Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 198–210.

УДК 519.853.53 MSC2000: 49K35, 91410

В. И. Жуковский, М. И. Высокос

ГАРАНТИРОВАННОЕ ПО ИСХОДАМ И РИСКАМ РЕШЕНИЕ В ОДНОКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ

На основе модификации максимина предлагается понятие Парето-гарантированного по исходам и рискам решения для однокритериальной задачи при неопределенности. Найден явный вид в задаче диверсификации единичного вклада по рублевому и валютному депозитам.

Ключевые слова: Риск, неопределенность, стратегия, максимин, исход

E-mail: zhkvlad@yandex.ru

Введение

В статье рассматривается однокритериальная задача $\Gamma = \langle X, Y, f(x,y)\rangle$ в условиях риска и неопределенности (игра с природой). В рамках этой задачи лицо, принимающее решение (ЛПР), выбирает свою стратегию $x \in X \subseteq \mathbf{R}^n$ так, чтобы достичь возможно большего исхода (значения скалярного критерия $f(x,y)$), ориентируясь при этом на реализацию любой чистой неопределенности $y \in \in Y \subseteq \mathbf{R}^m$. Предполагается, что о неопределенностях ЛПР известны лишь границы изменения и отсутствуют какие-либо вероятностные характеристики. Такая модель Γ возникает, например, на рынке сбыта, где продавец действует с учетом импорта (или конкуренции), добиваясь как можно большей прибыли.

Заметим, что подробные обзоры различных видов неопределенности (неполноты и (или) неточности информации об условиях реализации выбранной стратегии) можно найти, например, в книгах [1, с. 106-114; 2, с. 20-32] и др.

Наличие неопределенностей приводит к множественности исходов $f(x,Y) = = \{f(x,y) | \forall y \in Y\}$, «порожденных» каждой конкретной стратегией $x \in X$. «Сужается» $f(x,Y)$ за счет рисков. Однако, как считает известный специалист в области оптимизации Т.К. Сиразединов, «строгого математического определения риска в настоящее время не существует» [3, с. 31]. В книге [4, с. 15] приводится целая серия различных понятий риска. Все из них, кроме приводимого далее, требуют статистических данных. Однако зачастую у исследователя операций (ИО) просто отсутствует возможность описать «поведение» неопределенностей статистическими методами. Как раз этого случая будем в дальнейшем придерживаться.

Итак, приведем определение: «Риск - это возможность отклонения каких-либо величин от их желаемых значений».

Отметим, что именно такому понятию риска отвечают общепринятые многочисленные микроэкономические риски, вид которых приведен в работе [5, с. 40-50].

Численно оценивается риск значением функции сожаления (риска)

$$\Phi(x, y) = \max_{z \in X} f(z, y) - f(x, y), \tag{1}$$

предложенной Леонардом Сэвиджем [6] в 1951 г. Лауреат Нобелевской премии по экономике Милтон Фридман сказал о Сэвидже, что тот «... был одним из немногих встреченных мною людей, о которых я, не задумываясь, могу сказать - гений». Предложенный в работе [6] принцип минимаксного сожаления, сводящийся к построению пары (x^S, Φ^S) согласно

$$\min_{x \in X} \max_{y \in Y} \Phi(x, y) = \max_{y \in Y} \Phi(x^S, y) = \Phi^S,$$

активно используется для решения задачи Г наравне с принципом максимина (гарантированного результата по Вальду [7]), сводящемуся к нахождению пары (x^g, f^g) такой, что

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} f(x^g, y) = f^g.$$

Сама функция сожаления $\Phi(x, y)$ в отечественной и мировой литературе получила название «функция риска по Сэвиджу». Именно функцию риска $\Phi(x, y)$ и привлекаем в настоящей статье для оценки гарантированного риска.

Каким бывает отношение людей к риску? В ряде книг по финансовой экономике [1, с. 103; 5, с. 5; 8, с. 343] выделено три группы субъектов в зависимости от отношения их к риску:

- противники риска — рискофобы (люди, боящиеся риска и отвергающие его);
- любители риска — рискофилы;
- рисконейтралы (люди, нейтрально относящиеся к риску).

В экономике считается, что большинство людей относятся к противникам риска. На вопрос о том, как фактор неопределенности влияет на поведение людей, экономист обычно отвечает: «Люди не любят рисковать и готовы заплатить деньги за то, чтобы избежать бремени риска» [5, с.6].

Однако возникают ситуации, когда риск просто необходим. Люди прошлого выходили в море, что часто было связано с риском для жизни. Существует даже латинская пословица: «Плавать по морю необходимо, жить — не очень». Так любители риска относятся и к альпинизму, авиации, экстремальным ситуациям. Более того, предпринимательство и риск — понятия неразделимые. В экономической практике принято, что некоторая доля риска является необходимым условием увеличения дохода. Зачастую возникают ситуации, когда без риска вообще обойтись невозможно (например, в чрезвычайных ситуациях).

Наконец, значительное большинство относится к рисконейтралам. Они будут пускаться пусть даже и в рискованные ситуации, но в том только случае, если доход будет выглядеть достаточно привлекательным и одновременно, чтобы возможно меньше нужно было бы рисковать.

В соответствии с приведенной градацией, работы [9,10] и глава 3 из книги [11] посвящены исследованию бескоалиционных игр с позиции противников риска; те же игры но с позиции любителей риска — в работе [12]; взгляд рисконейтрала на принятие решений в Γ — в этой статье. Принятый здесь подход предполагается в дальнейшем распространить на бескоалиционные и кооперативные игры при неопределенности. Именно с этой целью в статье привлечены некоторые положения теории «игр с приоритетом в действиях у управляющего центра, получивших название иерархических игр Гермейера» [13, с. 8].

Итак, цели настоящей работы:

- формализовать гарантированное решение задачи Γ с *одновременным* учетом исходов и рисков (т.е. с позиции рисконейтрала);

- найти явный вид такого решения в задаче диверсификации вклада (на год) на рублевый и валютный депозиты.

1. Информированные неопределенности

Иерархическая игра представляет собой «математическую модель конфликтной ситуации при фиксированной последовательности ходов и обменом информацией участников» [14, с. 477]. Активное развитие теории иерархических тгр в России началось со второй половины прошлого века и возглавлялось Юрием Борисовичем Гермейером ([13-17] и др.), продолжается сейчас его учениками. В игре двух лиц «такие игры описывают взаимодействие между верхним (ведущим) и нижним (ведомым) уровнями управления» [17, с.103], именно, задают порядок ходов игроков, т.е. очередность выбора стратегий и (возможно) сообщение о таком выборе партнеру.

Основной момент в иерархических играх заключается в выборе класса используемых стратегий, зависящий от имеющейся у игроков информации. В теории иерархических игр Гермейера сформулировано точное математическое определение информационного расширения игры [14, с. 497; 15, с. 49-51], которое, в частном случае, приводит к использованию в задаче Γ наряду с чистыми неопределеностями $y \in Y$ так называемых, «информированных неопределенностей» — m-вектор-функций $y(x) : X \to Y$. Именно такие стратегии применялись в работе [18, с. 353] при изучении детерминированного варианта минимаксной антагонистической позиционной игры, в которой игроки наделены различными информационными возможностями. Такие возможности определяют соответствующие виды стратегий, что приводит, в свою очередь, к различным видам иерархических игр (Γ_1, Γ_2 и т.д.) [13,15,17].

Наконец, в теории иерархических игр принято выделять *оперирующую сторону*— ЛПР, несущего полную ответственость за результаты, и *исследователя операций* — консультанта, который готовит аргументированные варианты решений.

При рассмотрении задачи Γ будем считать, что один игрок (у нас ИО) ограничен только чистыми стратегиями $x \in X$, другой же может использовать «любую мыслимую информацию» [18, с. 353]. В часности, он может знать стратегию x (информационная дискриминация ИО) и формировать неопределенность в виде функции $y(x) : X \to Y$. В этом случае критерий в задаче Γ определяется скалярной функцией $f(x, y(x))$, а исходом будет (при выборе ИО конкретной стратегии $x^* \in X$) значение $f(x^*, y(x^*))$. Такие функции $y(\cdot) \in Y^X$ (множеству m-вектор функций $y(x)$, определенных на X со значениями в Y) в теории дифференциальных игр иногда называют *контрстратегиями*, а задача вида Γ, где в качестве неопределенности используются контрстратегии $y(x)$, названа в работе [18, с. 354] *минимаксной игрой*. Повторим, что такие задачи возникают при информационной дискриминации ИО и дополнительной информированности игрока, «ведающего» формированием неопределенностей. Заметим также, что далее будем применять подмножество Y^X, именно множество $C(X, Y)$ всех покомпонентно непрерывных на X m-вектор-функций $y(x) : X \to Y$.

Итак, в статье используется два вида неопределенностей: чистые $y \in Y$ и информированные $y(\cdot) \in Y^X$.

Приведем два результата из теории исследования операций, касающиеся «информированных неопределенностей».

Лемма 1. *Если в* $\Gamma^{(1)} = \langle X, Y, f(x, y) \rangle$ *множества* X, Y *суть компакты, а* $f(x, y)$ *напрерывна на* $X \times Y$*, то:*

а) *функция максимума (минимума)* $\max\limits_{x \in X} f(x, y)$ *(соответственно,* $\min\limits_{y \in Y} f(x, y)$*) непрерывна на* Y *(соответственно, на* X*);*

б) *если дополнительно* Y *- выпукло и* $f(x, y)$ *строго выпукла по* $y \in Y$ *при каждом* $x \in X$*, то существует единственная непрерывная функция* $y(\cdot) \in C(X, Y)$ *такая, что*

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, y(x)) \; \forall x \in X.$$

Напомним, что $f(x, y)$ *строго выпукла по* $y \in Y$ при каждом $x \in X$, если

$$f(x, \lambda y^{(1)} + (1 - \lambda) y^{(2)}) < \lambda f(x, y^{(1)}) + (1 - \lambda) f(x, y^{(2)})$$

при любых постоянных $\lambda \in (0,1)$ и всяких $y^{(j)} \in Y$, $(j = 1,2)$, $y^{(1)} \neq y^{(2)}$.

Утверждение (*а*) — известный факт, имеющийся во многих учебных книгах, например, [19, с. 146], а справедливость утверждения (*б*) указана, например, в книге [20, с. 54].

2. Двухкритериальная задача, соответствующая задаче Γ

Однокритериальной задаче

$$\Gamma = \langle X, Y, f(x,y) \rangle \tag{2}$$

поставим в соответствие двухкритериальную при неопределенности

$$\bar{\Gamma} = \langle X, Y, F(x,y) \rangle, \tag{3}$$

где двухкомпонентная вектор-функция

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y)), F_1(x,y) = f(x,y), F_2(x,y) = -\Phi(x,y). \tag{4}$$

В задаче (3) ИО выбором стратегии $x \in X$ стремится к возможно *большим* значениям обоих исходов $F_i(x,y)$ $(i = 1,2)$ одновременно (именно для такого «однообразия» в выражении (4) функция риска по Севиджу фигурирует со знаком «минус»). При этом ИО учитывает возможную реализацию любой неопределенности $y \in Y$ (или $y(\cdot) \in Y^X$).

Приведем ряд сведений из теории многокритериальных задач вида $\Gamma^{(2)} = \langle X, F[x] \rangle$, где $x \in X$ (множеству стратегий x у ИО), вектор критериев $F[x] = (F_1[x], F_2[x])$ определен на X. Используем для двух векторов $F^{(j)} = (F_1^{(j)}, F_2^{(j)})$, $j = 1,2$, отношения *строгого порядка*:

$$\begin{aligned} &F^{(1)} < F^{(2)} \Leftrightarrow (F_i^{(1)} < F_i^{(2)},\ i = 1,2) \\ &F^{(1)} \not< F^{(2)} \Leftrightarrow \rceil(F^{(1)} < F^{(2)}), \end{aligned}$$

и *нестрогого порядка:*

$$\begin{aligned} &F^{(1)} = F^{(2)} \Leftrightarrow (F_i^{(1)} = F_i^{(2)},\ i = 1,2), \\ &F^{(1)} \neq F^{(2)} \Leftrightarrow \rceil(F^{(1)} = F^{(2)}), \\ &F^{(1)} \ngeqslant F^{(2)} \Leftrightarrow (F_i^{(1)} \ngeqslant F_i^{(2)},\ i = 1,2), \\ &F^{(1)} \ngeq F^{(2)} \Leftrightarrow \rceil(F^{(1)} \geq F^{(2)} \wedge F^{(1)} \neq F^{(2)}). \end{aligned}$$

Перейдем к формализации двух максимальных векторных оптимумов:

1) стратегия $x^S \in X$ называется *максимальной по Слейтеру* в $\Gamma^{(2)} = \langle X, F[x] \rangle$, если

$$F[x^S] \not< F[x] \ \forall x \in X,$$

вектор $F[x^S]$ является *максимумом по Слейтеру* в $\Gamma^{(2)}$ (что эквивалентно: для каждой стратегии $x \in X$ найдется хотя бы один номер $j(x) = j \in \{1, 2\}$ такой, что $F_j(x) \leq F_j(x^S)$);

2) стратегия $x^P \in X$ называется *максимальной по Парето* в $\Gamma^{(2)}$, если

$$F[x^P] \nleq F[x] \; \forall x \in X,$$

а вектор $F[x^P] \in R^2$ есть *максимум по Парето* для $\Gamma^{(2)}$ (что эквивалентно любому из двух определений - для каждого $x \in X$:

а) либо $F[x^P] = F[x]$, либо $\exists j(x) = j \in \{1, 2\}$ такой, что $F_j[x] < F_j[x^P]$;

б) несовместна система неравенств $F_i[x] \geqslant F_i[x^P]$, $i = 1, 2$, из которых, по крайней мере, одно строгое).

Обозначим множество $x^S(x^P)$ через X^S (соответственно, X^P). Согласно определениям $X^P \subseteq X^S$, но они могут не совпадать. Факт максимальности (минимальности) в $\Gamma^{(2)}$ по Слейтеру (по Парето) обозначаем

$$F[x^S] = MAX^S_{x \in X} F[x] \; (F[x^P] = MAX^P_{x \in X} F[x]),$$

$$F[x^S] = MIN^S_{x \in X} F[x] \; (F[x^P] = MIN^P_{x \in X} F[x]).$$

Будем использовать и множества $F[X^S] = \{F[x] | x \in X^S\}$, $F[X^P] = \{F[x] | x \in X^P\}$. В теории многокритериальных задач [21, с. 158] установлены следующие факты:

Лемма 2. [21, с. 158]. *Если в $\Gamma^{(2)} = \langle X, F(x) \rangle$ множество X суть непустой компакт, а компоненты вектора $F[x]$ непрерывны, то множество $X^P \neq \emptyset$ и стратегия $x \in X$, найденная из*

$$\max_{x \in X} (\alpha_1 F_1[x] + \alpha_2 F_2[x]) = \alpha_1 F_1[x^P] + \alpha_2 F_2[x^P]$$

при каких-либо $\alpha_i = const > 0$ $(i = 1, 2)$, максимальна по Парето в $\Gamma^{(2)}$; множество X^P внутренне P-устойчиво, т.е. $\forall x^{(j)} \in X^P$ имеет место $F[x^{(1)}] \nleq F[x^{(2)}]$, а также внешне P-устойчиво, т.е. $\forall x \in X$ и $x \notin X^P$ существует стратегия $x^P \in X^P$ такая, что $F[x] \leq F[x^P]$.

Аналогично, имеет место

Лемма 3. *Пусть «информированная» неопределенность $y_P(x) \in Y^X$, найдена из*

$$\min_{y \in Y} [\alpha_1 F_1(x, y) + \alpha_2 F_2(x, y)] = \alpha_1 F_1(x, y_P(x)) + \alpha_2 F_2(x, y_p(x)) \; \forall x \in X,$$

при каких-либо $\alpha_i = const > 0$ $(i = 1, 2)$.

Тогда при каждом $x \in X$ неопределенность $y_P(x)$ минимальна по Парето в двухкритериальной задаче $\Gamma(x) = \langle x, Y, \{F_i(x, y)\}_{i=1,2} \rangle$, т.е. $F(x, y) \nleq F(x, y_P(x))$ $\forall x \in X$, $y \in Y$.

Замечание 1. Положим в леммах 2 и 3 постоянные $\alpha_1 = 1 - \sigma$, $\alpha_2 = \sigma$, где постоянная $\sigma \in (0,1)$. Тогда, с учетом (1), а также $F_1(x,y) = f(x,y)$ и $F_2(x,y) = -\Phi(x,y)$ и обозначения

$$\varphi(x,y) = \alpha_1 F_1(x,y) + \alpha_2 F_2(x,y),$$

получаем

$$\begin{gathered}\varphi(x,y) = (1-\sigma)f(x,y) - \sigma\Phi(x,y) = \\ = f(x,y) - \sigma f(x,y) - \sigma[\max_{z\in X} f(z,y) - f(x,y)] = f(x,y) - \sigma \max_{z\in X} f(z,y).\end{gathered} \tag{5}$$

3. Парето-гарантированное по исходам и рискам решение

Интерпретация максимина «с позиции» двухуровневой иерархической игры двух лиц

Максиминное решение (x^g, f^g) задачи (2) определяется цепочкой равенств

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x,y) = \min_{y\in Y} f(x^g,y) = f^g. \tag{6}$$

Используя «информированные неопределенности», выражение (6) можно представить как последовательное «действие» двух операций: *внутреннего минимума* – для игрока нижнего уровня – построение $y(x) : X \to Y$ такого, что

$$\min_{y\in Y} f(x,y) = f(x,y(x)) = f[x] \ \forall x \in X; \tag{7}$$

предполагая, что вектор-функция $y(x)$ единственна, переходим к операции *внешнего максимума* (для игрока верхнего уровня иерархии)

$$\max_{x\in X} f(x,y(x)) = f(x^g, y(x^g)) = f^g. \tag{8}$$

Тогда в иерархической двухуровневой игре с одним игроком на каждом уровне:

первый ход за ИО - игроком верхнего уровня: он предает на нижний уровень «свои» возможные стратегии $x \in X$;

второй ход за игроком нижнего уровня - он аналитически конструирует $y(x)$ согласно (7) и, если $y(x)$ единственно, передает $y(x)$ на верхний уровень;

третий ход за игроком верхнего уровня - он находит пару (x^g, y^g) согласно (8).

Приведенное «трехходовое понятие» укладывается *полностью* в определение гарантированного результата первого (ведущего) игрока в игре Γ_1 (по Гермейеру), если в работе [17, с. 104] заменить функцию выигрыша ведомого на $-f(x,y)$. Еще раз подчеркнем, что аналог и модификацию такого «трехходового понятия» удобно применять к построению гарантированного решения с учетом исходов и рисков для бескоалиционного и кооперативного вариантов конфликта, здесь применим для формализации решения задачи Γ с позиции рисконейтрала.

Замечание 2. Максиминное решение определяется парой (x^g, f^g) по двум причинам:

а) каждой стратегии $x \in X$ (в результате операции *внутреннего минимума* (6)) ставится в соответствие гарантия $f[x]$, ибо

$$f[x] \leq f(x, y) \ \forall y \in Y$$

(так как исход $f[x]$ «обеспечивает себе» ИО при любых $y \in Y$ благодаря применению стратегии x);

б) из таких гарантий ЛПР выбирает наибольшую (максимальную), ибо

$$f^g = f[x^g] \geq f[x] \ \forall x \in X.$$

Итак, ЛПРу предлогается применить в задаче (2) стратегию x^g, тем самым «обеспечивая себе» наибольшую (максимальную) гарантию $f[x^g] = f(x^g, y(x^g)) \leq$ $\leq f(x^g, y) \ \forall y \in Y$. Этот же прием применим при формализации сильно гарантированного по исходам и рискам решения (СГР) задачи (3), (4).

Формализация

Здесь будем использовать функцию $\varphi(x, y) = f(x, y) - \sigma \max\limits_{z \in X} f(z, y)$ из замечания 1.

Определение 1. Пару $(x^P,\ F^P = F[x^P]) \in X \times R^2$ назовем *Парето-гарантированным по исходам и рискам решением* (ПГИР) однокритериальной задачи (2), если в задаче (3):

1^0) существует для каждой стратегии $x \in X$ и какой-либо хотя бы одной $\sigma \in (0, 1)$ своя паретовская гарантия $F[x] = (F_1[x], F_2[x])$ такая, что

$$\varphi[x] = \min_{y \in Y} \varphi(x, y) = \varphi(x, y_P(x)) \ \forall x \in X,$$
$$(F_1[x] = f(x, y_P(x)), F_2[x] = -\Phi(x, y_P(x)).$$

Тогда
$F[x] = F(x, y_P(x))$ является паретовской (а, значит, и слейтеровской) гарантией [22], ибо

$$F[x] \not\leq F(x, y) \ (\text{соответственно}, F[x] \not< F(x, y)) \ \forall y \in Y;$$

2^0) стратегия x^P максимальна по Парето ($x^P \in X^P$) в двухкритериальной «задаче гарантий» $\langle X, F[x] \rangle$, т.е. $F[x^P] \not\leq F[x] \ \forall x \in X$.

Замечание 3. Отметим, что:

- п. 1^0 определения 1 связывает с каждой стратегией $x \in X$ векторную гарантию $F[x] \leq F(x, y) \ \forall y \in Y$ (аналог операции внутреннего минимума в определении максимина);

- п. 2^0 предлагает лицу, принимающему решение, применять максимальную (по Парето) гарантию $F[x^P]$ (аналог операции внешнего максимума), ибо при $x \in X$ и

$x \neq x^P$ увеличение одной из гарантий $F_j[x] > F_j[x^P]$ неизбежно влечет уменьшение другой $F_k[x] < F_k[x^P]$, $k \neq j \in \{1, 2\}$;

- вследствие внешней и внутренней P-устойчивости множества X^P, выбор лицом, принимающим решение, стратегии $x^P \in X^P$ «обеспечивает» ему «самую большую» – неулучшаемую векторную гарантию $F[x^P]$ (конечно, в рамках максимальности по Парето);

- гарантия $F_1[x]$ ограничивает исходы $f(x, y)$ снизу, ибо из $f(x, y) > F_1[x]$ следует ограничесние рисков $\Phi(x, y)$ снизу, так как тогда $\Phi(x, y) > \Phi[x]$ $\forall y \in Y$ и обратно. Поэтому предпринятый здесь подход полностью соответствует желаниям рисконейтрала (см. Введение) увеличить исход и одновременно уменьшить риск.

Иерархическая интерпретация определения 1

Как и в п. 3.1, рассматриваем двухуровневую игру с одним игроком на каждом уровне (рис. 1).

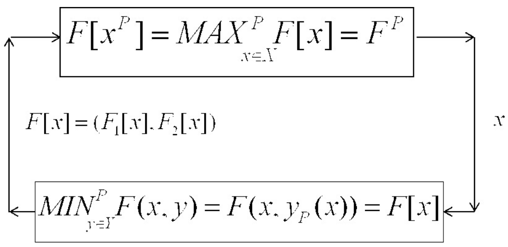

Рис. 1. Порядок построения ПГИР

Порядок построения СГР

Первый ход за игроком верхнего уровня: он, также как в понятии максимина, посылает на нижний уровень свои возможные стратегии $x \in X$.

Второй ход за игроком нижнего уровня; он аналитически конструирует две функции $F_i[x]$, $i = 1, 2$, согласно

$$F[x] = MIN^P_{y \in Y} F(x, y) = F(x, y_P(x)),\ F_i[x] = F_i(x, y_P(x))\ (i = 1, 2)\ \forall x \in X,$$

строя тем самым для каждой стратегии $x \in X$ векторную гарантию $F[x] = (F_1[x], F_2[x])$, и отправляет векторную гарантию $F[x]$ на верхний уровень иерархии.

Третий ход снова за игроком верхнего уровня: он находит максимальную по Парето стратегию x^P в двухкритериальной «задаче гарантий» $\langle X, F[x] \rangle$ и строит соответствующий вектор $F^P = (F_1[x^P], F_2[x^P])$. Тогда тройка $(x^P, F^P) \in X \times R^2$ и образует Парето-гарантированное по исходам и рискам решение задачи (2). «Двухкритериальный смысл» такого решения см. в замечании 3.

Замечание 4. Для построения явного вида Парето-гарантированного решения (x^P, F^P) определение 1 «диктует» следующие этапы.

Этап 1. Найти

$$\min_{y\in Y}\varphi(x,y)=\varphi(x,y_P(x))=\varphi[x]=(1-\sigma)F_1[x]+\sigma F_2[x]\ \forall x\in X. \tag{9}$$

Этап 2. Определить максимизатор

$$x^P=arg\max_{x\in X}\varphi(x,y_P(x)). \tag{10}$$

Этап 3. Найти векторную гарантию $F^P=(F_1[x^P],F_2[x^P])=(F_1^P=f^P=$ $=f(x^P,y_P(x^P)),\ F_2^P=-\Phi^P(x^P,y_P(x^P))=-\Phi^P.$

Тогда пара (x^P, F^P) является Парето-гарантированным по исходам и рискам решением задачи (2)

Замечание 5. Объединение (9) и (10) означает, что $x^P\in X$ является максиминной стратегией в антагонистической игре

$$\langle X, Y, \varphi(x,y)=f(x,y)-\sigma\max_{z\in X}f(z,y)\rangle,$$

где седловая точка (x^P, y_P) функции $\varphi(x,y)$ определяется цепочкой неравенств

$$\varphi(x,y_P)\le\varphi(x^P,y_P)\le\varphi(x^P,y)\ \forall x\in X,\ y\in Y, \tag{11}$$

что эквивалентно

$$\max_{x\in X}\varphi(x,y_P)=\min_{y\in Y}\max_{x\in X}\varphi(x,y)=\min_{y\in Y}\varphi(x^P,y)=\max_{x\in X}\min_{y\in Y}\varphi(x,y).$$

Отсюда получаем следующий способ построения Парето-гарантированного по исходам и рискам решением задачи (2).

I этап: найти $f[y]=\max_{z\in X}f(z,y)\ \forall y\in Y$;

II этап: построить скалярную функцию $\varphi(x,y)=f(x,y)-\sigma f[y]$ для постоянной $\sigma\in(0,1)$;

III этап: определить седловую точку $(x^P,y_P)\in X\times Y$ функции $\varphi(x,y)$ из (5);

IV этап: с помощью (x^P,y_P) вычислить два числа $f^P=f(x^P,y_P)$, $\Phi^P=$ $=\Phi^P(x^P,y_P)=f[y_P]-f(x^P,y_P)$. Тогда найденная тройка (x^P,f^P,Φ^P) и будет искомым ПГИР задачи (2).

Этот способ в следующем разделе применяется для задачи диверсификации вклада (на 1 год) по рублевому и валютному депозитам.

4. Задача о диверсификации

Математическая модель

Наращенную за год сумму единичного вклада по двум депозитам (рублевому и валютному) на конец года можно [23, с. 58-60] представить в виде

$$f(x,y) = x(1+r) + \frac{1-x}{K_0}(1+d)y, \tag{12}$$

где r и d – процентные ставки по рублевому и валютному депозитам соответственно; K_0 и y – курс валюты (к рублю) в начале и в конце годового периода; $x \in [0,1]$ – дробь, которая определяет пропорцию, в которой вклад разделяется на рублевую и валютную части.

Согласно (12), x есть доля рублевого вложения, а остаток $1-x$ вкладчик конвертирует в валюту $\frac{1-x}{K_0}$ и помещает ее на валютный депозит. В конце года с помощью обратной конвертации валютный вклад по курсу y переводится в рубли и итоговая наличность определяется суммой $f(x,y)$ из (12). Для вкладчика требуется определить пропорцию x, при которой итоговая наличность $f(x,y)$ будет возможно большей. При этом следует учесть, что будущий курс валюты y, как правило, неизвестен. Но он все-таки может быть задан коридором возможных значений, именно, $y \in [a,b]$, где постоянные $b > a > 0$ заданы или выбраны априори.

Итак, математическую модель задачи диверсификации можно представить упорядоченной тройкой

$$\Gamma^* = \langle X = [0,1],\ Y = [a,b], f(x,y)\rangle,$$

где функция $f(x,y)$ определена в (12). Здесь $X = [0,1]$ – *множество стратегий* x у ЛПР (вкладчика), $Y = [a,b]$ – множество неопределенностей y, наконец, $f(x,y)$– -*функция полезности* вкладчика, значение которой в дальнейшем называется *исходом.* С точки зрения исследования операций, Γ^* есть однокритериальная задача принятия решений при неопределенности.

Замечание 6. Замечание 5 «диктует» способ построения Парето-гарантированного по исходам и рискам решения задачи Γ^*. Он сводится к выполнению трех этапов, именно,

I этап: построить скалярную функцию $f[y] = \max\limits_{x\in[0,1]} f(x,y)$, и с ее помощью найти $\varphi(x,y) = f(x,y) - \sigma f[y]$, постоянная $\sigma \in (0,1)$;

II этап: определить седловую точку $(x^P, y_P) \in [0,1] \times [a,b]$ функции $\varphi(x,y)$, именно,

$$\max_{x\in[0,1]} \varphi(x,y_P) = \varphi(x^P,y_P) = \min_{y\in[a,b]} \varphi(x^P,y).$$

III этап: с помощью пары (x^P, y_P) вычислить два числа

$$f^P = f(x^P,y_P),\ \Phi^P = f[y_P] - f(x^P,y_P). \tag{13}$$

Тогда найденная в результате тройка (x^P, f^P, Φ^P) как раз и образует Парето--гарантированное по исходам и рискам решение задачи Γ^*.

Явный вид Парето-гарантированного решения

Утверждение 1. Для задачи Γ^* Парето-гарантированное по исходам и рискам решение имеет вид

$$(x^r, f^r, \Phi^r) = \begin{cases} (1, 1+r, 0) & \text{при} \quad b < K_0\frac{1+r}{1+d}, \\ (0, \frac{1+d}{K_0}a, 0) & \text{при} \quad a > K_0\frac{1+r}{1+d}, \\ \text{для} \quad a \le K_0\frac{1+r}{1+d} \le b & \\ (1, 1+r, 0) & \text{при} \quad a \le y < K_0\frac{1+r}{1+d}, \\ (0, 1+r, 0) & \text{при} \quad K_0\frac{1+r}{1+d} \le y \le b. \end{cases} \tag{14}$$

Доказательство основывается на замечании 5.

Замечание 7. Чтобы использовать утверждение 1 следует,

- *во-первых,* по заданным постоянным K_0, a, b, r и d найти число $\frac{1+r}{1+d}K_0$,

- *во-вторых,* выяснить какое из четырех неравенств

$$b < \frac{1+r}{1+d}K_0, \;\; a > \frac{1+r}{1+d}K_0, \;\; a \le y < \frac{1+r}{1+d}K_0 \text{ или } \frac{1+r}{1+d}K_0 \le y \le b$$

имеет место; для третьего и четвертого соотношений дополнительно учесть границы изменения неопределенности y,

-*в-третьих,* в зависимости от реализации хотя бы одного из этих четырех случаев, с помощью утверждения 1 выписать Парето-гарантированное по исходам и рискам решение (x^P, f^P, Φ^P).

Например, пусть $r = 0,12$, $d = 0,8$, $K_0 = 30$, $a = 30$ и $b = 40$. Тогда

$$\frac{1+r}{1+d}K_0 = \frac{1,12}{1,08}30 \cong 31,3 > a = 30.$$

Согласно третьей и четвертой строке из (14) будет

$$(x^P, f^P, \Phi^P) = \begin{cases} (1, 1+r, 0) & \text{при} \quad y \in [30; 31,3], \\ (0, 1+r, 0) & \text{при} \quad y \in [31,3; 40]. \end{cases}$$

Этот результат означает, что ЛПР получит один и тот же гарантированный выигрыш $1 + r$ с нулевым риском, вкладывая всю сумму в рублевый вклад, если неопределенность $y \in [30; 31,3)$ и в валютный, если $y \in [31,3; 40]$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №14-01-90408 Укр_а.

Список литературы

[1] Черемных Ю.Н. *Микроэкономика. Продвинутый уровень.* - М.: ИНФРА, – 2008.

[2] Жуковский В.И. *Риски при конфликтных ситуациях.* - М.: URSS, ЛЕНАНД, 2011.

[3] Сиразетдинов Т.К., Сиразетдинов Р.Т. *Проблемы риска и его моделирование* //Проблемы человеческого риска. - 2007. - № 1.-С. 31-43.

[4] Шахов В.В. *Введение в страхование. Экономический аспект.* - М.: Финансы и статистика, 1994.

[5] Цветкова Е.В., Арлюкова И.О. *Риски в экономической деятельности.* - СПб.: ИВЭСЭП, 2002.

[6] Savage L.Y. *The theory of statistical decision* // J. American Statistic Association.- 1951. № 46. - P. 55-67.

[7] Wald A. *Contribution to the theory of statistical estimation and testing hypothesis* // Annuals Math. Statist.- 1939. Vol. 10 - P. 299-326.

[8] Фишер С., Дорнбуш Р., Шмалензи Р. *Экономика.* - М.: Дело, 1998.

[9] Жуковский В.И. *Введение в дифференциальные игры при неопределенности.* - М.: МНИИПУ, 1997.

[10] Zhukovskiy V.I. *Luapunov Function in Differential Games.*- London, N.-Y.: Taylor& Fransis, 2003.

[11] Жуковский В.И., Чикрий А.А. *Линейно-квадратичные дифференциальные игры.*- Киев: Наукова Думка.- 1994.

[12] Жуковский В.И., Жуковская Л.В. *Риск в многокритериальных и конфликтных системах при неопределенности.*- М.: Эдиториал УРСС. -2004.

[13] Гермейер Ю.Б. *Игры с непротивоположными интересами.* - М.: Наука. - 1978.

[14] Ватель И.А., Ерешко Ф.И. *Игра с иерархической структурой* // Математическая энциклопедия. - М. - 1979. - Т.2.

[15] Кукушкин Н.С., Морозов В.В. *Теория неантагонистических игр.* - М.: МГУ, 1984.

[16] Ватель И.А., Ерешко Ф.И. *Математика конфликта и сотрудничества.* - М.: Знание, 1974.

[17] Морозов В.В. *Основы теории игр.* - М.: Изд. отдел фак-та ВМиК МГУ, 2002.

[18] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* - М.: Наука, 1974.

[19] Дмитрук В.А. *Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс.* - М.: ВМиК МГУ, 2012.

[20] Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. *Исследование операций в задачах и упражнениях.* - М.: Высшая школа, 1968.

[21] Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* - М.: Наука, 1982.

[22] Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E. *The vector-Valued Maximin.* - N.-Y.: Academic Press, 1994.

[23] Капитоненко В.В. *Финансовая математика ее приложения.* - М.: ПРИОР, 2000.

Guaranteed in outcomes and risks solution for single-criterion problem

Concept of Pareto-guaranteed in outcomes and risks solution for single-criterion problem under uncertainty is proposed. It is based on a modification of the maximin. Explicit solution for the problem of a single contribution to the diversification of ruble and foreign currency deposit is found.

Keywords: Risk, uncertainty, strategy, maximin, outcome.