Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 110–122.

УДК 517.981 : 514.172

З. И. Халилова

K-СУБЛИНЕЙНЫЕ МНОГОЗНАЧНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ИХ СВОЙСТВА

В работе изучаются сублинейные многозначные операторы с компактными выпуклыми значениями. Показано, что в случае банаховых пространств такие операторы образуют упорядоченный банахов конус.

Ключевые слова: многозначный оператор, компакт, сублинейность, нормированный конус, квазиполнота.

Введение. Предварительные сведения

В современном выпуклом анализе и в задачах оптимального управления широко используются многозначные операторы (см., например,[1], [3], [9]), действующие из одного линейного пространства во множество подмножеств другого пространства: $A : X \to exp(Y)$.

Ещё одним важным объектом анализа являются сублинейные операторы (см., например, [2], [4], [6], [7],[8]), действующие из одного линейного пространства в некоторый частично упорядоченный конус элементов другого линейного пространства. Они обладают следующими свойствами:

(i) $A(x+y) \leq Ax + Ay$;
(ii) $A(\lambda x) \leq \lambda Ax$, при $\lambda \geq 0$.

В некоторых современных проблемах бесконечномерного анализа возникает необходимость объединить эти понятия. К этому приводит, например, задача обобщения понятия компактного субдифференциала (K-субдифференциала) на случай векторного аргумента.

K-субдифференциал, введенный в работе [5] для отображений вещественного аргумента, в фиксированной точке является компактным выпуклым множеством. При переходе к векторному аргументу естественным образом возникает оператор с компактными выпуклыми значениями, обладающий свойством сублинейности.

Таким образом, мы приходим к новой задаче выпуклого анализа: исследовать операторы описанного выше типа, которые далее в работе названы K-операторами. При этом возникают принципиально новые моменты: как система компактных выпуклых подмножеств исходного нормированного пространства, так и система K-операторов с конечной нормой образуют абстрактный нормированный конус, который не может быть вложен ни в одно линейное пространство. Заметим, что общая теория абстрактных локально выпуклых конусов возникла сравнительно недавно ([4], [8]), и такой её существенный раздел, как теория абстрактных нормированных конусов, почти не разработан. Это привело к постановке следующих основных вопросов.

1) Ввести общие понятия нормированного и банахового конусов.
2) Для заданного нормированного пространства F изучить нормированный частично упорядоченный конус F_K всех его компактных выпуклых подмножеств. Доказать полноту F_K в случае, когда пространство F банахово.
3) Для заданных нормированных пространств E и F ввести понятие K-сублинейного оператора $A : E \to F_K$. Ввести понятие нормы K-сублинейного оператора и исследовать вопрос о непрерывности ограниченных по норме K-операторов.
4) Исследовать нормированный конус $L_K(E;F)$ всех ограниченных K-операторов, действующих из E в F_K. Доказать квазиполноту конуса $L_K(E;F)$ в случае, когда F - банахово пространство.
5) Исследовать вопрос о композиции K-операторов.

Ответы на перечисленные вопросы составляют основное содержание работы.

1. Абстрактный нормированный конус.

Напомним вначале общее определение конуса.

Определение 1. *Конусом* X будем называть множество, снабженное сложением и скалярным умножением на положительные вещественные числа. Скалярное умножение ассоциативно и дистрибутивно, а сложение ассоциативно и коммутативно.

Замечание 1. Напомним, что по известному критерию (так называемый "закон сокращения"(cancellation law) [8]) векторный конус X может быть изоморфно вложен в некоторое линейное пространство Y тогда и только тогда, когда для любых элементов $x, y, z \in X$, для которых $x + z = y + z$, выполняется равенство $x = y$. Например, конус $exp(F)$ всех подмножеств векторного пространства $F \neq \{0\}$ не может быть изоморфно вложен ни в одно векторное пространство. Заметим также, что в конусе может быть определено умножение и на отрицательные, либо комплексные скаляры, но при этом, вообще говоря, $(-1) \cdot x$ не есть противоположный элемент к x.

Дадим теперь определение нормированного конуса.

Определение 2. Конус X назовём *нормированным*, если для каждого его элемента $x \in X$ определена неотрицательная $\|x\|$, обладающая следующими свойствами:
(i) $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$;
(iii) $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$, для любого $\lambda \geq 0$.

Замечание 2. Отметим, что норма позволяет создать на конусе X соответствующую *нормированную топологию* с помощью ε - окрестностей:

$$U_\varepsilon(x) = \{x + h|h \in X, \|h\| < \varepsilon\}, (\varepsilon > 0).$$

Эта топология соответствует общему определению локально выпуклой топологии в конусе (см. ,например, [10], [11]).

Таким образом, *сходимость* $x_k \to x$ в нормированном конусе $(X, \|\cdot\|)$ означает, что

$$x_k = x + h_k \ (k = 1, 2, ...), \ \|h_k\| \to 0.$$

Пример 1. Приведем простой пример. Пусть $\mathbb{R}^+$ - положительная полуось с топологией правостороней сходимости. Эта топология не согласована с линейной структурой $\mathbb{R}^+$, однако согласована со структурой конуса, так как здесь

$$U_\varepsilon(x) = [x; x + \varepsilon) = \{x + h|\, h \in \mathbb{R}^+, \|h\| < \varepsilon\}.$$

Далее, как отмечалось в [4], топология конуса не порождает равномерность (в отличие от топологии линейного пространства). Однако можно ввести *квазиравномерность*, не обладающую свойством симметрии, в которой "направленные"окружения диагонали $\Delta \subset X \times X$ имеют вид:

$$\vartheta_\varepsilon^+(\Delta) = \{\langle x; x + h\rangle | \|h\| < \varepsilon, x \in X\}.$$

Это позволяет ввести соответствующие понятия фундаментальности и полноты.

Определение 3. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ - нормированный конус, $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$. Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ называется *квазифундаментальной*, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists N(n > N, p \in \mathbb{N}_0) \Rightarrow (x_n = x_{n+p} + h_{np}, \|h_{np}\| < \varepsilon).$$

Иначе говоря, $x_n \in U_\varepsilon(x_{n+p})$ при всех $p = 0, 1, 2...$ для $n > N(\varepsilon)$. Нормированный конус X назовём *квазиполным*, если любая фундаментальная последовательность в X сходится. Наконец, квазиполный нормированный конус X назовём *банаховым конусом.*

2. Нормированный конус F_K и его свойства.

Определение 4. Пусть F - нормированное пространство, которое мы далее для определенности будем считать вещественным. Через F_K обозначим множество всех компактных выпуклых подмножеств F. Нетрудно проверить, что F_K образует конус, относительно поэлементного сложения и умножения на скаляры из заданного поля (не только положительные). При этом нулём в конусе является множество $\{0\}$.

Замечание 3. Конус F_K индуктивно упорядочен отношением вложения: $(C_1 \leq C_2) \iff C_1 \subset C_2$.

Действительно, для любых $C_1, C_2 \in F_K$ множество

$$C_3 = \overline{co}(C_1 \bigcup C_2),$$

компактно (см. [10]). При этом

$$C_1 \subset C_3, \ C_2 \subset C_3,$$

т.е. введенный частичный порядок является индуктивным.

Замечание 4. Конус F_K не содержится ни в каком линейном пространстве.

Доказательство. Действительно, согласно известному критерию [8], конус может быть вложен в некоторое векторное пространство тогда и только тогда, когда в конусе выполнен "закон сокращения". Однако в нашем случае "закон сокращения"не выполняется, так как, например, $C - C \neq \{0\}$, при $C \in F_K$ и $C \neq \{0\}$. $\square$

Введем норму в конусе F_K.

Определение 5. *Нормой* множества $C \in F_K$ назовём величину

$$\|C\| = \sup_{y \in C} \|y\|.$$

Теорема 1. $\|C\|-$ норма в конусе F_K. Точнее говоря:
(i) $\|C\| = 0$ тогда и только тогда, когда $C = 0$;
(ii) $\|C_1 + C_2\| \leq \|C_1\| + \|C_2\|$;
(iii) $\|\lambda C\| = |\lambda| \cdot \|C\|$, для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Доказательство.
(i) Пусть $C \in F_K$. Тогда $\|C| = 0 \iff \|y\| = 0 \ \forall y \in C \iff C = \{0\}$.
(ii) Пусть $C_1, C_2 \in F_K$. Тогда:

$$\|C_1 + C_2\| = \sup_{\substack{y_1 \in C_1 \\ y_2 \in C_2}} \|y_1 + y_2\| \leq \sup_{\substack{y_1 \in C_1 \\ y_2 \in C_2}} (\|y_1\| + \|y_2\|) \leq$$

$$\leq \sup_{y_1 \in C_1} \|y_1\| + \sup_{y_2 \in C_2} \|y_2\| = \|C_1\| + \|C_2\|.$$

(iii) Пусть $C \in F_K, \lambda \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\|\lambda C\| = \sup_{y\in C}\{\|\lambda y\| |\, y \in C\} = \sup_{y\in C}\{|\lambda| \cdot \|y\| |\, y \in C\} = |\lambda| \cdot \sup_{y\in C}\{\|y\| |\, y \in C\| = |\lambda| \cdot \|C\|.$$

□

Таким образом, F_K – нормированный конус. При этом норма согласована с отношением порядка: $(C_1 \subset C_2) \Rightarrow (\|C_1\| \leq \|C_2\|)$.

Замечание 5. Отметим, что норма в конусе F_K обладает тем же свойством оценки нормы снизу, что и обычная норма в линейном пространстве:

$$\|C_1 + C_2\| \geq |\|C_1\| + \|C_2\||. \qquad (1)$$

Доказательство. Действительно, поскольку $0 \in C_2 - C_2$, то $C_1 + C_2 - C_2 \supset C_1$, а значит,

$$\|C_1\| \leq \|(C_1 + C_2) - C_2\| \leq \|C_1 + C_2\| + \|C_2\|,$$

откуда

$$\|C_1 + C_2\| \geq \|C_1\| - \|C_2\|.$$

Меняя теперь местами C_1 и C_2 в предыдущей выкладке, мы приходим к неравенству (1). □

В соответствии с замечанием 2, опишем нормированную топологию в конусе F_K.

Определение 6. Пусть $F-$ нормированное пространство. В нормированном конусе F_K, введём следующие понятия:

a) *$\varepsilon-$ окрестность точки* $C \in F_K$:

$$O_\varepsilon(C) = \{C + H |\, H \in F_K,\, \|H\| < \varepsilon\};$$

b) *сходящаяся последовательность*: $C_n \longrightarrow C_0$, в F_K при $n \to \infty$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists N\ (n \geq N) \Longrightarrow C_n = C_0 + H_n,\ \|H_n\| < \varepsilon;$$

c) *квазифундаментальная последовательность* $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\forall\, \varepsilon > 0\, \exists N(n \geq N, p \geq 0) \Longrightarrow C_n = C_{n+p} + H_{np}, \|H_{np}\| < \varepsilon;$$

d) *квазиполнота:* конус F_K- *квазиполный*, если любая квазифундаментальная последовательность в нем сходится;

e) *ограниченность*: множество $\mathcal{C} = \{C\} \subset F_K$ *ограничено*, если

$$\sup_{C\in\mathcal{C}} \|C\| < \infty;$$

f) если нормированный конус F_K квазиполный, то назовём F_K *банаховым конусом.*

Покажем, что полнота F влечёт квазиполноту конуса F_K.

Лемма 1. Если последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ в нормированном конусе F_K квазифундаментальна, то она ограничена.

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon_0 > 0$ и найдем также N_0, что для всех $p \geq 0$:

$$C_N = C_{N_0+p} + H_{N_0p}, \text{ где } \|H_{N_0p}\| < \varepsilon_0.$$

Отсюда, в силу замечания 5, получаем:

$$\|C_{N_0+p}\| \leq \|C_{N_0}\| + \|H_{N_0p}\| < \|C_{N_0}\| + \varepsilon_0.$$

Следовательно, при любом $n \in \mathbb{N}$ имеем:

$$\|C_n\| \leq \max(\|C_1\|, ..., \|C_{N_0-1}\|, \|C_{N_0}\| + \varepsilon_0) < \infty,$$

т.е. последовательность $\{\|_n\|\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в F_K. □

Лемма 2. Если $C_2 \in O_{\varepsilon_1}(C_1), C_3 \in O_{\varepsilon_2}(C_2)$, то $C_3 \in O_{\varepsilon_1+\varepsilon_2}(C_1)$.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна в F_K. Если некоторая подпоследовательность $\{C_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в F_K к C_0, то и последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к C_0.

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем K такое, что $(k \geq K) \Rightarrow (C_{n_k} \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(C_0))$ и $(n \geq n_k, p > 0) \Rightarrow (C_n \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(C_{n+p}))$. Тогда при $k \geq K$ и $n_k \leq n \leq n_{k+1}$: получаем, в силу леммы 2:

$$(C_n \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(C_{n_{k+1}}),\, C_{n_{k+1}} \in O_{\frac{\varepsilon}{2}}(C_0)), \Longrightarrow (C_n \in O_{\varepsilon}(C_0)),$$

откуда по определению 6, $C_n \to C_0$ в F_K. □

Докажем теперь основной результат.

Теорема 3. Если F – банахово пространство,то F_K – банахов конус.

Доказательство. Покажем,что любая квазифундаментальная последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ в F_K содержит сходящуюся подпоследовательность. По условию фундаментальности, $C_n = C_{n+p} + H_{np}$, где $\|H_{np}\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по p. Выберем некоторую последовательность номеров $n_1 < n_2 < ... < n_k < n_{k+1} < ...$ так, чтобы

$$\|H^k := H_{n_k, n_{k+1}-n_k}\| \leq \varepsilon_k, \text{ где} \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \infty.$$

Покажем, что соответствующая подпоследовательность $\{C_{n_k} = C_{n_{k+1}} + H^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в F_K.

Положим, что

$$\widetilde{H}^k = \{\sum_{i=k}^{\infty} h_i |\, h_i \in H^i\},\ (k = 1, 2, ...).$$

Заметим сначала, что любой ряд $\sum\limits_{i=k}^{\infty} h_i$ абсолютно сходится, так как

$$\sum_{i=k}^{\infty} \|h_i\| \le \sum_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i < \infty.$$

Отсюда также следует, что

$$\|\widetilde{H}^k\| \le \sum_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty.$$

Покажем, что $\widetilde{H}^k \in F_K$. Сначала докажем вполне ограниченность $\widetilde{H}^k$. Так как

$$\left\{ \sum_{i=k}^{\infty} h_i \right\} = \left\{ \sum_{i=k}^{k+p-1} h_i + \sum_{i=k+p}^{\infty} h_i \right\},$$

то

$$\widetilde{H}^k = \sum_{i=k}^{k+p-1} H^i + \widetilde{H}^{k+p}.$$

Выберем $p > 0$ так, чтобы $\|\widetilde{H}^{k+p}\| < \frac{\varepsilon}{2}$, и затем выберем конечную $\frac{\varepsilon}{2}-$ сеть $\{O_{\frac{\varepsilon}{2}}(Z_j)\}_{j=1}^{J}$ для $\sum\limits_{i=k}^{k+p-1} H^i$. Следовательно, $\{O_{\varepsilon}(Z_j)\}_{j=1}^{J}-$ конечная $\varepsilon-$сеть для $\widetilde{H}^k$, $k \in \mathbb{N}$. Из определения множества $\widetilde{H}^k$ следует его выпуклость и замкнутость. Следовательно, $\widetilde{H}^k \in F_K$. Положим

$$C_0 := C_{n_1} + H^1 = C_{n_1} + (H^1 + \widetilde{H}^2) = C_{n_2} + \widetilde{H}^2 = ... = C_{n_k} + \widetilde{H}^k = ...$$

Из $\|\widetilde{H}^k\| \to 0$ следует $C_{n_k} \to C_0$ в F_K. Тогда, по теореме 2, также и $C_n \to C_0$, т.е. F_K- квазиполный конус. $\square$

3. K-сублинейные операторы (K-операторы). Связь ограниченности и непрерывности K-операторов.

Вначале дадим определение K-сублинейного оператора.

Определение 7. Пусть $E-$ линейное пространство, $F-$ нормированое пространство.

Отображение $A : E \longrightarrow F_K$ назовём *K-сублинейным оператором* (или *K-оператором*), если для любых $h_1, h_2, h \in E$ верно:

(i) $A(h_1 + h_2) \subset Ah_1 + Ah_2$;

(ii) $A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Заметим, что, ввиду упорядоченности конуса F_K отношением вложения, свойства оператора A можно записать в виде:

(i)$'$ $A(h_1 + h_2) \le Ah_1 + Ah_2$;

(ii)$'$ $A(\lambda h) = \lambda \cdot Ah$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим случай,когда E также нормированное пространство. Пусть A – K-оператор, действующий из E в F_K.

Определение 8. Будем говорить, что K-оператор A *ограничен (по норме)*, если

$$\sup_{\|h\|\leq 1} \|Ah\| < \infty \tag{2}$$

Если A ограничен, то величину (2) назовём *нормой* оператора A и обозначим обычным символом $\|A\|$.

Замечание 6. Нетрудно убедиться, что норма K-оператора обладает обычными свойствами нормы:

(a) $\|A\| \geq 0\,,\ (\|A\| = 0) \Longleftrightarrow A = 0;$
(b) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|;$
(c) $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Кроме того, введем операцию разности K-операторов: $A - B \,=\, A + (-1)\cdot B$. Заметим, что из определения 7 следует, что $(A - B)$ – также K-оператор. Из неравенства (1) немедленно следует соответствующее неравенство для норм K-операторов:

d) $\|A \pm B\| \geq |\|A\| - \|B\||$.

Покажем также, что для K-операторов сохраняется основное свойство нормы линейного оператора:

e) $\|Ah\| \geq |\|A\| \cdot \|h\||$.

Доказательство. Имеем согласно определению нормы K-оператора:

$$\|A\| = \sup_{\|h\|\leq 1} \|Ah\| \geq \sup_{\|h\|=1} \|Ah\| = \sup_{h\neq 0} \left\| A\left(\frac{h}{\|h\|}\right) \right\| = \sup_{h\neq 0} \frac{\|Ah\|}{\|h\|},$$

откуда

$$\left(\frac{\|Ah\|}{\|h\|} \leq \|A\|\right) \Longrightarrow (\|Ah\| \leq \|A\| \cdot \|h\|).$$

□

Изучим теперь связь непрерывности и ограниченности по норме K-оператора.

Вначале приведём определение полунепрерывности сверху для произвольного отображения $\Phi : E \to F_K$.

Определение 9. Назовём отображение Φ *полунепрерывным сверху* в точке $x \in E$, если

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0 : \ (\|h\| \leq\, \delta) \Longrightarrow (\Phi(x + h) \subset \Phi(x) + C_\varepsilon(h),\ \text{где}\ \|C_\varepsilon(h)\| \leq \varepsilon).$$

Теорема 4. K-оператор $A : E \to F_K$ ограничен по норме тогда и только тогда, когда A непрерывен в 0 или, что равносильно, тогда и только тогда, когда A равномерно полунепрерывен сверху всюду на E.

Доказательство.

1) Если A ограничен по норме, то из неравенства $\|Ah\| \leq \|A\| \cdot \|h\|$ немедленно следует непрерывность A в нуле, т.к. $(\|h\| \to 0) \Longrightarrow (\|Ah\| \to 0)$.

2) Пусть A непрерывен в нуле. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\|h\| \leq \delta) \Longrightarrow (\|Ah\| \leq \varepsilon). \tag{3}$$

При этом, ввиду субаддитивности A, для любого $x \in E$:

$$A(x+h) \subset Ax + C_\delta, \ \text{ где } \|C_\delta\| \leq \varepsilon,$$

т.е A равномерно полунепрерывен всюду на E.

3) Пусть A равномерно полунепрерывен всюду на E. В частности, это означает, что A непрерывен в нуле, т.е. выполнено условие (3). Отсюда

$$\|A\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \|Ah\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \left\| A\left(\frac{\delta h}{\|h\|} \cdot \frac{\|h\|}{\delta}\right) \right\| = \sup_{\|h\| \leq 1} \left(\frac{\|h\|}{\delta} \cdot A\left(\frac{\delta h}{\|h\|}\right)\right) \leq \frac{\varepsilon}{\delta} < \infty,$$

т.е. A ограничен по норме. □

4. Нормированный конус ограниченных K-операторов и его свойства

Обозначим множество всех ограниченных K-операторов $A : E \to F_K$ через $L_K(E;F)$.

Покажем, что $L_K(E;F)$ – нормированный конус.

Теорема 5. Для любых нормированных пространств E и F множество $L_K(E;F)$ образует нормированный конус. При этом конус $L_K(E;F)$ индуктивно упорядочен отношением

$$(A_1 \leq A_2) :\Longleftrightarrow (A_1 h \subset A_2 h),\ h \in E,$$

и норма в $L_K(E;F)$, согласована с отношением порядка:

$$(A_1 \leq A_2) \Longrightarrow (\|A_1\| \leq \|A_2\|).$$

(a) $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$, то есть $Ah = \{0\}$;
(b) $\|A_1 + A_2\| \leq \|A_1\| + \|A_2\|$;
(c) $\|\lambda A\| \leq \lambda \cdot \|A\|$, где $(\lambda \geq 0)$;
(d) $(A_1 \leq A_2)$, следовательно, $\|A_1\| \leq \|A_2\|$;
(e) $\|Ah\| \leq \|A\| \cdot \|h\|$.

Доказательство. Из свойств нормы K-оператора (см. замечание 6) вытекает, что $L_K(E;F)-$ нормированный конус; при этом, в силу свойства d), норма в $L_K(E;F)$ согласована с отношением индуктивного порядка в $L_K(E;F)$. □

Теорема 6. Если пространство $F-$ банахово, то $L_K(E;F)-$ банахов конус.

Доказательство. Пусть последовательность K-операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна в $L_K(E;F)$. Следовательно, согласно определению 6,

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ (n \geq N,\, p > 0) \Longrightarrow\ (A_n = A_{n+p} + B_{np},\ \ \text{где } \|B_{np}\| < \varepsilon). \tag{4}$$

1) Зафиксируем $h \in E$, $\|h\| \leq 1$ и покажем, что последовательность $\{A_n h\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна в F_K. Действительно, в силу (4),

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N\ (n \geq N,\, p > 0) \Longrightarrow\ (A_n h = A_{n+p} + B_{np} h), \tag{5}$$

причём из неравенства $\|B_{np}\| < \varepsilon$ следует $\|B_{np} h\| \leq \|B_{np}\| \cdot \|h\| < \varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{A_n h\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна при любом $h \in E$, $\|h\| \leq 1$. Но тогда для любого $h \in E$, $h \neq 0$, имеем

$$\{A_n h\}_{n=1}^{\infty} \;=\; \|h\| \cdot \left\{ A_n \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right\}_{n=1}^{\infty},$$

откуда вытекает квазифундаментальность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ при любом $h \in E$. В силу квазиполноты F_K, для всякого $h \in E$ в F_K существует предел

$$Ah := \lim_{n\to\infty} A_n h.$$

2) Проверим сублинейность оператора $A : E \longrightarrow F_K$:

a) $A(h_1 + h_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(h_1 + h_2) \subset \lim\limits_{n\to\infty} (A_n h_1 + A_n h_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n h_1 + \lim\limits_{n\to\infty} A_n h_2 = = Ah_1 + Ah_2$;

b) $A(\lambda h) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\lambda \cdot h) = \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda \cdot A_n h) = = \lambda \cdot \lim\limits_{n\to\infty} A_n h = \lambda \cdot Ah.$

Таким образом, $A-$ K-оператор.

3) Проверим ограниченность по норме оператора A. В силу лемму 1, последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена: $\|A_n\| \leq C$ $(n = 1, 2, ...)$. Отсюда следует,

$$\|A_n h\| \leq C \cdot \|h\|\ (\forall\, h \in E\ \forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\|Ah\| \leq C \cdot \|h\|,$$

откуда $\|A\| \leq C < \infty$. Таким образом, $A \in L_K(E;F)$.

4) Проверим, что $A_n \to A$ в $L_K(E;F)$. Из условия (5) получаем (при заданном $\varepsilon > 0$, $n \geq N(\varepsilon)$, $p > 0$):

$$B_{np} h = A_n h - A_{n+p} h.$$

Переходя к пределу при $p \to \infty$, отсюда получаем:

$$B_n h := \lim_{p\to\infty} B_{np} h = A_n h - Ah.$$

При этом из неравенства $\|B_{np}\| < \varepsilon$ в пределе следует $\|B_n\| \leq \varepsilon$, при $n \geq N(\varepsilon)$, откуда $B_n \to 0$ в $L_K(E;F)$. Следовательно, $A_n = A + B_n \longrightarrow A$ в $L_K(E;F)$ при $n \to \infty$.

Таким образом, нормированный конус $L_K(E;F)$ – квазиполный, т.е. $L_K(E;F)$ – банахов конус. □

5. Композиция K-операторов.

Введем понятие композиции K-сублинейных операторов. Пусть $A : E \to F_K$ и $B : F \to G_K$ – K-сублинейные ограниченные операторы.

Определение 10. *Композицией* $[B \cdot A]$ операторов A и B будем называть следующее многозначное отображение:

$$[B \cdot A]h = \overline{co}B(Ah) = \overline{co}(\bigcup_{y \in Ah} By).$$

Теорема 7. Если $A \in L_K(E,F)$, $B \in L_K(F,G)$, то $[B \cdot A] \in L_K(E,G)$.

Доказательство. Пусть $D = \bigcup\limits_{y \in Ah} By$. Для произвольной последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$, возможны два случая:

1) вся последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ или хотя бы некоторая её подпоследовательность содержится в одном By, при некотором $y \in Ah$. Так как множество By компактно, то из $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2) Никакая подпоследовательность из $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ не содержится в каком - либо одном By, где $y \in Ah$, то есть в каждом By может содержаться только конечное число z_n. Следовательно,существует некоторая последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Ah$, такая,что каждое By_k содержит некоторую точку z_{n_k}.

a) Так как $Ah-$ компакт, то из $\{y_k\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить некоторую сходящуюся подпоследовательность $y_{k_i} \to y_0 \in Ah$.

Поскольку $B-$ полунепрерывный сверху сублинейный оператор, то

$$By_{k_i} \subset By_0 + E_{k_i}, \quad \text{где } \|E_{k_i}\| = \sup_{z \in E_{k_i}} \|z\| \to 0.$$

b) Следовательно, для любого $i = 1, 2, ...$ найдётся такой элемент $\widetilde{z_i} \in By_0$, что

$$z_{n_{k_i}} = \widetilde{z_i} + e_i, \quad \text{где } e_i \in E_{k_i},\ \|e_i\| \to 0, \quad \text{при } i \to \infty.$$

Так как последовательность $\{\widetilde{z_i}\}_{i=1}^{\infty}$ содержится в компакте By_0, то из нее можно выделить некоторую сходящуюся подпоследовательность $\widetilde{z_{i_j}} \to z_0 \in By_0$. При этом:

$$\|\widetilde{z_{i_j}} - z_{n_{k_{i_j}}}\| = \|e_{i_j}\| \to 0 \ \text{ при } j \to \infty,$$

откуда следует,что $z_{n_{k_{i_j}}} \to z_0$, где $z_0 \in \overline{D}$. Следовательно, множество $\overline{D}$ компактно, откуда множество $\overline{co}(D) = \overline{co}(\overline{D})$ также компактно.

Проверим теперь сублинейность отображения $[B \cdot A] : E \longrightarrow G_K$:

$$[B \cdot A](\lambda h) = \overline{co}B(A(\lambda h)) = \overline{co}B(\lambda Ah) = \overline{co}(\lambda B(Ah)) = \lambda\overline{co}B(Ah) = \lambda[B \cdot A]h;$$

$$[B \cdot A](h_1 + h_2) = \overline{coB(A(h_1 + h_2))} \subset \overline{co}B(Ah_1 + Ah_2) \subset \overline{co}(B(Ah_1) + B(Ah_2)) \subset$$
$$\subset \overline{co}B(Ah_1) + \overline{co}B(Ah_2) = [B \cdot A]h_1 + [B \cdot A]h_2.$$

$\square$

Следствие 1. $\|[B \cdot A]\| \le \|B\| \cdot \|A\|$

Доказательство. Имеем:

$$\|[B \cdot A]\| = \sup_{\|h\| \le 1} \|\overline{co}B(Ah)\| = \sup_{\|h\| \le 1} \|B(Ah)\| \le \sup_{\|h\| \le 1} (\|B\| \cdot \|Ah\|) =$$
$$= \|B\| \cdot \sup_{\|h\| \le 1} \|Ah\| = \|B\| \cdot \|A\|.$$

$\square$

Автор выражает признательность И.В.Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Алексеев В. М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. *Оптимальное управление.* – Москва: Наука, 1979.

[2] Вулих Б.З. *Введение в функциональный анализ.* – Москва: Наука, 1967.

[3] Картан А. *Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы.* – Москва: Мир, 1971.

[4] Keimel K., Roth W. *Ordered Cones and Approximation, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1517* – Springer-Verlag, Heidelberg-Berlin-New York, 1992.

[5] Орлов И. В., Стонякин Ф. С. *Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты* // Современная математика.Фундаментальные направления. 2009. – Том 34. – С. 121–138.

[6] Люстерник Л. А., Соболев В.И. *Элементы функционального анализа* – Москва: Наука, 1965.

[7] Линке Ю.Э. *Универсальные пространства субдифференциалов сублинейных операторов со значениями в конусе ограниченных полунепрерывных снизу функций* // Математические заметки. 2011. – Том 89. Выпуск 4. – С. 547–557.

[8] Ranjbari A., Saiflu H. *Some results on the uniform boundedness theorem in locally convex cones* // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2009. – Vol. 15 , no. 4. – P. 361-368.

[9] Рокафеллар Р. *Выпуклый анализ* – Москва: Мир, 1973.

[10] Шефер Х. *Топологические векторные пространства* – Москва: Мир, 1971.

[11] Энгелькинг Р. *Общая топология* – Москва: Мир, 1986.

K - сублінійні багатозначні оператори та їх властивості

У роботі вивчаються сублінійні багатозначні оператори з компактними опуклими значеннями. Показано, що в разі банахових просторів такі оператори утворюють впорядкований банахов конус.

Ключові слова: багатозначний оператор, компакт, сублінійність, нормований конус, квазіповнота

K - sublinear multivalued operators and their properties

The sublinear multivalued operators with compact convex values are studied in the work . It's shown that in the case of Banach spaces such operators form a ordered Banach cone.

Keywords: multivalued operator, compact set, sublinearity, normed cone, quasicompleteness.