Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 132–150.

УДК 517.98

Ф. С. Стонякин

СИЛЬНЫЕ КОМПАКТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА СВОЙСТВА РАДОНА-НИКОДИМА ДЛЯ ВЕКТОРНЫХ ЗАРЯДОВ

В данной работе исследуются новые характеристики векторных зарядов со значениями в локально выпуклых пространствах: сильная компактная вариация, сильная компактная абсолютная непрерывность, универсальная компактная и предельная формы свойства Радона-Никодима. Доказано, что любое пространство Фреше обладает универсальной компактной и предельной формами свойства Радона-Никодима. Рассмотрены некоторые приложения.

Ключевые слова: локально выпуклое пространство, пространство Фреше, векторный заряд, интеграл Бохнера, сильная компактная вариация, сильная компактная абсолютная непрерывность, универсальное K-свойство Радона-Никодима, предельная форма свойства Радона-Никодима, операторная мера.

Введение

Как известно, наиболее эффективный аналог интеграла Лебега в бесконечномерных пространствах — интеграл Бохнера — теряет одно из важнейших свойств интеграла Лебега: не всякое абсолютно непрерывное отображение является интегралом Бохнера [1]. Наиболее известный подход к данной проблеме заключается в выделении класса пространств со свойством Радона-Никодима (RNP), в которых это различие отсутствует. Недостатком данного подхода является отсутствие свойства (RNP) у многих важнейших пространств [2, 3]. Тем не менее, активные исследования свойства Радона-Никодима, а также его различных модификаций продолжаются и сегодня [4] — [11].

Другой подход приводит к теоремам типа Радона-Никодима, позволяющим описать неопределённый интеграл Бохнера в пространствах, которые не обладают свойством (RNP) [12] — [14].

В работе [15] нами совместно с И. В. Орловым предложен новый подход к указанной проблематике и введены новые компактные характеристики ЛВП-значных отображений: *сильная компактная вариация* (V_K) и *сильная компактная абсолютная непрерывность* (AC_K), получено описание класса AC_K как специального подмножества класса $W_1^1(I,E)$ всех неопределённых интегралов Бохнера отображений вещественного отрезка $I=[a;b]$ в ЛВП E.

Далее в [16, 17] нами был получен новый результат: совпадение классов компактно абсолютно непрерывных отображений $AC_K(I,E)$ и неопределённых интегралов Бохнера $W_1^1(I,E)$ в случае, когда E — пространство Фреше (иначе говоря, *любое пространство Фреше обладает K-свойством Радона-Никодима* RNP_K). Это позволило установить ещё более сильный топологический результат — *предельную форму свойства Радона-Никодима.* А именно, для любого пространства Фреше E пространство неопределённых интегралов Бохнера $W_1^1(I,E)$ можно двумя способами представить в виде индуктивного предела:

$$W_1^1(I,E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(I,E_C) \ \overset{top}{=} \varinjlim_{C'\in\mathcal{C}(E)} AC(I,E_{C'}), \tag{1}$$

где $\overrightarrow{E}_{\mathcal{C}} = \{E_C\}_{C\in\mathcal{C}(E)}$ — шкала банаховых пространств, порождённых всеми абсолютно выпуклыми компактами C в E.

Естественно возникает вопрос о переносе полученных результатов на случай конечных векторных зарядов со значениями в пространстве Фреше, которому и посвящена настоящая работа. Всюду далее *конечный векторный заряд* ν понимается как счётно-аддитивное отображение $\nu:\Sigma\to E$, где $|\nu(E)|<\infty$, E — вещественное пространство Фреше, Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого пространства S с конечной вещественной мерой μ, $S\in\Sigma$.

Основным результатом настоящей работы является доказательство справедливости предельной формы свойства Радона-Никодима для векторных зарядов в любом пространстве Фреше (теорема 8): для любого пространства Фреше E пространство Соболева неопределённых интегралов Бохнера $W_1^1(S,E)$ отображений $f:\Sigma\to E$ можно двумя способами представить как индуктивный предел:

$$W_1^1(S,E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(S,E_C) \ \overset{top}{=} \varinjlim_{C'\in\mathcal{C}(E)} AC(S,E_{C'}). \tag{2}$$

Работа состоит из трёх разделов. В первом разделе мы вводим аналоги сильных компактных характеристик для случая векторных зарядов (определения 1 и 2) и доказываем теорему типа Радона-Никодима о представимости всякого компактно абсолютно непрерывного отображения в виде интеграла Бохнера (теорема 1). Во втором разделе мы доказываем основной результат работы — справедливость предельной формы свойства Радона-Никодима для векторных зарядов в любом пространстве Фреше (теорема 8). В третьем разделе работы рассмотрены приложения полученных результатов к некоторым задачам анализа: новый критерий непрерывности линейных операторов, заданных на пространствах Соболева $W_1^1(S,E)$ (следствие 10), теорема о среднем с компактной выпуклой оценкой для векторных зарядов (теорема 11), усиленные версии известной теоремы Березанского-Гельфанда-Костюченко о дифференцировании операторных мер со значениями в сепарабельных гильбертовых пространствах (теорема 13) и банаховых пространствах (теорема 15), а также теорема о дифференцируемости операторных мер со значениями в несепарабельных ЛВП (теорема 16).

1. Сильные компактные характеристики векторных зарядов

Начнём с определения сильной компактной вариации для конечных векторных зарядов со значениями в отделимых ЛВП. Напомним ([18], стр. 104), что *полной вариацией векторного заряда* $\nu : \Sigma \to E$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|^*$ в E называется отображение $|\ \nu\ |^*$: $\Sigma \to [0; +\infty]$, которое определяется равенством

$$|\nu|^*(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|\nu(A_k)\|^* \quad \forall A \in \Sigma, \tag{3}$$

где супремум берётся по всем конечным наборам $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \Sigma$ таким, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subseteqq A$. Легко проверить, что отображение $|\ \nu\ |^*$ — конечная счётно-аддитивная положительная мера на Σ (см. [18], стр. 104). Обозначим через $V(S,E)$ множество всех векторных зарядов $\nu : \Sigma \to E$, которые имеют конечную полную вариацию $|\ \nu\ |^*\ (S) < \infty$ относительно любой непрерывной полунормы $\|\cdot\|^*$ на E (см. (3)). Далее E, E_i $(i = \overline{1,3})$ — отделимые ЛВП. Будем обозначать через $E_C = (span\ C, \|\cdot\|_C)$ банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_C$, равными функционалам Минковского абсолютно выпуклых компактов $C \in \mathcal{C}(E)$.

Определение 1. Будем говорить, что ν имеет *(сильную) компактную вариацию* на S, если существует компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in V(S, E_C)$. Примем обозначения: $\nu \in V_K(S,E)$, $|\ \nu\ |_C$ — полная вариация векторного заряда ν относительно нормы $\|\cdot\|_C$.

Точно так же, как и для отображений вещественного отрезка $I = [a; b]$ в E (см. [15]), проверяются следующие общие свойства класса $V_K(S,E)$.

Предложение 1. *Справедливо включение* $V_K(S,E) \subset V(S,E)$. *В случае* $dimE < \infty$ *оба указанных класса совпадают.*

Предложение 2. *Класс* $V_K(S,E)$ *является линейным.*

Предложение 3. *Если* $\nu \in V_K(S,E_1)$, $A \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$, *то* $A \circ \nu \in V_K(S,E_2)$.

Предложение 4. *Пусть E — полное ЛВП, (S_1, Σ_1) и (S_2, Σ_2) — два непересекающихся измеримых пространства. Тогда $\nu \in V_K(S_1 \bigcup S_2, E)$ в том и только в том случае, когда $\nu|_{S_i} \in V_K(S_i, E)$, $i = 1, 2$.*

Предложение 5. *Заряд $(\nu_1, \nu_2) \in V_K(S, E_1 \times E_2)$ в том и только в том случае, когда $\nu_i \in V_K(S, E_i)$, $i = 1, 2$. При этом, если $\mid \nu_i \mid_{C_i} (S) < \infty$, где $C_i \in \mathcal{C}(E_i)$, $i = 1, 2$, то*

$$\frac{1}{2}\left[\mid \nu_1 \mid_{C_1} + \mid \nu_2 \mid_{C_2}\right] \leqslant \mid (\nu_1, \nu_2) \mid_{C_1 \times C_2} \leqslant \left[\mid \nu_1 \mid_{C_1} + \mid \nu_2 \mid_{C_2}\right].$$

Пусть $\mathbb{B}(E_1 \times E_2; E_3)$ — пространство всех билинейных непрерывных операторов, действующих из $E_1 \times E_2$ в E_3.

Предложение 6. *Если $\nu_i \in V_K(S, E_i)$, $i = 1, 2$, $B \in \mathbb{B}(E_1 \times E_2; E_3)$, то $B(\nu_1, \nu_2) \in V_K(S, E_3)$. При этом справедливо неравенство*

$$\mid B(\nu_1, \nu_2) \mid_{B(C_1 \times C_2)} \leqslant \sup_{A \in \Sigma} \|\nu_1(A)\|_{C_1} \cdot \mid \nu_2 \mid_{C_2} + \sup_{A \in \Sigma} \|\nu_2(A)\|_{C_2} \cdot \mid \nu_1 \mid_{C_1} .$$

Предложение 7. *Если $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(E)$, $C_1 \subset \lambda \cdot C_2$ $(\lambda > 0)$, то*

$$\mid \nu \mid_{C_2} \leqslant \lambda \cdot \mid \nu \mid_{C_1} .$$

Возникает естественный вопрос о возможности переноса компактной субдифференцируемости почти всюду ЛВП-значных отображений вещественного отрезка на случай векторных зарядов $\nu \in V_K(S, E)$ ([15], теорема 1.1). Отметим, что вообще говоря, такой перенос невозможен.

Действительно (см., например, замечание 1 §1 главы IV или §VI.1 в [19]), даже в случае $S \subset \mathbb{R}^2$ можно подобрать Σ, меру μ, суммируемую функцию $f : S \to \mathbb{R}$ и убывающую последовательность множеств $A_k \in \Sigma$ так, чтобы

$$\frac{1}{\mu(x + A_k)} \int\limits_{x + A_k} f(t) d\mu(t) \to \infty \quad \text{при} \quad k \to \infty$$

для $x \in \widetilde{S}$, где $\widetilde{S} \in \Sigma$ — некоторое множество с $\mu(\widetilde{S}) > 0$.

Это означает, что заряды (сильной) ограниченной вариации (в случае $E = \mathbb{R}$, $V_K(S, \mathbb{R}) = V(S, \mathbb{R})$) в силу предложения 1 могут быть не дифференцируемыми на множестве положительной меры даже в случае $S \subset \mathbb{R}^2$ и $E = \mathbb{R}$. Поэтому методика исследований для отображений вещественного отрезка в ЛВП [15], которая существенно опирается на исчисление компактных субдифференциалов, неприменима в случае векторных зарядов.

Тем не менее, возможно получить теорему типа Радона-Никодима для μ-абсолютно непрерывных векторных зарядов, обладающих сильной компактной вариацией, опираясь на известные результаты ([12], теоремы 1 и 2) и ([20], теорема 8.19.4) о представимости μ-абсолютно непрерывных векторных зарядов в виде интегралов Бохнера и Петтиса. Заметим однако, что упомянутые результаты из

[12, 20] справедливы только для векторных зарядов $\nu : \Sigma \to E$ и не могут быть использованы для исследования отображений $F : I = [a;b] \to E$. Это означает, что методика настоящей работы неприменима в случае отображений $F : I = [a;b] \to E$ и не может заменить методику [16, 17], основанную на К-субдифференциальном исчислении.

Для того, чтобы сформулировать полученный результат, нам потребуется новая характеристика зарядов $\nu \in V_K(S,E)$, а именно — *(сильная) компактная абсолютная непрерывность* относительно конечной числовой меры μ на Σ. Обозначим через $AC(S,E)$ множество всех зарядов $\nu \in V(S,E)$, обладающих свойством обычной *абсолютной непрерывности заряда относительно* μ, то есть таких, что мера $|\nu|^* \ll \mu$ ($\mu(A) = 0 \Rightarrow |\nu|^*(A) = 0$ или $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ (\mu(A) < \delta) \Rightarrow |\nu|^*(A) < \varepsilon$).

Определение 2. Будем говорить, что векторный заряд $\nu \in V_K(S,E)$ *(сильно) компактно абсолютно непрерывен на S относительно* μ, если существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in AC(S,E_C)$. Примем обозначение:
$\nu \in AC_K(S,E)$.

Отметим, что общие свойства класса $AC_K(I,E)$ (см. [15], предложения 2.1 — 2.8) непосредственно переносятся на класс $AC_K(S,E)$. Здесь мы сформулируем лишь те из них, которые будут использованы нами далее.

Предложение 8. *(i) $AC_K(S,E) \subset AC(S,E)$; если $dim E < \infty$, то оба указанных класса совпадают.*

(ii) $\nu \in AC_K(S,E) \Rightarrow \nu \ll \mu$, т.е. $\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$.

(iii) Если $\nu \in AC_K(S,E_1)$, $A \in \mathcal{L}(E_1,E_2)$, то $A \circ \nu \in AC_K(S,E_2)$.

Перейдём теперь к теореме о представимости зарядов из $AC_K(S,E)$ в виде интегралов Бохнера. Пусть $\{\|\cdot\|_j\}_{j\in J}$ — некоторая определяющая система полунорм в ЛВП E, $\widehat{E}_j$ — пополнения пространств $E_j := E/ker\|\cdot\|_j$ относительно фактор-норм $\|\cdot\|_{\widehat{j}}$. Напомним, что интегрируемость по Бохнеру отображения $f : S \to E$ означает его интегрируемость в каждом из пространств $\widehat{E}_j$, $j \in J$ (т.е. интегрируемость каждого из отображений $f_j = \varphi_j(f)$, где $\varphi_j : E \to \widehat{E}_j$ — канонические вложения).

Теорема 1. *Если $\nu \in AC_K(S,E)$, то найдётся такое интегрируемое по Бохнеру отображение $f : S \to E$, что $\forall A \in \Sigma$ верно*

$$\nu(A) = (B)\int_A f(t)d\mu(t). \tag{4}$$

Доказательство данной теоремы опирается на следующие результаты.

Теорема 2. *(см.* [12], *теоремы 1 и 2)*
Пусть E — банахово пространство, $\nu : \Sigma \to E$ — векторный заряд. Соотношение (4) *верно в том и только в том случае, когда*

(*i*) $\nu \ll \mu$;

(*ii*) $\nu \in V(S,E)$;

(*iii*) $\forall \varepsilon > 0\ \exists A_\varepsilon \in \Sigma$ *такое, что* $\mu(S \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$ *и множество*

$$A_\varepsilon(\nu) = \left\{ \frac{\nu(A)}{\mu(A)} \;\middle|\; A \subset A_\varepsilon,\ \mu(A) > 0,\ A \in \Sigma \right\} \tag{5}$$

предкомпактно в E.

Теорема 3. *(см. теорему 8.19.4 из* [20]*, а также замечание перед ней)*
Пусть E *— отделимое ЛВП,* $\nu : \Sigma \to E$ *— векторный заряд, причём:*

(*i*) $\nu \ll \mu$;

(*ii*) *множество* $A_0(\nu) = \left\{ \frac{\nu(A)}{\mu(A)} \;\middle|\; \mu(A) > 0,\ A \in \Sigma \right\}$ *слабо предкомпактно в* E.

Тогда заряд ν *представим в виде интеграла Петтиса* ([20]*, 8.14.9):*

$$\nu(A) = (P) \int\limits_A f(t) d\mu(t)\ \forall A \in \Sigma, \tag{6}$$

где $f : S \to E$ *— некоторое интегрируемое по Петтису на* S *отображение причём* $f(S) \subset \overline{co}\ A_0(\nu)$.

Предложение 9. *(см.* [18]*, с. 105)*
Пусть E *— банахово пространство, векторный заряд* $\nu : \Sigma \to E$ *допускает представление* (6)*. Если* $\nu \in V(S,E)$*, отображение* f *из* (6) *сепарабельнозначно, то* f *интегрируемо по Бохнеру и верно* (4).

Теперь, опираясь на теоремы 2 и 3, а также предложение 9, докажем теорему 1.

Доказательство. 1). Имеем $\nu \in AC_K(S,E) \Rightarrow \exists C \in \mathcal{C}(E)$: $\nu \in AC(S, E_C)$, т.е. мера $|\,\nu\,|_C$ конечна и $|\,\nu\,|_C \ll \mu$ (см. определение 2). Следовательно, в силу классической теоремы Радона-Никодима ([21], теорема V.2.1), существует такая интегрируемая по Лебегу на S функция $\varphi : S \to [0; +\infty]$, что

$$|\,\nu\,|_C\,(A) = (L) \int\limits_A \varphi(t) d\mu(t) \qquad (\forall A \in \Sigma). \tag{7}$$

Как известно, в случае $E = \mathbb{R}$ интегрируемость по Лебегу совпадает с интегрируемостью по Бохнеру. Поэтому, в силу теоремы 2, $\forall \varepsilon > 0$ существует такое множество $A_\varepsilon \in \Sigma$, что $\mu(S \backslash A_\varepsilon) < \varepsilon$ и множество

$$A_\varepsilon(|\,\nu\,|_C) = \left\{ \frac{|\,\nu\,|_C\,(A)}{\mu(A)} \;\middle|\; A \subset A_\varepsilon,\ \mu(A) > 0,\ A \in \Sigma \right\} \tag{8}$$

предкомпактно, т.е. ограничено в $\mathbb{R}$. Из (5) и (8) вытекает, что

$$\|A_\varepsilon(\nu)\|_C = \sup \left\{ \frac{\|\nu\|_C(A)}{\mu(A)} \;\middle|\; A \subset A_\varepsilon,\ \mu(A) > 0,\ A \in \Sigma \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sup\left\{\frac{|\nu|_C(A)}{\mu(A)}\ \middle|\ A\subset A_\varepsilon,\ \mu(A)>0,\ A\in\Sigma\right\} = \sup A_\varepsilon(|\nu|_C) =: K_\varepsilon < \varepsilon,$$

то есть $\forall\varepsilon>0$ множество $A_\varepsilon(\nu)$ содержится в некотором компакте $K_\varepsilon\cdot C\subset E$.

Следовательно, по теореме 3, $\forall\varepsilon>0$ существует такое отображение $f_\varepsilon : S\to E$, что справедливо равенство

$$\nu(A) = (P)\int\limits_A f_\varepsilon(t)d\mu(t) \qquad (\forall A\in\Sigma,\ A\subset A_\varepsilon). \tag{9}$$

Пусть $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ и $A_n := \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_{\varepsilon_k}$. Заметим, что последовательность множеств A_n возрастает. Поскольку $\mu(S\backslash A_n)\leqslant\mu(S\backslash A_{\varepsilon_n}) = \frac{1}{n}$, то $\mu\left(S\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n\right) = 0$. Воспользовавшись тем, что последовательность A_n возрастает, будем выбирать отображения $f_n = f_{\varepsilon_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ так, чтобы $f_m\mid_{A_n} = f_n$ при $m>n$. Положим

$$f(t) = \begin{cases} f_n(t), & \text{если } t\in A_n\ ; \\ 0, & \text{в противном случае .}\end{cases}$$

Тогда

$$\nu(A) = (P)\int\limits_A f(t)d\mu(t) \quad \forall A\in\Sigma. \tag{10}$$

Действительно, $\forall\ell\in E^*$ и $A\in\Sigma$

$$\ell(\nu(A)) = \lim_{n\to\infty}\ell\left(\nu(A\bigcap A_n)\right) = \lim_{n\to\infty}\ell\left((P)\int\limits_{A\bigcap A_n} f(t)d\mu(t)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(L)\int\limits_{A\bigcap A_n}\ell(f(t))d\mu(t) = (L)\int\limits_A \ell(f(t))d\mu(t),$$

так как последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ возрастает и множество $S\backslash\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$ имеет μ-меру нуль, а также $\nu\in V_K(S,E)\subset V(S,E)$.

2). Зафиксируем $j\in J$ и подействуем отображением $\varphi_j : E\to\widehat{E}_j$ на обе части равенства (10):

$$\nu_j(A) = \varphi_j(\nu(A)) = (P)\int\limits_A f_j(t)d\mu(t) \qquad (\forall j\in J\ \forall A\in\Sigma).$$

Согласно предложению 8, $\nu_j\in AC_K(S,\widehat{E}_j)$ и поэтому $\nu_j\in V(S,\widehat{E}_j)$. Далее,

$$\forall n\in\mathbb{N}\quad f_n^j(S) = \varphi_j(f_n)(S)\subset\overline{co}\ A_0(\nu_j\mid_{A_n}) = \varphi_j(\overline{co}\ A_0(\nu\mid_{A_n}))$$

по теореме 3. Это означает, что $f_n^j(S)$ содержится в некотором компактном подмножестве банахова пространства $\widehat{E}_j$, откуда $f_j = \varphi_j(f)$ сепарабельнозначно и интегрируемо по Бохнеру в силу предложения 9. Следовательно, равенство (4) справедливо и теорема доказана. □

Далее будет показано, что для пространств Фреше справедливо и обратное утверждение (см. теорему 6).

Замечание 3. Ввиду недифференцируемости неопределённого интеграла Лебега по произвольной мере μ даже для $S \subset \mathbb{R}^2$ (см. [19], §V1.1) в общем случае не удаётся доказать для векторных зарядов включение $f(t) \in \partial_K F(t)$ (см. [15], доказательство теоремы 3.2), справедливое для отображений отрезка $I = [a; b]$ в ЛВП E. Это не позволяет перенести на векторные заряды критерий сильной компактной абсолютной непрерывности, полученный ранее в ([15], теорема 3.2).

Рассмотрим достаточное условие компактной абсолютной непрерывности векторных зарядов в случае произвольного отделимого ЛВП E.

Теорема 4. *Пусть E — отделимое ЛВП и*

$$\nu(A) = (B)\int_A f(t)d\mu(t) \quad \forall A \in \Sigma,$$

причём $\int_S \|f(t)\|_C d\mu(t) < \infty$ для некоторого $C \in \mathcal{C}(E)$. Тогда $\nu \in AC_K(S, E)$.

Доказательство. Так как отображение f интегрируемо по Бохнеру, то оно интегрируемо по Петтису на любом множестве $A \in \Sigma$. Отсюда, учитывая включение $f(t) \in \|f(t)\|_C \cdot C$, $\forall A \in \Sigma$, $\ell \in E^*$, имеем

$$\ell(\nu(A)) = (L)\int_A \ell(f(t))d\mu(t) \leqslant \int_A \|f(t)\|_C d\mu(t) \cdot \sup \ell(C).$$

Далее, по известному следствию из теоремы Хана-Банаха о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества, имеем

$$\nu(A) \in \int_A \|f(t)\|_C d\mu(t) \cdot C, \quad \|\nu(A)\|_C \leqslant \int_A \|f(t)\|_C d\mu(t).$$

Поэтому $\nu \in V_K(\Sigma, E)$, $\nu \ll \mu$, $|\,\nu\,|_C \ll \mu$. Следовательно, $\nu \in AC_K(S, E)$. □

2. Предельная форма свойства Радона-Никодима справедлива для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше

Данный пункт посвящён доказательству представимости пространства Соболева $W_1^1(S, E)$ в виде топологического индуктивного предела как шкалы пространств абсолютно непрерывных зарядов $\{AC(S, E_C)\}_{C\in\mathcal{C}(E)}$, так и шкалы пространств Соболева $\{W_1^1(S, E_C)\}_{C\in\mathcal{C}(E)}$. Эта форма свойства Радона-Никодима даёт возможность в ряде случаев «обходить» отсутствие классического свойства (RNP). Начнём со вспомогательного понятия *универсальной компактной формы свойства Радона-Никодима*, или, *универсального K-свойства Радона-Никодима*.

Далее (S, Σ, μ) — пространство с конечной вещественной σ-аддитивной мерой μ. В предыдущем пункте было показано, что

$$AC_K(S, E) \subset W_1^1(S, E) \subset AC(S, E). \tag{11}$$

Как и в случае отображений $F : I = [a; b] \to E$ (см. [15], определение 3.1), выделим класс ЛВП, характеризующихся равенством

$$AC_K(S, E) = W_1^1(S, E) \tag{12}$$

для произвольного фиксированного пространства с мерой (S, Σ, μ).

Определение 3. Будем говорить, что ЛВП E обладает *K-свойством Радона-Никодима* относительно пространства с конечной мерой (S, Σ, μ), если справедливо (12). Примем обозначение $E \in RNP_K(S, \mu)$. В случае, когда (12) выполнено для всех пространств с конечной мерой (S, Σ, μ), примем обозначение $E \in RNP_K^U$ и будем говорить, что E обладает *универсальным K-свойством Радона-Никодима*.

Вообще говоря, не всякое ЛВП обладает свойством RNP_K^U. Например, пусть $S = I = [a; b]$ — вещественный отрезок, Σ — борелевская σ-алгебра подмножеств S, а $\mu = mes$ — мера Лебега на Σ. Легко видеть, что всегда $RNP_K(I, mes) = RNP_K$. В ([15], пример 3.1) показано, что существует ЛВП E без RNP_K. Это означает, что данное пространство E не обладает свойством $RNP_K(I, mes)$, а тем более — свойством RNP_K^U.

В ([16], теорема 4) доказана справедливость RNP_K в любом пространстве Фреше. Напомним, что любое пространство Фреше E является проективным пределом банаховых пространств $\widehat{E}_n$, где $\widehat{E}_n$ — пополнения пространств $E_n = E/ker\|\cdot\|_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ по соответствующим фактор-нормам.

Оказывается, что свойство RNP_K^U справедливо в произвольном пространстве Фреше. Это вытекает из следующего результата ([16], теорема 2).

Теорема 5. *Пусть E — пространство Фреше и $1 \leqslant p < \infty$. Если отображение $f : S \to E$ интегрируемо по Бохнеру, причём $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int\limits_S \|f(t)\|_n^p \, d\mu(t) < \infty$, то существует такой компакт $C \subset E$, что $\int\limits_S \|f(t)\|_C^n \, d\mu(t) < \infty$.*

Из теоремы 5 и соотношения (11) немедленно вытекает

Теорема 6. *Любое пространство Фреше обладает свойством RNP_K^U.*

Таким образом, в пространствах Фреше свойства RNP_K и RNP_K^U равносильны. Отметим, что в общем случае (для произвольных ЛВП) вопрос о связи RNP_K^U и RNP_K остаётся открытым для дальнейшего изучения.

Теперь переходим к основному результату раздела. Приведём вспомогательный результат, вытекающий из теоремы 1 и свойства компактной аппроксимации для пространств Фреше ([16], теорема 6).

Теорема 7. *Если E — пространство Фреше, то имеет место векторный изоморфизм*

$$W_1^1(S,E) \overset{vect}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(S,E_C) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(S,E_C) \quad (\forall\ (S,\mu))\,. \tag{13}$$

Доказательство. Действительно, в силу свойства компактной аппроксимации, $\forall C' \in \mathcal{C}(E)$ существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что справедливо компактное вложение: $E_{C'} \hookrightarrow\hookrightarrow E_C$. Это позволяет нам рассмотреть банахово пространство E_C как основное; при этом $C' \in \mathcal{C}(E_C)$, $(E_C)_{C'} = E_{C'}$, $\nu \in AC(S,(E_C)_{C'}) = AC(S,E_{C'})$. Следовательно, по теореме 1,

$$\nu(Q) = \int\limits_Q f(t)d\mu(t)\ \forall Q \in \Sigma \quad (f : S \to E_C),$$

причём отображение f μ-интегрируемо по Бохнеру в пространстве E_C. □

В действительности, как будет показано ниже, изоморфизм (13) является топологическим. В пространстве Фреше неопределённых интегралов Бохнера $W_1^1(S,E)$ над пространством Фреше E введём определяющую систему полунорм

$$\left\{ \|\nu\|^j = \int\limits_S \|f(t)\|_j d\mu(t) \right\}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В пространствах $W_1^1(S,E_C)$ и более обширных пространствах K-абсолютно непрерывных векторных зарядов $AC(S,E_C)$, $C \in \mathcal{C}(E)$, введём банаховы нормы

$$\|\nu\|^C = \int\limits_S \|f(t)\|_C\ d\mu(t).$$

Перед тем, как доказать основную теорему пункта, приведём вспомогательное утверждение ([17], лемма 2.1).

Лемма 1. *Пусть E — пространство Фреше. Если $\{C_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}(E)$ и $\forall m \in \mathbb{N}$ $\alpha_n = o\left(1/diam_m(C_n)\right)$, то*

$$C = \overline{co}\ \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \alpha_n C_n\right) \in \mathcal{C}(E).$$

В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} diam_m(C_n) = 0\ \forall m \in \mathbb{N}$, *то*

$$C = \overline{co}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right) \in \mathcal{C}(E).$$

Теорема 8. *В любом пространстве Фреше E справедлива предельная форма свойства Радона-Никодима* (2)*:*

$$W_1^1(S,E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} W_1^1(S,E_C) \overset{top}{=} \varinjlim_{C'\in\mathcal{C}(E)} AC(S,E_{C'}) \quad (\forall\ (S,\mu))\,.$$

Доказательство. Обозначим $Y = W_1^1(S,E)$, $Y^C = W_1^1(S,E_C)$, $Y^{\mathcal{C}} = \varinjlim\limits_{C\in\mathcal{C}(E)} Y^C$. Докажем, что $Y \overset{top}{=} Y^{\mathcal{C}}$.

1). Имеем $\forall C \in \mathcal{C}(E)$:

$$(E_C \hookrightarrow E) \Rightarrow (Y^C \hookrightarrow Y) \Rightarrow \left(\varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} Y^C = Y^{\mathcal{C}} \hookrightarrow Y\right).$$

Таким образом, необходимо проверить только непрерывность обратного вложения: $Y \hookrightarrow Y^{\mathcal{C}}$.

2). Пусть $\nu_n \xrightarrow{Y} 0$, причём $\nu_n(Q) = (B)\int\limits_Q f_n(t)d\mu(t)$, f_n — простые отображения. Следовательно, $\forall m$ (в каноническом представлении $E \cong \varprojlim\limits_{m} E_m$): $\|\nu_n\|^m \to 0$ при $n\to\infty$. Положим

$$B_m = \{x\in E \mid \|x\|_m \leqslant 1\},\ C_{mn} = B_m \bigcap span f_n(S) \quad (n\in\mathbb{N}).$$

Так как $dim\ span f_n(S) < \infty$, то $C_{mn} \in \mathcal{C}(E)$; при этом $diam_m C_{mn} = diam_m B_m = 2$. Отсюда $\widetilde{C}_{mn} = e_m(C_{mn})$ ($e_m : E \hookrightarrow E_m$ — канонические вложения) принадлежат $\mathcal{C}(E_m)$, причём $diam_{E_m}\widetilde{C}_{mn} = diam_m B_m = 2$ ($n\in\mathbb{N}$). Далее, поскольку

$$\|f_n(t)\|_{C_{mn}} = \|f_n(t)\|_m \quad (\forall t\in S, n\in\mathbb{N}),$$

то $\alpha_{mn} = \|\nu_n\|^{C_{mn}} = \int\limits_S \|f_n(t)\|_{C_{mn}} d\mu(t) = \int\limits_S \|f_n(t)\|_m d\mu(t) = \|\nu_n\|^m \to 0$ при $n\to\infty$.

Положим

$$\widetilde{C}_m = \overline{co}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \sqrt{\alpha_{mn}}\cdot C_{mn}\right) \quad (\widetilde{C}_m \searrow).$$

Согласно лемме 1, $\widetilde{C}_m \in \mathcal{C}(E_m)$. При этом:

$$\|\nu_n\|^{\widetilde{C}_m} \leqslant \|\nu_n\|^{\sqrt{\alpha_{mn}}C_{mn}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{mn}}}\|\nu_n\|^{C_{mn}} = \frac{\alpha_{mn}}{\sqrt{\alpha_{mn}}} = \sqrt{\alpha_{mn}} \to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

3). Рассмотрим E как плотное подпространство произведения $\widetilde{E} = \prod\limits_m \widetilde{E}_m$. Тогда $\widetilde{C} = \prod\limits_m \widetilde{C}_m$ — абсолютно выпуклый компакт в $\widetilde{E}$ по теореме Тихонова ([21], п. VI.8.1).

При этом
$$\widetilde{E}_{\widetilde{C}} \supset \prod_m \widetilde{E}_{m,\ \widetilde{C}_m},$$
откуда $C = \widetilde{C} \bigcap E \neq \varnothing$, $C \in \mathcal{C}(E)$ и
$$\varprojlim_m E_{m,\ \widetilde{C}_m} \cong \left(\prod_m \widetilde{E}_{m,\ \widetilde{C}_m} \right) \bigcap E \hookrightarrow \widetilde{E}_{\widetilde{C}} \bigcap E = E_C.$$
Таким образом,
$$\left(\nu_n \xrightarrow{Y_m^{\widetilde{C}_m}} 0 \ (\forall m) \right) \Longleftrightarrow \left(\nu_n \xrightarrow{\varprojlim_m Y_m^{\widetilde{C}_m}} 0 \right) \Longrightarrow \left(\nu_n \xrightarrow{Y^C} 0 \right) \Longrightarrow \left(\nu_n \xrightarrow{Y^{\mathcal{C}}} 0 \right).$$
Отсюда
$$\left(\nu_n \xrightarrow{Y} 0 \right) \Longrightarrow \left(\nu_n \xrightarrow{Y^{\mathcal{C}}} 0 \right).$$

4). Следовательно, вложение $Y \hookrightarrow Y^{\mathcal{C}}$ непрерывно на плотном подмножестве $\{\nu \in Y \mid f - \text{простые} \}$ пространства Y, а значит, и на всём Y. Из непрерывности вложений $Y^{\mathcal{C}} \hookrightarrow Y$ и $Y \hookrightarrow Y^{\mathcal{C}}$ следует изоморфизм
$$Y \cong Y^{\mathcal{C}}, \tag{14}$$
т.е. (2) верно. Теорема доказана. □

Отметим, что изоморфизм (2) можно переформулировать для пространства интегрируемых по Бохнеру отображений $L_1(S, E)$.

Теорема 9. *В любом пространстве Фреше E справедлива предельная форма свойства Радона-Никодима:*
$$L_1(S, E) \overset{top}{=} \varinjlim_{C \in \mathcal{C}(E)} L_1(S, E_C) \overset{top}{=} \varinjlim_{C' \in \mathcal{C}(E)} AC(S, E_{C'}) \quad (\forall\ (S, \mu)). \tag{15}$$

3. Некоторые приложения

3.1. **Новый критерий непрерывности линейных операторов.** Отметим приложение, вытекающее из известного критерия непрерывности линейных операторов, заданных на индуктивном пределе ([23], II.6.1).

Теорема 10. *Пусть E — пространство Фреше, X — произвольное ЛВП, $A : W_1^1(S, E) \to X$ — линейный оператор. Тогда следующие условия равносильны:*

- (i) *A непрерывен на $W_1^1(S, E)$;*
- (ii) *A непрерывен на каждом $W_1^1(S, E_C)$, $C \in \mathcal{C}(E)$;*
- (iii) *A непрерывен на каждом $AC(S, E_{C'})$, $C' \in \mathcal{C}(E)$.*

Аналогичное утверждение справедливо и для линейных операторов $A : L_1(S, E) \to X$.

3.2. **Теорема о среднем для векторных зарядов с компактной выпуклой оценкой.** В качестве второго приложения докажем обобщённую теорему Лагранжа с компактной оценкой для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше.

Теорема 11. *Пусть E — пространство Фреше, а заряд $\nu : S \to E$ представим в виде интеграла Бохнера:*

$$\nu(Q) = \int\limits_Q f(t)d\mu(t) \quad \forall Q \in \Sigma \quad (f : S \to E).$$

Если $f(t) \in \varphi(t) \cdot B$ при $t \in S \backslash e$, где множество $\nu(e)$ имеет скалярную μ-меру нуль, $\varphi(t)$ неотрицательна и суммируема на $S \backslash e$, а множество B замкнуто и абсолютно выпукло в E, то существует такой абсолютно выпуклый компакт $C \subset B$, что функция $\|f(t)\|_C$ μ-суммируема и

$$\nu(Q) \in \left(\int\limits_{Q \backslash e} \|f(t)\|_C d\mu(t) \right) \cdot C \quad \forall Q \in \Sigma. \tag{16}$$

Доказательство. Заметим, что из равенства $\ell(\nu(e)) = \ell \left(\int\limits_e f(t)d\mu(t) \right) = 0 \; \forall \ell \in E^*$ легко вытекает $\int\limits_e f(t)d\mu(t) = 0$. По стандартной схеме [28] с использованием теоремы о функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества можно проверить оценку

$$\nu(Q) \in \left(\int\limits_{Q \backslash e} \varphi(t)d\mu(t) \right) \cdot B \quad \forall Q \in \Sigma. \tag{17}$$

Тогда, по теореме 7, f μ-интегрируемо по Бохнеру в некотором пространстве $E_{\widetilde{C}}$, $\widetilde{C} \in \mathcal{C}(E)$. При этом можно считать, что $f(t) \in \varphi(t) \cdot C$ для всякого $t \in S \backslash e$, где $C = B \bigcap \widetilde{C}$.

3). Теперь остаётся применить формулу конечных приращений (17) с заменой множества B на C. □

Следствие 1. *(**Теорема о среднем.**) В условиях теоремы 11 существует такое компактное множество $C \in \mathcal{C}(E)$, что*

$$\nu(Q) \in \mu(Q \backslash e) \cdot \overline{co}_{E_C} f(S \backslash e) \quad \forall Q \in \Sigma.$$

Если $\mu(e) = 0$, $\mu(Q) > 0$, то

$$\frac{\nu(Q)}{\mu(Q)} \in \overline{co}_{E_C} f(S \backslash e) \quad \forall Q \in \Sigma.$$

3.3. **Усиленная теорема Березанского-Гельфанда-Костюченко (БГК) о дифференцируемости операторных мер в сепарабельных гильбертовых пространствах.** В теории операторов весомую роль играет теорема БГК о дифференцируемости операторных мер в сепарабельном гильбертовом пространстве [21, 24, 25]. Построенная на базе теоремы БГК теория спектральных операторных мер используется и в современных исследованиях [26, 27].

С использованием результатов настоящей работы, эту теорему можно несколько усилить, заменив дифференцируемость операторной меры в исходном гильбертовом (сепарабельном) пространстве H на более сильную дифференцируемость в пространстве H_C для некоторого компактного множества $C \in \mathcal{C}(H)$. Под дифференцируемостью операторной меры здесь понимается её представимость в виде интеграла Бохнера. Приведём ряд известных вспомогательных определений и фактов из [21]. Зафиксируем цепочку сепарабельных гильбертовых пространств с непрерывными плотными вложениями:

$$H_- \supseteq H \supseteq H_+. \tag{18}$$

Определение 4. Линейный оператор $A : H_+ \to H_-$ называется *неотрицательным*, если $(Au, u)_H \geqslant 0$ $(u \in H^+)$. *След* неотрицательного оператора по определению равен $Tr(A) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)_H$, где $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H_+.

Теперь приведём определение операторной меры с конечным следом (см. [21], с. 517).

Определение 5. Пусть R — некоторое множество; $\mathcal{R}$ — некоторая σ-алгебра множеств из R. Операторнозначную функцию $\mathcal{R} \ni \alpha \longmapsto \theta(\alpha)$ будем называть *операторной мерой с конечным следом*, если выполнены следующие требования:

a) для любого $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad\theta(\alpha)$ — неотрицательный оператор из H_+ в H_-, $\theta(\varnothing) = 0$, $Tr(\theta(R)) < \infty$;

b) выполняется свойство счётной аддитивности: если множества $\alpha_j \in \mathcal{R}$ $(j \in \mathbb{N})$ попарно не пересекаются, то $\theta\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \theta(\alpha_j)$, где ряд сходится в слабом смысле.

Известно (см. [21]), что функция $\mathcal{R} \ni \alpha \longmapsto \rho(\alpha) = Tr(\theta(\alpha))$ является числовой неотрицательной конечной мерой.

Определение 6. Функция $\mathcal{R} \ni \alpha \longmapsto \rho(\alpha) = Tr(\theta(\alpha))$ называется *следовой мерой* для операторной меры θ.

Сформулируем классическую теорему о дифференцируемости операторных мер (см., например, теорему XV.1.1 из [21]). Будем обозначать через $\sigma_2(H)$ (гильбертово) пространство операторов Гильберта-Шмидта $A : H \to H$ с нормой $|\cdot|$.

Теорема 12. *Операторную меру θ с конечным следом можно продифференцировать по её следовой мере ρ. Это означает, что существует слабо измеримая относительно $\mathcal{R}$ определённая для ρ-почти всех $\lambda \in R$ операторнозначная функция $\Psi(\lambda) : H_+ \to H_-$, $\Psi(\lambda) \geqslant 0$, $|\Psi(\lambda)| \leqslant Tr(\Psi(\lambda)) = 1$ такая, что*

$$\theta(\alpha) = (B) \int_{\alpha} \Psi(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (\forall \alpha \in \mathcal{R}), \tag{19}$$

где интегрирование производится в пространстве $\sigma_2(H)$. Функция Ψ определяется однозначно с точностью до её значений на множестве нулевой меры ρ и называется производной Радона-Никодима операторной меры θ по её следовой мере ρ $(d\theta/d\rho)(\lambda) = \Psi(\lambda)$.

Воспользовавшись справедливостью K-свойства Радона-Никодима для всякого пространства Фреше (теорема 6), предыдущую теорему можно усилить, заменив интегрируемость $\Psi(\cdot)$ в пространстве $E = \sigma_2(H)$ на интегрируемость в некотором пространстве E_C, порождённом абсолютно выпуклым компактом $C \in \mathcal{C}(\sigma_2(H))$.

Теорема 13. *Для произвольной операторной меры θ с конечным следом существует абсолютно выпуклый компакт $C \in \mathcal{C}(\sigma_2(H))$ такой, что производная Радона-Никодима операторной меры θ по её следовой мере ρ интегируема по Бохнеру в пространстве E_C для всех $\Delta \in \Sigma$.*

Из предыдущей теоремы, а также теоремы о среднем для векторных зарядов с компактной выпуклой оценкой (следствие 1) вытекает

Следствие 2. *(***Теорема о среднем для операторных мер в гильбертовых пространствах.***) В условиях теоремы 12 существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ и такое множество $e \subset R$ ρ-меры нуль, что*

$$\frac{\theta(\alpha)}{\rho(\alpha)} \in \overline{co}_{E_C} \Psi(R \backslash e) \quad (\forall \alpha \in \mathcal{R},\ \rho(\alpha) > 0).$$

3.4. **Усиленная теорема БГК о дифференцируемости операторных мер со значениями в сепарабельных банаховых пространствах.** В работе [29] была получена теорема о дифференцировании операторных мер со значениями в сепарабельных банаховых пространствах. В классической монографии Ю.М. Березанского [24] рассмотрены приложения этой теоремы к разложениям по обобщённым собственным векторам самосопряжённого оператора. Под операторной мерой здесь понимается векторный заряд вида $\Theta : \Sigma \to \mathcal{B}(E_1, E_2')$, где Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого множества S, E_2' — пространство антилинейных непрерывных функционалов над банаховым пространством E_2, а $\mathcal{B}(E_1, E_2')$ — пространство ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2', со стандартной нормой.

Теорема 14. *Пусть Σ — σ-алгебра борелевских подмножеств некоторого множества $S \subset \mathbb{R}$, $\rho(\Delta) = |\Theta|(\Delta)$ — полная вариация операторной меры Θ на множестве $\Delta \in \Sigma$. Если E_1 и E_2' — сепарабельные банаховы пространства, то для ρ-почти всех λ существует операторнозначная функция $\Psi(\lambda)$, $\|\Psi(\lambda)\| = 1$ такая, что*

$$\Theta(\Delta) = (B)\int\limits_{\Delta} \Psi(\lambda) d\rho(\lambda) \quad (\forall \Delta \in \Sigma). \tag{20}$$

Отметим, что данная теорема даёт новую информацию не только в банаховом случае, но и весьма полезна при исследовании «незнакопостоянных» операторных мер в гильбертовых пространствах. В частности, теорема 14 была использована в [26] для уточнения одного из основных результатов этой работы — теоремы 2.14 — в случае операторных мер локально ограниченной вариации.

Ввиду справедливости К-свойства Радона-Никодима для всякого пространства Фреше (теорема 6), предыдущую теорему можно усилить, заменив интегрируемость $\Psi(\cdot)$ в пространстве $E = \mathcal{B}(E_1, E_2')$ на интегрируемость в некотором пространстве E_C, порожденном абсолютно выпуклым компактом $C \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(E_1, E_2'))$.

Теорема 15. *Пусть Σ — σ-алгебра борелевских подмножеств некоторого множества $S \subset \mathbb{R}$, $\rho(\Delta) = |\Theta|(\Delta)$ — полная вариация операторной меры Θ на множестве $\Delta \in \Sigma$. Если E_1 и E_2' — сепарабельные банаховы пространства, то для ρ-почти всех λ существует операторнозначная функция $\Psi(\lambda)$, $\|\Psi(\lambda)\| = 1$ и абсолютно выпуклый компакт $C \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(E_1, E_2'))$ такие, что интеграл Бохнера* (20) *сходится в пространстве E_C для всех $\Delta \in \Sigma$.*

Для операторных мер со значениями в сепарабельных банаховых пространствах справедлив также аналог теоремы о среднем с компактной выпуклой оценкой (теоремы 11 и следствия 1).

Следствие 3. *В условиях теоремы 14 существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(E_1, E_2'))$ и такое множество $e \subset S$ ρ-меры нуль, что*

$$\frac{\Theta(\Delta)}{\rho(\Delta)} \in \overline{co}_{E_C} \Psi(S \backslash e) \quad (\forall \Delta \in \Sigma, \ \rho(\Delta) > 0).$$

3.5. **Дифференцируемость операторных мер со значениями в несепарабельных ЛВП.** В заключение мы рассмотрим также одно приложение теоремы 1. Из теоремы 14 вытекает, что для сепарабельных банаховых пространств E_1 и E_2' пространство $\mathcal{B}(E_1, E_2')$ обладает свойством Радона-Никодима. Отметим, что доказательство данного результата существенно опирается на сепарабельность пространств E_1 и E_2'. Легко видеть, что для несепарабельных банаховых пространств E_1 теорема 14, вообще говоря, уже не верна. Действительно, положим $E_2 = \mathbb{R}$. Тогда $E_2' = \mathbb{R}$ и $\mathcal{B}(E_1, E_2') \supset \mathcal{L}(E_1, E_2') = E_1'$ (здесь $\mathcal{L}(E_1, E_2')$ — пространство линейных ограниченных операторов). Хорошо известно, что пространство $\mathcal{L}(E_1, E_2') = E_1'$

может и не обладать свойством Радона-Никодима, что в свою очередь влечёт $\mathcal{B}(E_1, E_2') \notin (RNP)$ (см. [2], следствие 3, стр. 220).

Итак, для несепарабельных пространств возникает задача поиска достаточных условий дифференцируемости операторных мер (т.е. представимости в виде интеграла Бохнера). Под операторной мерой мы понимаем векторный заряд вида $\Theta : \Sigma \to \mathcal{B}(E_1, E_2')$, где Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого множества S, E_2' — пространство антилинейных непрерывных функционалов над ЛВП E_2, наделённое некоторой (отделимой) локально выпуклой топологией, а $\mathcal{B}(E_1, E_2')$ — пространство ограниченных операторов, действующих из E_1 в E_2', также наделённое некоторой (отделимой) локально выпуклой топологией. Опираясь на доказанную выше теорему 1, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 16. *Пусть Θ — операторная мера на σ-алгебре Σ подмножеств некоторого множества S, $\rho(\Delta) = |\Theta|(\Delta)$ — полная вариация операторной меры Θ на множестве $\Delta \in \Sigma$. Если $\Theta \in AC_K(S, \mathcal{B}(E_1, E_2'))$, то существует операторнозначная функция $\Psi(\lambda)$, определённая для ρ-почти всех λ и такая, что имеет место равенство*

$$\Theta(\Delta) = (B)\int_{\Delta} \Psi(\lambda)d\rho(\lambda) \quad (\forall \Delta \in \Sigma). \tag{21}$$

Заметим, что в случае, когда E_1, E_2' и $\mathcal{B}(E_1, E_2')$ — пространства Фреше, справедливо и обратное утверждение (см. теорему 6).

По аналогии с предыдущими пунктами, сформулируем теорему о среднем для операторных мер с компактной оценкой в несепарабельных пространствах Фреше.

Следствие 4. *(***Теорема о среднем для операторных мер со значениями в пространствах Фреше.***) Если, в условиях теоремы 16, E_1, E_2' и $\mathcal{B}(E_1, E_2')$ — пространства Фреше, то существуют компакт $C \in \mathcal{C}(\mathcal{B}(E_1, E_2'))$ и множество $e \subset S$ ρ-меры нуль такие, что*

$$\frac{\Theta(\Delta)}{\rho(\Delta)} \in \overline{co}_{E_C}\Psi(S\backslash e) \quad (\forall \Delta \in \Sigma,\ \rho(\Delta) > 0).$$

Список литературы

[1] Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле , Р. Филлипс. — М: ИЛ, 1962. — 829 с.

[2] Diestel J. Geometry of Banach Spaces — Selected Topics / J. Diestel. — Berlin – Heidelberg: Springer – Verlag, 1975.

[3] Diestel J. Vector Measures / J. Diestel, J.J. Uhl. — Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

[4] Barcenas D. The Radon-Nikodym Theorem for reflexive Banach spaces / D. Barcenas // Divulgaciones Matematicas. — 2003. — vol. 11, № 1. — P. 55 – 59.

[5] Cheeger J. Characterization of the Radon-Nikodym property in terms of inverse limits / J. Cheeger, B. Kleiner // arXiv:0706.3389v3 [math.FA]. — 11 Jan 2008. — P. 1 — 12.

[6] Cheeger J. Differentiability of Lipschitz maps from metric measure spaces to Banach spaces with the Radon-Nikodym property / J. Cheeger, B. Kleiner // arXiv:0808.3249v1 [math.MG]. — 24 Aug 2008. — P. 1 — 17.

[7] Chakraborty N. D. Type II-Λ-Weak Radon-Nikodym Property in a Banach Space Associated with a Compact Metrizable Abelian Group / N. D. Chakraborty, Sk. Jaker Ali // Extracta Mathematicae. — 2008. — Vol. 23, no. 3. — P. 201 — 216.

[8] Bu Q. The Radon-Nikodym Property for Tensor Products of Banach Lattices II / Q. Bu, G. Buskes and Wei-Kai Lai // Positivity. — 2008. — Vol. 12. — P. 45 -— 54.

[9] De Kock Mienie. Absolute continuity and the range of a vector measure / Mienie de Kock // Ph. D. Theses, Kent State University, 2008.

[10] Arvanitakis A. D. Some examples of continuous images of Radon-Nikodym compact spaces / A. D. Arvanitakis, A. Aviles // arXiv:0903.0653v1 [math.GN]. — 3 Mar 2009. — P. 1 — 11.

[11] Bongiorno B. A variational Henstock integral characterization of the Radon-Nikodym property / B. Bongiorno, L.D. Piazza, K. Musial // Illinois Journal of Mathematics. — 2009. — vol. 53, № 1. — P. 87 – 99.

[12] Moedomo S. Radon – Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals / S. Moedomo, J.J. Uhl // Pacific J. of Math. — 1971. — Vol. 38, no. 2. — P. 531 — 536.

[13] Chi G. A geometric characterization of Frechet spaces with the RNT / G. Chi // Proc. Amer. Math. Soc. — 1975. — Vol. 48. — P. 371 — 380.

[14] Gilliam D. Geometry and the Radon-Nikodym theorems in strict Mackey convergence spaces / D. Gilliam // Pacific J. of Math. — 1976. — Vol. 65, no. 2. — P. 353 — 364.

[15] Orlov I. V. Strong compact properties of the mappings and K-Radon-Nikodym property / I. V. Orlov, F. S. Stonyakin // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2010. — Vol. 16, no. 2. — P. 183 — 196.

[16] Стонякин Ф. С. K-свойство Радона-Никодима для пространств Фреше / Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия « Математика. Механика. Информатика и кибернетика. » — 2009. — т. 22(61), № 1. — С. 102 – 113.

[17] Орлов И. В. Предельная форма свойства Радона-Никодима справедлива в любом пространстве Фреше / И. В. Орлов, Ф. С. Стонякин // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2010. — В печати.

[18] Вахания Н. Н. Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян. — М.: Наука, 1985. — 368 с.

[19] Гусман М. Дифференцирование интегралов в $\mathbb{R}^n$ / М. Гусман. — М.: Мир, 1978. — 153с.

[20] Edwards R. Functional Analysis. Theory and applications / Edwards R. — New York – London: Holt, Rinehart and Winston, 1965.

[21] Березанский Ю.М. Функциональный анализ / Ю.М. Березанский, Г.Ф. Ус, З.Г. Шефтель. — К: Выща шк., 1990. — 600 с.

[22] Данфорд Н. Линейные операторы. Общая теория. / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. — М.: ИЛ, 1962. — 896с.

[23] Shaefer H. H. Topological Vector Spaces / H. H. Shaefer. — New York – London: McMillan, 1966.

[24] Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряжённых операторов / Ю. М. Березанский. — К.: Наукова думка, 1965. — 800 с.

[25] Гельфанд И. М. Разложение по собственным функциям дифференциальных и других операторов / И. М. Гельфанд, А. Г. Костюченко // Доклады АН СССР. — 1955. — т.103, № 3. — С. 349 – 352.

[26] Malamud M. M. Spectral theory of operator measures in Hilbert space / M. M. Malamud, S. M. Malamud // St. Petersburg Math J. — 2004. — Vol.15, № 3. — P. 323 – 373.

[27] Berezansky Yu. M. The integration of Double-Infinite Toda Lattice by terms of Inverse Spectral Problem and related questions / Yu. M. Berezansky // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol.15, № 2. — P. 101 – 136.

[28] Орлов И. В. Формула конечных приращений для отображений в индуктивные шкалы пространств / И. В. Орлов // Мат. физика, анализ, геометрия. — 2001. — Т. 8, № 4. — С. 419 — 439.

[29] Dinculeani N. Sur la representation de certaines operations linearies. III / N. Dinculeani // Proc. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol.10. — P. 59 – 68.

Сильні компактні характеристики та гранична форма властивості Радона-Нікодима для векторних зарядів. *У цій роботі досліджено нові характеристики векторних зарядів зі значеннями у локально опуклих просторах: сильна компактна вариація, сильна компактна абсолютна неперервність, універсальна компактна та гранична форми властивості Радона-Нікодима. Доведено, що довільний простір Фреше має універсальну компактну та граничну форму властивості Радона-Нікодима для векторних зарядів. Розглянуто деякі застосування.*

Ключові слова: локально опуклий простір, простір Фреше, векторний заряд, інтеграл Бохнера, сильна компактна вариація, сильна компактна абсолютна неперервність, універсальна K-властивість Радона-Нікодима, гранична форма властивості Радона-Нікодима, операторна міра.

Strong compact properties and limit form of Radon-Nikodym property for vector measures. *In this paper new properties for vector measures with values in locally convex spaces, namely the strong compact variation, the strong compact absolute continuity, the universal compact and limit forms of the Radon-Nikodym property are investigated. It is proved that each Frechet space possesses the universal compact and limit forms of the Radon-Nikodym property for vector measures. Some applications are considered.*

Keywords: locally convex space, Frechet space, vector measure, strong compact variation, strong compact absolute continuity, universal K-property of Radon-Nikodym, limit form of the Radon-Nikodym property, operator measure.