Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского
Серия «Физико-математические науки». Том 24 (63). 2011 г. № 2. С. 22-26

*УДК 539. 391+514. 764.2*

# ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ДИНАМИКИ $n$-СОЛИТОНОВ В $B$-ФАЗЕ ЖИДКОГО $He^3$

***Рошупкин С.Н.***

***Таврический национальный университет имени В.И. Вернадского***
***E-mail: rsn@crimea.edu***

Рассмотрена динамика $n$ - солитонов в В-фазе жидкого $He^3$. Показано, что поправка первого порядка по теории возмущений приводит к деформации солитона.

***Ключевые слова:*** жидкий $He^3$, В-фаза, солитон, теория возмущений.

## ВВЕДЕНИЕ

Фазовые переходы нормального $He^3$ в А-фазу и А-фазы в фазу В были обнаружены на кривой плавления твердого $He^3$ при давлении $p = 35$ атм. и температуре $T_c = 2,6$ мК, $T_{AB} = 2,07$ мК соответственно. С понижением давления температура перехода $T_c$ между нормальным состоянием $He^3$ и сверхтекучим понижается до $T_c = 0,9$ мК при $p = 0$, а $T_{AB}$-растет до $T_{AB} = 2,4$ мК при $p = 20$ атм., т.е. имеет место поликритическая точка [1]. Теоретические и экспериментальные исследования сверхтекучего $He^3$ показали, что в сверхтекучем $He^3$ происходит триплетное куперовское спаривание с орбитальным моментом $l = 1$.

Пожалуй, наиболее интересные свойства сверхтекучих фаз $He^3$ связаны с пространственно-неоднородными конфигурациями полей параметра порядка: дисклинациями, вихрями, солитонами и т.д. Все эти объекты играют существенную роль в спиновой и орбитальной динамике сверхтекучего $He^3$ [2].

Предлагаемая вниманию работа посвящена исследованию динамики доменной стенки в В-фазе сверхтекучего $He^3$ на основе солитонной теории возмущений [3].

## ЭВОЛЮЦИЯ ДОМЕННОЙ СТЕНКИ В В-ФАЗЕ $He^3$ ПОД ДЕЙСТВИЕМ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Наличие магнитного поля приводит в В-фазе $He^3$ к образованию $n$-текстур, аналогичных магнитным стенкам в нематиках. Рассмотрим рождение и распространение $n$-солитонов при выключении неоднородного магнитного поля. В подобной ситуации в В-фазе $He^3$ наблюдались медленные магнитные возмущения, скорость которых сложным образом зависела от возбуждающего магнитного поля [4]. Для отождествления обнаруженных магнитных возмущений с $n$-солитонами необходимо провести более детальные измерения зависимости скорости волны от магнитных полей, однако качественно результаты можно объяснить на языке солитонов.

Уравнение движения для вектора $\vec{n}$, считая, что реализуется конфигурация Леггетта описывается уравнением [5]

$$\varphi_{tt} - c_3^2\varphi_{xx} + \frac{c_3^2}{2\xi_{H_3}\varphi_x}\frac{\partial}{\partial x}\left[\sin^2\varphi\left(1+\alpha^2\xi^2{}_{H_3}\varphi_x^2\right)\right] = 0, \tag{1}$$

здесь

$$\begin{gathered} c_i^2 = \frac{4}{5}\frac{\gamma_0^2}{\chi_B}K_i,\ \xi_{H_i} = \frac{1}{H}\left(\frac{K_i}{a}\right)^{1/2},\ K_i = \frac{5}{64}b_i K\Delta_B^2,\ \alpha^2 = 1 - \frac{b_1}{b_3}, \\ K = \frac{3}{5}N_F\xi_0^2,\ N_F = \frac{m^* k_F}{\pi^2\hbar^2},\ \xi_0^2 = \frac{7\zeta(3)}{48\pi^2}\frac{\hbar^2 v_F^2}{k_B^2 T_c^2},\ a = g_D\left(\frac{\mu_0}{\Delta_B}\right)^2, \end{gathered} \tag{2}$$

где $m^*$-эффективная масса, $\xi_0$-радиус пары, $N_F$-плотность состояний на поверхности Ферми, $\chi_A$ и $\chi_B$-восприимчивости A- и B-фаз $He^3$, $\mu_0$-магнитный момент ядра атома $He^3$, $\Delta$-щель в спектре квазичастиц, $g_D$-константа диполь-дипольного взаимодействия, $\gamma_0$-гиромагнитное отношение ядер атомов $He^3$, $K_i$-«константы Франка», а $b_1 = 13,\ b_2 = 11,\ b_3 = 16$.

Следует отметить, что если $K_1 = K_3\left(\alpha^2 = 0\right)$, статическое решение уравнения (1) представляет собой стенку, перпендикулярную магнитному полю [6], а анизотропия$\left(K_1 \neq K_3\right)$ приводит к тому, что стенка становится несимметричной относительно плоскости $x = 0$.

Для удобства приведем уравнение (1) к стандартному виду

$$\varphi_{tt} - c_3^2\varphi_{xx} + \frac{c_3^2}{\xi_{H_3}}\sin\varphi\cos\varphi = \varepsilon R[\varphi], \tag{3}$$

где

$$R[\varphi] = -c_3^2\xi_{H_3}\left(\frac{1}{2}\varphi_x^2\sin 2\varphi + \varphi_{xx}\sin^2\varphi\right), \tag{4}$$

а $\varepsilon = \alpha^2 << 1$-малый параметр. Решение уравнения (3), описывающего эволюцию солитона под действием малых возмущений ищем в виде:

$$\varphi(x,t) = \varphi_s(z) + \varepsilon\tilde{\varphi}(x,t) + \ldots \tag{5}$$

Первое слагаемое

$$\varphi_s(z) = 4arctg(e^z),\ z = \frac{x-\xi}{\left(1-v^2\right)^{1/2}}, \tag{6}$$

Соответствует адиабатическому приближению. Это приближение по форме совпадает с невозмущенным солитоном, однако его параметры $\xi$ и $v$ зависят от времени.

Пользуясь схемой обратной задачи рассеяния, а также уравнениями эволюции данных рассеяния только дискретного спектра под действием возмущений, можно получить с точностью до $\varepsilon$ уравнения определяющие в адиабатическом приближении зависимость параметров $\xi$ и $v$ от времени [7]

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\varepsilon}{4}\left(1-v^2\right)^{3/2} J_0(v), \tag{7}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = v - \frac{\varepsilon}{4} v\left(1-v^2\right) J_1(v), \tag{8}$$

где

$$J_n(v) = \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{z^n R\left[\varphi_s(z)\right]}{ch(z)},\ n = 0,1. \tag{9}$$

Используя уравнения описывающие эволюцию данных рассеяния непрерывного спектра под влиянием возмущения, находим поправку первого порядка по $\varepsilon$ [8]

$$\tilde{\varphi}(x,t) = \varphi_1(z) + \varphi_2(z,\tilde{z}) + w(z,z^+,z^-), \tag{10}$$

где

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{4ch(z)}\left\{\int_{-\infty}^{z} dy \frac{R\left[\varphi_s(y)\right]}{ch(y)} F(z,y) + \int_{z}^{\infty} dy \frac{R\left[\varphi_s(y)\right]}{ch(y)} F(-z,-y)\right\}, \tag{11}$$

$$\varphi_2(z,\tilde{z}) = -\frac{v^2\tilde{z}^2}{4ch(z)} J_0(v) + \frac{v^2\tilde{z}^2}{2ch(z)} J_1(v). \tag{12}$$

Здесь

$$\tilde{z} = \frac{x-\xi_0-v_0t}{\left(1-v^2\right)^{1/2}},\ z^{\pm} = \frac{x-\xi_0 \pm v_0t}{\left(1-v^2\right)^{1/2}},$$
$$F(x,y) = e^{-z}ch(y) + e^{y}ch(y) - z + y + v^2(z-y)^2 - 1. \tag{13}$$

Последнее слагаемое в (10) описывает излучаемые солитоном волны, которые распространяются со скоростями, существенно отличающимися от скорости солитона и по этой причине вклад этого члена не учитывается.

Подставляя (4), (6) в уравнения (7), (8), описывающие зависимость параметров $v$ и $\xi$ от времени в адиабатическом приближении, находим

$$\frac{dv}{dt}=0,\ \frac{d\xi}{dt}=1+\frac{\varepsilon(\pi+2)}{12}\left(1-3v^2\right). \tag{14}$$

Решения уравнений (14) тривиальны

$$v=v_0,\ \xi=1+\frac{\varepsilon(\pi+2)}{12}\left(1-3v^2\right). \tag{15}$$

Здесь $v_0$, $\xi_0$ -константы интегрирования, которые определяются начальными данными.

Так же легко могут быть вычислены поправки $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z,\tilde{z})$

$$\varphi_1(z)=\frac{1}{6\left(1+e^{2z}\right)ch(z)}\left\{e^{2z}\left[-8arcth\left(e^{z}\right)+\pi v^2 z+v^2 z-3\right]+\right.$$
$$\left.+2\pi e^{z}-8arcth\left(e^{z}\right)+(\pi+2)v^2 z+2\pi+3\right\}, \tag{16}$$

$$\varphi_2(z,\tilde{z})=-\frac{(\pi+2)}{6}\cdot\frac{v^2\left(x-\xi_0-v_0 t\right)}{\left(1-v_0{}^2\right)^{1/2} sh\left[\left(x-\xi_0\right)/\sqrt{1-v_0{}^2}\right]}. \tag{17}$$

Решения (15) показывают, что в адиабатическом приближении скорость доменной стенки остается неизменной, а сама она сдвигается на постоянную величину, определяемую начальной скоростью. Однако такое поведение доменной стенки не подтверждается экспериментально [4]. Таким образом описание движения солитона под действием внешних возмущений в рамках адиабатического приближения основанного на рассмотрении эволюции только дискретного спектра задачи рассеяния, не является адекватным физической ситуации. В связи с этим необходимо учитывать поправки возникающие из-за эволюции непрерывного спектра задачи рассеяния под действие возмущений, которые так же дают вклад в динамику локализованной части решения и приводят к деформации солитона. Соответствующие поправки даются формулами (16) и (17) и достаточно неплохо описывают экспериментальные данные.

Учет высших приближений по анизотропии затруднен в силу громоздкости вычислений. Однако, оценки и численный эксперимент [9] показывают, что основной вклад в ряд теории возмущений дают найденные поправки (16) и (17).

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В работе показано, что для рассматриваемого типа внешнего возмущения адиабатическое приближение при описании движения солитона плохо согласуется с экспериментальными данными. С этой целью рассмотрены поправки к адиабатическому приближению, которые определяются теорией возмущений, основанной на методе обратной задачи рассеяния. Показано, что поправки первого порядка по анизотропии дают вклад в динамику локализованной части решения и приводят к деформации доменной стенки. Полученное решение достаточно неплохо описывает экспериментальные данные.

## Список литературы

1. Воловик Г.Е. Сверхтекучие свойства А-фазы гелия-3 / Воловик Г.Е. // УФН. – 1984. – т.143, вып. 1. – с.73-108.
2. Минеев В.П. Сверхтекучий гелий-3: введение в предмет / Минеев В.П. // УФН. – 1983. – т.139, вып.2. – с.303-330.
3. Карпман В.И. Теория возмущений для солитонов / Карпман В.И. , Маслов Е.М. // ЖЭТФ. – 1977. – т.73, вып.2(8). – с.537-559.
4. Makhankov V.G. Dynamics of classical solitons (in nonintegrable systems) / Makhankov V.G. // Phys. Rep. – 1978. – vol.35, No.1. – p.1-128.
5. Рожков С.С. Динамика параметра порядка сверхтекучих фаз гелия-3 / Рожков С.С. // УФН. – 1986. – т.148, вып.2. – с.325-345.
6. Keener I.P. Solitons under perturbations / Keener I.P., McLaughlin D.W. // Phys. Rev. – 1977. – vol. A16, No.1. – p.777-790.
7. Кившарь Ю.С. Об особенности эволюции солитонов под действием малых возмущений / Кившарь Ю.С., Косевич А.М. // Письма в ЖЭТФ. – 1983. – т.37, № 11. – с. 542-543.
8. Абдулаев Ф.Х. Динамика солитонов в неоднородных конденсированных средах / Абдулаев Ф.Х., Хабибулаев П.К. – Ташкент: изд-во «Фан» УзССР, 1986. – с.183.
9. Makhankov V.G. Computer experiments in soliton theory / Makhankov V.G. // Comp. Phys. Communs. – 1980. – vol.21. – p.1-49.

**Рощупкін С.М. Теорія збурень для n-солітонів у В-фазі рідкого $He^3$ / Рощупкін С.М. //** Вчені записки Таврійського національного університету імені В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2011. – Т. 24(63), №2. – С. 22-26.
Розглянута динаміка n-солітонів у В-фазі рідкого $He^3$. Показане, що поправка першого порядку по теорії збурень призводить до деформації солітона.
***Ключові слова:*** рідкий $He^3$, В-фаза, солітон, теорія збурень.

**Roshchupkin S.N. The perturbation theory for n-soliton dynamics in B-phase of liquid $He^3$ / Roshchupkin S.N. //** Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2011 – Vol. 24(63), No.2 – P. 22-26.
Dynamics for n-soliton in B-phase of liquid $He^3$ is considered. It is shown, that first order terms of perturbative theory gives rise to deformation of soliton.
***Keywords:*** liquid $He^3$, B-phase, soliton, perturbation theory.

*Поступила в редакцию 01.06.2011 г*