Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 22(61) № 1 (2009), с. 14–25.

С. Ю. Артамонов

ВАРИАЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА НА ПОДВИЖНОЙ ГРАНИЦЕ

В работе показана применимость метода множителей Лагранжа к вариационным задачам с условием изопериметрического типа на подвижной границе. Полученные результаты применены при нахождении пика энергетической формы интегрального оператора с подвижной границей.

Введение и постановка задачи

В вариационном исчислении хорошо известны и находят широкое применение два типа экстремальных задач [1]-[3]:
а) изопериметрические задачи на условный экстремум с неподвижной границей

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx \to extr, \tag{1}$$

где уравнение связи задаётся с помощью второго вариационного функционала

$$\int_{x_0}^{x_1} g(x, y(x), y'(x))dx = 0,$$

либо системы таких функционалов;
б) вариационные задачи на экстремум с подвижной границей типа (1) при условии связи $y(x_1) = \varphi(x_1)$, где $\varphi(x)$ - заданная функция, $y(x_0) = y_0$ — заданное значение.

Задачи второго типа также можно записать в виде задач на условный экстремум с условием связи вида

$$\int_{x_0}^{x_1} (\varphi'(x) - y'(x))dx = 0.$$

Это приводит нас к следующей более общей постановке вариационной задачи на условный экстремум, объединяющей в себе задачи типов (а) и (б):

$$\begin{cases} \Phi(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y(x), y'(x))dx \to extr, \\ \\ G(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} g(x, y(x), y'(x))dx = 0, \quad y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{2}$$

Задачи типа (2) мы будем называть *задачами с условием изопериметрического типа на подвижной границе.*

Приведём точную постановку более общей, чем (2), задачи: среди всех функций $y(\cdot)$, принадлежащих классу $C^1([x_0, x_1], E)$ при любом $x_1 \geq x_0$, где E — банахово пространство, и таких, что $y(x_0) = y_0$ и при любом $x_1 \geq x_0$ выполнено соотношение

$$G(x_1, y) = \int_{x_0}^{x_1} g(x_1, x, y(x), y'(x))dx = 0, \tag{3}$$

найти ту, для которой основной вариационный функционал

$$\Phi(x_1, y) = \int_{x_0}^{x_1} f(x_1, x, y(x), y'(x))dx \tag{4}$$

достигает экстремума.

Здесь, в отличие от классической изопериметрической задачи, предполагается наличие следующих дополнительных условий:

а) верхний предел интегрирования является переменным;

б) верхний предел интегрирования содержится также и под знаком интегралов (3) и (4);

в) искомая функция $y(x)$ принадлежит банахову пространству $C^1([x_0, x_1], E)$ при любом $x_1 \geq x_0$.

Кроме того, будем считать, что функции f и g имеют непрерывные частные производные Фреше первого и второго порядков.

Важным частным случаем общей задачи (3) - (4) является задача, где условие связи имеет следующий вид:

$$G(x_1, y)(t) = \int_{x_0}^{x_1} k(x_1, t, s)y(s)ds - \lambda(x_1)y(t) = 0, \tag{5}$$

т.е. $G(x_1, y)(t) = 0$ представляет собой задачу на собственное значение и собственную функцию соответствующего интегрального оператора при нелинейной зависимости ядра от x_1. Таким образом, экстремум вариационного функционала в задаче (4)-(5) ищется на собственных функциях интегрального оператора $(K^{x_1}y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)y(s)ds$.

Применение метода множителей Лагранжа к решению задач с условием изопериметрического типа на подвижной границе.

Наша цель в этом разделе — применить известную модификацию метода множителей Лагранжа для случая банаховых пространств [4] к задаче (3)-(4). Как известно, необходимым условием условного экстремума является обращение в нуль частных производных функции Лагранжа $F = \Phi + \lambda(G)$, где $\lambda \in E^*$.

А. Скалярный случай. В этом случае $\lambda \in \mathbb{R}, (y \in C^1([x_0,x_1],\mathbb{R}))$.

Рассмотрим вариационную задачу на условный экстремум изопериметрического типа (3)-(4), где

$$\Phi:\ I_{x_1} \times C^1(I_{x_1}) \to \mathbb{R}, \quad G:\ I_{x_1} \times C^1(I_{x_1}) \to \mathbb{R}, \quad I_{x_1} = [x_0, x_1]$$

Предположим, что выполнено условие $\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} \neq 0$. Составляя функцию Лагранжа $F = \Phi + \lambda \cdot G$ и применяя метод множителей Лагранжа, приходим к необходимому условию экстремума в виде системы

$$\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + \lambda \cdot \frac{\partial G}{\partial x_1} = 0;\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \lambda \cdot \frac{\partial G}{\partial y} = 0;\ G = 0.\right\} \tag{6}$$

Соответствующие дифференциалы Фреше имеют вид:

$$\left\{\begin{array}{l} d\Phi(x_1,y)(\Delta x_1,h) = (f\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}dx) \cdot \Delta x_1 + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial y'}h'\right]dx; \\ \\ dG(x_1,y)(\Delta x_1,h) = (g\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial g}{\partial x_1}dx) \cdot \Delta x_1 + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial g}{\partial y}h + \frac{\partial g}{\partial y'}h'\right]dx. \end{array}\right. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6), приходим к следующей системе:

$$\left\{\begin{array}{l} (f+\lambda g)\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}(f+\lambda g)\,dx = 0, \quad h(x_0) = 0; \\ \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial y}(f+\lambda g)h + \frac{\partial}{\partial y'}(f+\lambda g)h'\right]dx = 0. \end{array}\right. \tag{8}$$

Проведем локализацию свободной переменной h во втором уравнении (8) двумя способами. Первый способ: считаем, что $h(x_0) = h(x_1) = 0$. В этом случае, локализуя h вблизи произвольной точки $x \in I_{x_1}$ стандартным способом [2], приходим к уравнению Эйлера-Лагранжа для $(f+\lambda g)$:

$$L(f+\lambda g) = L(f) + \lambda \cdot L(g) = 0, \tag{9}$$

где $L = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial}{\partial y'}\right)$. Второй способ: допуская, что $h(x_1) \neq 0$, локализуем h "вблизи x_1 т.е. полагаем

$$h_n(x) = \begin{cases} 0, \quad x \in [x_0, x_1 - 1/n], \\ \\ nx + (1 - n \cdot x_1), \quad x \in [x_1 - 1/n, x_1], \end{cases} \tag{10}$$

Здесь подразумевается, что h_n "сглажены"на достаточно малых участках вблизи точки $(x_1 - \frac{1}{n})$.

В этом случае

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda g) h_n \longrightarrow 0, \text{ при } n \to \infty,$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial y'}(f + \lambda g) h_n' dx = \frac{1}{n} \cdot n \left(\frac{\partial}{\partial y'}(f + \lambda g)\right)\big|_{\xi_1} \longrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial y'}(f + \lambda g)\right)\big|_{x_1}, \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда уравнение для λ будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} = 0. \tag{11}$$

Таким образом, уравнения $(8), (9), (11)$ образуют систему:

$$\begin{cases} (f + \lambda g)\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}(f + \lambda g)\, dx = 0; \\ \\ L(f) + \lambda \cdot L(g) = 0, (\lambda \in \mathbb{R}); \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} + \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Из последнего уравнения (12) легко выражается $\lambda = -(\frac{\partial f}{\partial y'})/(\frac{\partial g}{\partial y'})\big|_{x_1}$. Далее, подставляя λ в первое уравнение (12), получаем *обобщённое условие трансверсальности:*

$$\left(f \cdot \frac{\partial g}{\partial y'} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial y'}\right)\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) dx = 0.$$

После подстановки λ во второе уравнение (12), приходим к уравнению Эйлера-Лагранжа для $f + \lambda g$, которое мы назовём *совместным уравнением Эйлера-Лагранжа:*

$$\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} \cdot L(f) - \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \cdot L(g) = 0.$$

Б. Векторный случай. В этом случае $y \in C^1([x_0, x_1], E)$. Рассмотрим вновь вариационную задачу на условный экстремум изопериметрического типа (3)-(4), где

$$\Phi:\ I_{x_1} \times C^1(I_{x_1}, E) \to \mathbb{R}, \quad G:\ I_{x_1} \times C^1(I_{x_1}, E) \to C^1(I_{x_1}, E), \quad I_{x_1} = [x_0, x_1]$$

Здесь $y(\cdot) \in \mathbb{C}^1(I_{x_1}, E) = Y$, и так как E — банахово пространство, то Y — также банахово пространство. Считаем, что выполнено условие $\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1} \in Isom(Y)$.

Применяя метод множителей Лагранжа к функции $F = \Phi + \lambda(G)$, где уже $\lambda(\cdot) \in Y^*$, приходим к системам уравнений типа $(6) - (7)$, откуда получаем аналог системы (8):

$$\begin{cases} (f + \lambda(g))\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\,(f + \lambda(g))\,dx = 0,\ (h(x_0) = 0); \\ \int\limits_{x_0}^{x_1} \left[\frac{\partial}{\partial y}(f + \lambda(g))h + \frac{\partial}{\partial y'}(f + \lambda(g))h'\right] dx = 0,\ (\lambda \in Y^*). \end{cases} \tag{13}$$

Проведем локализацию $h(x_1)$ как и в скалярном случае двумя способами: сначала считаем, что $h(x_0) = h(x_1) = 0$. В этом случае, аналогично случаю А), получим уравнение Эйлера-Лагранжа для $(f + \lambda g)$:

$$L(f + \lambda(g)) = L(f) + \lambda[L(g)] = 0. \tag{14}$$

Во втором случае, допуская, что $h(x_1) \neq 0$, и используя последовательность скалярных функций (10), выберем произвольно вектор $\widetilde{h_0} \in E$ такой, что $\|\widetilde{h_0}\| = 1$ и полагаем $\widetilde{h_n}(x_1) = h_n(x_1) \cdot \widetilde{h_0}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Выкладки, аналогичные случаю А), приводят к уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x_1} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\Big|_{x_1}\right) = 0. \tag{15}$$

Уравнения $(13) - (15)$ образуют систему:

$$\begin{cases} (f|_{x_1} + \lambda(g|_{x_1})) + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1}\,(f + \lambda(g))\,dx = 0, \\ \\ L(f + \lambda(g)) = L(f) + \lambda[L(g)] = 0,\ (\lambda \in Y^*) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} + \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right) = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Из последнего уравнения (16) находим

$$\lambda = -\frac{\partial f}{\partial y'}\Big|_{x_1} \circ \left(\frac{\partial g}{\partial y'}\Big|_{x_1}\right)^{-1}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в первое и второе уравнения системы (16) приходим, соответственно к *обобщённому условию трансверсальности в несимметричной форме:*

$$\left[f\big|_{x_1} - \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \circ \left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right)^{-1} \circ g\big|_{x_1}\right] + \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \circ \left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right)^{-1} \circ \frac{\partial g}{\partial x_1}\right) dx = 0 \tag{18}$$

и совместному уравнению Эйлера-Лагранжа в несимметричной форме:

$$L(f) - \frac{\partial f}{\partial y'}\big|_{x_1} \circ \left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right)^{-1} \circ L(g) = 0 \tag{19}$$

Отметим, что основная сложность в применении уравнений (18)-(19) составляет вычисление обратного оператора $\left(\frac{\partial g}{\partial y'}\big|_{x_1}\right)^{-1}$.

Применение полученных результатов к интегральным операторам с подвижной границей.

Как известно ([5], гл. 4, §6), для самосопряженного интегрального оператора $(K^{x_1}y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(t,s)y(s)ds$ в $L_2[x_0, x_1]$ его энергетическая форма $< K^{x_1}y, y >$ достигает по модулю максимума на собственной функции $y(\cdot), \|y\| = 1$, отвечающей наибольшему по модулю собственному числу оператора K. При этом с увеличением x_1 величина $| < K^{x_1}y, y >_{max} |$ меняется монотонно [6]. Эти факты имеют большие применения в задачах математической физики.

Однако, если ядро k зависит и от x_1, т.е. $k = k(x_1, t, s)$, то максимум энергетической формы $| < K^{x_1}y, y >_{max} |$ может меняться достаточно произвольно. Естественным является вопрос о значении x_1 и собственной функции y, для которых достигается локальный $\underset{x_1}{max} | < K^{x_1}y, y >_{max} |$. Эту величины мы назовём *пиком энергетической формы* интегрального оператора K^{x_1}.

Случай одномерного ядра. Прямое решение. Пусть

$$(K^{x_1}y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t)k(x_1,s)y(s)ds.$$

Тогда

$$< K^{x_1}y, y >_{L_2} = \int\limits_{x_0}^{x_1} \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t)k(x_1,s)y(s)ds\right) y(t)dt = \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,s)y(s)ds\right)^2.$$

Таким образом, мы приходим к вариационной задаче на условный экстремум

$$\Phi(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,s)y(s)ds \to \max, \tag{20}$$

при условии связи

$$G(x_1, y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1, t)k(x_1, s)y(s)ds - \lambda(x_1)y(t) = 0. \tag{21}$$

Вариационную задачу (20)-(21) мы рассматриваем при переменном $x_1 \geq x_0$ уже в пространстве $y(\cdot) \in C^1([x_0, x_1])$, которое плотно вложено в $L_2([x_0, x_1])$.

Прежде всего, из (21) находим:

$$\lambda(x_1)y(t) = \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k(t, s)y(s)ds\right) \cdot k(x_1, t).$$

Следовательно,

$$y(t) = \gamma(x_1) \cdot k(x_1, t). \tag{22}$$

Из условия нормировки $\|y\|_{L_2[x_0,x_1]} = |\gamma| \cdot \|k\|_{L_2[x_0,x_1]} = 1$ получаем

$$|\gamma(x_1)| = \frac{1}{\|k\|_{L_2}} = \frac{1}{\sqrt{\int\limits_{x_0}^{x_1} k^2(x_1, s)ds}}.$$

Подставляя (22) снова в (21), получаем:

$$\lambda(x_1) = \|k\|^2_{L_2}. \tag{23}$$

Подставляя теперь (23) в (20), и возводя полученные выражения для удобства дифференцирования в квадрат, мы приводим задачу на условный экстремум (20)-(21) к задаче на безусловный локальный экстремум:

$$\Phi^2(x_1, y(x_1)) = \|k(x_1, \cdot)\|^2_{L_2[x_0,x_1]} \to \max. \tag{24}$$

Таким образом, необходимое условие экстремума в задаче (20)-(21), согласно лемме Ферма, есть равенство

$$\left(\|k(x_1, \cdot)\|^2\right)' = 0, \tag{25}$$

а достаточное условие максимума — неравенство

$$\left(\|k(x_1, \cdot)\|^2\right)'' < 0. \tag{26}$$

Здесь и далее под $\|\cdot\|$ мы понимаем норму в L_2.

Примеры.

1. Пусть $(K^{x_1}y)(t) = \frac{1}{x_1}\int\limits_0^{x_1} \cos t \cdot \cos s \; y(s)ds$, т.е. K^{x_1} есть оператор чезаровского типа. Здесь

$$k(x_1, s) = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \cdot \cos s,$$

$$\|k\|^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin 2x_1}{2x_1}\right).$$

Таким образом, вариационный функционал (20) принимает вид:

$$\Phi(x_1, y) = \frac{1}{\sqrt{x_1}} \int\limits_0^{x_1} \cos sy(s) ds.$$

Отсюда получаем, что

$$\left(\|k\|^2\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{4x_1 \cos 2x_1 - 2\sin 2x_1}{4x_1^2}.$$

Необходимое условие экстремума (25) принимает вид

$$2x_1 = tg 2x_1,$$

т.е. получаем хорошо известное в теории дифференциальных уравнений уравнение $tgt = t$.

Простейшая ассимптотика решений этого уравнения имеет вид:

$$x_1^k = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} - o(1), \quad k \to \infty.$$

Далее, достаточное условие максимума (26) принимает вид:

$$\left(\|k\|^2\right)'' = -\frac{\sin 2x_1 + \cos 2x_1}{x_1} + \frac{\sin 2x_1}{2x_1^2} < 0.$$

Отсюда

$$\left(\|k\|^2\right)''\Big|_{x_1^k} \cong \frac{(-1)^{k+1}}{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}}\ .$$

Следовательно,

$$\left(\|k\|^2\right)''\Big|_{x_1^k} < 0, \text{ при } k = 2m.$$

При этом

$$\Phi^2(x_1^k) = \|k\|^2\Big|_{x_1^k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin 2x_1^{2m}}{2x_1^{2m}}\right).$$

Из последнего равенства очевидно, что $\Phi^2(x_1^k)$ достигает пика при $m = 1$. Итак, пиковое значение для энергетической формы имеет вид:

$$\underset{x_1}{max} < K^{x_1}y, y >= \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{\sin 2x_1^2}{2x_1^2}\right)} \sim \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi}\right)}.$$

2. Пусть $(K^{x_1}y)(t) = \frac{1}{x_1}\int\limits_0^{x_1} cht \cdot chs \cdot y(s) ds$. В этом случае, как легко убедиться с помощью аналогичных выкладок, зависимость максимума энергетической формы $< K^{x_1}y, y >$ от x_1 является монотонной.

Случай n-мерного ядра. Прямое решение. Пусть

$$(K^{x_1}y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)y(s)ds,$$

где

$$k(x_1,t,s) = \sum_{i=1}^{n} k_i(x_1,t)k_i(x_1,s).$$

Тогда энергетическая форма интегрального оператора принимает вид:

$$< K^{x_1}y, y >= \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k_1(x_1,s)y(s)ds\right)^2 + \ldots + \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k_n(x_1,s)y(s)ds\right)^2.$$

Таким образом, мы приходим к n однотипным вариационным задачам на условный экстремум:

$$\left\{\begin{array}{c} \Phi_i(x_1,y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k_i(x_1,s)y(s)ds \to \max, \\ \\ G(x_1,y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)y(s)ds - \lambda(x_1)y(t) = 0.(i = 1..n) \end{array}\right. \tag{27}$$

Найдя $\underset{x_1}{max}\Phi_i, \quad i = 1..n$, получаем оценку

$$\underset{x_1}{max}| < K^{x_1}y, y > | \le \left(\underset{x_1}{max}\Phi_1\right)^2 + \ldots + \left(\underset{x_1}{max}\Phi_n\right)^2.$$

Для определенности рассмотрим задачу (27) при $i = 1$ (для остальных $i = 2..n$ задача решается аналогично).

Из второго уравнения (27) получаем

$$\lambda(x_1)y(t) = \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k_1(x_1,s)y(s)ds\right) \cdot k_1(x_1,t) + \ldots + \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k_n(x_1,s)y(s)ds\right) \cdot k_n(x_1,t).$$

Вводя обозначения

$$\alpha_1(x_1) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k_1(x_1,s)y(s)ds \quad ,..., \quad \alpha_n(x_1) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k_n(x_1,s)y(s)ds,$$

получаем выражение для $y(t)$:

$$y(t) = \frac{\alpha_1(x_1)}{\lambda(x_1)}k_1(x_1,t) + \ldots + \frac{\alpha_n(x_1)}{\lambda(x_1)}k_n(x_1,t). \tag{28}$$

Подставляя (28) во второе уравнение (27), будем иметь:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\alpha_1(x_1)}{\lambda(x_1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} k_1^2(x_1,s)ds + \ldots + \frac{\alpha_n(x_1)}{\lambda(x_1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} k_1(x_1,s)k_n(x_1,s)ds, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n = \frac{\alpha_1(x_1)}{\lambda(x_1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} k_n(x_1,s)k_1(x_1,s)ds + \ldots + \frac{\alpha_n(x_1)}{\lambda(x_1)} \int\limits_{x_0}^{x_1} k_n^2(x_1,s)ds, \end{cases} \tag{29}$$

или, обозначая соответствующие интегралы через скалярные произведения в L_2, систему (29) можно переписать в виде:

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda = \alpha_1 < k_1, k_1 > +\alpha_2 < k_1, k_2 > + \ldots + \alpha_n < k_1, k_n > \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n\lambda = \alpha_1 < k_n, k_1 > +\alpha_2 < k_n, k_2 > + \ldots + \alpha_n < k_n, k_n > \end{cases} \tag{30}$$

Учитывая условие нормировки $\|y\|^2 = 1$, получаем:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 < k_i, k_i > +2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_i\alpha_j < k_i, k_j >= \lambda^2. \tag{31}$$

Уравнения (30) и (31) образуют систему:

$$\begin{cases} \alpha_1\lambda = \alpha_1 < k_1, k_1 > +\alpha_2 < k_1, k_2 > + \ldots + \alpha_n < k_1, k_n > \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_n\lambda = \alpha_1 < k_n, k_1 > +\alpha_2 < k_n, k_2 > + \ldots + \alpha_n < k_n, k_n > \\ \\ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 < k_i, k_i > +2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \alpha_i\alpha_j < k_i, k_j >= \lambda^2. \end{cases} \tag{32}$$

Из (32) получаем следующее выражение для λ:

$$\lambda = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2.$$

Случай невырожденного ядра. Применение метода множителей Лагранжа. Пусть

$$(K^{x_1}y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)y(s)ds,$$

и $\{k_n(x_1,\cdot)\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторый ортонормированный базис в $L_2[x_0,x_1]$. Тогда, как известно ([5] гл. 7 §3 теорема 1), система $\{k_m(x_1,t)k_n(x_1,s)\}_{m,n=1}^{\infty}$ есть ортонормированный базис в $L_2([x_0,x_1]\times[x_0,x_1])$. Разложим функцию $k(x_1,t,s)$ в двойной ряд Фурье по данному базису:

$$k(x_1,t,s) = \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot k_m(x_1,t)k_n(x_1,s).$$

При этом $\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}^2 < \infty$, ввиду $k(x_1,\cdot,\cdot) \in L_2$. Теперь энергетическая форма оператора K^{x_1} принимает вид

$$< K^{x_1}y, y >= \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k_m(x_1,t)y(t)dt \right) \cdot \left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k_n(x_1,s)y(s)ds \right).$$

Таким образом, наша задача сводится к решению последовательности вариационных задач на условный экстремум $(n = 1, 2, ...)$:

$$\begin{cases} \Phi_n(x_1, y) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k_n(x_1,s)y(s)ds \to \max, \\ G(x_1,y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)y(s)ds - \lambda(x_1)y(t) = 0, \end{cases} \tag{33}$$

с последующей глобальной оценкой

$$< K^{x_1}y, y >= \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} \cdot \max_{x_1} | < K^{x_1}y, y > | \le \sum_{m,n=1}^{\infty} |c_{mn}| \cdot \left(\max_{x_1} \Phi_m \right) \cdot \left(\max_{x_1} \Phi_n \right).$$

Перейдём к решению системы (33) при фиксированном $n = N$. Применяя метод множителей Лагранжа, составляем функцию Лагранжа $F = \Phi_N + l(G)$, $l \in \left(C^1([x_0, x_1])\right)^*$, и приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x_1} = \left((k_N y)\big|_{x_1} + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial k_N}{\partial x_1} y(s)ds \right) + l\left((k(x_1,t,s)y(s)\big|_{x_1}) + \int\limits_{x_0}^{x_1} \frac{\partial k(x_1,t,s)}{\partial x_1} y(s)ds \right) - \\ \qquad -\lambda'(x_1)l(y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}h = \int\limits_{x_0}^{x_1} k_N(x_1,s)h(s)ds + l\left(\int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)h(s)ds - \lambda(x_1)h(t) \right) = 0, \\ G(x_1,y)(t) = \int\limits_{x_0}^{x_1} k(x_1,t,s)y(s)ds - \lambda(x_1)y(t) = 0. \end{cases} \tag{34}$$

Задача сводится к вычислению функционала l. Подставляя во второе уравнение (34) $h = k_p,\ p = 1, 2, ...$, приходим к системе:

$$< k_N, k_p > + \sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn} l(k_m(x_1,t)) \cdot < k_n(x_1,s), k_p(x_1,s) > -\lambda l(k_p(x_1,t)) = 0; \quad (p \in \mathbb{N})$$

или, с учётом ортонормированности:

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} c_{mN} l(k_m(x_1,t)) - \lambda \cdot l(k_N(x_1,t)) = -1, \quad (p = N) \\ \\ \sum_{m=1}^{\infty} c_{mp} l(k_m(x_1,t)) - \lambda \cdot l(k_p(x_1,t)) = 0. \quad (p \in \mathbb{N},\ p \neq N) \end{cases} \tag{35}$$

Как известно ([7], Ch. II.9) , ввиду условия $\sum_{m,n=1}^{\infty} c_{mn}^2 < \infty$, система (35) решается методом последовательных конечномерных аппроксимаций, т.е. ищутся пределы решений "обрезанной системы"$p \times p$ при $p \to \infty$.

Находя все $l(k_p)$, мы тем самым полностью определим l. В (35) предполагается, что собственное значение λ известно.

Выводы

В работе показана применимость метода множителей Лагранжа к вариационным задачам изопериметрического типа с подвижной границей. Продемонстрирована полезность полученных результатов при нахождении пика энергетической формы интегрального оператора с подвижной границей.

Список литературы

[1] Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 320 С.

[2] Гельфанд И.М., Фомин С.В. *Вариационное исчисление.* – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1961. – 228 С.

[3] Dacorogna B. *Introduction to the calculus of variations.* – Imperial College Press, 2004. – 228 p.

[4] Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. *Математический анализ.* – Издательство Московского университета, 2004. Ч.1. – 660 С.

[5] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* – М.: Наука, 1981. – 544 С.

[6] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан. *Операторные методы в линейной гидродинамике.* – М., Наука, 1989. – 416 С.

[7] Gohberg I., Goldberg S. *Basic Operator Theory.* – Birkhäuser, 1981. – 304 p.

В роботі показана застосовність методу множників Лагранжа до варіаційних задач ізопериметричного типа на рухомої границі. Отримані результати застосовані при знаходженні піку енергетичної форми інтегрального оператора з рухомою границею.

In this paper the applicability of Lagrange's multipliers method for isoperimetric type variational problems with movable boundary is shown. The obtained results are applied for finding the peak of energy form of integral operator with movable boundary.