Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского
Серия «Физико-математические науки». Том 23 (62). 2010 г. № 1. Ч. I. С. 3-10

УДК 539. 391+514. 764.2

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ, ОПИСЫВАЮЩЕЕ ДВИЖЕНИЕ НУЛЬ-СТРУНЫ В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ МАТУМДАРА – ПАПАПЕТРОУ

Рощупкин С.Н.[1], Петраш А.Н.[2], Леляков А.П.[1]

[1]Таврический национальный университет им. В.И. Вернадского, Симферополь, Украина
[2]Севастопольский национальный университет ядерной энергии и промышленности, Севастополь, Украина
E-mail: rsn@ tnu.crimea.ua

В роботе получено точное решение уравнений движения пробной нуль-струны в статической метрике Матумдара – Папапетроу, которая описывает систему состоящую из N черных дыр Райснера – Нордстрома в случае, когда массы входящих в систему черных дыр равны их электростатическому заряду.
Ключевые слова: нуль-струна, точные решения, космология.

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в связи с исследованиями крупномасштабной структуры Вселенной всеобщее внимание привлекла задача о динамике релятивистских струн в гравитационных полях.

Космические струны представляют собой линейные топологические дефекты, которые могли образоваться в ранней Вселенной в результате фазовых переходов [1-5], они могут быть либо бесконечной длины, либо замкнуты. Численные расчеты показывают [2], что бесконечные струны, образующиеся в результате фазового перехода в реалистических моделях, составляют около 80% от общего числа струн. Остальные струны возникают в виде замкнутых петель.

Динамика релятивистских струн в гравитационных полях описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с коэффициентами достаточно общего вида, найти общее решение которых редко удается классическими методами. Основным способом решения таких задач являются численные методы, среди которых чаще всего используются разностные методы благодаря их универсальности и наличию хорошо разработанной теории.

Ситуация значительно упрощается при переходе к нуль-струнам, которые соответствуют нулевому натяжению и являются аналогами безмассовых частиц. Поскольку натяжение струн меряется отрицательными степенями массы Планка M_{pl}, то с физической точки зрения предел нулевого натяжения соответствует асимптотически большим масштабам энергии $E >> M_{pl}$. Поэтому естественно предположить, что нуль-струны реализуют высокотемпературную фазу теории струн, характеризуемую отсутствием размерных параметров. Нарушение конформной симметрии приводит к возникновению ненулевого натяжения у нуль-струн, причем роль параметра, характеризующего это нарушение, играет M_{pl}.

Хотя каждая индивидуальная точка нуль-струны двигается по светоподобной геодезической, нуль-струна в целом может иметь совершенно нетривиальную динамику. Ситуация качественно подобна той, которая имеет в ОТО, когда каждый луч в пучке движется по геодезической, тогда как распространение пучка в целом может быть крайне нетривиально в виду действия приливных сил.

В предлагаемой вниманию работе найдено общее решение, описывающее движение нуль-струны в гравитационном поле трех черных дыр.

1. ЛАГРАНЖЕВ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ НУЛЬ p-БРАН В ИСКРИВЛЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Впервые нуль-струны (струны с нулевым натяжением) движущиеся в пространстве Минковского были рассмотрены в работе Шилда [6] и получили дальнейшее развитие в работах [7, 8]. Естественным обобщением действия бозонной нуль р-браны на случай искривленных пространств является действие вида [7]:

$$S^{(0)}_{G(p)} = \int d^{p+1}\xi \frac{g}{E(\tau,\underline{\sigma})}, \tag{1}$$

где

$$g = \det g_{\mu\nu}, \tag{2}$$

А

$$g_{\mu\nu} = \partial_\mu x^M G_{MN} \partial_\nu x^N = \begin{pmatrix} G_{MN}(x)\dot{x}^M \dot{x}^N & G_{AB}(x)\dot{x}^A \partial_n x^B \\ G_{CD}(x)\partial_m x^C \dot{x}^D & \tilde{g}_{mn} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\tilde{g}_{mn} = G_{kp}(x)\partial_m x^k \partial_n x^p, \quad m,n,\ldots = 1,2,\ldots,p, \tag{4}$$

$$\dot{x}^M = \partial x^M / \partial\tau, \ \ \partial_{\mathrm{m}} x^k = \partial x^k / \partial\sigma^m \tag{5}$$

- индуцированная метрика на мировой гиперповерхности нуль р-браны. В формулах (2) – (5) $M, N, \ldots = 0,1,\ldots,D-1$ - индексы внешнего искривленного D-мерного пространства-времени, описываемого метрическим тензором $G_{MN}(x)$; $\mu,\nu,\ldots = 0,1,\ldots,p$ - индексы мировой поверхности нуль р-браны, $\xi = (\tau,\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_p) \equiv (\tau,\underline{\sigma})$.

Покажем, что детерминант индуцированной метрики (2) можно представить в факторизованной форме. Действительно, так как $\tilde{g} \equiv \det \tilde{g}_{mn} \neq 0$, то вычитая в (2) из первой строки вторую, предварительно умноженную слева на $G_{AB}(x)\dot{x}^A\partial_n x^B(\tilde{g})^{mn}$ получим

$$\det g_{\mu\nu} = \begin{vmatrix} G_{MN}(x)\dot{x}^M\dot{x}^N & G_{AB}(x)\dot{x}^A\partial_n x^B \\ G_{CD}(x)\partial_m x^C\dot{x}^D & \tilde{g}_{mn} \end{vmatrix} = \dot{x}^M\tilde{\Pi}_{MN}(x)\dot{x}^N\tilde{g}, \tag{6}$$

где матрица $\tilde{\Pi}_{MN}(x)$ определяется соотношениями

$$\tilde{\Pi}_{MN}(x) = G_{MN}(x) - G_{MB}(x)\partial_n x^B(\tilde{g})^{mn}\partial_m x^C G_{CN}(x), \tag{7}$$

и имеет свойства проекционного оператора. Используя представление (6), действие (1) можно представить в следующем виде:

$$S^{(0)}_{G(p)} = \int d^{p+1}\xi\,\frac{\dot{x}^M\tilde{\Pi}_{MN}(x)\dot{x}^N\tilde{g}}{E(\tau,\underline{\sigma})}. \tag{8}$$

Вариация (8) по гиперлистовой плотности $E(\tau,\underline{\sigma})$ генерирует условие вырожденности индуцированной гиперлистовой метрики

$$g \equiv \det g_{\mu\nu} \equiv \det\left(\partial_\mu x^M G_{MN}(x)\partial_\nu x^N\right) = 0, \tag{9}$$

выделяющее класс $(P+1)$-мерных изотропных гиперповерхностей с нулевой гиперплощадью.

Варьируя действие (8) по $x^M(\tau,\underline{\sigma}) \equiv x^M(\tau,\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_p)$ находим уравнения движения нуль p-браны в искривленном пространстве. В произвольной калибровке эти уравнения имеют довольно громоздкий вид, однако, после частичного закрепления калибровки в форме

$$\dot{x}^M G_{MN}(x)\partial_m x^N = 0, \tag{10}$$

эти уравнения существенно упрощаются и принимают вид

$$\left(E^{-1}(\tau,\underline{\sigma})\tilde{g}\dot{x}^M\right)^{\cdot} + E^{-1}(\tau,\underline{\sigma})\tilde{g}\dot{x}^C\dot{x}^N\Gamma^M_{CN}(G) = 0, \tag{11}$$

$$G_{MN}(x)\dot{x}^M\dot{x}^N = 0, \tag{12}$$

где $\Gamma^{M}_{CN}(G)$ - символы Кристоффеля для метрики $G_{MN}(x)$. Воспользуемся оставшимся произволом в закреплении калибровки и выберем функцию $E(\tau,\underline{\sigma})$ так, чтобы выполнялось условие

$$\left(E^{-1}(\tau,\underline{\sigma})g\right)^{\cdot} = 0 . \tag{13}$$

В результате приходим к следующим уравнениям

$$\ddot{x}^{M} + \Gamma^{M}_{NL}(G)\dot{x}^{L}\dot{x}^{N} = 0 , \tag{14}$$

$$G_{MN}(x)\dot{x}^{M}\dot{x}^{N} = 0 , \tag{15}$$

$$G_{MN}(x)\dot{x}^{M}\partial_{m}x^{N} = 0, \quad m = 1,2,...,p . \tag{16}$$

Уравнения (14)-(16) описывают эволюцию нуль p-бран в искривленном пространстве, которое задается метрическим тензором $G_{MN}(x)$, причем динамику нуль p-браны описывают уравнения (14), в то время как уравнения (15), (16) задают кинематические связи. С физической точки зрения связь (15) представляет собой условие светоподобности, в то время как p связей (16) - условие поперечности по пространственно подобным параметрам $\sigma_{1},\sigma_{2},...,\sigma_{p}$.

В зависимости от того выполняются связи (16) тождественно или нет, можно говорить о двух физически различных ситуациях. Если связи (16) выполняются тождественно, то эволюция нуль p-браны почти тривиальна в том смысле, что каждая точка нуль p-браны движется по светоподобной геодезической без какой-либо корреляции с остальными точками нуль p-браны. В этом случае движение нуль p-браны сводится попросту к движению коллектива безмассовых точечных частиц. Если же связи (16) не выполняются тождественно, то тогда возникает нетривиальная корреляция между различными точками нуль p-браны, природа которой имеет чисто “бранный” характер.

2. НУЛЬ СТРУНА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ МАТУМДАРА – ПАПАПЕТРОУ

Рассмотрим динамику нуль-струны в пространстве-времени Матумдара – Папапетроу первая квадратичная форма которого имеет вид [9, 10]

$$dS^{2} = -U^{-2}dt^{2} + U^{2}(dx^{2} + dy^{2} + dz^{2}) . \tag{17}$$

Как показали Хартл и Хоукинг [11], если $U(x,y,z)$ имеет вид

$$U(x,y,z) = 1 + \sum_{i=1}^{N} \frac{M_i}{\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2}}, \tag{18}$$

то метрика Матумдара – Папапетроу описывает систему N экстремальных черных дыр Райснера – Нордстрема с одинаковыми зарядами и массами M_i.

Уравнения движения нуль-струны и связи получаются из обычных уравнений (14) – (16) если положить $m = 1$. Подстановка (17), (18) в уравнения (14) – (16) приводит к следующим уравнениям

$$\dot{t} = P_t(\sigma)U^2, \tag{19}$$

$$\ddot{x} + 2\frac{U_{,\tau}}{U}\dot{x} - U_{,x}\left[\frac{1}{U^5}\dot{t}^2 + \frac{1}{U}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] = 0, \tag{20}$$

$$\ddot{y} + 2\frac{U_{,\tau}}{U}\dot{y} - U_{,y}\left[\frac{1}{U^5}\dot{t}^2 + \frac{1}{U}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] = 0, \tag{21}$$

$$\ddot{z} + 2\frac{U_{,\tau}}{U}\dot{z} - U_{,z}\left[\frac{1}{U^5}\dot{t}^2 + \frac{1}{U}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right] = 0, \tag{22}$$

$$\frac{1}{U^2}\dot{t}^2 + U^2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 0, \tag{23}$$

$$\frac{1}{U^2}\dot{t}t' + U^2(\dot{x}x' + \dot{y}y' + \dot{z}z') = 0. \tag{24}$$

Общее решение уравнений (19) – (22) имеет вид

$$t(\tau,\sigma) = t_0(\sigma) + P_t(\sigma)U^2\tau, \tag{25}$$

$$x(\tau,\sigma) = f_x(\sigma) + A_x\cos(F(\sigma)\tau) + B_x\sin(F(\sigma)\tau), \tag{26}$$

$$y(\tau,\sigma) = f_y(\sigma) + A_y\cos(F(\sigma)\tau) + B_y\sin(F(\sigma)\tau), \tag{27}$$

$$z(\tau,\sigma) = f_z(\sigma) + A_z\cos(F(\sigma)\tau) + B_z\sin(F(\sigma)\tau), \tag{28}$$

где введены следующие обозначения

$$f_x(\sigma) = \frac{2P_t^2(\sigma)}{F^2(\sigma)U}\sum_{i=1}^{N}\frac{M_i x_i}{\left((x-x_i)^2 + (y-y_i)^2 + (z-z_i)^2\right)^{3/2}}, \tag{29}$$

$$f_y(\sigma)=\frac{2P_t^2(\sigma)}{F^2(\sigma)U}\sum_{i=1}^{N}\frac{M_i y_i}{\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}, \tag{30}$$

$$f_z(\sigma)=\frac{2P_t^2(\sigma)}{F^2(\sigma)U}\sum_{i=1}^{N}\frac{M_i z_i}{\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}, \tag{31}$$

$$F^2(\sigma)=\frac{2P_t^2(\sigma)}{U}\sum_{i=1}^{N}\frac{M_i}{\left((x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2\right)^{3/2}}, \tag{32}$$

а $t_0(\sigma)$, $P_t(\sigma)$, $A_x(\sigma)$, $A_y(\sigma)$, $A_z(\sigma)$, $B_x(\sigma)$, $B_y(\sigma)$, $B_z(\sigma)$-“константы” интегрирования. Связи (23), (24) накладывают на “константы” интегрирования следующие условия:

$$A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=0, \tag{33}$$

$$A_x{}^2+A_y{}^2+A_z{}^2=B_x{}^2+B_y{}^2+B_z{}^2=\frac{P_t^2(\sigma)}{F^2(\sigma)}, \tag{34}$$

$$A_xf_x'+A_yf_y'+A_zf_z'=0, \tag{35}$$

$$B_xf_x'+B_yf_y'+B_zf_z'=0, \tag{36}$$

$$P_t(\sigma)=\frac{\alpha}{U^2},\quad t_0=const.,\quad \alpha=const. \tag{37}$$

Анализ решения (25)-(28) показывает, что пространство-время (17), (18) для замкнутой нуль-струны играет роль гравитационной ловушки. Аналогичное решение было получено при исследовании движения замкнутой нуль-струны в пространстве времени Переса [12].

В качестве примера рассмотрим динамику нуль-струны в гравитационном поле трех черных дыр расположенных в точках с координатами $(-l,0,0)$, $(0,0,0)$, $(l,0,0)$. Для простоты будем предполагать, что $M_1=M_2=M_3=M$, а нуль-струна лежит в плоскости yoz. В этом случае имеем

$$A_x(\sigma)=B_x(\sigma)=f_x(\sigma)=f_y(\sigma)=f_z(\sigma)=0. \tag{38}$$

Для выполнения связи (33) полагаем

$$\begin{aligned} &A_y(\sigma) = R\cos\left(\frac{\sigma}{R}\right), \quad \mathrm{B}_y(\sigma) = -R\sin\left(\frac{\sigma}{R}\right), \\ &A_z(\sigma) = R\sin\left(\frac{\sigma}{R}\right), \quad \mathrm{B}_z(\sigma) = R\cos\left(\frac{\sigma}{R}\right). \end{aligned} \tag{39}$$

Тогда после громоздких преобразований находим следующее решение

$$t = \tau,\ x = 0,\ y = M\cos\left(\frac{1}{M}\left(\frac{t}{(2+\sqrt{2})^2} + \sigma\right)\right),\ \mathrm{z} = M\sin\left(\frac{1}{M}\left(\frac{t}{(2+\sqrt{2})^2} + \sigma\right)\right). \tag{40}$$

Решение (40) описывает замкнутую нуль-струну вращающуюся в плоскости yoz.

ВЫВОДЫ

В работе получено точное решение описывающее движение замкнутой нуль-струны в гравитационном поле N черных дыр. Показано, что в этом случае гравитационное поле играет роль гравитационной ловушки. Приведено решение, описывающее вращающуюся нуль-струну в пространстве-времени трех черных дыр. Полученные точные решения представляют интерес по нескольким причинам. Во-первых, некоторые интересные характеристики фонового пространства оказываются закодированными в свойствах струны, т.е. в свойствах 2-мерной теории на ее мировой поверхности. Во-вторых, в области нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных численный анализ до сих пор является самым сложным. Поэтому любые точные решения нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных является очень ценным, т.к. может служить в качестве теста при отработке численного метода.

Авторы выражают глубокую благодарность Желтухину А.А. за обсуждение полученных результатов.

Список литературы

1. Vilenkin A. Cosmic strings and domain walls / A. Vilenkin // Phys. Reports. – 1985. – Vol. 121 – p. 265–315.
2. Moore J.N. On the Evolution of Abelian / Moore J.N., Shellard E.P.S. and Martins C.J.A.P. – Higgs String Networks. Preprint hep – ph / 0107171.
3. Bennett D.P. Evolution of Cosmic Strings / D.P. Bennett // Phys. Rev. D. – 1986. – Vol. 35. – h. 872–888.
4. Brandenberger R.H. Inflation and cosmic string: Two mechanisms for producing structure in the Universe / R.H. Brandenberger, Cambridge, 1987. – Prep. DAMTP.
5. Kibble T.W.B. Cosmic strings / T.W.B. Kibble, M.B. Hindmarsh. – Preprint hep-th / 9411342.
6. Schild A. Classical null strings // Phys. Rev. – 1977. – V. 16 D. – P. 1722–1733.
7. Roshchupkin S.N. Friedman Universes and exactly solution on string cosmology / S.N. Roshchupkin, A.A. Zheltukhin // Class. Quantum. Grav. – 1995. – Vol. 12. – p. 2519–2524.
8. Roshchupkin S.N. Varionational principle and a perturbative solution of non-linear string equations curved space / S.N. Roshchupkin, A.A. Zheltukhin // Nucl. Phys. Grav. – 1999. – V. 543 B. – P. 365–375.

9. Majumdar S.D. A Class of Exact Solutions of Einstein's Field Equations / S.D. Majumdar // Phys. Rev. – 1947. – Vol. 72. – p. 390.
10. Papapetrou A. A Static Solution of the Equations of the Gravitational Field for an Arbitrary Charge Distribution / A. Papapetrou // Proc. Roy. Irish Acad. – 1947. – A51. – p. 191.
11. Hartle J.B. Solutions of the Einstein-Maxwell equations with many black holes / Hartle J.B. and Hawking S.W. // Commun. Math. Phys. – 1972. – Vol. 26. – p. 87.
12. Lelyakov A.P. Null and tensile string in Peres spacetime / A.P. Lelyakov and S.N. Roshchupkin // Acta Physica Polonica B. –2002. – vol. 33. № 2. – P. 593–601.

Рощупкин С.М. Точний розв'язок, що описує рух нуль-струни у просторі-часі Матумдара-Папапетроу / С.М. Рощупкин, О.М. Петраш, О.П. Леляков // Вчені записки Таврійського національного університету ім. В.І. Вернадського. Серія: Фізико-математичні науки. – 2010. – Т. 23(62), № 1. Ч. I. – С. 3-10.
У роботі отримано точний розв'язок рівнянь руху пробної нуль-струни в статичній метриці Матумдара-Папапетроу, що описує систему з n чорних дір Райснера-Нордстрома у випадку коли маси чорних дір дорівнюють їх електростатичному заряду.
Ключові слова: нуль-струна, точні розв'язки, космологія.

Roshchupkin S.N. The exact solution describing movement of a null-string in Majumdar-Papapetrou space-time / S.N. Roshchupkin, A.N. Petrash, A.P. Lelyakov // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2010. – Vol. 23(62), No. 1. P. I. – P. 3-10.
In this article we have received exact solution of motion equations null-string in static metric Majumdar-Papapetrou which describes system consisting of n black holes.
Keywords: null-string, exact solutions, cosmology.

Поступила в редакцию 23.11.2009 г.