Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 26–35.

Е. В. Божонок

ПРОСТЫЕ ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ K–ГЛАДКОСТИ ОСНОВНОГО ВАРИАЦИОННОГО ФУНКЦИОНАЛА В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА W_2^1

Получены простые достаточные условия K–гладкости основного вариационного функционала в пространстве Соболева W_2^1. Исследована их связь с классическими условиями на рост интегранта. Рассмотрены примеры.

Введение. Предварительные сведения

Активно ведущиеся в последние десятилетия исследования по экстремумам вариационных функционалов в пространствах Соболева показали, что в пространствах с гильбертовой интегральной метрикой основной вариационный функционал обладает значительно худшими аналитическими свойствами, чем в случае банаховых пространств типа C^k. Так, в частности, в ([1]) установлено, что вариационный функционал не является дважды дифференцируемым по Фреше в пространстве Соболева W_2^1. В работах ([2], [3], [4]) установлены некоторые варианты слабой непрерывности и слабой дифференцируемости в пространствах с интегральной метрикой. В работах ([5], [6]) было показано, что в пространстве Соболева W_2^1 вариационный функционал обладает более сильным свойством повторной компактной дифференцируемости.

В работе [7] введено понятие псевдоквадратичного функционала и показано, что требование псевдоквадратичности по y' интегранта обеспечивает корректную определенность вариационного функционала в пространстве Соболева W_2^1. Далее введены вейерштрассовские классы псевдоквадратичных функционалов $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$ и показано, что попадание интегранта в подходящий вейерштрассовский класс гарантирует, соответственно, K–непрерывность, K–дифференцируемость и повторную K–дифференцируемость основного вариационного функционала в пространстве W_2^1.

В данной статье установлены простые достаточные условия принадлежности интегранта подходящим вейерштрассовским классам и исследована их связь с классическими оценками роста интегранта. Рассмотрены конкретные примеры.

Приведем необходимые определения и результаты ([5]–[8]).

Определение 1. Говорят, что борелевское отображение $f : \Omega \times Y \times Z =: T \to F$, где Ω—компактное пространство с конечной борелевской мерой, Y, Z, F—вещественные банаховы пространства, *псевдоквадратичное по* z ($f \in K_2(z)$), если f можно представить в виде:

$$f(x,y,z) = P(x,y,z) + Q(x,y,z) \cdot \|z\| + R(x,y,z) \cdot \|z\|^2, \tag{1}$$

где для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ борелевские отображения P, Q, и R существенно по $x \in \Omega$ ограничены на $T_C = \Omega \times C_Y \times Z$.

Определение 2. Говорят, что отображение f *вейерштрассовское псевдоквадратичное*: $f \in WK_2(z)$, если представление (1) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ отображения P, Q и R равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Определение 3. Говорят, что отображение f *принадлежит классу* $W^1K_2(z)$, если представление (1) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ не только P, Q и R, но также и градиенты $\nabla P := \nabla_{yz}P$, $\nabla Q := \nabla_{yz}Q$, $\nabla R := \nabla_{yz}R$ равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Определение 4. Говорят, что отображение f *принадлежит классу* $W^2K_2(z)$, если представление (1) можно выбрать таким образом, что для любого компакта $C = C_Y \subset Y$ не только P, Q, R, их градиенты ∇P, ∇Q, ∇R, но и гессианы $H(P) := H_{yz}(P)$, $H(Q) := H_{yz}(Q)$, $H(R) := H_{yz}(R)$ равномерно непрерывны и ограничены на T_C.

Замечание 1. Отметим, что представление $f = P + Q \cdot \|z\| + R \cdot \|z\|^2$ функции $f \in K_2(z)$ ($f \in WK_2(z)$, $f \in W^1K_2(z)$, $f \in W^2K_2(z)$) можно, не меняя общности рассуждений, заменить представлением

$$f = \widetilde{P} + \widetilde{R} \cdot \|z\|^2 \tag{2}$$

при сохранении требований определений 1, 2, 3, 4.

Определение 5. Пусть E—вещественное банахово пространство, $\Phi : E \to \mathbb{R}$—функционал на E. Говорят, что функционал Φ *компактно непрерывен* (K–*непрерывен*) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + span\, C)$ непрерывно в y относительно банаховой нормы $\|\cdot\|_C$ в $span\, C$, порожденной C.

Аналогично, говорят, что Φ *компактно (дважды) дифференцируем* (K–*дифференцируем, дважды* K–*дифференцируем*) в точке $y \in E$, если для любого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ сужение Φ на $(y + span\, C)$ (дважды) дифференцируем по Фреше в y относительно $\| \cdot \|_C$.

Обозначим через $\Phi'_K(y)$ и $\Phi''_K(y)$ первую и вторую K–производные Ψ, соответственно.

В [7] были получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, E—*банахово пространство*, $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times E^2 \to \mathbb{R}$. *Тогда при* $f \in K_2(z)$ *вариационный функционал Эйлера-Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_{\Omega} f(x, y, y')dx, \quad y(\cdot) \in W_2^1(\Omega, E), \tag{3}$$

определен всюду на $W_2^1(\Omega, E)$.

Теорема 2. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, H—*вещественное гильбертово пространство*, $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. *Если* $f \in WK_2(z)$, *то функционал Эйлера-Лагранжа* (3) K–*непрерывен всюду на* $W_2^1(\Omega, H)$.

Теорема 3. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, H—*вещественное гильбертово пространство*, $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. *Если* $f \in W^1K_2(z)$, *то функционал Эйлера-Лагранжа* (3) K–*дифференцируем всюду на* $W_2^1(\Omega, H)$; *при этом*

$$\Phi'_K(y)h = \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y')h' \right] dx \tag{4}$$

Теорема 4. *Пусть* $\Omega = [a; b]$, H—*вещественное гильбертово пространство*, $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times H^2 \to \mathbb{R}$. *Если* $f \in W^2K_2(z)$, *то функционал Эйлера-Лагранжа* (3) *дважды* K–*дифференцируем всюду на* $W_2^1(\Omega, H)$; *при этом*

$$\Phi''_K(y)(h, k) = \int\limits_{\Omega} \Big[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, y')(h, k) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, y')((h', k) + (h, k')) + \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y')(h', k') \Big] dx. \tag{5}$$

Замечание 2. Отметим, что K–аналитические свойства слабее классических. В [9] рассмотрен пример интегрального функционала, который является K–непрерывным в W_2^1, но при этом разрывным в нуле в обычном смысле. Кроме того, в [1] было впервые доказано, что вариационный функционал (3) в пространстве W_2^1 в общем случае не является дважды сильно дифференцируемым (за исключением чисто квадратичного случая по y'). Нами получено в теореме 4 условие более слабого свойства повторной К-дифференцируемости для более широкого класса псевдоквадратичных интегрантов (см. примеры 1, 2).

1. Достаточные условия принадлежности интегранта классам $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$

Как было выяснено выше, достаточными условиями K–непрерывности, K–дифференцируемости, повторной K–дифференцируемости функционала Эйлера–Лагранжа (3) являются условия попадания интегранта $f(x, y, z)$ в классы $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$ соответственно. В данном пункте мы опишем условия на коэффициенты P и R в представлении $f = P + R \cdot \|z\|^2$, при которых f попадает в указанные классы.

Сначала выясним необходимые и достаточные условия попадания функции f в класс $WK_2(z)$. Для этого введем вспомогательное понятие.

Определение 6. Борелевское отображение $G : \Omega \times Y \times Z =: T \to F$, где Ω—компактное пространство с конечной борелевской мерой, Y, Z, F—вещественные банаховы пространства, назовем *вейерштрассовским по* y ($G \in W_K(y)$), если для любого абсолютно выпуклого компакта $C = C_Y \subset Y$ G равномерно непрерывно и ограничено на $T_C = \Omega \times C_Y \times Z$.

Из определения 1 немедленно следует

Предложение 1. *Пусть, в обозначениях определения 1 функция f представима в виде*

$$f = P + R \cdot \|z\|^2. \tag{6}$$

Тогда $f \in WK_2(z)$ в том и только в том случае, когда $P \in W_K(y)$, $R \in W_K(y)$.

Для описания достаточных условий попадания функции f в класс $W^1K_2(z)$, введем следующее

Определение 7. Пусть, в обозначениях определения 6, Y, Z—гильбертовы пространства и функция G непрерывно дифференцируема в $\Omega \times Y \times Z$ по (y, z). Будем говорить, что $G \in W^1_K(y)$ (C^1*–вейерштрассовская по* y), если $(G, \nabla_{yz}G) \in W_K(y)$, или, что равносильно, $\partial^k_i G \in W_K(y)$, $k = 0, 1$; $i = y, z$.

Справедливо следующее

Предложение 2. *Пусть, в обозначениях определения 1, функция f представлена в виде* (6). *Если $P, R \in W^1_K(y)$, то $f \in W^1K_2(z)$.*

Доказательство. Из определения 7 следует, что $W^1_K(y) \subset W_K(y)$, откуда, по предложению 1, $f \in WK_2(z)$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$\nabla_{yz} f = \nabla_{yz} P + [2(0, R) \cdot \langle z, \cdot\rangle + \nabla_{yz} R \cdot \|z\|^2]. \tag{7}$$

Пусть $1 = \psi_1(\|z\|) + \psi_2(\|z\|)$—разложение единицы в $\mathbb{R}$, ψ_i равномерно непрерывны и ограничены, $0 \le \psi_i \le 1$ ($i = 1, 2$), $supp\, \psi_1 \subset [0; M]$, $supp\, \psi_2 \subset [M - \delta; \infty)$ ($M < \infty$).

Перепишем (7) в виде:

$$\nabla_{yz} f = \left[\nabla_{yz} P + 2(0,R)\cdot\psi_1(\|z\|)\cdot\langle z,\cdot\rangle\right]+$$

$$+\left[2(0,R)\cdot\psi_2(\|z\|)\cdot\frac{\langle z,\cdot\rangle}{\|z\|^2}+\nabla_{yz}R\right]\cdot\|z\|^2 =: \widetilde{P}+\widetilde{R}\cdot\|z\|^2.$$

При этом

a) $\nabla_{yz}P \in W_K(y)$, $(0,R)\in W_K(y)$, $\psi_1(\|z\|)$ равномерно непрерывна и ограничена, $\|\langle z,\cdot\rangle\| \le M$ при $\|z\| \in \mathit{supp}\,\psi_1$, откуда $\widetilde{P}\in W_K(y)$.

b) $(0,R)\in W_K(y)$, $\psi_2(\|z\|)$ равномерно непрерывна и ограничена, $\langle z,\cdot\rangle/\|z\|^2$ равномерно непрерывна и ограничена при $\|z\|\in[M-\delta;\infty)$, $\nabla_{yz}R\in W_K(y)$, откуда $\widetilde{R}\in W_K(y)$.

Следовательно, по предложению 1, $\nabla_{yz}f \in WK_2(z)$, откуда, по определению 1, $f\in W^1K_2(z)$. □

Теперь рассмотрим достаточные условия попадания функции f в класс $W^2K_2(z)$. Для этого введем следующее

Определение 8. Пусть, в обозначениях определения 6, Y, Z—гильбертовы пространства и функция G дважды непрерывно дифференцируема в $\Omega\times Y\times Z$ по (y,z). Будем говорить, что $G\in W_K^2(y)$ (C^2*–вейерштрассовская по* y), если $(G,\nabla_{yz}G,H_{yz}G)\in W_K(y)$, или, что равносильно, $\partial_{ij}^k G\in W_K(y)$, $k=0,1,2$; $i,j=y,z$.

Справедливо следующее

Предложение 3. *Пусть, в обозначениях определений 1, функция f представлена в виде* (6). *Если $P,R\in W_K^2(y)$, то $f\in W^2K_2(z)$.*

Доказательство. Из определения 8 следует, что $W_K^2(y)\subset W_K^1(y)$, откуда, по предложению 2, $f\in W^1K_2(z)$.

Непосредственные вычисления показывают, что

$$H_{yz}f = [H_{yz}P + 2(0,R)\cdot\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle] + [4(0,\nabla_{yz}R)\cdot\langle z,\cdot\rangle + H_{yz}R\cdot\|z\|^2]. \tag{8}$$

Используем снова разложение единицы в $\mathbb{R}:\ 1=\psi_1(\|z\|)+\psi_2(\|z\|)$, где ψ_i равномерно непрерывны и ограничены, $0\le\psi_i\le 1$ $(i=1,2)$, $\mathit{supp}\,\psi_1\subset[0;M]$, $\mathit{supp}\,\psi_2\subset[M-\delta;\infty)$ $(M<\infty)$.

Тогда (8) перепишется в виде:

$$H_{yz}f = \left[H_{yz}P + 2(0,R)\cdot\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle + 4(0,\nabla_{yz}R)\cdot\psi_1(\|z\|)\cdot\langle z,\cdot\rangle\right]+$$

$$+\left[4(0,\nabla_{yz}R)\cdot\psi_2(\|z\|)\cdot\frac{\langle z,\cdot\rangle}{\|z\|^2}+H_{yz}R\right]\cdot\|z\|^2 =: \widetilde{P}+\widetilde{R}\cdot\|z\|^2.$$

При этом

a) $H_{yz}P \in W_K(y)$, $(0, R) \in W_K(y)$, $\psi_1(\|z\|)$ равномерно непрерывна и ограничена, $\|\langle\cdot,\cdot\cdot\rangle\| \le 1$, $(0, \nabla_{yz}R) \in W_K(y)$, $\|\langle z, \cdot\rangle\| \le M$ при $\|z\| \in supp\,\psi_1$, откуда $\widetilde{P} \in W_K(y)$.

b) $(0, \nabla_{yz}R) \in W_K(y)$, $\psi_2(\|z\|)$ равномерно непрерывна и ограничена, $\langle z, \cdot\rangle/\|z\|^2$ равномерно непрерывна и ограничена на $\|z\| \in [M-\delta; \infty)$, $H_{yz}R \in W_K(y)$, откуда $\widetilde{R} \in W_K(y)$.

Следовательно, по предложению 2, $H_{yz}f \in WK_2(z)$, откуда, по определению 1, $f \in W^2K_2(z)$. □

Пример 1. Рассмотрим, как частный случай, интегрант вида $f(x,y,z) = \varphi(z)\cdot\|z\|^2 + \psi(x,y)$. Если $\varphi, \psi \in W_K^2(y)$, то, в силу предложения 3, $f \in W^2K_2(z)$. Эти достаточные условия легко записать на языке джетов второго порядка функций φ и ψ :

a) джет $J^2\varphi(z) = (\varphi(z), \varphi'(z), \varphi''(z))$ равномерно непрерывен и ограничен на Z,

b) джет $J_y^2\psi(x,y) = (\psi(x,y), \psi_y'(x,y), \psi_{y^2}''(x,y))$ равномерно непрерывен и ограничен на $\Omega \times C_Y$ для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset Y$.

Пример 2. Рассмотрим интегрант вида $f(x,y,z) = \varphi(x,y)\cdot\|z\|^2 + \psi(x,y,z)$. Тогда $f \in W^2K_2(z)$, если джеты второго порядка функций φ и ψ :

$$J^2\varphi(x,y) = (\varphi(x,y), \varphi_y'(x,y), \varphi_{y^2}''(x,y))$$

и

$$J_{yz}^2\psi(x,y,z) = \left(\psi, (\psi_y', \psi_z'), \begin{pmatrix} \psi_{y^2}'' & \psi_{yz}'' \\ \psi_{zy}'' & \psi_{z^2}'' \end{pmatrix}\right)$$

равномерно непрерывны и ограничены на $\Omega \times C_Y$ для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset Y$.

Замечание 3. Отметим, что в приведенных примерах отсутствует, вообще говоря, чистая квадратичность интегранта по z. Тем самым, по теореме Скрыпника (см. [1]), отсутствует повторная сильная дифференцируемость $\Phi(y)$. В тоже время, в силу теоремы 3, $\Phi(y)$ является дважды K-дифференцируемым.

2. Сравнение полученных условий с классическими оценками роста интегранта

Во многих работах по абсолютным экстремумам вариационных функционалов в пространствах Соболева $W_p^1([a;b], \mathbb{R})$ на интегрант $f(x,y,z)$ налагается так называемое *условие роста по* z ([10], [11])

$$f(x,y,z) \ge \alpha|z|^p + \beta, \quad \text{где } \alpha > 0,\ \beta \in \mathbb{R}.$$

В частности, при $p = 2$ условие роста принимает вид:

$$f(x, y, z) \geq \alpha z^2 + \beta.$$

Напомним, что классическая *теорема Тонелли* ([10]) утверждает, что, в предположениях гладкости по x и y, гладкости и выпуклости по z интегранта, выполнении условия p–роста и корректной определенности всюду в $W_p^1([a;b], \mathbb{R})$ основной вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y(x), y'(x))dx, \quad \text{где } y(\cdot) = W_p^1([a;b], \mathbb{R}), \tag{9}$$

достигает абсолютного минимума в $W_p^1([a;b], \mathbb{R})$. При этом $\Phi(y)$ слабо полунепрерывен снизу (проверка чего является ядром доказательства теоремы).

Условие же корректной определенности $\Phi(y)$ в W_p^1 обеспечивается, как правило, *ограничением на рост сверху (условием роста не выше p-ой степени)* ([10], [12], [13]):

$$f(x, y, z) \leq \gamma |z|^p + \delta, \quad \text{где } \gamma > 0,\ \delta \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, условие p–роста вместе с условием роста не выше p-ой степени приводит, в случае W_2^1, к условию двойной оценки:

$$\alpha z^2 + \beta \leq f(x, y, z) \leq \gamma z^2 + \delta \tag{10}$$

(как правило, вместе с условием выпуклости по z).

Сравним найденные в теоремах 1, 2, 3 и 4 условия на интегрант f с условием (10) (в случае $W_2^1([a;b], \mathbb{R})$).

1) Условие $f \in K_2(z)$ в теореме 1 о корректной определенности $\Phi(y)$ в W_2^1 означает, по определению 1, представимость f в виде

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + R(x, y, z) \cdot z^2, \tag{11}$$

где для любого компакта $C = C_Y \subset \mathbb{R}$ отображения P, R существенно по $x \in [a;b]$ ограничены на $[a;b] \times C_Y \times \mathbb{R}$. Следовательно, оценка сверху $f(x, y, z) \leq \gamma z^2 + \delta$ требуется лишь локально по y, квадратичная оценка снизу из (10) вообще не требуется.

2) Условие $f \in WK_2(z)$ в теореме 2 о K–непрерывности $\Phi(y)$ выполнено, согласно предложению 1, если в представлении (11) $P, R \in W_K(y)$.

Здесь также, переходя к супремумам на каждом компакте по y, мы получаем локальное по y условие роста не выше квадратичного:

$$f(x, y, z) \leq \sup_{\substack{x \in [a;b], \\ z \in \mathbb{R}, y \in C_Y}} P(x, y, z) + \left(\sup_{\substack{x \in [a;b], \\ z \in \mathbb{R}, y \in C_Y}} R(x, y, z) \right) \cdot z^2,$$

где $\delta = \sup\limits_{\substack{x\in[a;b],\\ z\in\mathbb{R},y\in C_Y}} P(x,y,z)$ и $\gamma = \sup\limits_{\substack{x\in[a;b],\\ z\in\mathbb{R},y\in C_Y}} R(x,y,z)$ зависят от компакта C_Y. Сформулируем полученный результат в виде предложения.

Предложение 4. *Если $f(x,y,z) = P(x,y,z) + R(x,y,z)\cdot z^2$, где $P,R \in W_K(y)$ на $[a;b]\times\mathbb{R}_Y\times\mathbb{R}_Z$, то f локально по y имеет рост по z не выше квадратичного: для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset \mathbb{R}_Y$ существуют такие $\gamma > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$, зависящие от C_Y, что*

$$f(x,y,z) \le \gamma z^2 + \delta,$$

для любых $x \in [a;b]$, $z \in \mathbb{R}_Z$.

Условие квадратичного роста (квадратичная оценка снизу) будет иметь место локально лишь при $R \ge r^2_{C_Y} > 0$ и $P \ge p_{C_Y}$ на каждом компакте C_Y:

$$f(x,y,z) \ge \inf_{\substack{x\in[a;b],\\ z\in\mathbb{R},y\in C_Y}} P(x,y,z) + \left(\inf_{\substack{x\in[a;b],\\ z\in\mathbb{R},y\in C_Y}} R(x,y,z)\right)\cdot z^2.$$

В частности, если R и P не зависят от z, и R положительно, то по теореме Вейерштрасса, для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset \mathbb{R}_Y$ $\inf\limits_{\substack{x\in[a;b],\\ y\in C_Y}} R(x,y) > 0$, $\inf\limits_{\substack{x\in[a;b],\\ y\in C_Y}} P(x,y) > -\infty$.

Сформулируем полученный результат в виде предложения.

Предложение 5. *Если $f(x,y,z) = P(x,y) + R(x,y)\cdot z^2$, где $P,R \in W_K(y)$ на $[a;b]\times\mathbb{R}_Y$ и $R(x,y) > 0$, то для любого абсолютно выпуклого компакта $C_Y \subset \mathbb{R}_Y$ существуют такие $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, зависящие от C_Y, что*

$$f(x,y,z) \ge \alpha z^2 + \beta,$$

для любых $x \in [a;b]$, $z \in \mathbb{R}_Z$.

Заметим, что в условиях последнего предложения f является выпуклой по z для любых $x \in [a;b]$, $y \in \mathbb{R}_Y$.

Рассмотрим некоторые конкретные примеры

Пример 3. Функция

$$f_1(x,y,z) = e^y\cdot z^2 + \sin(x+y+z)$$

локально по y удовлетворяет оценке (10):

$$(y \in [m;M]) \Rightarrow (e^m\cdot z^2 - 1 \le f_1(x,y,z) \le e^M\cdot z^2 + 1).$$

Пример 4. Функция

$$f_2(x,y,z) = e^y\sin^2(x+y+z)\cdot z^2$$

локально по y удовлетворяет только верхней оценке (10):

$$(y \in [m; M]) \Rightarrow (f_2(x, y, z) \leq e^M \cdot z^2),$$

так как при любом $y \in \mathbb{R}:\ f_2(x, y, z) = 0$ при некоторых $x, z \in \mathbb{R}$.

Отметим, что обе рассматриваемые функции принадлежат классу $WK_2(z)$ (и даже $W^2K_2(z)$), при этом ни одна из них не удовлетворяет оценкам (10) глобально по y. Заметим также, что как $f_1(x, y, z)$, так и $f_2(x, y, z)$ не являются выпуклыми по z. Таким образом, полученные условия на f являются более общими, чем соответствующие классические двухсторонние оценки роста интегранта в W_2^1.

Замечание 4. Условие $f \in WK_2(z)$, разумеется, не гарантирует слабой полунепрерывности снизу функционала $\Phi(y)$. Однако, согласно теореме 2, $\Phi(y)$ будет при этом условии K–непрерывным. В случае же $f \in W^2K_2(z)$ (как в рассмотренных выше примерах) $\Phi(y)$ будет дважды K–дифференцируемым. Кроме того, можно отметить, что Φ может достигать компактного минимума ([5]), который при этом не является локальным (а тем более, абсолютным), без двойной квадратичной оценки (10) и без условия выпуклости по z.

Выводы

В работе получены простые достаточные условия принадлежности интегранта вейерштрассовским классам $WK_2(z)$, $W^1K_2(z)$, $W^2K_2(z)$, что, в свою очередь, гарантирует, соответственно, K–непрерывность, K–дифференцируемость и повторную K–дифференцируемость вариационного функционала в пространстве Соболева W_2^1. Исследована их связь с классическими условиями на рост интегранта. Рассмотрены примеры.

Автор выражает благодарность И.В. Орлову за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] Скрыпник И.В. *Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка.* – К.: Наукова думка, 1973. – 219 С.

[2] Згуровский М.З., Мельник В.С. *Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами.* – К.: Наукова думка, 1999. – 630 С.

[3] Hencl S., Kolář J., Pangrác O. *Integral functionals that are continuous with respect to the weak topology on* $W_0^{1,p}(0;1)$ // Preprint submitted to Elsevier Science 3 May 2005. – 8 P.

[4] Marcellini P., Sbordone C. *Semicontinuity Problems in the Calculus of Variations* // Nonlinear Anal. – 1980. – Vol. 4. – P. 241–257.

[5] Орлов И.В. *K–дифференцируемость и K–экстремумы* // Украинский математический вестник. – 2006. – Т. 3, № 1. – С. 97–115.

[6] Orlov I. V. *Extreme Problems and Scales of the Operator Spaces* // North–Holland Math Studies., Functional Analysis and its Applications. — Amsterdam–Boston–...: Elsevier. – 2004. – Vol. 197. – P. 209–228.

[7] Орлов И.В., Божонок Е.В. *Условия существования, K–непререрывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева* W_2^1 // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2006. – Т. 19(58), № 2. – С. 63–78.

[8] Орлов И.В. *Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2008. – Т. 29. – С. 165–175.

[9] Божонок Е.В. *Пример K-непрерывного, разрывного вариационного функционала в пространстве Соболева* // Динамические системы (межвед. науч. сб.). – Симферополь: ТНУ, 2007. – Вып. 22. – С. 140–144.

[10] Тихомиров В.М., Фурсиков А.В. *Существование решений экстремальных задач.* – http://lib.mexmat/ru/books/9645. – 39 С.

[11] Dacorogna B. *Direct methods in the calculus of variations.* – New York: Springer–Verlag, 1989. – 228 P.

[12] Ambrosio L., Fonseca I., Marcellini P. and Tartar L. *On a volume–constrained variational problem* // Arch. Ration. Mech. Anal. – 1999. – Vol. 149(1). – P. 21—47.

[13] Mosconi S., Tilli P. *Variational problems with several volume constraints on the level sets* // Calc. Var. Partial Differential Equations. – 2002. – Vol. 14. – P. 233–247

Отримано прості достатні умови K–гладкості основного варіаційного функціонала в просторі Соболєва W_2^1. Досліджений їх зв'язок із класичними умовами на ріст інтегранта. Розглянуто приклади.

The simple sufficient conditions of K–smoothness of the basic variational functional in Sobolev space W_2^1 are obtained. The connection between these conditions and the classical growth conditions for integrand is investigated. The examples are considered.