Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 154–176.

УДК 517.98: 517.97

А. В. Цыганкова

ИСКЛЮЧЕНИЕ УСЛОВИЯ ЯКОБИ В ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С НЕГЛАДКИМ ИНТЕГРАНТОМ

Метод исключения уравнения и условия Якоби, разработанный недавно в одномерном и многомерном случаях для гладкого интегранта, перенесён на случай субгладкого интегранта в одномерных вариационных задачах. В этом случае вариационный функционал не является дважды дифференцируемым по Фреше, что приводит нас к технике негладкого анализа и компактных субдифференциалов.

Ключевые слова: вариационный функционал, субгладкий интегрант, уравнение Якоби, "нижнее" усиленное условие Лежандра, локальный экстремум.

Введение.

Классическая схема исследования на локальный экстремум одномерного вариационного функционала, как хорошо известно [1]-[2], предполагает решение уравнения Эйлера–Лагранжа и проверку для найденной экстремали усиленного условия Лежандра и условия Якоби отсутствия сопряженных точек для уравнения Якоби. Последний шаг является наиболее трудоемким; при этом требуется решить достаточно сложное уравнение для получения сравнительно небольшой информации о необращении в нуль его решения.

В многочисленных работах (см. например, [3]-[9]) исследовались условия, позволяющие исключить уравнение Якоби из схемы исследования на экстремум в одномерных вариационных задачах. Как правило, это дополнительные условия на функцию эксцесса Вейерштрасса, сами по себе также не очень простые. Недавно в работах Орлова И. В. ([10], [11]) были получены достаточные условия другого типа. Показано, что в одном из двух теоретически возможных случаев, определяемых формой интегранта на экстремали, усиленное условие Лежандра является достаточным условием экстремума без каких-либо дополнительных ограничений, во втором же возможном случае возникает дополнительное ограничение на длину промежутка. Эти результаты в наших работах обобщены на многомерный случай ([12], [13]).

Целью настоящей работы является обобщение указанных результатов в одномерной ситуации на случай C^2-субгладкого интегранта. В этом случае вариационный функционал не является дважды дифференцируемым по Фреше, что приводит нас к технике негладкого анализа и определённому типу субдифференциалов.

Субдифференциалы, как инструмент негладкого анализа, достаточно давно получили признание в математике. Начиная с классического субдифференциала выпуклого функционала (описанного в известной монографии Р. Рокафеллара [14]) появились и продолжают появляться новые определения субдифференциалов, рассчитанные на применение к различным классам экстремальных и других негладких задач (такие, как известный субдифференциал Ф. Кларка [15], субдифференциал Б. Н. Пшеничного [16] и многие другие (см. напр. [17], [18])). В большинстве своем эти определения с отображениями в евклидовы пространства, но имеются и более общие.

Мы опираемся на теорию компактных субдифференциалов или K-субдифференциалов. В случае скалярного аргумента понятие K-субдифференциала было введено в работах ([19], [20], [21]) и оказалось полезным инструментом при исследовании проблемы Радона-Никодима для интеграла Бохнера. Недавно в работах ([22]-[24]) понятие K-субдифференциала было перенесено на случай отображений в банаховых пространствах. В частности, рассмотрены приложения к вариационным функционалам с субгладким интегрантом и найдены для них выпуклые аналоги уравнения Эйлера–Лагранжа, условия Лежандра и условия Лежандра–Якоби. Эти результаты в обзорном порядке изложены в первом разделе нашей работы.

Опираясь на результаты первого раздела и технику исключения условия Якоби, развитую нами ранеее, во втором, основном разделе работы мы переносим результаты об исключении условия Якоби в экстремальных вариационных задачах на случай C^2-субгладкого (и, как следствие, дважды K-субдифференцируемого) интегранта. Рассмотрен пример, демонстрирующий содержательность основного результата.

1. Компактные субдифференциалы вариационных функционалов (обзор).

Вначале мы приведём основные понятия теории K-субдифференциалов, построенной в последние годы в работах И. В. Орлова, Ф. С. Стонякина и З. И. Халиловой ([19]-[27]). Для простоты, изложение ведётся в случае банаховых пространств.

Топологической базой теории служит понятие K-предела убывающей системы замкнутых выпуклых множеств в E, далее $U(0)$ — окрестность нуля в пространстве E.

Определение 1. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ – убывающая по вложению при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств вещественного банахова пространства E с непустым пересечением B. Множество B назовём K-пределом системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$:

$$B = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B_\delta,$$

если множество B компактно, и

$$\forall\, U(0) \subset E\ \exists\, \delta_U > 0 :\ (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B_\delta \subset B + U).$$

Таким образом, определение K-предела сводится к равномерному топологическому стягиванию множеств B_δ к их непустому компактному пересечению. Последующее определение K-субдифференциала состоит в вычислении K-предела замкнутых выпуклых оболочек разностных отношений некоторого отображения по выбранному направлению. Далее E, F — вещественные банаховы пространства, отображение $f : E \to F$ определено в некоторой окрестности $x + U(0)$ точки $x \in E$, $h \in \dot{U}(0) = U(0)\backslash\{0\}$ — выбранное направление.

Определение 2. K-субдифференциал отображения f в точке x по направлению h есть K-предел

$$\partial_K f(x,h) = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co} \left\{ \frac{f(x+th)-f(x)}{t} \,\middle|\, 0 < t < \delta, t \neq 0 \right\}. \tag{1}$$

Очевидно, K-субдифференциал по направлению является обобщением обычного дифференциала по направлению. Его основные свойства рассмотрены в [27]. Переход к определению сильного K-субдифференциала в основном следует классической схеме Адамара–Фреше.

Определение 3. Предположим, что отображение $\partial_K f(x,h)$ определено при любом $h \in \dot{U}(0)$ и сублинейно по h, т. е.:

$$\partial_K f(x, h_1 + h_2) \subset \partial_K f(x, h_1) + \partial_K f(x, h_2); \qquad \partial_K f(x, \lambda h) = \lambda \cdot \partial_K f(x,h) \quad (\forall \lambda \geq 0).$$

В этом случае сублинейный оператор с компактными выпуклыми значениями $h \mapsto \partial_K f(x,h)$ назовём слабым K-субдифференциалом отображения f в точке x и примем для него обозначение $\partial_K f(x) : h \mapsto \partial_K f(x)h$.

Далее, если оператор $\partial_K f(x)$ ограничен по норме (т. е. является K-оператором [19]):

$$\|\partial_K f(x)\| = \sup_{\|h\|\leq 1} (\sup \|\partial_K f(x)h\|) < \infty,$$

то назовём его K-субдифференциалом Гато. Наконец, если отображение f K-субдифференцируемо по Гато в точке x, и сходимость в K-пределе (1) равномерна по всем направлениям $\|h\| \leq 1$, то K-оператор $\partial_K f(x)$ назовём K-субдифференциалом Фреше (или сильным K-субдифференциалом) отображения f в точке x.

Замечание 8. 1) Как показано в [22], K-операторы, действующие из E в F, образуют нормированный конус $L_K(E; F)$ (банахов конус, если F–банахово пространство). Приведённые выше определения 1.1 – 1.3 распространяются на случай банаховых конусов, что позволяет далее обычным индуктивным путём ввести K-субдифференциалы высших порядков.
2) В случае вещественных функций [20] K-субдифференциал вычисляется по формуле

$$\partial_K f(x) = \left[\underline{\partial} f(x); \overline{\partial} f(x)\right],$$

где $\underline{\partial} f(x)$, $\overline{\partial} f(x)$ — конечные (верхняя и нижняя) производные f в точке x. Таким образом, для выпуклой функции K-субдифференциал совпадает с классическим субдифференциалом [14].
3) Свойства сильных K-субдифференциалов изучены в работах ([27], [28]).

Выделим важный случай K–субдифференцирования функционала $f : E \to \mathbb{R}$. Здесь можно дать простую формулу для вычисления $\partial_K f(x, h)$.

Теорема 1. *Функционал $f : E \to \mathbb{R}$ K–субдифференцируем в точке x по направлению h тогда и только тогда, когда существуют конечные верхняя и нижняя производные f по направлению h в этой точке: $\overline{\partial} f(x, h)$ и $\underline{\partial} f(x, h)$. При этом имеет место равенство:*

$$\partial_K f(x, h) = \left[\underline{\partial} f(x, h);\ \overline{\partial} f(x, h)\right]. \tag{2}$$

Определение 4. Пусть функционал $g : E \to \mathbb{R}$ сублинеен. Введем симметризованный K–функционал g^s равенством:

$$g^s(h) = [-g(-h); g(h)] =: [\underline{g}^s(h); \overline{g}^s(h)]. \tag{3}$$

Замечание 9. В случае сильного K–субдифференцирования функционалов $f : E \to \mathbb{R}$, а также (покоординатно) отображений $f : E \to \mathbb{R}^m$ нам удобнее будет использовать *симметризованный K–субдифференциал* $\partial_K^s f(x)h$. Используя равенства (2) и (3) получаем:

$$\partial_K^s f(x)h = \left[\min\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x{+}0); \underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x{-}0)\right); \max\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x{+}0); \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x{-}0)\right)\right] = \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x); \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)\right]$$

Здесь $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ и $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$, соответственно, — нижняя и верхняя производные вдоль прямой, определяемой в точке x вектором h.

Приведем теперь определение сильного K-субдифференциала второго порядка [22].

Определение 5. Пусть отображение $f : E \to F$ определено и K-субдифференцируемо по Фреше в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in E$. Если отображение $\partial_K f : E \supset U(x) \to L_K(E;F)$ K-субдифференцируемо по Фреше в точке x, то его K-субдифференциал в точке x $\quad \partial_K^2 f(x) = \partial_K(\partial_K f)(x) \in L_K(E; L_K(E;F))$ назовём K-субдифференциалом Фреше второго порядка отображения f в точке x.

Замечание 10. 1) В [19] установлена каноническая изометрия банаховых конусов сублинейных и бисублинейных K-операторов:

$$L_K(E_1; L_K(E_2;F)) \cong L_K(E_1, E_2; F).$$

Это позволяет рассматривать второй K-субдифференциал Фреше как бисублинейный ограниченный K-оператор: $\partial_K^2 f(x) : E \times E \to F$.
2) Аналогичным образом, по индукции можно ввести K-субдифференциалы высших порядков и рассматривать их как мультисублинейные K-операторы [27].

Определение 6. Пусть E, F –нормированные конусы, F индуктивно упорядочен, $\Lambda : E \supset U(x) \to F$. Будем говорить, что отображение Λ *субнепрерывно сверху* в точке $x \in E$ (обозначение $\Lambda \in C_{sub}(x)$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Lambda(x+h) \le \Lambda(x) + y, \text{ где } \|y\| < \varepsilon). \tag{4}$$

Основным для нас является то обстоятельство, что в случае субдифференциалов (т.е. при $\Lambda = \partial_K F : E \to L_K(E;F)$) в условии (4) можно заменить $\Lambda(x) = \partial_K f(x)$ на произвольный элемент нормированного конуса $L_K(E;F)$. Это и есть *общая формула достаточного условия -субдифференцируемости.*

Замечание 11. Мы можем принять условие (4) за определение *полунепрерывности сверху*, или *субнепрерывности* отображения $\partial_K f$ в точке x: $\partial_K f \in C_{sub}(x)$. Будем писать также в этом случае: $f \in C^1_{sub}(x)$ и называть отображение f *субгладким* (точнее, C^1*–субгладким*) в точке x.

Определение 7. Будем говорить, что $f : E \supset U(x) \to F$ — *субгладкое отображение n–го порядка* (или C^n*–субгладкое отображение*) в точке x, и писать $f \in C^n_{sub}(x)$, если $\partial_K^n f \in C_{sub}(x)$.

Рассмотрим случай функционалов $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Пусть $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Тогда*

$$(f \in C^n_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \Bigg(\textit{все} \quad \underline{\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}}\right) \textit{ и } \overline{\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}}\right)$$

$$\textit{полунепрерывны в точке } x, \textit{ соответственно, снизу и сверху}\Bigg) \Longrightarrow \Big(\exists \; \partial_K^n f(x)\Big).$$

Перейдем теперь к приложениям построенного аппарата в вариационном исчислении. Рассмотрим классический вариационный функционал

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \qquad (y \in C^1[a; b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), u = f(x, y, z)), \tag{5}$$

интегрант f которого, однако, не обязательно всюду дифференцируем. Потребуем, чтобы f был лишь всюду K-субдифференцируем. Простым, но важным примером, может служить функционал вида

$$\widetilde{\Phi}(y) = \int\limits_a^b |\widetilde{f}(x, y, y')|dx \qquad (\widetilde{f} \in C^1),$$

ситуация для которого исследована в [24]. Справедлива следующая оценка K-субдифференциала (5) (см. [24],[27]).

Теорема 3. *Пусть для вариационного функционала* (5) *интегрант* f *является субгладким:* $f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3)$ *(см. определение 1.6). Тогда* Φ *сильно* K*-субдифференцируем всюду в* $C^1[a; b]$*, причём справедлива оценка:*

$$\partial_K \Phi(y)h \subset$$

$$\subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y')h' \right) dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y')h' \right) dx \right]$$

$$(\forall h \in C^1[a; b]). \tag{6}$$

Оценка (6) позволила получить, в случае C^1-субгладкого интегранта, многозначный аналог классического уравнения Эйлера–Лагранжа — так называемое "включение Эйлера–Лагранжа" с компактной выпуклой оценкой [28].

Теорема 4. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{7}$$

Тогда условие $0 \in \partial^s_K \Phi(y)$ *равносильно выполнению "включения Эйлера–Лагранжа":*

$$0 \in \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') \right); \ \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') \right) \right] \tag{8}$$

почти всюду на $[a; b]$*. В частности, если* Φ *достигает локального экстремума в точке* y*, то включение* (8) *для* y *выполнено почти всюду на* $[a; b]$*.*

Решение включения (8) назовём субэкстремалью функционала (7).

Замечание 12. Включение Эйлера–Лагранжа (8) можно равносильным образом переписать в виде "уравнения Эйлера–Лагранжа с параметром":

$$\left[(1-\lambda)\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')+\lambda\cdot\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')\right]-\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')+\lambda\cdot\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')\right]\overset{\text{п.в.}}{=}0$$

y является решением этого уравнения при некотором $\lambda\in[0;1]$.

Переход к условиям второго порядка требует оценки второго K-субдифференциала $\Phi(y)$. Здесь также, в отличие от классического случая $f\in C^2$, мы рассматриваем более общий случай C^2-субгладкого интегранта (класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$). Простым примером, рассмотренным в [28], может служить функционал вида

$$\widetilde{\Phi}(y)=\int_a^b \widetilde{f}(x,y,y')\cdot|\widetilde{f}(x,y,y')|dx \qquad (\widetilde{f}\in C^1).$$

Справедлива следующая оценка второго K-субдифференциала функционала (5).

Теорема 5. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int_a^b f(x,y,y')dx \quad (f\in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3),y\in C^1[a;b]). \tag{9}$$

Функционал (9) *дважды K-субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причём справедлива оценка:*

$$\begin{aligned}\partial^2_K\Phi(y)(h)^2\subset\Bigg[&\int_a^b\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')hh'\right)dx;\\ &\int_a^b\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')hh'\right)dx\Bigg]+\\ &+\Bigg[\int_a^b\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')hh'+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx;\\ &\int_a^b\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,y,y')hh'+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right)dx\Bigg].\end{aligned} \tag{10}$$

Оценка (10) позволила получить аналог классического условия Лежандра.

Теорема 6. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y)=\int_a^b f(x,y,y')dx \quad (f\in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3),y\in C^1[a;b],y(a)=y_a,y(b)=y_b). \tag{11}$$

Если функционал (11) *достигает локального минимума в точке* $y \in C^1[a;b]$, *то*

$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') \geq 0 \ \text{ всюду на } [a;b].$$

Определение 8. Для отображения $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F^1 \times \cdots \times F^m$, K–матрицу сублинейных K–операторов

$$J_K f(x) = \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_K (x) \right)_K^{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,m}} \qquad \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i} \right)_K (x) \in L_K(E_i; F_j) \right)$$

назовем K*–матрицей Якоби* отображения f в точке x. Аналогично вводятся матрицы Якоби высших порядков.

Выделим случай функционала $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Теорема 7. *Если функционал* $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K*–субдифференцируем* n *раз в* $U(x)$, *то справедливо равенство:*

$$\partial_K^n f(x)(h)^n = \left[\sum_{i=1}^m \underline{\frac{\partial}{\partial x_i}} h_i ; \sum_{i=1}^m \frac{\overline{\partial}}{\partial x_i} h_i \right] \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + ... + \frac{\partial}{\partial x_m} h_m \right)^{n-1} \cdot f \right)(x). \qquad (12)$$

Замечание 13. Отметим, что вводя в случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *нижнюю и верхнюю матрицы Якоби* n*–го порядка*:

$$\underline{J}^n f = \left(\underline{\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}} \right) \right) =: \left(\underline{\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}}} \right)$$

и

$$\overline{J^n} f = \left(\frac{\overline{\partial}}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_{n-1}}} \right) \right) =: \left(\frac{\overline{\partial^n f}}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_n}} \right),$$

равенство (12) можно записать в виде:

$$\partial_K^n f(x) \cdot (h)^n = [\underline{J}^n f(x); \overline{J^n} f(x)] \cdot (h)^n,$$

где $[\underline{J}^n f(x); \overline{J^n} f(x)]$ — (n^m)–мерный матричный отрезок, соединяющий концевые матрицы (по главной диагонали).

Теперь перейдём к центральному результату — C^2–субгладкому аналогу достаточного условия Лежандра–Якоби для минимума вариационного функционала.

Теорема 8. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y') dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \qquad (13)$$

Предположим, что y *– субэкстремаль функционала* (13), *т. е. почти всюду удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа. Если вдоль субэкстремали* y *выполнены следующие условия:*

i)

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') > 0 \quad \textit{при } a \le x \le b \textit{ ("нижнее" усиленное условие Лежандра);} \tag{14}$$

ii) *для каждого из четырёх уравнений Якоби, соответствующих вершинам двумерного матричного отрезка* $[\underline{J}^2 f(x);\ \overline{J}^2 f(x)]$*:*

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{15}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{16}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{17}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{18}$$

$$(h(a) = 0,\ h'(a) = 1)$$

выполнены условия Якоби отсутствия сопряжённых точек.
Тогда функционал (13) *достигает строгого локального минимума в точке* y*.*

2. Исключение условия Якоби в случае негладкого интегранта.

Здесь мы собираемся показать, что в случае не C^2-гладкого (но C^2-субгладкого) интегранта, аналогично гладкому случаю, можно ограничиться "нижним" усиленным условием Лежандра (14) при возможном ограничении на длину отрезка $[a;b]$. При выводе основного результата мы следуем схеме доказательства работ ([10], [12], [13]). Для простоты, проведём выкладки в случае нулевой субэкстремали.

При каждом $i = \overline{1,4} : f = f_{i1} + f_{i2}$, разобьем интегрант $f(x,y,z)$ вариационного функционала (5) на два слагаемых, и зафиксируем некоторое $\lambda \in (0;1)$:

1)

$$f_{11}(x,y,z) = f(x,y,z) - f(x,0,0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz + \lambda\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right];$$

$$f_{12}(x,y,z) = f(x,y,z) - f_{12}(x,y,z) = f(x,0,0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz + \lambda\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right].$$

2)

$$f_{21}(x,y,z) = f(x,y,z) - f(x,0,0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0)\right)\cdot yz + \lambda\cdot\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0)\cdot z^2\right];$$

$$f_{22}(x,y,z) = f(x,y,z) - f_{22}(x,y,z) = f(x,0,0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0)\right)\cdot yz + \lambda\cdot\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0)\cdot z^2\right].$$

3)

$$f_{31}(x,y,z) = f(x,y,z) - f(x,0,0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0)\right)\cdot yz + \lambda\cdot\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0)\cdot z^2\right];$$

$$f_{32}(x,y,z) = f(x,y,z) - f_{32}(x,y,z) = f(x,0,0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0)\right)\cdot yz + \lambda\cdot\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0)\cdot z^2\right].$$

4)

$$f_{41}(x,y,z) = f(x,y,z) - f(x,0,0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz + \lambda\cdot\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right];$$

$$f_{42}(x,y,z) = f(x,y,z) - f_{42}(x,y,z) = f(x,0,0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot z\right] +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yz + \lambda\cdot\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z^2\right].$$

Соответственно, обозначим

$$\Phi_{i1}(y) = \int_a^b f_{i1}(x,y,y')dx,\ \Phi_{i2}(y) = \int_a^b f_{i2}(x,y,y')dx;$$

$$\Phi(y) = \Phi_{i1}(y) + \Phi_{i2}(y) \quad (i = \overline{1,4}).$$

1) Вначале исследуем Φ_{i1} на минимум с помощью включения Эйлера–Лагранжа (терема 1.4), "нижнего" усиленного условия Лежандра (теорема 1.8, п.i), уравнений Якоби (15)-(18) и обобщенного условия Якоби (теорема 1.8, п.ii).

i) *Включение Эйлера–Лагранжа.* Так как

1)

$$\begin{gathered}\Bigg(\frac{\partial f_{11}}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)-\\ -\Bigg[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y+\frac{1}{2}\Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\Bigg)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\Bigg(\frac{\partial f_{11}}{\partial y}(x,0,0)=0\Bigg);\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Bigg(\frac{\partial f_{11}}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)-\\ -\Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\Bigg)\cdot y+\lambda\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\Bigg(\frac{\partial f_{11}}{\partial z}(x,0,0)=0\Bigg);\end{gathered}$$

2)

$$\begin{gathered}\Bigg(\frac{\partial f_{21}}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)-\\ -\Bigg[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y+\frac{1}{2}\Bigg(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\Bigg)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\Bigg(\frac{\partial f_{21}}{\partial y}(x,0,0)=0\Bigg);\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Bigg(\frac{\partial f_{21}}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)-\\ -\Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\Bigg)\cdot y+\lambda\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\Bigg(\frac{\partial f_{21}}{\partial z}(x,0,0)=0\Bigg);\end{gathered}$$

3)

$$\begin{gathered}\Bigg(\frac{\partial f_{31}}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)-\\ -\Bigg[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y+\frac{1}{2}\Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\Bigg)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\Bigg(\frac{\partial f_{31}}{\partial y}(x,0,0)=0\Bigg);\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Bigg(\frac{\partial f_{31}}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)-\\ -\Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\Bigg)\cdot y+\lambda\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\Bigg(\frac{\partial f_{31}}{\partial z}(x,0,0)=0\Bigg);\end{gathered}$$

4)

$$\begin{gathered}\Bigg(\frac{\partial f_{41}}{\partial y}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)-\\ -\Bigg[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y+\frac{1}{2}\Bigg(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\Bigg)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\Bigg(\frac{\partial f_{41}}{\partial y}(x,0,0)=0\Bigg);\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\Bigg(\frac{\partial f_{41}}{\partial z}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)-\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)-\\ -\Bigg[\frac{1}{2}\Bigg(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\Bigg)\cdot y+\lambda\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot z\Bigg]\Bigg)\Rightarrow\Bigg(\frac{\partial f_{41}}{\partial z}(x,0,0)=0\Bigg);\end{gathered}$$

то уравнение Эйлера–Лагранжа для Φ_{i1} в нуле при всех $i = \overline{1,4}$

$$\frac{\partial f_{i1}}{\partial y}(x,0,0) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f_{i1}}{\partial z}(x,0,0)\right) = 0$$

выполняется автоматически, т.е. $y_0(x) \equiv 0$ является K–экстремалью функционала Φ_{i1}.

ii) *"Нижнее" усиленное условие Лежандра.* Так как при $i = \overline{1,4}$:

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{i1}}{\partial z^2}}(x,y,z) = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,z) - \lambda \cdot \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\underline{\frac{\partial^2 f_{i1}}{\partial z^2}}(x,0,0) = (1-\lambda) \cdot \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right),$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{i1}}{\partial z^2}}(x,y,z) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,z) - \lambda \cdot \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\overline{\frac{\partial^2 f_{i1}}{\partial z^2}}(x,0,0) = (1-\lambda) \cdot \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right),$$

то, при дополнительном требовании

$$r(x) := \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}\right)(x,0,0) > 0, \quad (a \le x \le b) \tag{19}$$

имеет место "нижнее" усиленное условие Лежандра для строгого минимума в нуле.

iii) *Уравнения Якоби и обобщенное условие Якоби.* Отметим, что из условия $f \in C^2_{sub}$ следует $f_{i1}, f_{i2} \in C^2_{sub}$ $\quad (i = \overline{1,4})$.

1) Так как

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y \partial z}}(x,y,z) = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,z) - \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y \partial z}}(x,0,0) = 0\right);$$

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y^2}}(x,y,z) = \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,z) - \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y^2}}(x,0,0) = 0\right);$$

то правая часть уравнения Якоби (15) для Φ_{11} в нуле примет следующий вид:

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda) \cdot \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right] \cdot U' - \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right) + \right.$$

$$\left. + \underline{\frac{\partial^2 f_{11}}{\partial y^2}}(x,0,0)\right] \cdot U = -\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda) \cdot \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right] \cdot U' =$$

$$= -\frac{d}{dx}\Big[(1-\lambda) \cdot r(x)\Big] \cdot U' \qquad (U(a) = 0,\ U'(a) = 1).$$

Таким образом, мы получили уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0) \cdot U'\right) = \frac{d}{dx}\big(r(x) \cdot U'\big) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \qquad (U(a) = 0,\ U'(a) = 1).$$

2) Так как

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y \partial z}}(x,y,z) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,z) - \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y \partial z}}(x,0,0) = 0\right);$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y^2}}(x,y,z) = \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,z) - \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\right) \Rightarrow \left(\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y^2}}(x,0,0) = 0\right);$$

то правая часть уравнения Якоби (16) для Φ_{21} в нуле примет следующий вид:

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' - \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)+\right.$$

$$\left.+\overline{\frac{\partial^2 f_{21}}{\partial y^2}}(x,0,0)\right]\cdot U = -\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' \quad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

Таким образом, мы получили уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot U'\right)\overset{\text{п.в.}}{=} 0 \qquad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

3) Так как

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y\partial z}}(x,y,z)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,z)-\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)=0\right);$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y\partial z}}(x,y,z)=\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,z)-\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)=0\right);$$

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y^2}}(x,y,z)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,z)-\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y^2}}(x,0,0)=0\right);$$

то правая часть уравнения Якоби (17) для Φ_{31} в нуле примет следующий вид:

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' - \left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\overline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)+\right.$$

$$\left.+\underline{\frac{\partial^2 f_{31}}{\partial y^2}}(x,0,0)\right]\cdot U = -\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' \quad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

Таким образом, мы получили уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot U'\right)\overset{\text{п.в.}}{=} 0 \qquad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

4) Так как

$$\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y\partial z}}(x,y,z)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,z)-\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\underline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)=0\right);$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y\partial z}}(x,y,z)=\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,z)-\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)=0\right);$$

$$\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y^2}}(x,y,z)=\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,z)-\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\right)\Rightarrow\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y^2}}(x,0,0)=0\right);$$

то правая часть уравнения Якоби (18) для Φ_{41} в нуле примет следующий вид:

$$-\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U'-$$

$$-\left[-\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y\partial z}}(x,0,0)+\underline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)+\overline{\frac{\partial^2 f_{41}}{\partial y^2}}(x,0,0)\right]\cdot U =$$

$$= -\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\right]\cdot U' = -\frac{d}{dx}\left[(1-\lambda)\cdot r(x)\right]\cdot U' \quad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

Таким образом, мы получили уравнение:

$$\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot U'\right) = \frac{d}{dx}\left(r(x)\cdot U'\right) \overset{\text{п.в.}}{=} 0 \qquad (U(a)=0,\ U'(a)=1).$$

Решения всех этих четырех уравнений

$$U(x) = r(a)\cdot\int\limits_a^x \frac{dt}{r(t)}$$

положительны при $a < x \leq b$. Таким образом, при условии (19) функционалы Φ_{i1} достигают строгого минимума в нуле.

2) Исследуем теперь непосредственно Φ_{i2} на минимум в нуле. Отметим сначала, что $\Phi_{i2}(0) = \Phi(0)$.

i) Предположим, что уравнение Эйлера–Лагранжа для Φ в нуле справедливо:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\right) = 0 \quad (a \leq x \leq b). \tag{20}$$

1) Тогда, интегрируя по частям, получим для $\Phi_{12}(y)$:

$$\Phi_{12}(y) = \int\limits_a^b f(x,0,0)dx + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y'\right)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yy'\right)dx +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\cdot\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot y'^2\right)dx =$$

$$= \Phi_{12}(0) + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y\right)\right)dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 - \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right)\cdot y^2\right)dx +$$

$$+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot y'^2 dx.$$

Введем обозначение:

$$q_1(x) := \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}}(x,0,0)\right).$$

2) Для $\Phi_{22}(y)$ получаем:

$$\Phi_{22}(y) = \int\limits_a^b f(x,0,0)dx + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) \cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y' \right) dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0) \cdot y^2 + \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \right) \cdot yy' \right) dx +$$

$$+\frac{\lambda}{2} \cdot \int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0) \cdot y'^2 \right) dx =$$

$$= \Phi_{22}(0) + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) \cdot y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y \right) \right) dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y \Big|_a^b +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0) \cdot y^2 - \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \right) \cdot y^2 \right) dx +$$

$$+\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) \cdot y \Big|_a^b + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \cdot y \Big|_a^b + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0) \cdot y'^2 dx.$$

Введем обозначение:

$$q_2(x) := \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,0,0) - \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \right).$$

3) Для $\Phi_{32}(y)$ получаем:

$$\Phi_{32}(y) = \int\limits_a^b f(x,0,0)dx + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) \cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y' \right) dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,0,0) \cdot y^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \right) \cdot yy' \right) dx +$$

$$+\frac{\lambda}{2} \cdot \int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,0,0) \cdot y'^2 \right) dx =$$

$$= \Phi_{32}(0) + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) \cdot y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y \right) \right) dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0) \cdot y \Big|_a^b +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,0,0) \cdot y^2 - \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,0,0) \right) \cdot y^2 \right) dx +$$

$$+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot y'^2 dx.$$

Введем обозначение:

$$q_3(x) := \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right).$$

4) Для $\Phi_{42}(y)$ получаем:

$$\Phi_{42}(y) = \int\limits_a^b f(x,0,0)dx + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y'\right)dx +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 + \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right)\cdot yy'\right)dx +$$

$$+\frac{\lambda}{2}\cdot\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot y'^2\right)dx =$$

$$= \Phi_{42}(0) + \int\limits_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0)\cdot y - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y\right)\right)dx + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0)\cdot y^2 - \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right)\cdot y^2\right)dx +$$

$$+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\cdot y\Big|_a^b + \frac{\lambda}{2}\int\limits_a^b \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,0,0)\cdot y'^2 dx.$$

Вводя обозначение:

$$q_4(x) := \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right),$$

получаем:

$$(\Phi_{i2}(y) = \Phi_{i2}(0) + \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[\lambda\cdot r(x)\cdot y'^2 + q_i(x)\cdot y^2\right]dx) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\Phi(y) - \Phi(0) \geq \Phi_{i2}(y) - \Phi_{i2}(0) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[\lambda\cdot r(x)\cdot y'^2 + q_i(x)\cdot y^2\right]dx), \quad (i = \overline{1,4}). \tag{21}$$

ii) Обозначим через

$$r := \min_{a\leq x\leq b} r(x) > 0, \qquad q_i := \inf_{a\leq x\leq b}(\inf q_i(x)) \qquad (i = \overline{1,4}), \tag{22}$$

и рассмотрим сначала случай $q_i \geq 0$, $(i = \overline{1,4})$. Тогда

$$\lambda r(x)y'^2 + q_i(x)y^2 \geq \lambda r \cdot y'^2 + q_i \cdot y^2 > 0 \quad \text{при} \quad y' \neq 0 \quad (i = \overline{1,4}),$$

откуда, в силу (21), следует неравенство

$$\Phi_{i2}(y) > \Phi_{i2}(0) \quad \text{при} \quad y(x) \neq 0.$$

Таким образом, в этом случае Φ_{i2} достигает строгого абсолютного минимума в нуле. Следовательно, в силу доказанного в пункте 1, Φ достигает строгого минимума в нуле (без какого-либо ограничения на длину $[a;b]$).

iii) Рассмотрим теперь случай, когда $q_i < 0$ $(i = \overline{1,4})$. Тогда, используя неравенство Фридрихса, получаем:

$$\Phi_{i2}(y) - \Phi_{i2}(0) = \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[\lambda \cdot r(x) \cdot y'^2 + q_i(x) \cdot y^2\right] dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[\lambda \cdot r \cdot y'^2 - |q_i| \cdot y^2\right] dx \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_a^b \left[\lambda \cdot r \cdot y'^2 - \frac{(b-a)^2}{\pi^2}|q_i| \cdot y'^2\right] dx = \frac{1}{2}\left(\lambda \cdot r - \frac{(b-a)^2}{\pi^2}|q_i|\right) \cdot \int\limits_a^b y'^2 dx \quad (i = \overline{1,4}). \tag{23}$$

Потребуем, чтобы коэффициент перед последним интегралом в (23) был строго положительным:

$$\left(\lambda \cdot r - \frac{(b-a)^2}{\pi^2}|q_i| > 0\right) \Leftrightarrow \left(b - a < \pi\sqrt{\frac{\lambda r}{|q_i|}}\right) \quad (i = \overline{1,4}). \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что $\Phi_{i2}(y) > \Phi_{i2}(0)$ при $y \neq 0$, т.е. Φ_{i2} достигает строгого абсолютного минимума в нуле. Таким образом, в силу доказанного в пункте 1, Φ достигает строгого минимума в нуле при ограничении (24) на длину $[a;b]$.

Наконец, переходя к пределам в (24) при $\lambda \to 1 - 0$, последнее утверждение можно распространить на случай оценки длины $[a;b]$ не зависящей от λ:

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{|q_i|}}.$$

Таким образом, доказана следующая

Теорема 9. *Пусть вариационный функционал* (5) *удовлетворяет в нуле уравнению Эйлера–Лагранжа* (20) *при граничном условии* $y(a) = y(b) = 0$. *Тогда, в обозначениях* (22), *имеем:*

1) *при* $r > 0$, $q_i \geq 0$ $(i = \overline{1,4})$, $\Phi(y)$ *достигает строгого минимума в нуле (без каких либо ограничений на длину* $[a;b]$*);*

2) *при* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_i \geq 0$ $(i \neq i_1)$, *при ограничении на длину* $[a; b]$:

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{|q_{i_1}|}},$$

$\Phi(y)$ *также достигает строгого минимума в нуле;*

3) *при* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_{i_2} < 0$, $q_i \geq 0$ $(i \neq i_1, i_2)$, *при ограничении на длину* $[a; b]$:

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_{i_1}|, |q_{i_2}|)}},$$

$\Phi(y)$ *также достигает строгого минимума в нуле;*

4) *при* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_{i_2} < 0$, $q_{i_3} < 0$, $q_i \geq 0$ $(i \neq i_1, i_2, i_3)$, *при ограничении на длину* $[a; b]$:

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_{i_1}|, |q_{i_2}|, |q_{i_3}|)}},$$

$\Phi(y)$ *также достигает строгого минимума в нуле;*

5) *при* $r > 0$, $q_i < 0$ $(i = \overline{1, 4})$,, *при ограничении на длину* $[a; b]$:

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_1|, |q_2|, |q_3|, |q_4|)}},$$

$\Phi(y)$ *также достигает строгого минимума в нуле.*

В заключении рассмотрим пример применения теоремы 9 к варианту "модулирования" гармонического осциллятора.

Пример 1. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (y'^2 - y|y|)dx \quad \Big(y \in C^1[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}],\ y(\frac{\pi}{2}) = 1,\ y(-\frac{\pi}{2}) = -sh\,\frac{\pi}{2}\Big). \qquad (25)$$

Здесь уравнение Эйлера–Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} y'' + y = 0 \ \ (y \geq 0); \\ y'' - y = 0 \ \ (y \leq 0). \end{array}\right.$$

Таким образом, функция

$$y = \sin x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}), \quad y = -sh\, x(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq 0), \qquad (26)$$

является субэкстремалью функционала (25); при этом $y \in C^2[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

"Нижнее" условие Лежандра для субэкстремали y выполнено:

$$\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x, y, y') = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y') = 2 > 0.$$

"Нижнее" уравнение Якоби (15) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} h''+h=0\,(y\geq 0); \\ \Big(h(-\frac{\pi}{2})=0,\ h'(-\frac{\pi}{2})=1\Big) \\ h''-h=0\,(y\leq 0). \end{array}\right.$$

Аналогичный вид принимает уравнение Якоби (16):

$$\left[\begin{array}{l} h''-h=0\,(y\geq 0); \\ \Big(h(-\frac{\pi}{2})=0,\ h'(-\frac{\pi}{2})=1\Big) \\ h''+h=0\,(y\leq 0). \end{array}\right.$$

Уравнение Якоби (17) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} h''+h=0\,(y\geq 0); \\ \Big(h(-\frac{\pi}{2})=0,\ h'(-\frac{\pi}{2})=1\Big) \\ h''-h=0\,(y\leq 0). \end{array}\right.$$

Уравнение Якоби (18) принимает вид:

$$\left[\begin{array}{l} h''-h=0\,(y\geq 0); \\ \Big(h(-\frac{\pi}{2})=0,\ h'(-\frac{\pi}{2})=1\Big) \\ h''+h=0\,(y\leq 0). \end{array}\right.$$

Тогда $r = 2 > 0,\ q_1 = -2 < 0,\ q_2 = 2 > 0,\ q_3 = -2 < 0,\ q_4 = 2 > 0$. Полученные значения соответствуют пункту 3) теоремы 2.1. Таким образом, ограничение на длину $[a; b]$ вида:

$$b-a<\pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_1|,|q_3|)}},$$

принимает следующую форму:

$$b-a<\pi \tag{27}$$

при условии (27) вариационный функционал (25) достигает строгого локального минимума на данной субэкстремали (26).

Автор выражает признательность профессору И. В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Giaquinta M., Hildebrand S. HildebrandCalculus of Variations, Springer-Verlag, New York, 1996.

[2] Dacorogna B. Introduction to the Calculus of Variations – Imperial College Press, London, 2004.

[3] Ewing G. M. Calculus of Variations with Applications – Dover Publications, New York, 1985.

[4] Hestenes M. R. Calculus of Variations and Optimal Control Theory – John Wiley, New York, 1966.

[5] Rosenblueth J. F. Variational conditions and conjugate points for fixed-endpoint control problem // IMA J. Math. Control Inform. 16 (1999). 147-163.

[6] Rosenblueth J. F., Licea G. S. Strengthening Weierstrass' condition // IMA J. Math. Control Inform. 21 (2004), no. 3, 275-294.

[7] Rosenblueth J. F., Licea G. S. A new sufficiency theorem for strong minima in the calculus of variations // Appl. Math. Lett. 18 (2005), no. 11, 1239-1246.

[8] Rosenblueth J. F., Licea G. S. Sufficient variational conditions for isoperimetric control problems // Int. Math. Forum 6 (2011), 303-324.

[9] Licea G. S. Sufficiency in optimal control without the strengthened condition of Legendre // Journal of Applied Mathematics and Bioinformatics 1 (2011), no. 1, 1-20.

[10] Orlov I. V. Elimination of Jacobi equation in extremal variational problems // Methods of Functional Analysis and Topology, Kyiv: Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Ukraine , 2011, Vol. 17, no. 4, 341–349.

[11] Orlov I. V. Inverse extremal problem for variational functionals // Eurasian Mathematical Journal, 2011, Vol. 1, no. 4, 95–115.

[12] Орлов И. В., Цыганкова А. В. Исключение уравнения Якоби в многомерных вариационных задачах // Динамические системы, Том 3(31) № 3-4(2013), с. 233–248.

[13] Цыганкова А. В. Исключение уравнения Якоби в экстремальных вариационных задачах // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского, Серия "Физико-математические науки" , Том 25 (64) № 2 (2012), с. 161–175.

[14] Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. — Москва: Мир, 1973. — 472 с.

[15] Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ. – Москва: Наука, 1988. – 280 с.

[16] Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — Москва: Наука, 1980. — 320 с.

[17] Демьянов В. Ф., Рощина В. А. Обобщенные субдифференциалы и экзостеры // Владикавказский математический журнал. –2006. – *8*, № 4. – С. 19-31.

[18] Левин В. Л. О субдифференциалах выпуклых функционалов// Успехи математических наук — 1970. — *25*, № 4(154) . — С. 183–184.

[19] Orlov I. V., Stonyakin F. S. Compact subdifferentials: the formula of finite increments and related topics // English translation in: Journal of Mathematical Sciences. — 2010. — Vol. 170:2. — P. 251–269.

[20] Стонякин Ф. С. Сравнительный анализ понятия компактного субдифференциала // Вiсник Харкiвського нацiонального унiверситету iменi В.Н.Каразiна. Серiя "Математика, прикладна математика i механiка". — 2009. — №850. — С. 11–21.

[21] Orlov I. V., Stonyakin F. S. Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral // Methods of Functional Analysis and Topology. — 2009. — Vol. 15 (1). – P. 74–90.

[22] Халилова З. И. Компактные субдифференциалы высших порядков и их применения к вариационным задачам // Динамические системы. —2013. — Том 3(31), №1-2. — С. 115–133

[23] Халилова З. И. К-сублинейные многозначные операторы и их свойства // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки"(2011, 24(63)), С.110–122.

[24] Халилова З. И. Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия "Физико-математические науки"2012, 25(64), С.140–160.

[25] Orlov I. V., Stonyakin F. S. The limiting form of the Radon-Nikodym property is true for all Fréchet spaces // English translation in: Journal of Mathematical Sciences. — 2012. — Vol. 180:6. — P. 731–747.

[26] Стонякин Ф. С. К-свойство Радона-Никодима для пространств Фреше // Учёные записки ТНУ им. В. И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика». — 2009. — Т.22(61), №1. — С. 102–113.

[27] Орлов И. В., Халилова З. И. Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2013. —Т. 48. — С. 100-136.

[28] Orlov I. V., Khalilova Z. I. Compact subdifferentials in Banach cones // English translation in: Journal of Mathematical Sciences. — 2014. — Vol. 198:4. — P. 438–456.

[29] Халилова З. И. Теория К-субдифференциалов второго порядка и её применение к вариационным задачам // КММК – 2013. Сборник тезисов, Симферополь, 2013, 121-124 с.

[30] Орлов И. В., Божонок Е. В. Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1 – учебное пособие, Симферополь: ДИАЙПИ, 2010, 156 с.

Виключення рівняння Якобі в варіаційних задачах з негладким інтегрантом

Метод виключення рівняння і умови Якобі, який розроблено нещодавно в одновимірному та багатовимірному випадках для гладкого інтегранта, перенесений на випадок субгладкого інтегранта в одновимірних варіаційних задачах. У цьому випадку варіаційний функціонал не є двічі диференційованим по Фреше, що призводить нас до техніки негладкого аналізу та компактних субдіфференціалів.

Ключові слова: варіаційний функціонал, субгладкий інтегрант, рівняння Якобі, "нижня" посилена умова Лежандра, локальний екстремум.

Elimination of Jacobi equation in variational problems with non-smooth integrand

The classical approach to the solution of extreme variational problems, as is known, requires as sufficient condition of an extremum, checking the

strengthened Legendre condition and Jacobi condition for Jacobi equation. The second step in the non-quadratic situation is complicated enough and therefore the possibility to avoid checking the Jacobi condition has long attracted the attention of mathematicians.

The method of elimination of the Jacobi equation and Jacobi condition, which was recently developed in the case of smooth integrand, is extended to the case of sub-smooth integrand in one-dimensional variational problems. In this case, variational functional is not twice Frechet differentiable, which leads us to the techniques of nonsmooth analysis and compact subdifferentials. It is shown that the minima problem for the classical Euler-Lagrange variational functional

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y(b) = 0),$$

can be solved under the conditions of Euler-Lagrange equation

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,0,0) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,0,0)\right) = 0 \quad (a \le x \le b),$$

"upper" strengthened Legendre condition

$$r(x) := \underline{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)}(x,0,0) > 0, \quad (a \le x \le b), \quad r := \min_{a \le x \le b} r(x) > 0,$$

and the following additional conditions.

1) *If* $r > 0$, $q_i \ge 0$ $(i = \overline{1,4})$, *without any restriction on the length of* $[a;b]$.
2) *If* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_i \ge 0$ $(i \ne i_1)$, *under the constraint on the length of* $[a;b]$*:*

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{|q_{i_1}|}}.$$

3) *If* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_{i_2} < 0$, $q_i \ge 0$ $(i \ne i_1, i_2)$, *under the constraint on the length of* $[a;b]$*:*

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_{i_1}|, |q_{i_2}|)}}.$$

4) *If* $r > 0$, $q_{i_1} < 0$, $q_{i_2} < 0$, $q_{i_3} < 0$, $q_i \ge 0$ $(i \ne i_1, i_2, i_3)$, *under the constraint on the length of* $[a;b]$*:*

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_{i_1}|, |q_{i_2}|, |q_{i_3}|)}}.$$

5) *If* $r > 0$, $q_i < 0$ $(i = \overline{1,4})$, *under the constraint on the length of* $[a;b]$*:*

$$b - a < \pi\sqrt{\frac{r}{\max(|q_1|, |q_2|, |q_3|, |q_4|)}}.$$

Here

$$q_1(x) := \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right),$$

$$q_2(x) := \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right),$$

$$q_3(x) := \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right),$$

$$q_4(x) := \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,0,0) - \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,0,0) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,0,0)\right),$$

$$q_i := \inf_{a \le x \le b}(\inf q_i(x)) \qquad (i = \overline{1,4}).$$

Keywords: variational functional, sub-smooth integrand, Jacobi equation, "upper" strengthened Legendre condition, local extremum.