Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 100–111.

УДК 517.98

Ф. С. Стонякин

# СЕКВЕНЦИАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ ТЕОРЕМЫ УЛА О ВЫПУКЛОСТИ И КОМПАКТНОСТИ ОБРАЗА ВЕКТОРНЫХ МЕР

*В работе развиваются исследования теории антикомпактных множеств (антикомпактов), введённых нами ранее. Описан класс банаховых пространств, в которых существуют антикомпакты. В таких пространствах введён новый секвенциальный тип замыкания множества — $T_0$-замыкание. Получен аналог теоремы Ула о выпуклости и компактности образа векторных мер, который утверждает выпуклость и относительную слабую компактность $T_0$-замыкания образа безатомной ограниченной векторной меры в пространстве, имеющем антикомпакт. Показано, что для счётно-порождённых $\sigma$-алгебр дополнительные требования на класс пространств можно отбросить, если векторная мер имеет ограниченную вариацию.* [1]

Ключевые слова: антикомпакт, тотальное множество линейных непрерывных функционалов, безатомная векторная мера, теорема Ула, секвенциальное замыкание, $T_0$-замыкание, относительная слабая компактность.

## Вступление

В конечномерных пространствах хорошо известна теорема А. А. Ляпунова о выпуклости образа безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$, заданной на $\sigma$-алгебре подмножеств $\Sigma$ некоторого пространства $\Omega$ [1]. Этот результат имеет многочисленные приложения в оптимальном управлении, математической экономике, математической статистике, теории игр [2] — [7]. Ввиду этого известно множество модификаций и обобщений этого результата в конечномерных пространствах, в том числе и относительно современных [7] — [10].

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке гранта АР Крым для молодых учёных Крыма 2014 года

Однако, как показывает множество примеров, теорема А.А. Ляпунова неверна для векторных мер со значениями в бесконечномерных пространствах [1, 5, 6]. При этом существует множество аналогов указанной теоремы Ляпунова для бесконечномерных банаховых пространств, которые используются, в частности, в работах [6, 7]. Наиболее известный подход заключается в выделении класса банаховых пространств $E$ с так называемым *свойством Ляпунова*. В каждом таком пространстве $E$ для любой счётно-аддитивной безатомной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow E$ замыкание $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло [5, 6]. Свойством Ляпунова обладают, например, пространства $c_0$, $\ell_p$ $(p \in [1;2) \bigcup (2;+\infty))$ [6]. Но указанным свойством не обладает множество важнейших пространств, в т.ч. и сепарабельное гильбертово пространство $\ell_2$. Также известна теорема Ула о выпуклости множества $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ в случае мер ограниченной вариации со значениями в пространствах со свойством Радона-Никодима [5]. Но, как свойство Ляпунова, так и свойство Радона-Никодима существенно ограничивают класс рассматриваемых пространств (ни тому, ни другому свойству не удовлетворяют, например, пространства $L_1[a;b]$ и $C[a;b]$). Отметим также известный результат о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ для любой векторной меры в любом банаховом пространстве [5].

В наших работах [11, 12] мы поставили задачу получить аналоги теоремы А.А. Ляпунова в бесконечномерном случае без столь существенных сужений на класс пространств, а также без использования слабого замыкания (которое, вообще говоря, не позволяет говорить о представлении точек замыкания множества как предельных точек последовательностей элементов множества [6]). В упомянутых работах для сепарабельных пространств Фреше получены теоремы о выпуклости и компактности замыкания множества значений безатомной векторной меры в пространствах, порождённых антикомпактами.

В настоящей работе мы предлагаем обратиться к результату о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества значений векторной меры. Но при этом мы заменяем слабое замыкание на новый секвенциальный тип замыкания, что приводит к сужению класса подходящих векторных мер. Мы также используем систему антикомпактных множеств, введённую нами в предыдущих работах [11, 12]. Только теперь мы уже не замыкаемся на классе сепарабельных пространств, а доказываем, что антикомпакты существуют тогда и только тогда, когда банахово пространство линейно инъективно и непрерывно вложено в сепарабельное гильбертово пространство (теорема 1) или, что то же самое, когда банахово пространство имеет счётное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов $T_0$ (следствие 1). Такие пространства могут и не быть сепарабельными (например, $\ell_\infty$). Для таких пространств введён новый тип сходимости — $T_0$-сходимость и соответствующий ему секвенциальный тип замыкания множества — $T_0$-замыкание. Для безатомных ограниченных векторных мер получен секвенциальный аналог теоремы Ула о выпуклости и компактности образа векторной меры, заменяющий в хорошо известном результате [5] слабое замыкание на $T_0$-замыкание (теорема 2). Отмечено, что в пространствах $c_0$ и $\ell_p$ $(1 < p < +\infty)$ этот новый тип замыкания можно заменить на обычное слабое секвенциальное замыкание (теорема 4). Для счётно-порождённых $\sigma$-алгебр показано, что дополнительное условие на класс пространств можно отбросить, если мера $\overrightarrow{\mu}$ имеет (сильно) ограниченную вариацию (теорема 5).

## 1. Понятие антикомпактного множества. Класс банаховых пространств, в которых существуют антикомпакты

Напомним понятие антикомпакта, предложенное нами в [11]. Обозначим через $\Omega_{ac}(E)$ набор всех замкнутых абсолютно выпуклых подмножеств банахова пространства E.

**Определение 1.** Назовем множество $\overline{C} \in \Omega_{ac}$ *антикомпактным* в E, если:

(i) $p_{\overline{C}}(a) = 0 \iff a = 0$ в E (или $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda \cdot \overline{C} = \{0\}$);

(ii) любое ограниченное подмножество E содержится и предкомпактно в пространстве $E_{\overline{C}} = (span\ \overline{C},\ p_{\overline{C}}(\cdot))$. Здесь под $p_{\overline{C}}(\cdot)$ мы понимаем функционал Минковского абсолютно выпуклого множества $\overline{C} \subset E$ и считаем что $E_{\overline{C}}$ пополнено относительно нормы $\|\cdot\|_{\overline{C}} = p_{\overline{C}}(\cdot)$.

*Примем обозначение:* $\overline{\mathcal{C}}(E)$ *— набор антикомпактных подмножеств банахова пространства* $E$.

В предыдущих работах [11, 12] построен пример системы антикомпактных множеств в сепарабельных гильбертовых и банаховых пространствах. Оказывается, что этот случай в каком-то смысле универсален, поскольку антикомпакты существуют только в банаховых пространствах, линейно инъективно и непрерывно вложенных в сепарабельное гильбертово пространство. Доказательством этого утверждения мы займёмся в первой части нашей работы.

Из определения вытекает, что если $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$, то существует линейный инъективный компактный оператор $A : E \to E_{\overline{C}}$ $(Ax = x\ \forall x \in E)$. Покажем, что существование такого оператора не только необходимое, но и достаточное условие.

**Предложение 1.** *Пусть существует линейный инъективный компактный оператор* $A : E \to F$ *где* $E$ *и* $F$ *— банаховы пространства. Тогда в пространстве* $E$ *существует антикомпакт.*

**Доказательство.** Положим $\overline{C} = \{x \in E \mid \|Ax\|_F < \infty\}$, $\|x\|_{\overline{C}} = \|Ax\|_F$. Ввиду линейности и инъективности оператора A, мы имеем, что $\|x\|_{\overline{C}} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Предкомпактность всякого ограниченного множества $B \subset E$, очевидно, вытекает из компактности оператора A. Итак, справедлива

**Лемма 1.** *Банахово пространство $E$ имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда существует линейный инъективный компактный оператор $A : E \to F$, где $F$ — некоторое банахово пространство.*

Предыдущий результат позволяет получить уже более проверяемый критерий.

**Теорема 1.** *Банахово пространство $E$ имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда существует линейный непрерывный инъективный оператор $A : E \to \ell_2$.*

**Доказательство.** 1). *Необходимость.* Пусть в E существует антикомпактное множество. Тогда для некоторого банахова пространства F существует линейный инъективный и компактный оператор $A : E \to F$. Поэтому для всякое ограниченное множество $B \subset E$ предкомпактно в любом пространстве $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ (или множество $A(B) \subset F$ предкомпактно в $F$). Поэтому образ $A(E)$ можно вложить в некоторое замкнутое сепарабельное подпространство $F_0 \subset F$. Итак, $E$ инъективно линейно и непрерывно вложено в сепарабельное пространство $F_0$. А поскольку всякое сепарабельное банахово пространство линейно инъективно и непрерывно вложено в $\ell_2$ (см. [6], стр. 556), то существует линейный инъективный и непрерывный оператор $A' : E \to \ell_2$.

2). *Достаточность.* Если же E инъективно линейно и непрерывно вложено в $\ell_2$, то можно воспользоваться леммой 1 из [11], которая утверждает наличие в $\ell_2$ антикомпакта, т.е. $\ell_2$ инъективно линейно и компактно вложено в $\ell_2$. Следовательно,существует линейный инъективный и компактный оператор $A' : E \to \ell_2$, откуда и вытекает существование антикомпакта в E по лемме 1.

Покажем примеры практического использования полученного критерия. Так, хорошо известно, что всякое сепарабельное банахово пространство линейно инъективно и непрерывно вложено в $\ell_2$. Покажем, что это возможно и в некоторых несепарабельных пространствах.

**Пример 1.** Пространство ограниченных числовых последовательностей $\ell_\infty$ линейно инъективно и непрерывно вложено в $\ell_2$. Действительно, достаточно рассмотреть оператор $A : \ell_\infty \to \ell_2$, задаваемый следующим образом $Ax = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ..., \frac{x_n}{n}, ...\right)$.

Дадим ещё одно достаточно простое описание класса банаховых пространств, имеющих антикомпакты. Как известно (см. [6], стр. 556), банахово пространство E линейно инъективно и непрерывно вложено в сепарабельное гильбертово пространство тогда и только тогда, когда над E существует счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов (счётное множество линейных непрерывных функционалов, разделяющих точки). Это приводит к таком уже достаточно хорошо проверяемому критерию наличия антикомпакта в банаховых пространствах.

**Следствие 1.** *Банахово пространство $E$ имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда над $E$ существует счётное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов.*

На базе последнего следствия легко привести пример банахова пространства, которое ни один антикомпакт не имеет. При этом такое пространство гильбертово (несепарабельно) и поэтому рефлексивно.

**Пример 2.** Рассмотрим пространство $\ell_2([0;1])$ таких вещественных функций $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, что $\sum\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|^2 < \infty$ . Ясно, что всякая функция $f \in \ell_2([0;1])$ имеет не более, чем счётное множество значений. Норма в этом пространстве имеет вид

$$\|f\|_{\ell_2} = \left( \sum_{t\in[0;1]} |f(t)|^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

а всякий линейный непрерывный функционал $\ell$ на $\ell_2([0;1])$ представим в виде

$$\ell(f) = \ell_g(f) = \sum_{t\in[0;1]} |f(t)g(t)|,$$

где $g$ — некоторый фиксированный элемент из $\ell_2([0;1])$.

Ясно, что какое бы счётное множество линейных непрерывных функционалов $\{\ell_{g_n}\}_{n=1}^{\infty}$ на $\ell_2([0;1])$ мы не выбрали, они все будут принимать нулевые значения на множестве функций из $f \in \ell_2([0;1])$, которые обращаются в нуль в точках $t \in [0;1]$, для которых $g_n(t) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. То есть всякое счётное множество линейных непрерывных функционалов на $\ell_2([0;1])$ принимает нулевые значения на ненулевых функциях и поэтому в пространстве $\ell_2([0;1])$ нет счётного тотального подмножества линейных непрерывных функционалов.

## 2. Секвенциальный аналог теоремы Ула в банаховых пространствах и некоторые следствия

Теперь переходим к основным результатам работы — секвенциальному аналогу теоремы Ула и некоторым следствиям из этого результата. Напомним, что классическая теорема Ула утверждает выпуклость и компактность замыкания образа векторной меры (сильно) ограниченной вариации в пространствах со свойством Радона-Никодима. Также известно, что слабое замыкание образа векторной меры со значением в любом пространстве выпукло и слабо компактно. Нам в классе банаховых пространств, имеющих антикомпакты (такие пространства могут не иметь свойства Радона-Никодима), удалось выделить класс векторных мер, для которых слабое замыкание можно заменить на некоторый секвенциальный тип замыкания. Введём понятие $T_0$-сходимости последовательности, где $T_0 \subset E^*$ — счётное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов в E.

**Определение 2.** Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $T_0$-*сходится* к $x \in E$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \ell(x)\ \forall \ell \in E^*$.

Предыдущее определение корректно (предел единственен) в силу того, что множество $T_0$ тотально в E (разделяет элементы из E). В качестве наглядного примера такой сходимости можно привести пример покоординатной сходимости в пространствах числовых последовательностей $c_0$ и $\ell_p$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Введём также понятие $T_0$-замыкания множества $A \subset E$.

**Определение 3.** Назовём $T_0$-*замыканием* множества $A \subset E$ такое множество $\widehat{A} \subset E$, что $\forall x \in \widehat{A}$ существует $T_0$-сходящаяся к x последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$.

Оказывается, что можно получить аналог теоремы Ула для ограниченных векторных мер с использованием $T_0$-замыканий.

**Теорема 2.** *Пусть $E$ имеет счетное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов $T_0 \subset E^*$, $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ — безатомная ограниченная мера. Тогда слабое $T_0$-замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло и относительно слабо компактно в $E$.*

Перед доказательством этого результата приведём некоторые вспомогательные понятия и результат из [13, 14, 15]. Пусть $\Sigma$ — некоторая $\sigma$-алгебра подмножеств S (эти обозначения будем использовать далее). Напомним ([16], стр. 104), что *полной вариацией векторной меры* $\nu : \Sigma \to E$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ в $E$ называется отображение $|\ \nu\ |: \Sigma \to [0; +\infty]$, которое определяется равенством

$$|\nu|(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|\nu(A_k)\| \quad \forall A \in \Sigma, \tag{1}$$

где супремум берётся по всем конечным наборам $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \subset \Sigma$ таким, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$. Легко проверить, что отображение $|\ \nu\ |$ — конечная счётно-аддитивная положительная мера на $\Sigma$ (см. [16], стр. 104). Обозначим через $V(S, E)$ множество всех векторных мер $\nu : \Sigma \to E$ ($\Sigma$ — $\sigma$-алгебра подмножеств S), которые имеют конечную полную вариацию $|\ \nu\ |\ (S) < \infty$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ на $E$ (см. (1)). Будем обозначать через $E_C = (span\ C, \|\cdot\|_C)$ банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_C$, равными функционалам Минковского абсолютно выпуклых компактов $C \in \mathcal{C}(E)$. Эти пространства были введены и детально изучались И.В. Орловым (см., например [13, 14]).

**Определение 4.** Будем говорить, что $\nu$ имеет *(сильную) компактную вариацию* на $S$, если существует компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in V(S, E_C)$. Примем обозначения: $\nu \in V_K(S, E)$, $|\ \nu\ |_C$ — полная вариация векторной меры $\nu$ относительно нормы $\|\cdot\|_C$.

Для того, чтобы сформулировать необходимый результат из [15], нам потребуется новая характеристика для мер $\nu \in V_K(S,E)$, а именно — *(сильная) компактная абсолютная непрерывность* относительно конечной числовой меры $\mu$ на $\Sigma$. Обозначим через $AC(S,E)$ множество всех векторных мер $\nu \in V(S,E)$, обладающих свойством обычной *абсолютной непрерывности векторной меры относительно* $\mu$, то есть таких, что мера $|\nu| \ll \mu$ ($\mu(A) = 0 \Rightarrow |\nu|(A) = 0$ или $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ (\mu(A) < \delta) \Rightarrow |\nu|(A) < \varepsilon$).

**Определение 5.** Будем говорить, что векторная мера $\nu \in V_K(S,E)$ *(сильно) компактно абсолютно непрерывна на $S$ относительно* $\mu$, если существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in AC(S,E_C)$. Примем обозначение: $\nu \in AC_K(S,E)$. Приведём важный вспомогательный результат из [15].

**Теорема 3.** *Если $\nu \in AC_K(S,E)$, то найдётся такое интегрируемое по Бохнеру отображение $f : S \to E$, что $\forall A \in \Sigma$ верно*

$$\nu(A) = (B)\int\limits_A f(t)d\mu(t). \tag{2}$$

Переходим к доказательству теоремы 2.

**Доказательство.** 1) Векторная мера $\mu$ имеет слабо ограниченную вариацию ввиду её ограниченности и того, что всякий ограниченный числовой заряд $\ell(\overrightarrow{\mu})(\cdot)$ ($\ell \in E^*$) имеет ограниченную вариацию. Обозначим через $c_k = V(\ell_k(\overrightarrow{\mu}))(S)$ полные вариации зарядов $\ell_k(\overrightarrow{\mu})$, $\ell_k \in T_0$. Выберем числовую последовательность $n_k \to +\infty$ так, чтобы последовательность $\left\{\frac{c_k}{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ была ограниченной и рассмотрим множество

$$\widetilde{C} = \left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{\ell_k(x)}{n_k}\right| \leqslant 1 \right\},$$

а также порождённое $\widetilde{C}$ банахово пространство $E_{\widetilde{C}} = \left(span\ \widetilde{C}, p_{\widetilde{C}}(\cdot)\right)$ ($p_{\widetilde{C}}(\cdot)$ — функционал Минковского, порождённый $\widetilde{C}$), $E_{\widetilde{C}} \cong \ell_\infty$.

Не уменьшая общности рассуждений, будем полагать, что $\|T_0\|_{E^*} \leqslant 1$. Пусть $B \subset E$ — произвольное ограниченное множество. Покажем, что оно содержится и предкомпактно в $E_{\widetilde{C}}$. В силу $n_k \to \infty$ существует $L > 0$ такое, что $\frac{1}{n_k} \leqslant L$ и поэтому $\forall x \in B$

$$\sup_k \left|\frac{\ell_k(x)}{n_k}\right| \leqslant K \cdot \|\ell_k\|_{E^*} \cdot \|x\|,$$

т.е. $B \subset E_{\widetilde{C}}$. Предкомпактность же $B$ в $E_{\widetilde{C}}$ вытекает из того, последовательности $\left(\frac{|\ell_1(x)|}{n_1}, \frac{|\ell_2(x)|}{n_2}, ..., \frac{|\ell_k(x)|}{n_k}\right)$ равномерно по $x \in B$ ограничены элементом $\left(\frac{1}{n_1}, \frac{1}{n_2}, ..., \frac{1}{n_k}\right) \in c_0$ (это обеспечивает предкомпактность множества в $\ell_\infty$). Итак, $\widetilde{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$.

2) Далее, $\overrightarrow{\mu}$ имеет ограниченную вариацию в пространстве $E_{\widetilde{C}}$. Действительно, $\forall A \in \Sigma$

$$\|\overrightarrow{\mu}(A)\|_{\widetilde{C}} = \sup_k \left|\frac{\ell_k(\overrightarrow{\mu}(A))}{n_k}\right| \leqslant \sup_k \left|\frac{c_k}{n_k}\right| \leqslant K$$

в силу выбора $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Введём на $\Sigma$ такую числовую меру

$$\mu_{\widetilde{C}}(A) := \sup \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|(A)}{n_k},$$

где $|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|(\cdot)$ — полная вариация числового заряда $\ell_k(\overrightarrow{\mu})$. Ясно, что векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\widetilde{C}}$. Также мера $|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|$ безатомна ввиду безатомности $\overrightarrow{\mu}$.

Тогда $\overrightarrow{\mu}$ имеет компактную вариацию в $E_{\widetilde{C}}$. Более того, если обозначить через $|\overrightarrow{\mu}|_{\widetilde{C}}(\cdot)$ полную вариацию векторной меры $\overrightarrow{\mu}$ в пространстве $E_{\widetilde{C}}$, то несложно понять, что векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно числовой меры $|\overrightarrow{\mu}|_{\widetilde{C}}(\cdot)$. Следовательно, $\overrightarrow{\mu} \in AC_K(\Sigma, E_{\widetilde{C}})$ и поэтому $\overrightarrow{\mu}$ представима в виде в виде неопределённого интеграла Бохнера по теореме 3. Доказываемое утверждение теперь вытекает из выпуклости образа векторной меры, представимой в виде интеграла Бохнера (см. [5], стр. 266, доказательство теоремы 10).

3) Остаётся рассмотреть множество $M(\overrightarrow{\mu}) = co\overrightarrow{\mu}(\Sigma) \bigcap \overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{E_{\widetilde{C}}}$ ($coA$ — выпуклая оболочка множества $A$, $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{E_{\widetilde{C}}}$ — замыкание множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ в пространстве $E_{\widetilde{C}}$). Это множество выпукло как пересечение выпуклых множеств и при этом содержит все $T_0$-пределы последовательностей из $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$.

Относительная слабая компактность $T_0$-замыкания $M(\overrightarrow{\mu})$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ вытекает из известного результата относительной слабой компактности самого множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ [5]. Теорема доказана.

Интересное следствие можно отметить, если рассмотреть пространства числовых последовательностей $c_0$ и $\ell_p$ $(1 < p < \infty)$. Как известно [6], в таких пространствах слабая сходимость последовательности равносильна её ограниченности и покоординатной сходимости. Поэтому в этом классе пространств $T_0$-замыкание в теореме 2 можно заменить на стандартное секвенциальное слабое замыкание.

**Теорема 4.** *Пусть $E = c_0$ или $E = \ell_p$, $(1 < p < \infty)$ и безатомная мера $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ ограничена. Тогда слабое секвенциальное замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло и относительно слабо компактно в $E$.*

Возникает вопрос о том, можно ли в предыдущих результатах заменить ограничения на класс пространств E какими-то условиями на сами меры? Если $\Sigma$ — счётно-порождённая $\sigma$-алгебра (например, такой будет $\sigma$-алгебра борелевских подмножеств вещественного отрезка), то на такой вопрос можно предложить ответ в виде следующего результата.

**Теорема 5.** *Если $\Sigma$ — счётно-порождённая $\sigma$-алгебра и безатомная векторная мера $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ имеет (сильно) ограниченную вариацию в некотором банаховом пространстве $E$. Тогда множество $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ погружается в подпространство $E_0 \subset E$, имеющее счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов $T_0 \in E_0^*$ и $T_0$-замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло и относительно слабо компактно в $E_0$.*

**Доказательство.** Обозначим через $|\overrightarrow{\mu}|(\cdot)$ полную вариацию векторной меры $\overrightarrow{\mu}$. Ясно, что $|\overrightarrow{\mu}|$ — числовая мера на $\Sigma$. Ввиду счётно-порождённости $\Sigma$ существует счётная система множеств $\Phi \subset \Sigma$ такая, что для любого $A \in \Sigma$ существует последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Phi$ такая, что $A \subset A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $|\overrightarrow{\mu}|(A) = \lim\limits_{n\to\infty} |\overrightarrow{\mu}|(A_n)$. Следовательно,

$$\|\overrightarrow{\mu}(A_n) - \overrightarrow{\mu}(A)\| = \|\overrightarrow{\mu}(A_n \backslash A)\| \leqslant |\overrightarrow{\mu}|(A_n \backslash A) = |\overrightarrow{\mu}|(A_n) - |\overrightarrow{\mu}|(A) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т.е. $\overrightarrow{\mu}(\Phi)$ — счётное плотное в $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ множество и поэтому $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ содержится в некотором сепарабельном подпространстве $E_0 \subset E$. А в пространстве $E_0$ уже существует счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов. Остаётся лишь применить теорему 2.

Отметим, что если $\sigma$-алгебра $\Sigma$ не является счётно-порождённой, то вопрос существенности ограничения на класс пространств E пока остаётся открытым.

## Заключение

В настоящей работе мы с использованием системы антикомпактов, введённой ранее в [11] доказали аналог известного результата [5] о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества значений векторной меры, заменив слабое замыкание множества значений меры на новый секвенциальный тип замыкания — $T_0$-замыкание этого множества. Как оказалось, это возможно при условии сужения рассматриваемого класса банаховых пространств (пространство должно иметь счётное тотальное множество линейных непрерывных функционалов). В некоторых случаях $T_0$-замыкание можно заменить на обычное секвенциальное слабое замыкание. Для счётно-порождённых $\sigma$-алгебр показано, что дополнительное условие на класс банаховых пространств можно отбросить для мер (сильно) ограниченной вариации.

## Список литературы

[1] Ляпунов А.А. О вполне аддитивных вектор-функциях // Известия АН СССР. — 1940. — Т. 4. — С. 465 — 478.

[2] Ляпунов А.Н. Теорема А.А. Ляпунова о выпуклости значений мер // Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео». — 2011. — С. 257 — 261.

[3] Аркин В.И., Левин В.Л. Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи // Успехи мат. наук. — 1972. — т. 27, вып. 3. — С. 21 — 77.

[4] Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи // Успехи мат. наук. — 1968. — т. 23, вып. 6. — С. 51 — 116.

[5] Diestel J., Uhl J.J. Vector Measures, Providence, Amer. Math. Soc., 1977, 320 p.

[6] Кадец В. М. Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006. — 615с.

[7] Neyman J. Un thŕeor‘em d'existence / J. Neyman // C.R. Acad. Sci. Paris. — Vol. 222. — 1946. — P.843 — 845.

[8] Chen Y. Truth, justice, and cake cutting / Yiling Chen, John Lai, David C. Parkes, and Ariel D. — Procaccia.Association for the Advancement of Artificial Intelligence. 2010.

[9] Fabio Maccheroni. How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations. Maccheroni Fabio, Marinacci Massimo // Social Choice and Welfare. – Springer-Verlag GmbH — 2003. — P. 457 – 465.

[10] Dai Peng, Feinberg Eugene A. Extension of Lyapunov's convexity Theorem to subranges / Peng Dai Mossel, Eugene A. Feinberg // arXiv:1102.2534v1 [math.PR] 12 Feb 2011.

[11] Стонякин Ф. С. Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры /Ф. С. Стонякин // Динамические системы. — 2013. — т. 3(31), № 3-4. — С. 281 – 288.

[12] Стонякин Ф. С. Антикомпакты и их приложения к аналогам теорем Ляпунова и Лебега в пространствах Фреше / Ф. С. Стонякин // Современная математика. Фундаментальные направления. — В печати.

[13] Орлов И. В. Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы. / И. В. Орлов // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2008. — т. 29. — С. 165 – 175.

[14] Orlov I. V., Stonyakin F. S. Limit form of Radon-Nikodym property is true in arbitrary Frechet space // Contemporary Math. Fundamental Directions. — 2010. — vol. 37. — P. 55 – 69.

[15] Стонякин Ф. С. Сильные компактные характеристики и предельная форма свойства Радона-Никодима для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше/ Ф. С. Стонякин // Учёные записки ТНУ им. В.И. Вернадского. Серия «Физико-математические науки.» — 2010. — т. 23(62), № 1. — С. 131 – 149.

[16] Вахания Н. Н. Вероятностные распределения в банаховых пространствах / Н. Н. Вахания, В. И. Тариеладзе, С. А. Чобанян. — М.: Наука, 1985. — 368 с.

**Секвенціальна версія теореми Ула про опуклість та компактність образу векторних мір.** *У роботі розвиваються дослідження теорії антикомпактних множин (антикомпактів), які введено нами раніше. Описано клас банахових просторів, у яких існують антикомпакти. Для таких просторів введено новий секвенціальний тип замкнення —* $T_0$*-замкнення множини. Одержано аналог теореми Ула про опуклість образу* *векторних мір, котрий стверджує опуклість та відносну слабку компактність $T_0$-замкнення образу обмеженої безатомної векторної міри у просторі, який має антикомпакт. Показано, що у випадку зліченно-породженої $\sigma$-алгебр $\Sigma$ додаткові вимоги на клас просторів можна не накладати, якщо векторна міра має сильно обмежену варіацію.*

Ключові слова: антикомпакт, тотальна множина лінійних непервних функціоналів, безатомна векторна міра, теорема Ула, $T_0$-замкнення, секвенціальне замкнення, відносна слабка компактність.

**Sequential version of Uhl Theorem on convexity and compactness for vector measure range.** *There is the well-known Lyapunov Theorem about convexity for the range of a non-atomic vector measure $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow R^n$, where $\Sigma$ is a $\sigma$-algebra of subsets of some space $\Omega$* [1]. *But Lyapunov Theorem, in general, are not valid for vector measures taking values in infinite-dimensional Banach spaces* [1, 5, 6]. *There are different analogs of Lyapunov Theorem for infinite-dimensional Banach spaces. We mention that for each non-atomic vector measure $\overline{\mu} : \Sigma \to E$ ($E$ — Banach space) a weak closure of the set $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ is a convex and weakly compact set* [5]. *In our paper we prove that a sequentially weak closure of the set $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ is convex and relatively weakly compact for all non-atomic measures $\overline{\mu} : \Sigma \to E$ of bounded (strong) variation in special class of Banach spaces $E$. We use the system of anti-compact sets introduced by us in* [11]. *We start with the anti-compact set definition. Denote by $\Omega_{ac}(E)$ the collection of all closed absolutely convex sets in Banach space $E$.*

**Definition 1.** $\overline{C} \in \Omega_{ac}$ is *anticompact set* in E if:

(i) $p_{\overline{C}}(a) = 0 \iff a = 0$ in E (or, $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda \cdot \overline{C} = \{0\}$);

(ii) each bounded set $A \subset E$ includes in some space $E_{\overline{C}} = (span\ \overline{C},\ p_{\overline{C}}(\cdot))$ and A is a precompact set in this space. Here $p_{\overline{C}}(\cdot)$ is a Minkovskiy functional of absolutely convex set $\overline{C} \subset E$. Also we suppose that $E_{\overline{C}}$ is complemented by the norm $\|\cdot\|_{\overline{C}} = p_{\overline{C}}(\cdot)$.

Denote by $\overline{\mathcal{C}}(E)$ the collection of anti-compact subsets of Banach space $E$.

*We describe the class of Banach space E with anti-compact sets.*

**Theorem 1.** *A Banach space $E$ has an anti-compact set iff there is a linear injective and continuous operator $A : E \to \ell_2$.*

**Corollary 1.** *A Banach space $E$ has an anti-compact set iff $E$ has a countable set of total linear continuous functionals.*

*Anti-compact sets exist in each separable Banach space, spaces* $\ell_\infty$, $L_\infty[a;b]$. *But there is no anti-compact set in the space* $\ell_2([0;1])$ *of real functions with the norm* $\|f\|_{\ell_2} = \left(\sum\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|^2\right)^{1/2}$.

*And we pass to sequential analogs of Uhl's Theorem on convexity and compactness for vector measure range. We start with auxiliary definitions. Let* $T_0 = \{\ell_k\}_{k=1}^\infty \subset E^*$ *be a total set of linear continuous functionals on E.*

**Definition 2.** Say, that a sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ $T_0$-*converges* to $x \in E$ if $\forall \ell \in T_0$ $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \ell(x)$.

**Definition 3.** If $\forall x \in \widehat{A}$ there is a sequence $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset A \subset E$: $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \ell(x)$ $\forall \ell \in T_0$ then we say that $\widehat{A}$ is s $T_0$-*closure* of a set $A \subset E$.

**Theorem 2.** *Let E be a Banach space with countable total set of linear continuous functionals* $T_0 \subset E^*$ *and non-atomic bounded measure* $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$. *Then a* $T_0$*-closure of* $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ *is a convex and relatively weakly compact set in E.*

**Theorem 3.** *For* $E = c_0$ *or* $E = \ell_p$, $(1 < p < \infty)$ *and non-atomic bounded measure* $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ *a sequentially weak closure of* $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ *is a convex and relatively weak compact set in E.*

**Theorem 4.** *If* $\Sigma$ *is a countably-generated* $\sigma$*-algebra and non-atomic measure* $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ *possesses (strong) bounded variation in Banach space E. Then a set* $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ *includes in a subspace* $E_0 \subset E$ *with a countable total set* $T_0 \in E_0^*$ *and a weak* $T_0$*-closure of* $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ *is a convex and relatively weakly compact set in* $E_0$.

Keywords: anti-compact set, total set of linear continuous functionals, vector non-atomic measure, Uhl Theorem, $T_0$-closure, sequentially closure, relative weak compactness.