

УДК 539. 391+514. 764.2

ДИОННАЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА И ТОЧНЫЕ СТАТИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ СТРУНЫ

Леяков А.П., Рощупкин С.Н.

*Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: lelyakov@ tnu.crimea.ua, rsn@ tnu.crimea.ua*

В работе найдены статические решения уравнений движения и связей для струны в четырехмерном пространстве-времени дионной черной дыры.

Ключевые слова: струна, точные решения, дионная черная дыра

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к космическим струнам и другим топологическим дефектам вырос за последние два десятилетия. Этот интерес инициирован, с одной стороны, той ролью, которую топологические дефекты, возможно, играют в процессе эволюции Вселенной, а с другой – тем, что по своим физическим свойствам эти объекты отличаются от обычной материи [1].

Космическая струна является одномерной областью с ненулевыми значениями компонент тензора энергии импульса. Она характеризуется двумя локальными параметрами: линейной плотностью массы μ и радиусом поперечного сечения ρ_s [2]. Космические струны возникают как топологические дефекты в процессе эволюции ранней вселенной и поэтому являются устойчивыми образованиями. Радиус поперечного сечения ρ_s зависит от линейной плотности массы μ и может быть на несколько порядков больше планковской длины

$$l_{pl} = \sqrt{\hbar G / c^3} \approx 10^{-33} \text{ см}.$$

Таким образом в настоящей статье мы можем пренебречь ее толщиной. Струны могут быть либо замкнуты, либо бесконечной длины. Последняя возможность маловероятна в современной Вселенной.

При исследовании формирования ранней Вселенной ключевую роль играет задача о динамике струн в гравитационных полях. Однако решение этой задачи осложнено существенно нелинейным характером уравнений движения струны, которые удалось точно решить лишь для ограниченного класса гравитационных полей [3].

Целью предлагаемой вниманию работы является поиск точных решений описывающих классическую струну в гравитационном поле дионной черной дыры.

СТАТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ СТРУНЫ

Дионная черная дыра описывается хорошо известной метрикой вида [4]

$$dS^2 = -\left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{I^2}{4r^2}\right)dt^2 + \left(-M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{I^2}{4r^2}\right)^{-1} dr^2 + B(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\varphi^2), \quad (1)$$

где B – характеризует степень нарушения $SU(2)$ симметрии, M – масса черной дыры, I – угловой момент, а космическая константа пропорциональна l^2 .

Уравнения движения струны и кинематические связи в фоновом гравитационном поле в ортогональной калибровке имеют стандартный вид [2]

$$\ddot{x}^\mu - x''^\mu + \Gamma_{\rho\nu}^\mu (\dot{x}^\rho \dot{x}^\nu - x'^\rho x'^\nu)' = 0, \quad (2)$$

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu' = 0, \quad g_{\mu\nu} (x'^\mu \dot{x}^\nu + x'^\nu \dot{x}^\mu) = 0, \quad (3)$$

где точка и штрих обозначают производные по τ и σ соответственно, $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор фонового пространства, $\Gamma_{\rho\nu}^\mu$ – символы Кристоффеля соответствующие метрике $g_{\mu\nu}$. Подставляя первую квадратичную форму (1) в уравнения (2), (3) и вводя обозначения $x^0 = t(\tau, \sigma)$, $x^1 = r(\tau, \sigma)$, $x^2 = \theta(\tau, \sigma)$, $x^3 = \varphi(\tau, \sigma)$, после несложных но достаточно громоздких преобразований приходим к следующим уравнениям

$$t_{,\tau\tau} - t_{,\sigma\sigma} + \frac{a'(r)}{a(r)} (r_{,\tau} t_{,\tau} - r_{,\sigma} t_{,\sigma}) = 0, \quad (4)$$

$$r_{,\tau\tau} - r_{,\sigma\sigma} + \frac{1}{2} a(r) a'(r) (t_{,\tau}^2 - t_{,\sigma}^2) - \frac{a'(r)}{2a(r)} (r_{,\tau}^2 - r_{,\sigma}^2) = 0, \quad (5)$$

$$\theta_{,\tau\tau} - \theta_{,\sigma\sigma} + \frac{1}{2} \sin(2\theta) (\varphi_{,\tau}^2 - \varphi_{,\sigma}^2) = 0, \quad (6)$$

$$\varphi_{,\tau\tau} - \varphi_{,\sigma\sigma} + 2ctg\theta (\theta_{,\tau} \varphi_{,\tau} - \theta_{,\sigma} \varphi_{,\sigma}) = 0, \quad (7)$$

$$a(r)\left(t_{,\tau}^2 + t_{,\sigma}^2\right) - \frac{1}{a(r)}\left(r_{,\tau}^2 + r_{,\sigma}^2\right) - B\left(\theta_{,\tau}^2 + \theta_{,\sigma}^2\right) - B \sin^2 \theta\left(\varphi_{,\tau}^2 + \varphi_{,\sigma}^2\right) = 0, \quad (8)$$

$$a(r)t_{,\tau}t_{,\sigma} - \frac{1}{a(r)}r_{,\tau}r_{,\sigma} - B\left(\theta_{,\tau}\theta_{,\sigma} + \sin^2 \theta\varphi_{,\tau}\varphi_{,\sigma}\right) = 0, \quad (9)$$

где $a(r) = -M + \frac{r^2}{l^2} + \frac{I^2}{4r^2}$; $(\dots)_{,\tau} = \partial(\dots)/\partial\tau$; $(\dots)_{,\sigma} = \partial(\dots)/\partial\sigma$.

Далее рассмотрим струну лежащую в экваториальной плоскости для которой $\theta = \pi/2$ и используем следующий анзац

$$t = \tau, \quad r = r(\sigma), \quad \varphi = \varphi(\sigma). \quad (10)$$

В дальнейшем ограничимся случаем $I = 0$ и положим $M = 1$. Подставляя анзац (10) в уравнения (4)-(9) приходим к следующим уравнениям

$$\varphi_{,\sigma\sigma} = 0, \quad (11)$$

$$r_{,\sigma}^2 = \frac{1}{l^4}\left(r^4 - l^2(B+2)r^2 + l^4(B+1)\right). \quad (12)$$

Решение уравнения (11) тривиально

$$\varphi = \sigma, \quad (13)$$

а решение уравнения (12) может быть выражено через функции Вейерштрасса [5]

$$r = l - \frac{1}{2}l^3B\left(P\left(\frac{\sigma}{l^2}; g_2, g_3\right) - \frac{1}{12}l^2(4-B)\right)^{-1}, \quad (14)$$

где инварианты g_2, g_3 имеют вид

$$g_2 = l^4\left(B+1 + (B+2)^2/12\right), \quad g_3 = l^6(B+2)\left((B+2)^2 - 36(B+1)\right)/216, \quad (15)$$

а дискриминант Δ выражается следующим образом

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2. \quad (16)$$

Итак формулы (13), (14) описывают статические конфигурации струны в гравитационном поле дионной черной дыры. Соответствующие конфигурации при различных значениях параметров l и B приведены на Рис. 1.

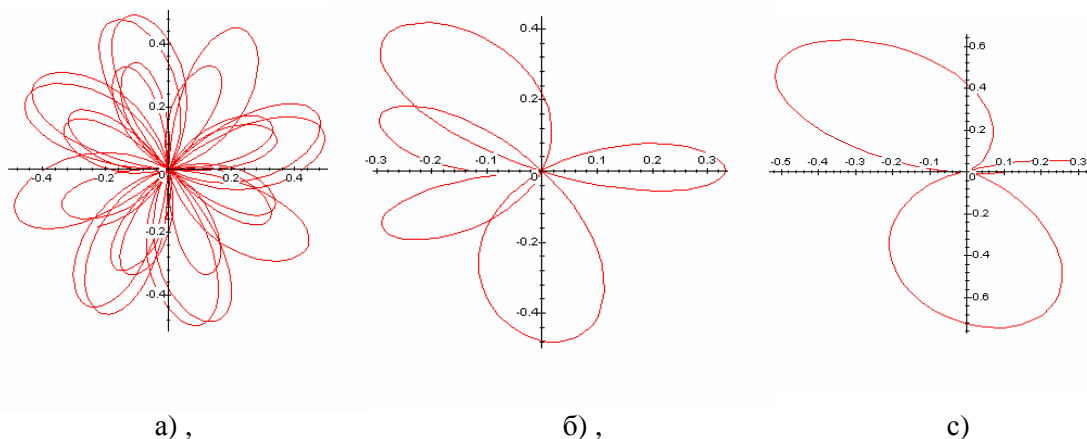


Рис. 1. Конфигурации статической струны реализующиеся при различных значениях параметров l и B в пространстве времени дионной черной дыры.

Возникновение столь сложных структур лишает нас надежды получить общее решение уравнений струны в замкнутом виде и по этой причине необходимо привлекать численные методы. Однако для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных готовых рецептов не существует и в настоящее время. Более того, весьма редко можно найти в литературе сравнение численных алгоритмов различных авторов и доскональное исследование каждого данного алгоритма. Особенно это касается нелинейных уравнений. Следовательно, требуется еще огромная работа как по теоретическому исследованию применяемых методов, так и по анализу их практического применения.

ВЫВОДЫ

Подводя итоги, следует отметить, что полученные выше точное решение представляет интерес по трем причинам. Во первых некоторые интегральные характеристики фонового пространства оказываются закодированными в свойствах струны, т.е. в свойствах 2-мерной теории на ее мировой поверхности. Подобный метод широко применяется в различных областях естествознания, часто его называют томографией, или преобразованием Радона. Во вторых, как отмечалось выше, в области нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных численный анализ до сих пор является самым сложным. Поэтому любые точные решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных является очень ценным, т.к. может служить в качестве теста при отработке того или иного численного метода. В третьих, точные решения могут служить основой для построения квантовой теории струн в искривленных пространствах.

Авторы выражают глубокую благодарность Арифову Л.Я. и Желтухину А.А. за обсуждение полученных результатов.

Список литературы

1. Vachaspati T., Vilenkin A. Formation and evolution of cosmic strings. Phys. Rev. D. 30. 1984, p. 2036-2045.
2. Vilenkin A., Shellard E.P.S. Cosmic strings and other topological defects. Cambridge University Press, 1994.- 495p.
3. Peebles P.J.E. Principles of Physical Cosmology. – Princeton University Press, 1994. – 850 p.
4. Swapna Mahapatra, String Propagation in Four – Dimensional Dyonic Black Hole Background, hep – th/9608028.
5. Крамер Д., Штефани Х., Мак-Куллум М. Точные решения уравнений Эйнштейна. М. Наука, 1982г. - 415с.

Леяков О.П. Рошчупкин С.М. Діонна чорна діра і точні статичні конфігурації струни // Учені записки Таврійського національного університету ім. В. І. Вернадського. – 2007. – Серія «Фізика». - Т. 20 (59). - № 1. - С. 21 - 25.

У роботі знайдені статичні розв'язки рівнянь руху і зв'язків для струни в чотирьох вимірному просторі-часі діонної чорної діри.

Ключові слова: струна, точні розв'язки, діонна чорна діра

Lelyakov A.P. Roshchupkin S.N. The dyonic black hole and static exact string configurations // Uchenye zapiski Tavricheskogo Natsionalnogo Universiteta im. V.I. Vernadskogo. – 2007. – Series «Fizika». – V. 20 (59). - № 1. – P.21 - 25.

The static solutions for equations of motion and constraints in four-dimensional space-time of dyonic black hole are find.

Keywords: string, exact solution, dyonic black hole.

Поступила в редакцію 23.02.2007 г.