Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 151–158.

УДК 517.98

Д. Л. Тышкевич

О СОРАЗМЕРНОСТИ БИМОДУЛЕЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ТИПА

В работе сформулированы условия соразмерности (т.е. совпадение левой и правой размерностей) для свободных бимодулей специального типа над IBN–кольцами. Данные результаты могут быть полезными при изучении бимодулей над алгебрами гиперкомплексных чисел.

Ключевые слова: кватернионы, гиперкомплексные числа, кольцо, IBN–кольцо, модуль, свободный модуль, бимодуль

Введение

В работе [6] были рассмотрены и определены базовые понятия, необходимые для работы с кватернионными бимодулями (размерность, топологии, спектр и др.). Простейшее из них — размерность — допускает непосредственное обобщение на бимодули более общего типа. Дело в том, что a priori в бимодуле определены две размерности — левая и правая (понятие линейной размерности имеет смысл лишь для свободных (би)модулей с инвариантным базисным числом, см. ниже), поэтому возникает необходимость выяснить при каких условиях левая и правая размерности совпадают — чему и посвящена данная работа.

Некоторые из таких условий носят общеалгебраический характер (см. ниже теорему 1), другие выявляются на основе алгебраического анализа специфических, на первый взгляд, свойств кватернионных бимодулей (см. определения 3, 4, разложение (5); условие (KhK) на с. 157 и предложение 3).

Нацеленность данных обобщений направлена, в первую очередь, на перспективу изучения бимодулей над (ассоциативными) алгебрами гиперкомплексных чисел (среди которых — бикомплексные числа, бикватернионы, алгебры Клиффорда и др., см., например, [5]).

Некоторые определения и обозначения. Приведём здесь некоторые необходимые нам определения и обозначения. Всюду в работе под "кольцом" подразумевается *ассоциативное* кольцо. $\mathbb{H}$ обозначает тело кватернионов.

Модуль H над кольцом K называется *свободным*, если в H существует K–полная K–линейно независимая система[1] (K–базис). В общем случае мощности различных K–базисов могут различаться. Кольцо K, для которого в любом K–модуле H мощности всех K–базисов совпадают, называется *IBN–кольцом* или кольцом *с инвариантным базисным числом*; все тела а также коммутативные кольца являются IBN–кольцами (см. [2]). В этом случае мощность K–базиса в H мы будем называть *K–размерностью* H и обозначать[2] через $\dim(H : K)$.

*K–би*модуль H будем называть свободным, если он является свободным и как левый и как правый K–модуль. Соответственно размерности в этом случае будем обозначать через $\dim_l(H : K),\ \dim_r(H : K)$.

1. $(K, \mathcal{Z})$–бимодули

Пусть K — кольцо, $Z(K)$ — центр K; $\mathcal{Z} \subseteq Z(K)$ — подкольцо, H — аддитивная абелева группа.

Определение 1. Назовём H $(K, \mathcal{Z})$–*бимодулем*, если

a) H — K–бимодуль;

b) $\forall\, z \in \mathcal{Z}\ \ \forall\, h \in H \quad zh = hz$.

Пример 1. Пусть $\mathcal{Z}$ — коммутативное кольцо, K — $\mathcal{Z}$–алгебра. Если отождествить $\mathcal{Z}$ с подмножеством коммутанта алгебры K, то "$(K, \mathcal{Z})$–бимодуль" в терминах определения 1 есть "K–бимодуль" в терминах [3, гл. 1, §1.1] (ср. ниже с примером 4). Также произвольный *кватернионный бимодуль* в терминах [6, п. 2.1] является $(\mathbb{H}, \mathbb{R})$–бимодулем.

Пример 2. $H := K^I$, где K — произвольное кольцо, а I — произвольное непустое множество. Левое и правое действия K задаются покомпонентно умножением компонент соответственно слева или справа на элемент. H является $\big(K, Z(K)\big)$–бимодулем, в котором левое и правое действие совпадают, если K коммутативно.

Пример 3. Пусть M — произвольный правый $\mathbb{C}$–модуль, и $H := M^2$ (как кольцо). Определим левое и правое действия $\mathbb{C}$ на H, полагая

$$i \cdot \langle a, b\rangle := \langle ai, bi\rangle; \quad \langle a, b\rangle \cdot i := \langle bi, ai\rangle;$$
$$r \cdot \langle a, b\rangle = \langle a, b\rangle \cdot r := \langle ar, br\rangle \quad (r \in \mathbb{R})$$

с дальнейшим доопределением по $\mathbb{R}$–линейности. Прямая проверка показывает, что H является $(\mathbb{C}, \mathbb{R})$–бимодулем с несовпадающими левым и правым действием $\mathbb{C}$.

---

[1]Это — одно из эквивалентных определений, см. [2, гл. 3]

[2]Допуская, быть может, некоторую вольность речи.

Пример 4. Пусть K — произвольное кольцо, $\mathcal{Z} \subseteq Z(K)$ — подкольцо и M — произвольный правый K–модуль. Положим $H := \mathrm{End}_{\mathcal{Z}} M$ (совокупность соответствующих эндоморфизмов). Определим левое и правое действие K на H:

$$\lambda \cdot a := R_\lambda a; \quad a \cdot \lambda := aR_\lambda \quad (\lambda \in K,\ a \in H),$$

где $R_\lambda x := x\lambda,\ x \in M$. Прямая проверка показывает, что H является $\big(K, \mathcal{Z}\big)$–бимодулем с несовпадающими (за исключением специальных случаев) левым и правым действием K.

Пусть K — IBN–кольцо.

Определение 2. K–бимодуль H назовём *соразмерным*, если его левая размерность над K совпадает с правой: $\dim_l(H : K) = \dim_r(H : K)$.

Пусть H — $(K, \mathcal{Z})$–бимодуль. Тогда на H естественно задана структура $\mathcal{Z}$–модуля (всё равно — левого или правого, в силу коммутативности $\mathcal{Z}$).

Замечание 4. Так как $\mathcal{Z}$ коммутативно, то $\mathcal{Z}$ — IBN–кольцо.

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия.*

1) K *— свободный* $\mathcal{Z}$*–модуль.*
2) K *— IBN–кольцо.*
3) H *— свободный* K*–бимодуль.*

Тогда

a) H *— свободный* $\mathcal{Z}$*–модуль.*
b) $\dim_l(H : K) \dim(K : \mathcal{Z}) = \dim_r(H : K) \dim(K : \mathcal{Z}) = \dim(H : \mathcal{Z})$

Доказательство. Пусть $\mathcal{H} = \{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — правый K–базис в H и $\mathcal{K} = \{k_\beta\}_{\beta \in B}$ — $\mathcal{Z}$–базис в K, существующие в силу условий 1) — 3) теоремы (см. замечание 4). Тогда

$$|A| = \dim_r(H : K), \quad |B| = \dim(K : \mathcal{Z}) \tag{1}$$

Положим $\mathcal{G} = \{g_{\alpha\beta}\}_{\langle\alpha,\beta\rangle \in A \times B}\,, \quad g_{\alpha\beta} := h_\alpha k_\beta$. Докажем, что

$$\mathcal{G} \text{ — } \mathcal{Z}\text{–}\textit{линейно независимая система}. \tag{2}$$

Действительно, пусть $A' \subseteq A$, $B' \subseteq B$ — конечные подмножества, и

$$\sum_{\langle\alpha,\beta\rangle \in A' \times B'} g_{\alpha\beta} z_{\alpha\beta} = 0. \tag{3}$$

для некоторой системы $\{z_{\alpha\beta}\}_{\langle\alpha,\beta\rangle \in A' \times B'}$ элементов $\mathcal{Z}$. Положим

$$\theta_\alpha := \sum_{\beta \in B'} k_\beta z_{\alpha\beta}, \quad \alpha \in A' \quad (\theta_\alpha \in K).$$

Тогда
$$0 \overset{(3)}{=} \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle\in A'\times B'} g_{\alpha\beta} z_{\alpha\beta} = \sum_{\alpha\in A'} h_\alpha \Big(\sum_{\beta\in B'} k_\beta z_{\alpha\beta}\Big) = \sum_{\alpha\in A'} h_\alpha \theta_\alpha$$
Так как система $\mathcal{H}$ K–линейно независима, то для всех $\alpha \in A'$ $\theta_\alpha = 0$. В свою очередь, в силу $\mathcal{Z}$–линейной независимости системы $\mathcal{K}$ для всех $\alpha \in A'$ и $\beta \in B'$ $z_{\alpha\beta} = 0$. Итак, (2) доказано. Покажем теперь, что
$$\mathcal{G} - K\text{–}\textit{полна}. \tag{4}$$
Пусть $h \in \mathcal{H}$ — произвольный фиксированный элемент. Так как система $\mathcal{H}$ K–полна, то существует такое конечное множество $A' \subseteq A$ и система $\{\theta_\alpha\}_{\alpha\in A}$ элементов из K, что $h = \sum\limits_{\alpha\in A'} h_\alpha\theta_\alpha$. В свою очередь, в силу $\mathcal{Z}$–полноты системы $\mathcal{K}$ для всякого $\alpha \in A'$ существует такое конечное множество $B_\alpha \subseteq B$ и система $\{z_{\alpha\beta}\}_{\beta\in B_\alpha}$, что $\theta_\alpha := \sum\limits_{\beta\in B_\alpha} k_\beta z_{\alpha\beta}$. Отсюда, полагая $B' := \bigcup\limits_{\alpha\in A'} B_\alpha$, получим
$$h = \sum_{\alpha\in A'} h_\alpha\theta_\alpha = \sum_{\alpha\in A'} h_\alpha \Big(\sum_{\beta\in B_\alpha} k_\beta z_{\alpha\beta}\Big) = \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle\in A'\times B'} h_\alpha k_\beta z_{\alpha\beta} = \sum_{\langle\alpha,\beta\rangle\in A'\times B'} g_{\alpha\beta} z_{\alpha\beta}.$$
Таким образом, (4) доказано. Из (2) и (4) следует цепочка:
$$\dim(H : \mathcal{Z}) = |\mathcal{G}| = |A \times B| = |A||B| \overset{(1)}{=} \dim_r(H : K)\dim(K : \mathcal{Z}).$$
Равенство $\dim_l(H : K)\dim(K : \mathcal{Z}) = \dim(H : \mathcal{Z})$ доказывается двойственным образом. $\square$

Следствие 1. *Пусть $(K, \mathcal{Z})$–бимодуль H удовлетворяет условиям 1) — 3) теоремы 1, и выполняется одно из условий*[3] *:*

a) $\dim(K : \mathcal{Z}) \leqslant \min\{\dim_l(H : K), \dim_r(H : K)\}$

b) $\dim(K : \mathcal{Z})$ — *конечное число.*

Тогда H является соразмерным.

Доказательство. Следует из b) теоремы 1 и обычной арифметики кардинальных чисел (см., например, [1, § 6.4, сл. 4; § 6, упр. 2]) . $\square$

2. Центрально разложимые бимодули

Определение 3. Элемент $h \in H$ назовём *центральным*, если для любого $k \in K$ $hk = kh$. Совокупность всех центральных векторов H обозначим через $H^{Z(K)}$. Очевидно, $H^{Z(K)}$ является $Z(K)$–модулем (точнее, бимодулем с совпадающими правым и левым действиями центра $Z(K)$).

[3] Естественно, не взаимоисключающих. Оба эти условия нарушаются, если в качестве H рассмотреть, например, $\mathbb{H}^n$ как $(\mathbb{H}, \mathbb{Q})$–бимодуль.

Определение 4. K–бимодуль H назовём *центрально разложимым*, если $H^{Z(K)}$ является K–полным множеством, причём разложение любого элемента из H по $H^{Z(K)}$ *однозначно.*

Иллюстрации. *По примеру 1.* Каждый вектор x кватернионного бимодуля H допускает однозначное разложение вида $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ (см. [6], ср. [4, Ch. 1, §2.1]), где

$$\begin{aligned} x_0 &= 1/4(x - ixi - jxj - kxk), & x_1 &= -1/4(xi + ix - jxk + kxj), \\ x_2 &= -1/4(xj + ixk + jx - kxi), & x_3 &= -1/4(xk - ixj + jxi + kx); \end{aligned} \tag{5}$$

x_s ($s \in \overline{0,3}$) — центральные элементы в терминах определения 3 (в [6] такие элементы называются вещественными векторами). Таким образом, произвольный кватернионный бимодуль согласно определению 4 является центрально разложимым.

По примеру 2. В этом случае, очевидно, $H^{Z(K)} = Z(K)^I$, и H центрально разложим в частности, когда K — свободный $Z(K)$–модуль с конечным $Z(K)$–базисом.

По примеру 3. Простая проверка показывает, что $H^{Z(K)}$ состоит из всех пар вида $\langle a, a\rangle$. Ни при каком M бимодуль H не является центрально разложимым.

По примеру 4. В этом случае $H^{Z(K)} = \operatorname{End}_K M$. Если *a)* K коммутативно и $\mathcal{Z} \subset K$ (строго), то H не является центрально разложимым (K–линейная оболочка элементов из $\operatorname{End}_K M$ снова будет лежать в $\operatorname{End}_K M$). Если же *b)* K — некоммутативно, то в общем случае ситуация представляется сложной, и зависит, надо полагать, от строения как самого K так и модуля M. В важном частном случае, когда $K = \mathbb{H}$, $\mathcal{Z} = \mathbb{R}$ (и M представляет собой кватернионный модуль), ответ для H даётся выше в иллюстрации к примеру 1; разложение (5) при этом обеспечивает представление произвольного $\mathbb{R}$–линейного оператора через $\mathbb{H}$–линейные операторы (см. [4, Ch. 1, §2.1]).

Случаи, описанные в иллюстрациях к примерам 3, 4.a) находят своё объяснение в следующем простом утверждении общего характера.

Предложение 1. *Если кольцо K коммутативно, то K–бимодуль H является центрально разложимым тогда и только тогда, когда H свободен, и левое действие K совпадает с правым.*

Доказательство. Пусть H — центрально разложимый K–бимодуль, $k \in K$, $h \in H$ — произвольные фиксированные элементы, и $h = \sum\limits_{\beta \in B'} h_\beta k_\beta$ — разложение h по центральным элементам h_β ($k_\beta \in K$, $\beta \in B'$). Тогда

$$kh = \sum_{\beta \in B'} k h_\beta k_\beta \overset{h_\beta\text{ — центр.}}{=} \sum_{\beta \in B'} h_\beta k k_\beta \overset{K\text{ — комм.}}{=} \sum_{\beta \in B'} h_\beta k_\beta k = hk.$$

Обратная импликация тривиальна, так как в этом случае $H = H^{Z(K)}$. $\square$

В силу предложения 1 определение 4 имеет значение лишь для некоммутативных колец K.

Предложение 2. *Пусть H — центрально разложимый K–бимодуль, и $\mathcal{G}$ — некоторая система элементов из $H^{Z(K)}$. Система $\mathcal{G}$ $Z(K)$–линейно независима тогда и только тогда, когда она K–линейно независима.*

Доказательство. Действительно, пусть $\mathcal{G} = \{g_\gamma\}_{\gamma \in C}$ — $Z(K)$–линейно независима, и для некоторого конечного множества $C' \subseteq C$, некоторой системы $\{c_\gamma\}_{\gamma \in C'}$ элементов K выполняется равенство $\sum\limits_{\gamma \in C'} g_\gamma c_\gamma = 0$. Тогда, в свою очередь, для всякого $\gamma \in C'$ существует такое конечное множество $C_\gamma \subseteq C$ и такая система $\{\xi_{\gamma\delta}\}_{\delta \in C_\gamma}$ элементов $Z(K)$, что $c_\gamma = \sum\limits_{\delta \in C_\gamma} k_\delta \xi_{\gamma\delta}$. Положим $E_\delta := \{\gamma \in C' \mid \delta \in C_\gamma\}$. Тогда

$$0 = \sum_{\gamma \in C'} g_\gamma c_\gamma = \sum_{\gamma \in C'} g_\gamma \Big(\sum_{\delta \in C_\gamma} k_\delta \xi_{\gamma\delta} \Big) = \sum_{\delta \in \bigcup\limits_{\gamma \in C'} C_\gamma} \Big(\sum_{\gamma \in E_\delta} g_\gamma \xi_{\gamma\delta} \Big) k_\delta.$$

Так как каждый элемент $\sum\limits_{\gamma \in E_\delta} g_\gamma \xi_{\gamma\delta}$ является центральным, то в силу требования однозначности в определении 4 $\sum\limits_{\gamma \in E_\delta} g_\gamma \xi_{\gamma\delta} = 0$ для каждого δ; в свою очередь, в силу $Z(K)$–линейной независимости $\mathcal{G}$ $\xi_{\gamma\delta} = 0$ для любых $\gamma \in C'$, $\delta \in \bigcup\limits_{\gamma \in C'} C_\gamma$; таким образом, $c_\gamma = 0$ ($\gamma \in C'$). Система $\mathcal{G}$ — K–линейно независима.

Обратная импликация тривиальна. $\square$

Теорема 2. *Пусть кольцо K удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы 1, и $H^{Z(K)}$ является свободным $\mathcal{Z}$–модулем. Тогда всякий центрально разложимый $(K, \mathcal{Z})$–бимодуль H является соразмерным. При этом*

$$\dim_l(H : K) = \dim_r(H : K) = \dim(H^{Z(K)} : \mathcal{Z}).$$

Доказательство. В силу замечания 4 и условий теоремы существует $\mathcal{G} = \{g_\gamma\}_{\gamma \in C}$ — некоторый $\mathcal{Z}$–базис в $H^{Z(K)}$ и $\mathcal{K} = \{k_\beta\}_{\beta \in B}$ — $\mathcal{Z}$–базис в K. Пусть $h \in H$ — произвольный фиксированный элемент; тогда

$$h = \sum_{\beta \in B'} h_\beta k_\beta \tag{6}$$

для некоторого конечного $B' \subseteq B$ и некоторой системы центральных элементов $\{h_\beta\}_{\beta \in B'}$. Но для каждого $\beta \in B'$ существует такое конечное множество C_β и такая система $\{\zeta_{\beta\gamma}\}_{\alpha \in C_\beta}$, что

$$h_\beta := \sum_{\gamma \in C_\beta} g_\gamma \zeta_{\beta\gamma}. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует K–полнота системы $\mathcal{G}$, откуда в силу предложения 2 следует равенство

$$\dim_r(H : K) = \dim(H^{Z(K)} : \mathcal{Z}).$$

Равенство $\dim_l(H : K) = \dim(H^{Z(K)} : \mathcal{Z})$ получается двойственными рассуждениями. $\square$

Разложение (5) для кватернионных бимодулей наводит на мысль рассматривать более узкий класс центрально разложимых бимодулей H, удовлетворяющих условию:

(KhK) *Для каждого* $h \in H$ *и всякого центрального элемента* h'*, участвующего в разложении* h *(согласно определению 4)* $\quad h' \in KhK$.

В частности, данное условие позволяет сформулировать критерий для свойства левого или правого подмодуля "быть двусторонним" (обобщение [6, пр. 6]).

Предложение 3. *Пусть центрально разложимый* K*–бимодуль* H *удовлетворяет условию* (KhK)*. Тогда свободный правый (левый) подмодуль* M *является подбимодулем* H *в том и только том случае, если* M *имеет* K*–базис, состоящий из центральных элементов.*

Доказательство. Пусть правый подмодуль M имеет K–базисом систему центральных элементов $\{h_\beta\}_{\beta \in B}$; $h \in M$ — произвольный фиксированный элемент, и $h = \sum\limits_{\beta \in B'} h_\beta k_\beta$ для некоторого конечного $B' \subseteq B$ и некоторой системы $\{k_\beta\}_{\beta \in B'}$ элементов K. Тогда для любого $k \in K$

$$kh = \sum_{\beta \in B'} k h_\beta k_\beta \overset{h_\beta \text{ — центр.}}{=} \sum_{\beta \in B'} h_\beta k k_\beta \in M$$

(здесь не понадобилось условие (KhK)).

Обратно, пусть M — подбимодуль, и $\mathcal{M}$ — совокупность всех центральных элементов, входящих в разложение элементов из M. Пусть $g \in \mathcal{M}$, и $h \in M$ — некоторый элемент, в разложение которого входит g. Тогда согласно (KhK)

$$g \in KhK \subseteq KMK \subseteq M.$$

Таким образом, $\mathcal{M} \subseteq M$, при этом K–линейная оболочка $\mathcal{M}$ совпадает с M. Выбирая из $\mathcal{M}$ полную в M $\quad K$–линейно независимую систему, получим K–базис из центральных элементов в M.

Двойственное предложение доказывается аналогично. $\square$

Список литературы

[1] Бурбаки Н. *Теория множеств.* — М.: Мир. — 1965. — 454 с.

[2] Фейс К. *Алгебра: кольца, модули и категории. 1.* — М.: Мир. — 1977. — 688 с.

[3] Пирс Р. *Ассоциативные алгебры.* — М.: Мир. — 1986. — 543 с.

[4] Adler S. L. *Quaternionic Quantum Mechanics and Quantum Fields.* — New York: Oxford University Press. — 1995. — 586 p.

[5] Березин А. В., Курочкин Ю. А., Толкачев Е. А. *Кватернионы в релятивистской физике.* — М.: Едиториал УРСС — 2003. — 198 с.

[6] Карпенко И. И., Тышкевич Д. Л. *Спектральные свойства линейных операторов над гильбертовыми кватернионными бимодулями* // Математичні Студії. — 2008. — Т. 30, №1. — С. 67–82

О сорозмірі бімодулей спеціального типу

У роботі сформульовано умови сорозміру (тобто збіг лівої та правої розмірності) для свободних бімодулей спеціального типу над IBN–кільцями. Дані результати можуть бути корисними при вивченні бімодулей над алгебрами гіперкомплексних чисел.

Ключові слова: кватерніони, гіперкомплексні числа, кільце, IBN–кільце, модуль, свободний модуль, бімодуль

On commensurability of bimodules of the special types

In the paper the conditions for commensurability (i.e. coincidence of the left and right dimensions) of free bimodules of the special types over IBN–rings. The results may be useful for studying of bimodules over algebras of hypercomplex numbers.

Keywords: quaternions, hypercomplex numbers, ring, IBN–ring, module, free module, bimodule