Ученые записки Таврического национального университета имени В.И.Вернадского
Серия «Физика». Том 20 (59). 2007 г. № 1. С. 14-20

УДК 539. 391+514. 764.2

ВНЕШНИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ СТРУНЫ ПОСТОЯННОГО РАДИУСА

Леляков А.П.

Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: lelyakov@ tnu.crimea.ua

В роботе получены внешние, точные решения уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны постоянного (неизменного со временем) радиуса, которая движется вдоль оси Z и в каждый момент времени полностью лежит в плоскости, ортогональной этой оси.
Ключевые слова: нуль-струна, точные решения, космология

ВВЕДЕНИЕ

Струнные теории уже не одно десятилетие находятся в состоянии неуклонного поступательного развития. Несмотря на проблемы, неизбежные для любой развивающейся теории, они очаровывают как уже известными результатами, так и большими возможностями в перспективе. В современной физике, уже достаточно прочно укоренилась мысль, что исследование многомерных объектов, частью которых и являются струны, может стать еще одним недостающим кирпичиком в нашем понимании природы.

Одно из направлений теории струн – исследование роли этих объектов в космологии. Калибровочные теории Великого объединения, основанные на идее спонтанного нарушения симметрии, предсказывают возможность образования в процессе фазовых переходов в ранней Вселенной одномерных топологических дефектов, которые получили название космических струн. В связи с чем, заслуживающим исследования является вопрос о влиянии или о степени влияния этих объектов на дальнейшее развитие Вселенной. В современной научной литературе, посвященной данной тематике, можно выделить целые направления приложений космических струн к решению тех или иных проблем современной космологии, наиболее часто обсуждаемые из которых это струнные механизмы образования первичных неоднородностей плотности вещества, проблема черной материи, инфляционный сценарий с участием струн и т.д. Так же, вселяющим оптимизм могут служить и все чаще появляющиеся роботы, посвященные попытке экспериментального обнаружения космических струн в наблюдаемой части Вселенной [1].

Предлагаемая работа посвящена дальнейшему развитию одного из фундаментальных направлений исследования струнной космологии, а именно исследованию гравитационного поля порождаемого струной. Основной трудностью, с которой приходится сталкиваться при исследовании такого рода задач является сингулярность компонент тензора энергии импульса для струны (нуль-струны), причиной возникновения которой есть устоявшийся математический формализм использующийся в настоящее время для описании космических струн. Все дело в том, что по существующим в литературе оценкам [2] радиус поперечного сечения струны $\rho_s \approx 10^{-29}$ $см.$ поэтому для их описании используется вполне разумное приближение в котором положение струны задается линией в D-мерном пространстве времени, тогда траекторией струны является двумерная мировая поверхность а действие для струны выбирается пропорциональным площади этой мировой поверхности [3]. Именно отказ от трех мерности или "размазанности" струны и является причиной возникновения сингулярности в струнном тензоре энергии импульса. При этом необходимо понимать, что простой переход в компонентах тензора энергии импульса от дельта функций к дельта-функционным последовательностям, в чем собственно и должна заключаться процедура "размазывания", может и не дать желаемого результата. Поскольку не существует механизма позволяющего учесть возможного появления слагаемых (множителей), которые при стягивании этого распределения в одномерный объект обращаются в ноль (константу).

Все вышеизложенное и определяет ценность внешних решений уравнений Эйнштейна для струн (нуль-струн), которые в дальнейшем можно рассматривать как ассимптотические или граничные условия при анализе уравнений Эйнштейна с "размазанным" струнным тензором энергии импульса.

1. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ ИМПУЛЬСА ДЛЯ НУЛЬ-СТРУНЫ

Тензор энергии импульса для нуль-струны имеет следующий вид [4]:

$$T^{mn}\sqrt{-g} = \gamma \int d\tau d\sigma x^m_{,\tau} x^n_{,\tau} \delta^4(x^l - x^l(\tau,\sigma)), \qquad (1)$$

где: индексы m, n, l принимают значения $0, 1, 2, 3$; функции $x^m = x^m(\tau,\sigma)$ определяют траекторию движения нуль-струны; τ и σ параметры на мировой поверхности нуль-струны; $x^m_{,\tau} = \partial x / \partial \tau$; g_{mn} метрический тензор внешнего пространства времени; $g = |g_{mn}|$; $\gamma = const.$

В цилиндрической системе координат ($x^0 = t, x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = z$) функции $x^m(\tau,\sigma)$ определяющие траекторию движения замкнутой нуль-струны постоянного (неизменного со временем) радиуса R, которая движется вдоль оси z и в каждый момент времени полностью лежит в плоскости, ортогональной этой оси, имеют следующий вид:

$$t = \tau,\ \rho = R = const.,\ \theta = \sigma,\ z = \pm\tau, \qquad (2)$$

где знак $\pm$ соответствует выбору направления движения, в дальнейшем для определенности выберем в (2) знак "-". Тогда ненулевыми компонентами тензора (1) для (2), будут следующие

$$T^{00} = T^{11} = -T^{03} = \frac{\gamma}{\sqrt{-g}}\delta(t+z)\delta(\rho - R)\cdot \qquad (3)$$

Поскольку для сохраняющейся траектории движения (2), все направления на гиперповерхностях $z = const.$ эквивалентны то метрические функции

$$g_{mn} = g_{mn}(t, \rho, z), \qquad (4)$$

тогда используя инвариантность квадратичной формы при замене θ на $-\theta$ получаем

$$g_{02} = g_{12} = g_{32} = 0, \qquad (5)$$

так же используя свободу выбора систем координат в ОТО зафиксируем ее выбором

$$g_{01} = g_{30} = g_{31} = 0. \qquad (6)$$

Учитывая (4) – (6) квадратичная форма, для решаемой задачи может быть представлена в виде

$$dS^2 = e^{2\nu}(dt)^2 - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2 - e^{2\mu}(dz)^2, \qquad (7)$$

где: ν, μ, A, B, функции переменных t, ρ, z.

2. ДВИЖЕНИЕ ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ-СТРУНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ (7)

Движение нуль-струны в псевдоримановом пространстве определяется следующей системой уравнений [5]:

$$x^m_{,\tau\tau} + \Gamma^m_{pq} x^p_{,\tau} x^q_{,\tau} = 0, \qquad (8)$$

$$g_{mn} x^m_{,\tau} x^n_{,\tau} = 0, \; g_{mn} x^m_{,\tau} x^n_{,\sigma} = 0, \qquad (9)$$

где (8) это уравнения движения нуль-струны а (9) уравнения связи, Γ^m_{pq} символы Кристофелля внешнего пространства времени.

Поскольку траектория (2) должна быть одним из частных решений уравнений движения, то можно получить уравнения (связи) на метрические функции, при которых траектория движения нуль-струны, задаваемая (2), остается неизменной. Используя (2) можно заметить, что все уравнения (8),(9) переходят в тождества при двух дополнительных условиях

$$\nu = \mu, \; \nu = \nu(q, \rho) \qquad (10)$$

где $q = t + z$. Таким образом, условием того, что траектория движения замкнутой нуль-струны, задаваемая (2), будет сохраняться при движении в собственном гравитационном поле, есть выполнение равенств (10).

Используя (10) для (7) получим

$$dS^2 = e^{2\nu}\left((dt)^2 - (dz)^2\right) - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2, \qquad (11)$$

где: $\nu = \nu(q,\rho),\ A = A(t,z,\rho),\ B = B(t,z,\rho),\ q = t + z$.

Отметим, что ненулевые ковариантные компоненты тензора энергии импульса для (11) имеют следующий вид

$$T_{00} = T_{33} = T_{03} = \gamma\left(e^{2\nu}\big/\sqrt{AB}\right)\delta(q)\delta(\rho - R). \tag{12}$$

3. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ (11), (12)

Построив и проанализировав систему уравнений Эйнштейна для метрики (11), при условии (12), можно однозначно определить функциональную зависимость метрических функций

$$\nu = \nu(q),\ A = A(q,\rho),\ B = B(q,\rho). \tag{13}$$

а оставшиеся уравнения для (13) записать в следующем виде

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right) - 2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A} + \frac{B_{,q}}{B}\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^2 + \left(\frac{B_{,q}}{B}\right)^2\right) = \chi T_{00}, \tag{14}$$

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right)^2 - \frac{A_{,\rho}}{4}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B}\right) = 0, \tag{15}$$

$$A_{,\rho}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right) = 0,\quad \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right) - \frac{1}{2}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{A_{,q}}{A} - \frac{B_{,q}}{B}\right) = 0\ . \tag{16}$$

Заметим, что первое из равенств (16) можно выполнить следующими способами

$$A_{,\rho} = 0,\ \mathrm{B}_{,\rho} = 0,\ A = B,\ \Rightarrow\ A = B = A(q), \tag{17}$$

$$A_{,\rho} = 0,\ \mathrm{B}_{,\rho} = 0,\ A \ne B,\ \Rightarrow\ A = A(q),\ B = B(q), \tag{18}$$

$$A_{,\rho} \ne 0,\ \mathrm{B}_{,\rho} \ne 0,\ A = B,\ \Rightarrow\ A = B = A(q,\rho)\ , \tag{19}$$

$$A_{,\rho} = 0,\ \mathrm{B}_{,\rho} \ne 0,\ \Rightarrow\ A = A(q),\ B = B(q,\rho), \tag{20}$$

$$A_{,\rho} \ne 0,\ \mathrm{B}_{,\rho} = 0,\ \Rightarrow\ A = A(q,\rho),\ B = B(q). \tag{21}$$

Внешнее ($q \ne 0,\ \rho \ne R$) решение уравнений Эйнштейна для (17)

Для (17), уравнения (15), (16) выполняются тождественно, а уравнение (14) имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)-2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^{2}\right)=0\,. \tag{22}$$

т.е. фактически имеется единственное дифференциальное уравнение на две искомые функции, из чего следует, что (22) задает целый класс искомых решений (произвольно фиксируя одну из функций в (22) находим выражение для другой). Так например полагая $\nu = const.$, при условии $A_{,q} \neq 0$,получаем

$$A(q)=B(q)=\alpha(q+\lambda)^{2}\,, \tag{23}$$

где $\alpha,\ \lambda$ константы интегрирования. Можно отметить, что выбор $\nu = const.$, вполне разумен, поскольку преобразованием системы координат функцию ν, зависящую только от переменных t, z, для рассматриваемой метрики, всегда можно обратить в константу.

Внешнее решение уравнений Эйнштейна для (18)

Для (18), уравнения (15), (16) так же выполняются тождественно, а уравнение (14) имеет следующий вид

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{A_{,q}}{A}+\frac{B_{,q}}{B}\right)-2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A}+\frac{B_{,q}}{B}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^{2}+\left(\frac{B_{,q}}{B}\right)^{2}\right)=0\,. \tag{24}$$

т.е. опять имеется единственное уравнение но уже на три искомые функции. В этом случае можно произвольно зафиксировать две функции, например $\nu = const.$ (физическое обоснование которого было приведено выше) и $A = const.$, тогда из (24) получаем

$$B(q)=\alpha(q+\lambda)^{2}\,, \tag{25}$$

где $\alpha,\ \lambda$ константы интегрирования.

Внешнее решение уравнений Эйнштейна для (19)

Для (19) система уравнений (14), (16) приводится к виду

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{A_{,\rho}}{A}\right)=0\,,\quad \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)-2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^{2}\right)=0\,. \tag{26}$$

Интегрируя первое из уравнений (26) получаем

$$A(q,\rho)=\beta(q)e^{\lambda(q)\rho}\,, \tag{27}$$

где $\beta(q),\ \lambda(q)$ “константы” интегрирования. Здесь важно отметить, что поскольку удаляясь по ρ от струны, влияние ее гравитационного поля должно уменьшатся (т.е. в пределе $\rho \to \infty$, метрические функции не должны стремится в бесконечность), функция $\lambda(q)$ должна быть отрицательной при всех q. Подставляя (27) во второе уравнение (26), получим уравнение на функции $\nu,\ \beta,\ \lambda$, из которого сразу же следует

$$\lambda_{,q}=0,\Rightarrow \lambda=-\tilde{\lambda}=const., \tag{28}$$

но в этом случае при $\rho\to\infty$, $A\to 0$, т.е происходит вырождение метрики, а следовательно этот случай не может быть реализован.

Внешнее решение уравнений Эйнштейна для (20)

Интегрируя (15) для (20) сразу же получаем

$$B(q,\rho)=\beta(q)\left(\rho+\lambda(q)\right)^2. \tag{29}$$

Подставляя (29) во второе из уравнений (16) получим

$$A_{,q}/A=\beta_{,q}/\beta,\ \Rightarrow\ A(q)=\beta(q). \tag{30}$$

Подставляя (29), (30) в (14) получаем $\lambda_{,q}=0,\Rightarrow \lambda=const.$ и уравнение на функции $A(q)$ и $\nu(q)$

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)-2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^2\right)=0, \tag{31}$$

обратим, внимание на то, что полученное уравнение (31) в точности совпало с полученным ранее уравнением (22), тогда используя мотивацию приведенную там получим $A(q)=\alpha(q+\eta)^2$, $B(q,\rho)=A(q)\left(\rho+\lambda(q)\right)^2$, где $\alpha,\ \eta$ константы.

Внешнее решение уравнений Эйнштейна для (21)

Для (21), уравнения (15), (16) выполняются тождественно, а уравнение (14) распадается на следующие два

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{B_{,q}}{B}\right)-2\nu_{,q}\left(\frac{B_{,q}}{B}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{B_{,q}}{B}\right)^2\right)=0 \text{ и}$$

$$\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)-2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)+\frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^2\right)=0, \tag{32}$$

Решение первого из этих уравнений (при $\nu=const.$) есть $B(q)=\alpha(q+\lambda)^2$, а решение второго $A(q,\rho)=\beta(\rho)\left(q+\eta(\rho)\right)^2$, где где $\alpha,\ \lambda$ константы.

В качестве вывода хочу еще раз отметить, что найденные в этой работе точные решения еще нельзя ассоциировать с гравитационным полем нуль-струны, поскольку не известно каким условиям на струне они должны удовлетворять, но эти решения могут рассматриваться как возможные асимптотические условия при анализе уравнений Эйнштейна с “размазанным” струнным тензором энергии импульса.

В заключении хочу выразить свою глубокую благодарность Арифову Л.Я. и Рощупкину С.Н. за направляющие дискуссии и неизменное внимание, проявляемое к моим роботам.

Список литературы

1. Sazhin M., Longo G., Capaccioli M., Alcala J.M., Silvotti R., Covone G., Khovanskaya O., Pavlov M., Pannella M., Radovich M., Testa V. CSL-1: chance projection effect or serendiptious discovery of a gravitational lens induced by a cosmic string? Preprint Astro-ph/0302547.
2. Vilenkin A., Shellard E.P.S. Cosmic strings and other topological defects. – Cambridge University Press, 1994. – 495p.
3. Goto T., Relativistic quantum mechanics of one-dimensional mechanical continuum and subsidiary condition of dual resonance model // Prog. Theor. Phys. –1971. Vol. 46. N. 5. –p. 1560-1569.
4. Roshchupkin S.N., Zheltukhin A.A. Friedman Universes and exactly solution on string cosmology // Class. Quantum. Grav. – 1995. – Vol. 12. – p. 2519–2524.
5. Рощупкин С.Н. Уравнения движения нуль-p-бран в D-мерном римановом пространстве. Спектральные и эволюционные задачи. Вып. 3. Симферополь, 1993. с. 93-94.

Леляков О.П. **Зовнішні розв’язки рівнянь Ейнштейна для замкненої нуль-струни постійного радіуса** // Учені записки Таврійського національного університета ім. В. І. Вернадського. – 2007. – Серія «Фізика». - Т. 20 (59). - № 1. - С. 14 - 20.

У роботі отримані зовнішні розв’язки рівнянь Ейнштейна для замкненої нуль-струни постійного (незмінного з часом) радіуса, що прямує уздовж осі z й у кожен момент часу цілком лежить у площині, ортогональної цієї осі.

Ключові слова: нуль-струна, точні розв’язки, космологія

Lelyakov A.P. **External solutions of Einstein equations for the closed null string of constant radius** // Uchenye zapiski Tavricheskogo Natsionalnogo Universiteta im. V.I. Vernadskogo. – 2007. – Series «Fizika». – V. 20 (59). - № 1. – P. 14 - 20.

In this article, we have received the external solution of Einstein equations for closed null string of constant radius which goes along an axis z and at each moment of time completely lays in a plane, orthogonal this axis.

Keywords: null string, exact solution, cosmology.

Поступила в редакцию 25.12.2006 г.