Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 113–123.

УДК 517.928:539.3

А. М. Погребицкая, С. И. Смирнова

ОБ ОЦЕНКЕ ТОЧНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКОГО ГИБРИДНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА

В работе приведена аналитическая оценка части двойного гибридного ВКБ-Галеркин решения нелинейного дифференциального уравнения второго порядка, которое описывает математическую модель процесса теплопереноса.

Ключевые слова: нелинейное уравнение второго порядка, гибридное ВКБ-Галеркин решение, асимптотичность приближенного решения.

Введение

Развитие науки и техники приводит к необходимости постановки и решения новых задач математической физики, что включает разработку и исследование новых математических моделей механических систем ([1],[2]). К таким задачам относятся, например, задача исследования распространения тепла телом конической формы, задача теплоизлучения кольцевых ребер различных сечений (см. [3]) и ряд других задач. Процесс излучения тепла кольцевым ребром является перспективной задачей, так как ребро в сечении может иметь различные формы, а именно, трапецию, прямоугольник и треугольник, и данные ребра используются в аэрокосмической технике. В общем виде процесс теплоизлучения в ребре описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\varepsilon^2 U''(r) + a(r,\varepsilon)U'(r) - \beta b(r,\varepsilon)U^4(r) = 0, \tag{1}$$

$$U(d) = 1, \qquad U'(f) = 0, \tag{2}$$

где ε, β — малые параметры, $a(r,\varepsilon)$, $b(r,\varepsilon)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции, причем $a(r,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, $b(r,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$.

Для получения замкнутого аналитического решения уравнения (1) используется метод двойного гибридного асимптотического разложения (см. [4]). Впервые гибридный ВКБ-Галеркин метод был предложен Грищаком В.З. (см. [5]). На первом этапе применения данного подхода, представляя функцию $U(r)$ в виде ряда по степеням параметра β:

$$U(r,\beta) = U_0(r) + \beta U_1(r) + \beta^2 U_2(r) + \ldots, \tag{3}$$

получаем следующую систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\varepsilon^2 U_0'' + a(r)U_0' = 0, \tag{4}$$

$$\varepsilon^2 U_1'' + a(r)U_1' = b(r)U_0^4. \tag{5}$$

1. Построение аналитического решения линейного дифференциального уравнения с переменными коэффициентами

В работе [7] было рассмотрено дифференциальное уравнение (4) и доказана теорема об ε–асимптотичности гибридного ВКБ–Галеркин решения этого уравнения. В частности, получена следующая оценка:

$$|U_0 - U_{0_H}| \leqslant \varepsilon \cdot M. \tag{6}$$

Рассмотрим дифференциальное неоднородное уравнение второго порядка (5). Построим гибридное ВКБ-Галеркин решение этого уравнения для случая, когда функция $a(r)$ дифференцируема на отрезке $[d,f]$ и не обращается в нуль на этом отрезке. Пусть на концах отрезка выполняются условия

$$U_1(d) = 0, \qquad U_1'(f) = 0. \tag{7}$$

Для получения решения неоднородного уравнения (5) использовался метод вариации произвольных постоянных (см. [6]), т.е. решение $U_1(r)$ уравнения (5) искали в виде:

$$U_{1_H}(r) = k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} + k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}, \tag{8}$$

где неизвестные функции $k_1(r)$ и $k_2(r)$ находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} k_1'(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} + k_2'(r)\frac{G_2(r)}{e(r)} = 0, \\ k_1'(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(\delta_{0_1} g^{\frac{1}{2}}(r) - \frac{a(r)}{2\varepsilon^2}\right) + k_2'(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(\delta_{0_2} g^{\frac{1}{2}}(r) - \frac{a(r)}{2\varepsilon^2}\right) = b(r)U_{0_H}^4(r)/\varepsilon^2. \end{cases} \tag{9}$$

Решение системы (9) имеет вид:

$$k_1(r) = -\frac{1}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})}\left(\int\limits_d^r \frac{e(x)b(x)U_{0_H}^4(x)}{g^{\frac{1}{2}}(x)G_1(x)}\,dx + t_1\right),$$

$$k_2(r) = \frac{1}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})} \left(\int\limits_d^r \frac{e(x)b(x)U_{0_H}^4(x)}{g^{\frac{1}{2}}(x)G_2(x)}\, dx + t_2 \right).$$

Тогда решение уравнения (5) принимает вид:

$$U_{1_H}(r) = -\frac{G_1(r)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})e(r)} \left(\int\limits_d^r \frac{e(x)b(x)U_{0_H}^4(x)}{g^{\frac{1}{2}}(x)G_1(x)}\, dx + t_1 \right) + \\ + \frac{G_2(r)}{\varepsilon^2(\delta_{0_2} - \delta_{0_1})e(r)} \left(\int\limits_d^r \frac{e(x)b(x)U_{0_H}^4(x)}{g^{\frac{1}{2}}(x)G_2(x)}\, dx + t_2 \right). \quad (10)$$

Таким образом, с применением гибридного ВКБ-Галеркин подходом было получено аналитическое решение линейного дифференциального неоднородного уравнения с переменными коэффициентами, содержащими параметр при старшей производной.

2. Асимптотический характер гибридного ВКБ-Галеркин решения

Используя определение ε^r–асимптотического решения (см. [8], с. 291), докажем асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения уравнения (5) отрезке $[d, f]$ с краевыми условиями

$$U_1(d) = U_d, \quad U_1'(f) = U_f. \quad (11)$$

Теорема. *Если существует единственное решение* $U_1(x,\varepsilon)$ *краевой задачи* (5),(11)*, а функция* $a(r) = a(r,\varepsilon)$ *дифференцируема по* r *на отрезке* $[d, f]$*, не обращается в нуль на этом отрезке и удовлетворяет условиям* $a(r,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$, $\alpha \leqslant \sqrt{g(r)} \leqslant \beta$ *на* $[d, f]$*, а* $b(r) = b(r,\varepsilon)$ *дифференцируема по* r *на отрезке* $[d, f]$ *и* $b(r,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$*, тогда для любого* $r \in [d, f]$ *функция* (10) *является* ε–*асимптотическим решением уравнения* (5).

Доказательство. Найдем первую и вторую производные гибридного ВКБ-Галеркин решения (8) с учетом (9):

$$U_{1_H}' = k_1'(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} + k_2'(r)\frac{G_2(r)}{e(r)} + k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}\left(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\right)\right) + \\ + k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}\left(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\right)\right) = \left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}G\right) \cdot \\ \cdot \left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} + k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right) + \sqrt{g(r)}\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} - k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right) = \\ = \left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}G\right)U_{1_H} + \sqrt{g(r)}\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)} - k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right); \quad (12)$$

$$U''_{1_H}=k'_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(r)}\left(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)+$$
$$+k'_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(r)}\left(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)+$$
$$+k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(r)}\left(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)^2+$$
$$+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}+\sqrt{g(r)}\left(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)^2+$$
$$+k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2}+\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}\left(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)+$$
$$+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2}+\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}\left(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)\right)=\frac{b(r)U^4_{0_H}}{\varepsilon^2}+$$
$$+k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^4}-\frac{a(r)}{\varepsilon^2}\sqrt{g(r)}\left(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)+g(r)\left(G+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)^2\right)+$$
$$+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^4}-\frac{a(r)}{\varepsilon^2}\sqrt{g(r)}\left(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)+g(r)\left(G-\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\right)^2\right)+$$
$$+\left(-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)+$$
$$+\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)=$$
$$=\frac{b(r)U^4_{0_H}}{\varepsilon^2}+\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^4}-\frac{a(r)\sqrt{g(r)}G}{\varepsilon^2}+2g(r)G^2+\frac{g(r)}{\varepsilon^2}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)+$$
$$+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(-\frac{a(r)}{\varepsilon^2}\sqrt{g(r)}+2g(r)G\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)+$$
$$+\left(-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}+k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)+$$
$$+\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)=\frac{b(r)U^4_{0_H}}{\varepsilon^2}+$$
$$+\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^4}-\frac{a(r)\sqrt{g(r)}G}{\varepsilon^2}+2g(r)G^2+\frac{g(r)}{\varepsilon^2}-\frac{a'(r)}{2\varepsilon^2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\right)U_{1_H}+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\cdot$$
$$\cdot\left(-\frac{a(r)}{\varepsilon^2}\sqrt{g(r)}+2g(r)G+\frac{g'(r)}{2\sqrt{g(r)}}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right). \quad (13)$$

Подставив (12) и (13) в исходное уравнение (5), получим

$$\varepsilon^2U''_{1_H}+a(r)U'_{1_H}-b(r)U^4_{0_H}=b(r)U^4_{0_H}+$$

$$+\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2}-a(r)\sqrt{g(r)}G+2g(r)G^2\varepsilon^2+g(r)-\frac{a'(r)}{2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\varepsilon^2\right)U_{1_H}+$$

$$+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(-a(r)\sqrt{g(r)}+2g(r)G\varepsilon^2+\frac{g'(r)\varepsilon^2}{2\sqrt{g(r)}}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)+$$

$$+\left(-\frac{a^2(r)}{2\varepsilon^2}+a(r)\sqrt{g(r)}G\right)U_{1_H}+a(r)\sqrt{g(r)}\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)-$$

$$-b(r)U_{0_H}^4=\left(\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2}-a(r)\sqrt{g(r)}G+2g(r)G^2\varepsilon^2+g(r)-\frac{a'(r)}{2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\varepsilon^2-\frac{a^2(r)}{2\varepsilon^2}+\right.$$

$$\left.+a(r)\sqrt{g(r)}G\right)U_{1_H}+\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\left(2g(r)G\varepsilon^2+\frac{g'(r)\varepsilon^2}{2\sqrt{g(r)}}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)=$$

$$=\left(-\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2}+2g(r)G^2\varepsilon^2+g(r)-\frac{a'(r)}{2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\varepsilon^2\right)U_{1_H}+$$

$$+\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(r)}\left(2\sqrt{g(r)}G+\frac{g'(r)}{2g(r)}\right)\left(k_1(r)\frac{G_1(r)}{e(r)}-k_2(r)\frac{G_2(r)}{e(r)}\right)=$$

$$=\left(-\frac{a^2(r)}{4\varepsilon^2}+2g(r)G^2\varepsilon^2+g(r)-\frac{a'(r)}{2}+\frac{g'(r)G}{2\sqrt{g(r)}}\varepsilon^2\right)U_{1_H}+$$

$$+\varepsilon^2\left(2\sqrt{g(r)}G+\frac{g'(r)}{2g(r)}\right)\left(U'_{1_H}+\left(\frac{a(r)}{2\varepsilon^2}-\sqrt{g(r)}G\right)U_{1_H}\right)=$$

$$=\left(2\sqrt{g(r)}G+\frac{g'(r)}{2g(r)}\right)\left(\varepsilon^2U'_{1_H}+\frac{a(r)}{2}U_{1_H}\right).\quad(14)$$

Таким образом, U_{1_H} является общим решением уравнения

$$\varepsilon^2U''_{1_H}+\left(a(r)-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\right)U'_{1_H}-$$
$$-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_{1_H}=b(r)U_{0_H}^4.\quad(15)$$

Используя способ, основанный в [8], как и при доказательстве асимптотичности гибридного решения U_{0_H} (см. [7]), обозначим

$$D_1=U_1-U_{1_H}\quad(16)$$

и запишем уравнение (5) в виде

$$\varepsilon^2U''_1+\left(a(r)-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)\right)U'_1-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_1=$$
$$=-\varepsilon^2\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U'_1-\frac{a(r)}{2}\left(\frac{g'(r)}{2g(r)}+2\sqrt{g(r)}G\right)U_1+b(r)U_{0_H}^4.\quad(17)$$

Обозначим
$$F = -\left(\frac{g'(r)}{2g(r)} + 2\sqrt{g(r)}G\right). \tag{18}$$

Находя разность уравнений (17) и (15), используя (16), получим уравнение, которому удовлетворяет функция D_1:
$$\varepsilon^2 D_1'' + (a(r) + \varepsilon^2 F)D_1' + \frac{a(r)}{2}FD_1 = \left(\varepsilon^2 U_1' + \frac{a(r)}{2}U_1\right)F + b(r)(U_0^4 - U_{0_H}^4). \tag{19}$$

На концах отрезка $[d, f]$ функция D_1 удовлетворяет краевым условиям
$$D_1(d) = 0, \qquad D_1'(f) = 0. \tag{20}$$

Уравнение (19) можно рассматривать как неоднородное уравнение относительно D_1. Тогда интегральное представление решения линейной неоднородной задачи (19)–(20) имеет единственное решение (см. [9]):
$$D_1 = \int\limits_d^f Gr(r,s)\left(\left(\varepsilon^2 U_1' + \frac{a(s)}{2}U_1\right)F + b(s)(U_0^4 - U_{0_H}^4)\right)ds, \tag{21}$$
где $Gr(r,s)$ — функция Грина задачи (19)–(20).

Функция $Gr(r,s)$ определена при $r \in [d,f]$, $s \in (d,f)$ и при каждом $s \in (d,f)$ обладает следующими свойствами:

1) при $r \neq s$ функция $Gr(r,s)$ удовлетворяет соответствующему линейному однородному уравнению
$$\varepsilon^2 D_1'' + (a(r) + \varepsilon^2 F)D_1' + \frac{a(r)}{2}FD_1 = 0; \tag{22}$$

2) при $r = d$ и $r = f$ функция $Gr(r,s)$ удовлетворяет краевым условиям (20);

3) при $r = s$ функция $Gr(r,s)$ непрерывна по r, а ее производная по r имеет разрыв первого рода со скачком, равным $1/\varepsilon^2$, т.е.
$$Gr(s+0,s) = Gr(s-0,s), \qquad Gr_r'(s+0,s) - Gr_r'(s-0,s) = 1/\varepsilon^2.$$

Для нахождения функции Грина задачи (19)–(20), нужно построить решение $D_{1_1}(r) \neq 0$ уравнения (22), удовлетворяющее условию $D_{1_1}(d) = 0$, и решение $D_{1_2}(r) \neq 0$, удовлетворяющее условию $D_{1_2}'(f) = 0$.

Обозначим два линейно независимых решения уравнения (15) $U_{1_{H_1}}$ и $U_{1_{H_2}}$:
$$U_{1_{H_1}} = \frac{G_1(r)}{e(r)} = \frac{1}{e(r)}\exp\left((G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2})\int\limits_d^r \sqrt{g(x)}\,dx\right), \tag{23}$$
$$U_{1_{H_2}} = \frac{G_2(r)}{e(r)} = \frac{1}{e(r)}\exp\left((G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2})\int\limits_d^r \sqrt{g(x)}\,dx\right). \tag{24}$$

Тогда функции D_{1_1} и D_{1_2} могут быть определены как

$$D_{1_1} = U_{1_{H_1}} - U_{1_{H_2}}, \tag{25}$$

$$D_{1_2} = U_{1_{H_1}} - \\ - \exp\left(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx\right)\frac{\sqrt{g(f)}(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}U_{1_{H_2}}. \tag{26}$$

Функцию $Gr(r, s)$ будем искать в виде

$$Gr(r, s) = \begin{cases} \varphi(s)D_{1_1}(r), & d \leqslant r \leqslant s, \\ \psi(s)D_{1_2}(r), & s \leqslant r \leqslant f. \end{cases} \tag{27}$$

Функции $\varphi(s)$ и $\psi(s)$ выбираются так, чтобы выполнялись условия, накладываемые на функцию Грина, т.е., чтобы

$$\begin{cases} \psi(s)D_{1_2}(r) = \varphi(s)D_{1_1}(r), \\ \psi(s)D'_{1_2}(r) - \varphi(s)D'_{1_1}(r) = 1/\varepsilon^2. \end{cases} \tag{28}$$

Отсюда

$$\varphi(s) = \frac{D_{1_2}(s)}{\varepsilon^2(D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s))}, \tag{29}$$

$$\psi(s) = \frac{D_{1_1}(s)}{\varepsilon^2(D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s))}. \tag{30}$$

Обозначив

$$P^* = D_{1_1}(s)D'_{1_2}(s) - D'_{1_1}(s)D_{1_2}(s),$$

$$e^* = \exp(2\sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}\int\limits_d^f \sqrt{g(x)}\,dx)\frac{\sqrt{g(f)}(G + \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2}{\sqrt{g(f)}(G - \sqrt{1/\varepsilon^2 + G^2}) - a(f)/2\varepsilon^2} \neq 1,$$

и учитывая (25)–(26), получим

$$P^* = (U_{1_{H_1}} - U_{1_{H_2}})(U'_{1_{H_1}} - e^*U'_{1_{H_2}}) - (U'_{1_{H_1}} - U'_{1_{H_2}})(U_{1_{H_1}} - e^*U_{1_{H_2}}) = \\ = (U_{1_{H_1}}U'_{1_{H_2}} - U'_{1_{H_1}}U_{1_{H_2}})(1 - e^*).$$

Учитывая (23)–(24), и то, что

$$U'_{1_{H_1}} = U_{1_{H_1}}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}\left(G + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\right)\right),$$

$$U'_{1_{H_2}} = U_{1_{H_2}}\left(-\frac{a(r)}{2\varepsilon^2} + \sqrt{g(r)}\left(G - \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\right)\right),$$

имеем

$$P^* = -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + G^2}\sqrt{g(s)}U_{1_{H_1}}U_{1_{H_2}}(1 - e^*) =$$

$$= -2\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\frac{1}{e^2(s)}\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right). \tag{31}$$

Тогда функция Грина примет вид

$$Gr(r,s) = \begin{cases} \dfrac{D_{1_1}(r)D_{1_2}(s)}{\varepsilon^2 P^*}, & d \leqslant r \leqslant s, \\ \dfrac{D_{1_1}(s)D_{1_2}(r)}{\varepsilon^2 P^*}, & s \leqslant r \leqslant f. \end{cases} \tag{32}$$

Запишем решение задачи (19)–(20) с помощью функции Грина

$$D_1 = \int\limits_d^f Gr(r,s)\left(\left(\varepsilon^2 U_1' + \frac{a(s)}{2}U_1\right)F + b(s)(U_0^4 - U_{0_H}^4)\right)ds =$$

$$= -(U_{1_{H_1}}(r) - U_{1_{H_2}}(r))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_d^r \frac{(U_{1_{H_1}}(s) - e^*U_{1_{H_2}}(s))e^2(s)\left(\left(\varepsilon^2 U_1' + \frac{a(s)}{2}U_1\right)F + b(s)(U_0^4 - U_{0_H}^4)\right)ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)} -$$

$$-(U_{1_{H_1}}(r) - e^*U_{1_{H_2}}(r))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_r^f \frac{(U_{1_{H_1}}(s) - U_{1_{H_2}}(s))e^2(s)\left(\left(\varepsilon^2 U_1' + \frac{a(s)}{2}U_1\right)F + b(s)(U_0^4 - U_{0_H}^4)\right)ds}{2\varepsilon^2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}\sqrt{g(s)}(1-e^*)\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}. \tag{33}$$

Сделаем некоторые оценки

$$|G_1| \leqslant \max\{G_1, G_2\} = L, \quad |G_2| \leqslant \max\{G_1, G_2\} = L, \tag{34}$$

$$\left|\frac{F}{\sqrt{g(r)}}\right| = \left|2G + \frac{g'(r)}{2g(r)\sqrt{g(r)}}\right| \leqslant 2|G| + \frac{|g'(r)|}{2\min|g^{3/2}(r)|} = K, \tag{35}$$

$$\left|\frac{b(r,\varepsilon)}{\varepsilon^2}\right| \leqslant B, \tag{36}$$

$$\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right) \geqslant \exp(2G\alpha(s-d)) \geqslant N, \tag{37}$$

где

$$N = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ \exp(2G\alpha(f-d)), & \alpha < 0. \end{cases} \tag{38}$$

Учитывая (34)–(38), можно записать

$$|D_1| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}|1-e^*|}\Big|(U_{1_{H_1}}(r) - U_{1_{H_2}}(r))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_d^r \frac{(U_{1_{H_1}}(s)-e^*U_{1_{H_2}}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}}e^2(s)\left(\left(U_1'+\frac{a(s)}{2\varepsilon^2}U_1\right)+\frac{b(s)}{\varepsilon^2F(s)}(U_0^4-U_{0_H}^4)\right)\,ds+$$

$$+(U_{1_{H_1}}(r)-e^*U_{1_{H_2}}(r))\cdot$$

$$\cdot\int\limits_r^f \frac{(U_{1_{H_1}}(s)-U_{1_{H_2}}(s))}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}}e^2(s)\left(\left(U_1'+\frac{a(s)}{2\varepsilon^2}U_1\right)+\frac{b(s)}{\varepsilon^2F(s)}(U_0^4-U_{0_H}^4)\right)\,ds\mid\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(|G_1|+|G_2|)(|G_1|+e^*|G_2|)}{2\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}|1-e^*|e^2(r)}\left|\int\limits_d^f\frac{F(s)}{\sqrt{g(s)}}\frac{e(s)\left((e(s)U_1)'+\frac{e(s)b(s)}{\varepsilon^2F(s)}(U_0^4-U_{0_H}^4)\right)\,ds}{\exp\left(2G\int\limits_d^s\sqrt{g(t)}\,dt\right)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{L^2K}{N\sqrt{1/\varepsilon^2+G^2}}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|\left(\frac{1}{e(r)}\left|\int\limits_d^f(e(s)U_1)'\,ds\right|+\frac{B}{e^2(r)}\left|\int\limits_d^f\frac{e^2(s)}{F(s)}(U_0^4-U_{0_H}^4)\,ds\right|\right).$$

Обозначив

$$C=\frac{L^2K}{N}\left|\frac{1+e^*}{1-e^*}\right|,$$

а также учитывая оценку (6), получим

$$|D_1|\leqslant\frac{C\varepsilon}{e(r)\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(\frac{|e(f)U_1(f)-e(d)U_1(d)|}{e(r)}+\right.$$

$$\left.+\frac{BM\varepsilon}{e^2(r)}\left|\int\limits_d^f\frac{e^2(s)}{F(s)}(U_0^3+U_0^2U_{0_H}+U_0U_{0_H}^2+U_{0_H}^3)\,ds\right|\right),$$

или, с учетом оценки

$$\frac{1}{e^2(r)}\left|\int\limits_d^f\frac{e^2(s)}{F(s)}(U_0^3+U_0^2U_{0_H}+U_0U_{0_H}^2+U_{0_H}^3)\,ds\right|\leqslant T,$$

$$|D_1|\leqslant\frac{C\varepsilon}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(|U_1(f)-U_1(d)/e(f)|+\varepsilon BMT\right).$$

Функция

$$\mu(r)=\frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(|U_1(f)-U_1(d)/e(f)|+\varepsilon BMT\right)$$

ограничена при $\varepsilon\to 0$.

Таким образом, обозначив

$$Q=\frac{C}{\sqrt{1+\varepsilon^2G^2}}\left(|U_1(f)-U_1(d)/e(f)|+\varepsilon BMT\right),$$

имеем оценку

$$|U_1-U_{1_H}|\leqslant\varepsilon\cdot Q,$$

что и доказывает ε–асимптотичность гибридного ВКБ-Галеркин решения (5)– (11) уравнения (5).

Теорема доказана. $\square$

Выводы

Таким образом, показано, что часть гибридного ВКБ-Галеркин решения, возникающая при решении дифференциального уравнения (5), носит асимптотический характер. Это свидетельствует о высокой точности приближения его к точному решению уравнения (5). Это дает возможность оценить в целом точность приближенного гибридного асимптотического решения задачи (1), полученного в работе [4].

Список литературы

[1] Couto P. *Parametric analysis of heat transfer on mustistage cryogenic radiator* /P. Couto, M. Mantelli // Journal of Thermophysics and Heat Transfer. – 2002. – Vol.16. – No. 3. – P. 313–316.

[2] Schnurr N.M. *Radiation from an array of gray circular fins of trapezoidal profile* /N.M. Schnurr, C.A. Cothran // AIA Journal. – 1974. – Vol.12. – No.11. – P. 1476–1480.

[3] Келлер Х. *Лучистый теплообмен кольцевых ребер трапецеидальной формы* /Х. Келлер // Труды Амер. об-ва инженеров-механиков, сер.С, Теплопередача. – 1970. – № 2. – С. 118–121.

[4] Gristchak V.Z. *On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems* /V.Z. Gristchak, A.M. Pogrebitskaya // Technische mechanik (to appear).

[5] Грищак В.З. *Гібридні асимптотичні методи та техніка їх застосування.* /Грищак В.З. – Запоріжжя: Запорізький національний університет, 2009. – 226 с.

[6] Грищак В.З. *Подвійний асимптотичний розклад у проблемі променевого теплообміну кільцевих ребер трапецеідальної форми* /В.З. Грищак, Г.М. Погребицька // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2009. – № 52. – Вип.3. – С. 217–223.

[7] Погребицкая А.М. *К вопросу о точности приближенного аналитического решения нелинейной задачи теплоизлучения* /А.М. Погребицкая, С.И. Смирнова // Ученые записки Таврического национального университета им. В.И. Вернадского. Серия “Математика. Механика. Информатика и кибернетика”. – 2009. – Т.22(61). – № 1. – С. 93–102.

[8] Моисеев Н.Н. *Асимптотические методы нелинейной механики.* /Н.Н. Моисеев – Москва: Наука, 1982. – 400 с.

[9] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк М.О. *Диференціальні рівняння в задачах: Навчальний посібник.* /А.М. Самойленко, С.А. Кривошея, М.О. Перестюк – К.: Либідь, 2003. – 504 с.

Про оцінку точності аналітичного гібридного розв'язку задачі теплоперенесення

В роботі наведено аналітичну оцінку частини подвійного ВКБ-Гальоркін розв'язку нелінійного диференціального рівняння другого порядку, що описує математичну модель процесу теплоперенесення.

Ключові слова: нелінійне рівняння другого порядку, гібридний ВКБ-Гальоркін розв'язок, асимптотичність наближеного розв'язку.

On estimate of exactness of analytical hybrid solution for the heat transfer problem

In the paper, the analytical estimate of the part of an double hybrid WKB-Galerkin solution for the nonlinear second order differential equation, that describes the mathematical model of the heat transfer process, is presented.

Keywords: second order nonlinear equation, hybrid WKB-Galerkin solution, approximate solution's asymptotic property.