$$\widehat{C}_0 = (I+\widehat{R}_1)^{-1}A_0^{-1/2}\widetilde{B}_1 A_0^{-1/2}, \quad \widehat{R}_1 = A_0^{-1/2}R_1A_0^{-1/2}, \quad \widehat{R}_2 = A_0^{-1/2}R_2A_0^{1/2}. \tag{65}$$

Здесь оператор $-(I+T)\widehat{B}_0-\widehat{C}_0$ является генератором аналитической полугруппы, так как $\widehat{B}_0 = \widehat{B}_0^* \gg 0,\ T \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}),\ \widehat{C}_0 \in \mathcal{L}(\widehat{\mathcal{H}})$.

Теорема 1. *Пусть в задаче* (1)–(10) *выполнены условия*

$$\vec{M}(t) \in C^\alpha([0,T];\mathbb{C}), \quad 0<\alpha\le 1, \tag{66}$$

$$\widehat{f}(t,x) = \{f_k(t,x)\}_{k=1}^{m+1} \in C^\alpha([0,T];\widehat{L}_2(\Omega)), \quad \widehat{u}^{\,0} \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{u}^{\,0} = \widehat{v}^{\,0}+\widehat{w}^{\,0}, \tag{67}$$

$$\widehat{v}^0 \in \mathcal{D}(\widehat{A}) \subset \widehat{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{w}^{\,0} \in \widehat{M}_1(\Omega) \subset \widehat{J}^1_{0,S}(\Omega), \quad \widehat{\gamma}_n\,\widehat{w}^{\,0} \in \mathcal{D}\left(\widehat{B}_\sigma^{1/2}\right),$$

$$\widehat{\zeta}^0 \in \mathcal{D}(\widehat{B}_\sigma) \subset \widehat{L}_{2,\Gamma}, \quad \vec{\omega}^0 \in \mathbb{C}^3,\ \vec{\delta}^0 \in \mathbb{C}^3.$$

Тогда задача Коши (61)*, а также задача* (48) *имеют единственное сильное решение на отрезке* $[0,T]$*, т.е. все слагаемые в* (61)*,* (48) *являются непрерывными функциями* $t \in [0,T]$ *и выполнены начальные условия.* $\square$

Замечание 5. Пусть решение задачи (48) обладает следующими дополнительными свойствами гладкости по t:

$$\widehat{B}\widehat{z}(t) \in C\left([0,T];\mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2})\right), \quad \widehat{P}\widehat{A}\widehat{v}(t) \in C\left([0,T];\mathcal{D}(\widehat{B}^{1/2})\right), \tag{68}$$

тогда задача (35)–(39) также имеет сильное решение на $[0,T]$. $\square$

Опираясь на замечание 5, можно доказать, что при определенных условиях гладкости, накладываемых на $\widehat{\zeta}^0,\ \widehat{w}^0,\ \widehat{v}^0,\ \vec{\omega}^0,\ \vec{\delta}^0,\ \widehat{f}(t),\ \vec{M}(t)$, исходная начально–краевая задача (1)–(10) имеет единственное сильное решение на отрезке $[0,T]$.

4. Нормальные колебания исследуемой гидросистемы

Назовем нормальными колебаниями решения однородной задачи (1)–(10), зависящие от t по закону $\exp(-\lambda t)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Для амплитудных элементов, т.е. для множителей при $\exp(-\lambda t)$, получим из (35)–(39) систему уравнений, которую удобно записать в виде

$$\begin{pmatrix} \nu\widehat{u} \\ \alpha\vec{\omega} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \widehat{V} & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} \widehat{\mathcal{B}}_\sigma \begin{pmatrix} \widehat{\zeta} \\ P_2\vec{\delta} \end{pmatrix} = \tag{69}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \widehat{A}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \widehat{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} \widehat{u} \\ \vec{\omega} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \widehat{\gamma}_n\widehat{u} \\ P_2\vec{\omega} \end{pmatrix} = -\lambda \begin{pmatrix} \widehat{\zeta} \\ P_2\vec{\delta} \end{pmatrix},$$

где $\widehat{u} = \widehat{v}+\widehat{w}$, а $\widehat{\mathcal{B}}_\sigma$ и $\widehat{\mathcal{C}}$ — операторные матрицы, квадратичные формы которых равны удвоенным потенциальной и кинетической энергии системы соответственно.

Кроме того, имеет место также тривиальное соотношение

$$\omega_3 = -\lambda\delta_3. \tag{70}$$

Приведем некоторые свойства решений спектральной задачи (69)–(70).

1^0. Число $\lambda = 0$ всегда является собственным значением рассматриваемой задачи. Если выполнено условие $\ker \widehat{\mathcal{B}}_\sigma = \{0\}$, то это нулевое собственное значение однократно, а соответствующий собственный элемент отвечает нулевому решению задачи (69) и произвольному значению $\delta_3 \in \mathbb{C}$. Такие тривиальные решения связаны с переходом маятника от исходного состояния покоя к новому состоянию покоя, полученному из исходного путем произвольного поворота на угол $\vec{\delta} = \delta_3 \vec{e}_3$.

2^0. Если выполнено условие

$$\ker \widehat{\mathcal{B}}_\sigma \neq \{0\}\,, \quad \dim\ker \widehat{\mathcal{B}}_\sigma = q > 0, \tag{71}$$

то задача (69)–(70) имеет $(q+1)$–кратное нулевое собственное значение. Условие (71) выполнено, в частности, тогда, когда исследуемая гидромеханическая система находится на границе области устойчивости, т.е. $\lambda_{\min}\left(\widehat{\mathcal{B}}_\sigma\right) = 0$.

3^0. Все невещественные собственные значения λ, а также те вещественные, которым отвечают присоединенные элементы, расположены в полуплоскости

$$Re\lambda \geq \min(\mu;\, \alpha)/\left(2\|\widehat{\mathcal{C}}^{1/2}\,\mathrm{diag}\left(\widehat{A}^{-1/2};\, I\right)\|^2\right) > 0. \tag{72}$$

Следует отметить, что при непрерывном изменении физических параметров исследуемой гидромеханической системы собственные значения λ задачи могут непрерывно переходить из правой комплексной полуплоскости в левую лишь по вещественной оси через нуль комплексной плоскости, причем в момент перехода должно выполняться условие (71).

Как следует из рассмотрений [7], [2], эту задачу можно записать в виде, следующем из (48)–(50):

$$-\omega_3 = \lambda\delta_3,\; \widetilde{B}x = \lambda\widetilde{A}x,\; x = \left(\widehat{v}; \widehat{z}; \vec{\omega}; \widehat{\zeta}; P_2\vec{\delta}\right)^t \in \widehat{\mathcal{H}} = \widehat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \widehat{M_0}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \widehat{L}_{2,\Gamma} \oplus \mathbb{C}^2, \tag{73}$$

где, в частности, операторная матрица $\widetilde{B}$ имеет структуру (53).Отметим, однако, что оператор $\widetilde{B}_0 = \mathrm{diag}(\nu\,\widehat{A};\, \nu^{-1}\,\widehat{B};\, \alpha;\, \widehat{I};\, I) = \widetilde{B}_0^* \gg 0$ неограничен, но не имеет компактного обратного, так как единичный оператор $\widehat{I}$ действует в бесконечномерном пространстве $\widehat{L}_{2,\Gamma}$. Это не позволяет в задаче (73) использовать результаты М.С. Аграновича и др., связанные со свойством базисности Абеля–Лидского и получением асимптотики собственных значений (см. [5], с. 292).

Данную трудность можно преодолеть, исключая переменную $\widehat{\zeta}$. Тогда для амплитудных элементов

$$y := \left(\widehat{v};\, \widehat{z};\, \vec{\omega};\, P_2\vec{\delta}\right)^t \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega) \oplus \widehat{M_0}(\Omega) \oplus \mathbb{C}^3 \oplus \mathbb{C}^2 =: \widehat{\mathcal{H}}_0 \tag{74}$$

возникает проблема

$$\begin{pmatrix} \nu\widehat{A}\widehat{v} \\ \widehat{B}^{1/2}\widehat{A}^{1/2}\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{B}\widehat{z}+\widehat{\rho}g\widehat{B}^{-1/2}\,\widehat{P}\widehat{Q}^{*}\widehat{\theta}\left[(P_2\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right] \\ \alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta} \\ -P_2\vec{\omega} \end{pmatrix}+$$

$$+\frac{\widehat{\rho}g}{\lambda}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int\limits_{\Gamma}(\vec{e}_3\times\vec{r})\,\widehat{\gamma}_n\left(\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{R}^{+}\widehat{z}\right)d\Gamma \\ \vec{0} \end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix} \widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{R}^{*}\widehat{z}+\widehat{P}_{0,S}\,(\vec{\omega}\times\vec{r}) \\ \widehat{z} \\ \vec{J}\vec{\omega}+\widehat{\rho}\int\limits_{\Omega}\vec{r}\times\left(\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{R}^{+}\widehat{z}\right)d\Omega \\ P_2\vec{\delta} \end{pmatrix}, \tag{75}$$

а также связи

$$-\widehat{\gamma}_n\left(\widehat{v}+\nu^{-1}\,\widehat{R}^{+}\widehat{z}\right)=\lambda\widehat{\zeta},\quad -\omega_3=\lambda\delta_3. \tag{76}$$

Коротко задачу (75) можно переписать в виде:

$$\mathcal{A}y+\widehat{\rho}g\lambda^{-1}\mathcal{F}y=\lambda\mathcal{Z}y,\quad y\in\mathcal{D}(\mathcal{A})=\mathcal{D}(\widehat{A})\oplus\mathcal{D}(\widehat{B})\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}^2, \tag{77}$$

где $\mathcal{A}$, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{Z}$ определяются соответствующими столбцами из (75). Приведем свойства этих операторных матриц.

Лемма 3. *Оператор $\mathcal{Z}$ обратим и имеет структуру*

$$\mathcal{Z}=\mathcal{Z}_0+\mathcal{J}_1,\quad \mathcal{Z}_0=\operatorname{diag}\left(\rho I;\,\rho I;\,\vec{J};\,I\right),\quad \mathcal{J}_1\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_0).\quad\square \tag{78}$$

Лемма 4. *Оператор $\mathcal{A}$ из* (77), (75) *обратим и имеет структуру*

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_0+\mathcal{A}_1,\quad \mathcal{A}_0=\operatorname{diag}\left(\nu\widehat{A};\,\nu^{-1}\widehat{B};\,\alpha;\,I\right),\quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)=\mathcal{D}(\widehat{A})\oplus\mathcal{D}(\widehat{B})\oplus\mathbb{C}^3\oplus\mathbb{C}^2, \tag{79}$$

где $\mathcal{A}_1$ вполне подчинен $\mathcal{A}_0$, т.е.

$$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0). \tag{80}$$

Доказательство. Уравнение $\mathcal{A}y=0$ приводит к системе уравнений

$$\nu\widehat{A}\widehat{v}=0,\quad \widehat{B}^{1/2}\widehat{A}^{1/2}\widehat{v}+\nu^{-1}\widehat{B}\widehat{z}+\widehat{\rho}g\widehat{B}^{-1/2}\,\widehat{P}\widehat{Q}^{*}\widehat{\theta}\left[(P_2\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3\right]=0,$$

$$\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}=\vec{0},\quad -P_2\vec{\omega}=\vec{0}.$$

Отсюда следует, что $\widehat{v}=0$, $P_2\vec{\omega}=\vec{0}$, а потому (из второго уравнения) и $\widehat{z}=0$, так как $\widehat{B}\gg 0$. Тогда из соотношений $\alpha\vec{\omega}+mglP_2\vec{\delta}=\vec{0}$, $\quad P_2\vec{\omega}=\vec{0}$, приходим к выводу, что $\vec{\omega}=\vec{0}$, так как $P_2\vec{\delta}=\sum\limits_{k=1}^{2}\delta_k\vec{e}_k$, а $\vec{\omega}=\omega_3\vec{e}_3$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}$ обратим.

Вычисляя $\mathcal{A}_1 := \mathcal{A} - \mathcal{A}_0$, а затем $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1}$, находим, что

$$\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1}y = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu^{-1}\widehat{R}\widehat{v} + \widehat{\rho}g\alpha^{-1}\widehat{B}^{-1/2}\,\widehat{P}\widehat{Q}^*\widehat{\theta}\,[(P_2\vec{\omega}\times\vec{r})\cdot\vec{e}_3] \\ mglP_2\vec{\delta} \\ -\alpha^{-1}P_2\vec{\omega} - P_2\vec{\delta} \end{pmatrix}, \tag{81}$$

откуда следует, что $\mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0)$, так как $\widehat{R} = \widehat{B}^{1/2}\widehat{P}\widehat{A}^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty\left(\widehat{J}_{0,S}(\Omega);\, \widehat{M}_0(\Omega)\right)$, $\widehat{B}^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{M}_0(\Omega))$, а остальные операторы ограничены либо конечномерны. $\square$

Лемма 5. *Оператор $\mathcal{F}$ из* (77)*, определенный вторым столбцом слева в* (75) *на области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$ (см.* (79)*), вполне подчинен оператору $\mathcal{A}_0$:*

$$\mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0). \tag{82}$$

Доказательство. Оно проводится прямым вычислением:

$$\mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1}y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \int\limits_\Gamma (\vec{e}_3\times\vec{r})\,\widehat{\gamma}_n\left(\nu^{-1}\widehat{A}^{-1}\widehat{v} + \nu^{-1}\widehat{A}^{-1/2}\widehat{P}\widehat{B}^{-1/2}\widehat{z}\right)d\Gamma \\ \vec{0} \end{pmatrix}, \quad \forall y \in \widehat{\mathcal{H}}_0. \tag{83}$$

Так как здесь $\widehat{A}^{-1}\widehat{v} \in \mathcal{D}(\widehat{A}) \subset \mathcal{D}(\widehat{A}^{1/2}) = \widehat{J}^1_{0,S}(\Omega)$, $\widehat{A}^{-1/2}\widehat{P}\widehat{B}^{-1/2}\widehat{z} \in \widehat{M_1}(\Omega) \subset \widehat{J}^1_{0,S}(\Omega)$, а $\widehat{\gamma}_n$ компактно (по теореме вложения С.Л. Соболева) действует из $\widehat{J}^1_{0,S}(\Omega)$ в $\widehat{L}_{2,\Gamma}$, то $\mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1}$ — компактный оператор в $\widehat{\mathcal{H}}_0$. $\square$

Используя леммы 3–5, перепишем задачу (77) в виде

$$\left(I + \mathcal{J}_0 + \widehat{\rho}g\lambda^{-1}\mathcal{J}_{-1}\right)\mathcal{A}_0 y = \lambda\left(\mathcal{Z}_0 + \mathcal{J}_1\right)y, \quad y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0), \tag{84}$$

$$\mathcal{J}_0 := \mathcal{A}_1\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0), \quad \mathcal{J}_{-1} := \mathcal{F}\mathcal{A}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0), \quad \mathcal{J}_1 \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0), \tag{85}$$

$$\mathcal{A}_0 := \operatorname{diag}\left(\nu\widehat{A};\, \nu^{-1}\widehat{B};\, \alpha;\, I\right), \quad \mathcal{Z}_0 := \operatorname{diag}\left(\widehat{I};\, \widehat{I};\, \vec{J};\, I\right). \tag{86}$$

Теорема 2. *Задача* (84)*, а потому и исходная спектральная задача о нормальных колебаниях исследуемой гидромеханической системы имеет дискретный спектр $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ с предельной точкой $\lambda = \infty$ и асимптотическим поведением*

$$\lambda_j = \nu^{-1}\left(\sum_{k=1}^m \sigma_k\frac{|\Gamma_k|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1 + o(1)] \quad (j \to \infty). \tag{87}$$

Доказательство. Рассмотрим невозмущенную задачу на собственные значения для оператора $\mathcal{A}_0$:

$$\mathcal{A}_0 y = \lambda\mathcal{Z}_0 y. \tag{88}$$

Отсюда и из определений (86) операторов $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{C}_0$ получаем совокупность распавшихся задач:

$$\nu\widehat{A}\widehat{v} = \lambda\widehat{v} \quad \left(\widehat{v} \in \widehat{J}_{0,S}(\Omega)\right), \quad \nu^{-1}\widehat{B}\widehat{z} = \lambda\widehat{z} \quad \left(\widehat{z} \in \widehat{M_0}(\Omega)\right), \tag{89}$$

$$\alpha\vec{\omega} = \lambda\vec{J}\vec{\omega} \quad \left(\vec{\omega} \in \mathbb{C}^3\right), \quad P_2\vec{\delta} = \lambda P_2\vec{\delta} \quad \left(P_2\vec{\delta} \in \mathbb{C}^2\right). \tag{90}$$

Конечномерные задачи (90), очевидно, не влияют на характер асимптотики, а задачам (89) отвечают две ветви собственных значений. С учетом асимптотических формул (31) и (42) для собственных значений операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$ имеем

$$\lambda_{j1} = \nu\lambda_j(\widehat{A}) = \nu\left(\frac{1}{3\pi^2}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\frac{\rho_\alpha^0}{\rho_\alpha}|\Omega_\alpha|\right)^{-2/3} j^{2/3}[1+o(1)] \quad (j\to\infty), \tag{91}$$

$$\lambda_{j2} = \nu^{-1}\lambda_j(\widehat{B}) = \nu^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\frac{|\Gamma_k|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1+o(1)] \quad (j\to\infty). \tag{92}$$

Введем в рассмотрение функции распределения (с учетом кратностей) собственных значений операторов $\widehat{A}$ и $\widehat{B}$:

$$N_{\widehat{A}}(\lambda) := \sum_{\lambda_j(\widehat{A})<\lambda} 1, \quad N_{\widehat{B}}(\lambda) := \sum_{\lambda_j(\widehat{B})<\lambda} 1. \tag{93}$$

Из (91), (92) следует, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} N_{\widehat{A}}(\lambda)\lambda^{-3/2} = \frac{\nu^{-3/2}}{3\pi^2}\sum_{\alpha=1}^{m+1}\frac{\rho_\alpha^0}{\rho_\alpha}|\Omega_\alpha|, \quad \lim_{\lambda\to+\infty} N_{\widehat{B}}(\lambda)\lambda^{-2} = \frac{\nu^2}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k|\Gamma_k|. \tag{94}$$

Так как задача (88) равносильна совокупности задач (89), (90), то функция распределения $N(\lambda)$ собственных значений задачи (88) равна сумме функций распределения собственных значений бесконечномерных задач (89) и конечномерных задач (90). Отсюда и из (94) получаем, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} N(\lambda)\lambda^{-2} = \lim_{\lambda\to+\infty} N_{\widehat{B}}(\lambda)\lambda^{-2} = \frac{\nu^2}{\pi}\sum_{k=1}^{m}\sigma_k|\Gamma_k|, \tag{95}$$

откуда следует, что для оператора $\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{Z}_0^{-1/2}$ в соответствующей задаче, полученной из (84), имеет место асимптотическая формула

$$\lambda_j(\widetilde{\mathcal{A}}_0) = \nu^{-1}\left(\sum_{k=1}^{m}\sigma_k\frac{|\Gamma_k|}{\pi}\right)^{-1/2} j^{1/2}[1+o(1)] \quad (j\to\infty). \quad \square \tag{96}$$

Получим свойства полноты и базисности Абеля–Лидского системы корневых элементов гидромеханической задачи (84)–(86) о нормальных колебаниях маятника с капиллярной вязкой жидкостью. Предварительно введем такие обозначения:

$$\widetilde{\mathcal{J}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{F}_0\mathcal{Z}_0^{1/2}, \quad \widetilde{\mathcal{J}}_{-1} := \widehat{\rho}g\mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{J}_{-1}\mathcal{Z}_0^{1/2}, \quad \widetilde{\mathcal{J}}_1 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{J}_1\mathcal{Z}_0^{-1/2}, \tag{97}$$

$$\widetilde{\mathcal{A}}_0 := \mathcal{Z}_0^{-1/2}\mathcal{A}_0\mathcal{Z}_0^{-1/2}, \quad \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_0) = \mathcal{R}(\widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1}) = \mathcal{R}(\mathcal{Z}_0^{1/2}\mathcal{A}_0^{-1}\mathcal{Z}_0^{1/2}),$$

Здесь в силу предыдущих построений операторы $\widetilde{\mathcal{J}}_0$, $\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}$ и $\widetilde{\mathcal{J}}_1$ компактные, оператор $\widetilde{\mathcal{A}}_0 = \widetilde{\mathcal{A}}_0^* \gg 0, \quad 0 < \widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0)$.

Для исследуемой задачи приходим из (84) к уравнению

$$\left(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_0 + \lambda^{-1}\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}\right)\widetilde{\mathcal{A}}_0 v = \lambda(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_1)v, \quad v = \mathcal{Z}_0^{1/2}y \in \mathcal{D}(\widetilde{\mathcal{A}}_0). \tag{98}$$

Осуществляя здесь замены

$$\lambda = \widetilde{\lambda}^{-1}, \quad \mathcal{I} + \widehat{S}_0 := (\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_1)^{-1}(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_0), \quad (\mathcal{I} + \widehat{S}_0)\widetilde{\mathcal{A}}_0 v = w, \tag{99}$$

получаем уравнение вида

$$\mathcal{L}(\widetilde{\lambda})w := \left(\mathcal{I} + \widetilde{\lambda}\widehat{\mathcal{B}} - \widetilde{\lambda}^{-1}\widehat{\mathcal{A}}\right)w = 0, \quad w \in \widehat{\mathcal{H}}_0, \tag{100}$$

$$\widehat{\mathcal{B}} := (\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_1)^{-1}\widetilde{\mathcal{J}}_{-1}(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_0)^{-1}(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_1) \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0), \tag{101}$$

$$\widehat{\mathcal{A}} := \widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1}(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_0)^{-1}(\mathcal{I} + \widetilde{\mathcal{J}}_1) \in \mathfrak{S}_\infty(\widehat{\mathcal{H}}_0). \tag{102}$$

Напомним, что собственные значения $\lambda_j(\widetilde{\mathcal{A}}_0)$ оператора $\widetilde{\mathcal{A}}_0$ имеют асимптотическое поведение (96), и тогда $\widetilde{\mathcal{A}}_0^{-1} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H}_0), \quad p > 2$. Приведенные свойства операторов задачи (100) показывают, что для этой задачи справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть геометрические и физические параметры исследуемой гидромеханической системы таковы, что выполнено условие*

$$4\|\widehat{\mathcal{A}}\| \cdot \|\widehat{\mathcal{B}}\| < 1. \tag{103}$$

Тогда система корневых элементов задачи (84)–(86) *является полной в пространстве с нормой графика оператора* $\widetilde{\mathcal{A}}_0$*:*

$$\|\widetilde{\mathcal{A}}_0 v\|^2_{\widehat{\mathcal{H}}_0} = \left(\mathcal{Z}_0^{-1}\mathcal{A}_0 y, \mathcal{A}_0 y\right)_{\widehat{\mathcal{H}}_0} = \nu^2\|\widehat{A}\widehat{v}\|^2_{\widehat{J}_{0,S}(\Omega)} + \nu^{-2}\|\widehat{B}\widehat{z}\|^2_{\widehat{M}_0(\Omega)} + \alpha^2\left(\vec{J}^{-1}\vec{\omega}\right)\cdot\vec{\omega} + |P_2\vec{\delta}|^2. \tag{104}$$

Если условие (103) *не выполнено, то система корневых элементов задачи* (84)–(86)*, отвечающая собственным значениям* λ_j *с* $|\lambda_j| > R$ *при любом* $R > 0$*, является полной с точностью до конечного дефекта по норме* (104). □

Более того, если выполнено условие (103), то система корневых элементов задачи образует базис Абеля–Лидского порядка $\alpha_0 > 2$ в пространстве с нормой графика (104). Если условие (103) не выполнено, то система корневых элементов задачи (84)–(86), отвечающая собственным значениям λ_j с $|\lambda_j| > R$ при любом $R > 0$, образует базис Абеля–Лидского порядка $\alpha_0 > 2$ с точностью до конечного дефекта в пространстве с нормой (104).

Таким образом, итогом рассмотрения спектральной задачи (69)–(70) является следующий вывод: при выполнении условия статической устойчивости по линейному приближению все нормальные движения капиллярных вязких жидкостей в маятнике являются асимптотически устойчивыми, а спектр и корневые функции обладают доказанными выше свойствами.

В самом деле, в условиях, близких к невесомости, одна жидкость в сосуде может не обязательно заполнять нижнюю его часть. В частности, она может находиться в верхней части сосуда и удерживаться в состоянии покоя капиллярными силами (жидкость в пробирке). При этом статическая устойчивость либо неустойчивость такой системы в состоянии покоя зависит от того, насколько интенсивным является гравитационное поле по отношению к капиллярным силам, действующим на систему. Если жидкость поднята к верхней части полости, а сила тяжести действует сверху и является достаточно большой, то оператор потенциальной энергии $\widehat{\mathcal{B}}_\sigma$ может не быть положительно определенным и может иметь по необходимости конечное число отрицательных собственных значений. В этом случае гидромеханическая система является динамически неустойчивой и имеет место утверждение, называемое обращением теоремы Лагранжа об устойчивости: *если потенциальная энергия гидросистемы не имеет минимума в состоянии равновесия и минимальное собственное значение* $\lambda_{\min}\left(\widehat{\mathcal{B}}_\sigma\right)$ *оператора потенциальной энергии* $\widehat{\mathcal{B}}_\sigma$ *отрицательно, то по крайней мере одно собственное значение* λ *задачи* (69)–(70) *расположено в левой полуплоскости.* Доказательство этого утверждения для системы жидкостей, заполняющих пространственный маятник, проводится по схеме, изложенной в [7], где изучались нормальные колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью при условии статической неустойчивости.

Список литературы

[1] *Дудик О.А.* Малые колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью // Труды ИПММ НАН Украины. 2008. — Том 16. — С. 67–79.

[2] *Дудик О.А.* Малые движения и нормальные колебания плоского маятника с полостью, заполненной несколькими капиллярными вязкими жидкостями // Труды ИПММ НАН Украины. 2009. (в печати)

[3] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989. — 416 с.

[4] *Суслина Т. А.* Асимптотика спектра вариационных задач на решениях эллиптического уравнения в области с кусочно–гладкой границей / Т.А. Суслина. — Зап. научн. семин. ЛОМИ АН СССР. 1985.— Т. 147 - с. 179-183. — Деп. в ВИНИТИ 21.11.85, № 8058. —В.

[5] *Arganovich M.S., Katsenelenbaum B.Z., Sivov A.N., Voitovich. N.N.* Generalized Method of Eigenoscillations in Diffraction Theory. WILEY–VCH, Berlin, 1999. — 380 pp.

[6] *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965. — 448 с.

[7] *Дудик О.А.* Нормальные колебания плоского маятника с полостью, частично заполненной капиллярной вязкой жидкостью, при условии статической неустойчивости // Ученые Записки ТНУ им. В.И. Вернадского — Т. 20 (59) № 1, 2007, с. 57–64.

У роботі розглядається задача про малі рухи і нормальні коливання маятника із полосттю, заповненою системою з капілярних в'язких рідин. Доведена сильна розрішучість досліджуваної гідросистеми. Зведена асимптотика власних значень і доведена теорема про базисність за Абелем–Лідським системи кореневих елементів. Доведене також обернення теореми Лагранжа про стійкіть.

In the work, we consider the problem on small motions and normal oscillations of a pendulum with a cavity fully filled with a system of capillary viscous fluids. The theorem on strong solvability of the investigated hydrosystem is proved. Asymptotic behavior of eigenvalues is established. The theorem on basisity by Abel–Lidsky of the system of root functions and the inversion of Lagrange theorem on stability are proved.