Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского
Серия «Физико-математические науки». Том 23 (62). 2010 г. № 1. Ч. I. С. 11-19

УДК 539. 391+514. 764.2

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ, ПОРОЖДАЕМОГО ЗАМКНУТОЙ НУЛЬ СТРУНОЙ ПОСТОЯННОГО РАДИУСА

Леляков А.П.

Таврический национальный университет им. В.И.Вернадского, Симферополь, Украина
E-mail: lelyakov@ tnu.crimea.ua

В работе найдены условия которым должны удовлетворять метрические функции, описывающие гравитационное поле замкнутой нуль-струны постоянного (неизменного со временем) радиуса, которая движется вдоль оси z и в каждый момент времени полностью лежит в плоскости ортогональной этой оси.

Ключевые слова: нуль-струна, граничные условия, космология.

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемая работа посвящена дальнейшему развитию одного из фундаментальных направлений исследования струнной космологии, а именно исследованию гравитационного поля порождаемого струной. Основной трудностью, с которой приходится сталкиваться при решении такого рода задач является сингулярность компонент тензора энергии импульса для струны (нуль-струны), причиной возникновения которой есть устоявшийся математический формализм использующийся в настоящее время для описании космических струн. Все дело в том, что по существующим в литературе оценкам [1] радиус поперечного сечения струны $\rho_s \approx 10^{-29}$ *см*. Поэтому для их описании используется вполне разумное приближение, в котором положение струны задается линией в D-мерном пространстве времени, когда траекторией струны является двумерная мировая поверхность, а действие для струны выбирается пропорциональным площади этой мировой поверхности [2]. Именно отказ от трех мерности или “размазанности” струны и является причиной возникновения сингулярности в струнном тензоре энергии импульса. При этом простой переход в компонентах тензора энергии импульса от дельта функций к дельта-функционным последовательностям, в чем собственно и могла бы заключаться процедура “размазывания”, может не дать желаемого результата так как невозможно учесть возможное появления слагаемых (множителей), которые при стягивании этого “размазанного” распределения в одномерный объект обращаются в ноль (константу).

Поскольку вне струны, все компоненты струнного тензора энергии импульса тождественно равны нулю [3], а отличны от нуля (стремятся к бесконечности) непосредственно на струне, то задачу о поиске гравитационного поля порождаемого нуль-струной удобно разбить на две: “внешнюю”, для которой правые части уравнений Эйнштейна равны нулю, и “внутреннюю”, с ненулевой правой частью уравнений Эйнштейна, анализу которой и посвящена эта робота. Анализ “внутренней” задачи должен дать условия, которым удовлетворяют метрические функции “внешней” задачи на струне.

В качестве источника поля, при анализе “внутренней” задачи, удобно рассмотреть некоторое “хорошо определенное” “размазанное” распределение, например вещественное безмассовое скалярное поле (поскольку в решаемой задаче мы рассматриваем скалярный нуль объект) а затем стянуть его в струну требуемой конфигурации, получив при этом искомые условия на функции “внешней” задачи, требуя при этом, чтобы компоненты тензора энергии импульса скалярного поля в пределе такого сжатия асимптотически совпали с компонентами нуль струнного тензора энергии-импульса [3].

1. СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ “ВНУТРЕННЕЙ” ЗАДАЧИ

В цилиндрической системе координат $(x^0 = t, x^1 = \rho, x^2 = \theta, x^3 = z)$ функции $x^m(\tau, \sigma)$ $(m = 0,1,2,3)$ определяющие траекторию движения замкнутой нуль-струны постоянного (неизменного со временем) радиуса R, которая движется вдоль оси z и в каждый момент времени полностью лежит в плоскости, ортогональной этой оси, имеют следующий вид:

$$t = \tau,\ \rho = R = const.,\ \theta = \sigma,\ z = \pm\tau,$$

где знак $\pm$ соответствует выбору направления движения, τ и σ параметры на мировой поверхности нуль-струны.

Используя результаты робот [4,5], квадратичную форму для “внутренней” задачи можно представить в следующем виде

$$dS^2 = e^{2\nu}\left((dt)^2 - (dz)^2\right) - A(d\rho)^2 - B(d\theta)^2, \tag{1}$$

где $\nu = \nu(q),\ A = A(q,\rho),\ B = B(q,\rho),\ q = t - z$.

Стягивая некоторое “размазанное” распределение (размерность пространства 1+3) в струну (размерность пространства 1+1) ранг матрицы метрического тензора “размазанной” (“внутренней”) задачи в каждой точке на струне, вырождается до двух. Следовательно, ранг матрицы искомого “внешнего” решения в каждой точке на струне также должен быть равен двум. Тогда из (1) следует, что на струне (т.е. при $q = 0,\ \rho = R$)

$$e^{2\nu} \neq 0,\ \ A = 0,\ \ B = 0. \tag{2}$$

Тензор энергии импульса для вещественного безмасового скалярного поля имеет следующий вид [1]

$$T_{\alpha\beta} = \varphi_{,\alpha}\varphi_{,\beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta} L, \tag{3}$$

где $L = g^{\omega\lambda}\varphi_{,\omega}\varphi_{,\lambda}$, $\varphi_{,\alpha} = \partial\varphi/\partial\alpha$, φ – потенциал скалярного поля, индексы $\alpha, \beta, \omega, \lambda$ принимают значения $0,1,2,3$.

Для того чтобы обеспечить самосогласованность уравнений Эйнштейна для тензора (3), будем требовать

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha\beta}\left(q,\rho\right) \;\rightarrow\; \varphi = \varphi(q,\rho). \tag{4}$$

Система уравнений Эйнштейна для (1), (3) может быть представлена в следующем виде

$$-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{A_{,q}}{A}+\frac{B_{,q}}{B}\right)+2\nu_{,q}\left(\frac{A_{,q}}{A}+\frac{B_{,q}}{B}\right)-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{A_{,q}}{A}\right)^2+\left(\frac{B_{,q}}{B}\right)^2\right)=2\chi(\varphi_{,q})^2, \tag{5}$$

$$-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right)^2+\frac{A_{,\rho}}{4}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)=\chi(\varphi_{,\rho})^2, \tag{6}$$

$$\frac{1}{4}A_{,\rho}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)=\chi\left(\varphi_{,\rho}\right)^2, \tag{7}$$

$$-\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{B_{,\rho}}{B}\right)+\frac{1}{2}\frac{B_{,\rho}}{B}\left(\frac{A_{,q}}{A}-\frac{B_{,q}}{B}\right)=2\chi\varphi_{,q}\varphi_{,\rho}. \tag{8}$$

Сравнивая систему уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны, полученной в работе [4] с системой (5) – (8) для скалярного поля, можно сделать вывод о том, что при стягивании скалярного поля в струну требуемой конфигурации

$$(\varphi_{,\rho})^2 \rightarrow 0,\;\; (\varphi_{,q})^2 \rightarrow \infty,\;\;\; \varphi_{,\rho}\varphi_{,q} \rightarrow 0. \tag{9}$$

2. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА ДЛЯ “ВНУТРЕННЕЙ” ЗАДАЧИ

Поскольку ковариантная производная от компонент тензора Эйнштейна равна нулю $G^{\beta}_{\alpha\,;\beta}=0$, где G^{β}_{α} тензор Эйнштейна, точка с запятой обозначает ковариантную производную. То, требуя выполнения равенства

$$T^{\beta}_{\alpha\,;\beta}=0,$$

для (3) , получим уравнение, которому должен удовлетворять потенциал скалярного поля

$$\left(g^{\alpha\beta}\varphi_{,\alpha}\right)_{;\beta}=0. \tag{10}$$

Расписывая (10) для квадратичной формы (1) и учитывая (4), получаем

$$\varphi_{,\rho\rho}=\frac{1}{2}\left(\frac{A_{,\rho}}{A}-\frac{B_{,\rho}}{B}\right)\varphi_{,\rho}. \tag{11}$$

Поскольку, в общем случае для “размазанного” распределения скалярного поля $\varphi_{,\rho}\neq 0$, то первый интеграл уравнения (11) есть

$$\frac{A}{B} = \eta\left(\varphi_{,\rho}\right)^2, \tag{12}$$

где дальнейший анализ показывает, что $\eta = const$.

Отметим, что из (7), при условии $\varphi_{,\rho} \neq 0$, сразу же следует

$$A_{,\rho} \neq 0,\ \ B_{,\rho} \neq 0,\ \ A \neq B. \tag{13}$$

Интегрируя совместно уравнения (6), (8) можно получить связь метрических функций $A(q,\rho)$ и $B(q,\rho)$ с потенциалом скалярного поля, а именно

$$B(q,\rho) = \beta(q)\exp\left(-\chi\varphi^2\right), \tag{14}$$

$$A(q,\rho) = \beta(q)\left(\varphi_{,\rho}\right)^2\exp\left(-\chi\varphi^2\right), \tag{15}$$

где $\beta(q)$ "константа" интегрирования. Подставляя функции (14), (15) в (7) получим уравнение, которое содержит только потенциал скалярного поля и его производные по переменной ρ

$$\left(\varphi\varphi_{,\rho\rho} - \chi\left(\varphi_{,\rho}\right)^2\varphi^2\right)\left[1-\left(\varphi_{,\rho}\right)^2\right] + \left(\varphi_{,\rho}\right)^2 = 0. \tag{16}$$

Поскольку согласно (9) при стягивании скалярного поля в нуль-струну $\varphi_{,\rho} \to 0$, то будем искать решение (16) в случае

$$\left(\varphi_{,\rho}\right)^2 << 1. \tag{17}$$

Тогда, пренебрегая слагаемыми порядка $\left(\varphi_{,\rho}\right)^4$, перепишем уравнение (16) в виде

$$\varphi\varphi_{,\rho\rho} - \chi\left(\varphi_{,\rho}\right)^2\varphi^2 + \left(\varphi_{,\rho}\right)^2 = 0. \tag{18}$$

Отметим, что уравнение (18), описывает распределение потенциала скалярного поля, которое уже сконцентрировано внутри тонкого кольца для которого переменные q и ρ изменяются в пределах

$$q \in \left[-\Delta q,\ \ +\Delta q\right],\ \ \rho \in \left[R-\Delta\rho,\ R+\Delta\rho\right], \tag{19}$$

где Δq и $\Delta\rho$ малые положительные константы, определяющие "толщину" кольца, т.е.

$$\Delta q << 1,\ \Delta\rho << 1, \tag{20}$$

а в пределе сжатия такого "тонкого" кольца в одномерный объект (нуль-струну)

$$\Delta q \to 0,\ \Delta\rho \to 0. \tag{21}$$

Первый интеграл уравнения (18) есть

$$\varphi_{,\rho} = \frac{\lambda(q)}{\varphi}\exp\left(\frac{\chi}{2}\varphi^2\right), \tag{22}$$

где $\lambda(q)$ "константа" интегрирования.

Интегрируя (22), находим

$$\exp\left(-\frac{\chi}{2}\varphi^2\right) = \alpha(q) - \chi\lambda(q)\rho\,, \tag{23}$$

где $\alpha(q)$ “константа” интегрирования и, кроме того, из (23)

$$\alpha(q) - \chi\lambda(q)\rho > 0\,. \tag{24}$$

Логарифмируя левую и правую часть полученного равенства (23), получаем

$$\varphi^2 = -\frac{2}{\chi}\ln\left(\alpha(q) - \chi\lambda(q)\rho\right), \tag{25}$$

или

$$\varphi(q,\rho) = \sqrt{\ln\left(\frac{1}{(\alpha(q) - \lambda(q)\rho)^{2/\chi}}\right)}\,. \tag{26}$$

Из (24), (26)

$$0 < \alpha(q) - \chi\lambda(q)\rho \le 1\,, \tag{27}$$

а потенциал φ скалярного поля принимает значения от

$$\varphi = 0\,, \text{ при } \alpha(q) - \chi\lambda(q)\rho = 1\,, \tag{28}$$

и до

$$\varphi \to \infty\,, \text{ при } \alpha(q) - \chi\lambda(q)\rho \to 0\,. \tag{29}$$

Отметим так же, что функции $\alpha(q)$ и $\lambda(q)$ должны быть симметричны относительно инверсии q на $-q$, т.е.

$$\alpha(q) = \alpha(-q),\quad \lambda(q) = \lambda(-q)\,. \tag{30}$$

Дифференцируя (26) по переменным q и ρ, получаем

$$\varphi_{,q} = -\frac{1}{\chi\varphi}\frac{\alpha_{,q} - \chi\lambda_{,q}\rho}{(\alpha(q) - \chi\lambda(q)\rho)}\,, \tag{31}$$

$$\varphi_{,\rho} = \frac{\lambda(q)}{\varphi}\frac{1}{(\alpha(q) - \chi\lambda(q)\rho)}\,. \tag{32}$$

Рассмотрим поведение функций (31), (32) на границе ($\varphi \to 0$). Согласно (9), (28), (32)

$$\lim_{\varphi\to 0}\left(\varphi_{,\rho}\right)^2 = \lim_{\varphi\to 0}\left(\frac{\lambda^2(q)}{\varphi^2}\frac{1}{(\alpha(q) - \chi\lambda(q)\rho)^2}\right) = \lim_{\varphi\to 0}\left(\frac{\lambda^2(q)}{\varphi^2}\right) \to 0\,. \tag{33}$$

Удовлетворить (33), можно только в том случае, если

$$\lim_{\varphi\to 0}\left(\lambda(q)\right) \to 0\,, \tag{34}$$

тогда из (28), с учетом (34)

$$\lim_{\varphi\to 0}\left(\alpha(q)\right) \to 1. \tag{35}$$

Следствием (34) есть зависимость потенциала скалярного поля на границе ($\varphi \to 0$) только от переменной q, т.е.

$$\lim_{\varphi\to 0}\left(\varphi(\rho,q)\right)=\varphi(q)\,. \tag{36}$$

Учитывая (14), (15), (26), (31), (32), (34), (35) представим уравнение (5) в следующем виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{\beta_{,q}}{\beta}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_{,q}}{\beta}\right)^2-2\nu_{,q}\frac{\beta_{,q}}{\beta}\right]-2\left[\left(2\nu_{,q}-\frac{\beta_{,q}}{\beta}\right)\frac{\alpha_{,q}}{\alpha}-\frac{\alpha_{,qq}}{\alpha}\right]=\frac{\left(\alpha_{,q}/\alpha\right)^2}{2\ln(\alpha(q))}. \tag{37}$$

Согласно (14) функция $\beta(q)$ положительно определенная, симметричная функция, стремящаяся к нулю на границе ($\varphi\to 0$), что позволяет выбрать следующую калибровку (т.е. зафиксировать связь между функциями $\beta(q)$ и $\alpha(q)$)

$$\beta(q)=\gamma\ln^2\left(\alpha(q)\right), \tag{38}$$

где γ положительная константа.

Интегрируя (37) для (38), получаем

$$\frac{\alpha_{,q}}{\alpha}=\frac{ce^{2\nu}}{\alpha(q)(1+\ln(\alpha(q)))^{3/4}}, \tag{39}$$

где $c=const.$ Для дальнейшего интегрирования (39) удобно выбрать

$$e^{2\nu}=\alpha(q)\mu(q)\,. \tag{40}$$

Согласно (1), (30) функция $\mu(q)$ есть положительно определенная, симметричная относительно инверсии q на $-q$ функция, т.е.

$$\mu(q)=\mu(-q)\,. \tag{41}$$

Интегрируя (39) для (40), получаем

$$\ln\left(\alpha(q)\right)=-1+\left(c_1+\frac{4c}{7}\int\mu(q)dq\right)^{4/7}, \tag{42}$$

где $c_1=const.$

Как следует из (35), (42) на границе ($\varphi\to 0$)

$$\lim_{\varphi\to 0}\left(c_1+\frac{4c}{7}\int\mu(q)dq\right)^{4/7}\to 1\,. \tag{43}$$

Из (41), (43) функция $\int\mu(q)dq$ (первообразная функции $\mu(q)$) есть нечетная ограниченная функция, которая при $c_1=0,\;\; c=7/4$, изменяется в пределах от –1 до +1 т.е., для (43)

$$\lim_{\varphi\to 0}\int\mu(q)dq=\pm 1, \tag{44}$$

или используя (19)

$$\lim_{q\to\pm\Delta q}\int\mu(q)dq=\pm 1\,. \tag{45}$$

Согласно (44), (45) в качестве функции $\int \mu(q)dq$, может быть выбрана, например, функция

$$\int \mu(q)dq = \tanh\left(\xi q\right), \tag{46}$$

где $\xi = const.$, причем в соответствии с (20), (45)

$$\xi >> 1, \tag{47}$$

а при сжатии скалярного поля в одномерный объект (струну), согласно (21), (45), (46)

$$\xi \to \infty, \tag{48}$$

$$\int \mu(q)dq \to sign\left(q\right), \tag{49}$$

Дифференцируя (46) по переменной q находим

$$\mu(q) = \frac{\xi}{\cosh^2\left(\xi q\right)}. \tag{50}$$

Подставляя (50) в (42), находим

$$\alpha(q) = \exp\left\{-1 + \tanh^{4/7}\left(\xi q\right)\right\}. \tag{51}$$

Следствием (21), (40), (48), (50), (51) есть то, что при сжатии скалярного поля в одномерный объект (струну)

$$\lim_{\xi\to\infty} e^{2\nu} = \lim_{\xi\to\infty}\left(\exp\left\{-1 + \tanh^{4/7}\left(\xi q\right)\right\}\frac{\xi}{\cosh^2(\xi q)}\right) = \begin{cases} \infty \text{ при q=0}, \\ 0 \text{ при q} \neq 0. \end{cases} \tag{52}$$

Можно привести еще один пример функции $\int \mu(q)dq$, который при

$$c_1 = 0,\ \ c = 7/2\pi, \tag{53}$$

также выполняет асимптотическое равенство (43)

$$\int \mu(q)dq = \arctan\left(\frac{q}{\varepsilon}\right), \tag{54}$$

где $\varepsilon = const.$, причем в соответствии с (20), (45)

$$\varepsilon << 1, \tag{55}$$

а при сжатии скалярного поля в одномерный объект (струну), согласно (21), (45), (54)

$$\varepsilon \to 0, \tag{56}$$

$$\int \mu(q)dq \to sign\left(q\right). \tag{57}$$

Из (54)

$$\mu(q) = \frac{\varepsilon}{q^2 + \varepsilon^2}. \tag{58}$$

Подставляя (53), (54) в (42), находим

$$\alpha(q) = \exp\left\{-1 + \left(\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)^{4/7}\right\}. \tag{59}$$

Опять таки получаем, что для (21), (53), (544), (59) при сжатии скалярного поля в одномерный объект (струну)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} e^{2\nu} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\exp\left\{-1 + \left(\frac{2}{\pi}\arctan\left(\frac{q}{\varepsilon}\right)\right)^{4/7}\right\}\frac{\varepsilon}{q^2+\varepsilon^2}\right) = \begin{cases}\infty \text{ при q=0,}\\ 0 \text{ при q} \neq 0.\end{cases} \tag{60}$$

ВЫВОДЫ

Анализ системы уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны постоянного (неизменного во времени) радиуса, которая движется вдоль оси z и в каждый момент времени полностью лежит в плоскости ортогональной этой оси, проведенный в работах [4, 5], приводит к большому числу вакуумных решений уравнений Эйнштейна удовлетворяющих симметриям поставленной задачи, однако, неясными оставались критерии, позволяющие выбрать из этой совокупности решение, описывающее гравитационное поле нуль-струны, движущейся по траектории (2). В этой работе, выбрав в качестве источника гравитации вещественное безмассовое скалярное поле и используя выражение для квадратичной формы и функциональную зависимость метрических функций, найденную в [4], мы нашли граничные условия для метрических функций квадратичной формы (1), описывающие гравитационное поле нуль-струны, движущейся по траектории (2).

В заключении хочу выразить свою глубокую благодарность Арифову Л.Я. и Рощупкину С.Н. за направляющие дискуссии и неизменное внимание, проявляемое к моим работам.

Список литературы

1. Линде А.Д. Физика элементарных частиц и космология / А.Д. Линде. – М., Наука, 1990. – 275 с.
2. Peebles P.S.E. Ppinciples of physical cosmology / P.S.E. Peebles. – Prinston University Press, 1994 p.
3. Vilenkin A. Cosmic strings and other topological defects / A. Vilenkin, E.P.S. Shellard – Cambridge Univ. Press, 1994. – 534 p.
4. Леляков А.П. Внешние решения уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны постоянного радиуса / А.П. Леляков // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия “Физика” – 2007. – Том 20(59). – с. 14 – 20.
5. Леляков А.П. Анализ системы уравнений Эйнштейна для замкнутой нуль-струны постоянного радиуса: материалы 4 Всеукраинской научно-технической конференции “БФФХ 2008” / А.П. Леляков – “СевНТУ”, 2008 – с. 25-28.

Леляков О.П. Граничні умови для гравітаційного поля яке породжує замкнена нуль-струна постійного радіуса / О.П. Леляков // Вчені записки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 23(62), № 1. Ч. I. – С. 11-19.
У роботі знайдені умови яким повинні задовольняти метричні функції що описують гравітаційне поле замкненої нуль-струни постійного (незмінного з часом) радіуса, що прямує уздовж осі z й у кожен момент часу цілком знаходиться у площині яка ортогональна цієї осі.
Ключові слова: нуль-струна, граничні умови, космологія.

Lelyakov A.P. Boundary conditions for the gravitational field produced by a closed null-string, of constant radius / A.P. Lelyakov // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2010. – Vol. 23(62), No. 1. P. I. – P. 11-19.
In this article we have received the boundary conditions for metric functions describing a gravitational field closed null-string of constant radius which goes along an axis z and at each moment of time completely lays in a plane orthogonal this axis.
Keywords: null string, boundary conditions, cosmology.

Поступила в редакцию 24.11.2009 г.