Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 90–100.

УДК 512.7:514.7

К. К. Муминов Р. А. Гаффоров

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ ПУТЕЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ДЕЙСТВИЯ СПЕЦИАЛЬНОЙ ПСЕВДООРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ

Пусть E - n - мерное комплексное пространство, $[x,y]=x_1y_1+\cdots+x_py_p-x_{p+1}y_{p+1}-\cdots-x_ny_n$ - индефинитная метрика в E и $SO(p,q)$ - специальная псевдоортогональная подгруппа в $GL(n,C)$. C^∞ - дифференцируемый путь $x:[0,1]\to E$ называется регулярным, если $\det M(x)(t)\neq 0$ для всех $t\in[0,1]$, где $M(x)(t)$ есть $n\times n$ - матрица $(x(t)\,x'(t)\ldots x^{(n-1)}(t))$. Конечная система C^∞ - дифференцируемых путей $\{x^i(t),\ i=\overline{1,k}\}$ называется регулярной, если $x^1(t)$ есть регулярный путь.

Говорят, что две системы $\{x^i(t), i=\overline{1,k}\}$, $\{y^i(t), i=\overline{1,k}\}$ путей в E являются $SO(p,q)$ - эквивалентными, если существует такое $g\in SO(p,q)$, что $y^i(t)=g\,x^i(t)$ для всех $t\in[0,1]$, $i=\overline{1,k}$.

Теорема. *Две регулярные системы путей $\{x^i(t), i=\overline{1,k}\}$ и $\{y^i(t), i=\overline{1,k}\}$ являются $SO(p,q)$ эквивалентными в том и только в том случае, когда*

$$[\overset{(m)}{x^1},\overset{(m)}{x^1_1}](t)=[\overset{(m)}{y^1},\overset{(m)}{y^1}](t),\quad [\overset{(\ell)}{x^1},x^r](t)=[\overset{(\ell)}{y^1},y^r](t),$$
$$\det M(x^1)\,(t)=\det M(y^1)\,(t)$$

для всех $t\in[0,1]$, $m=\overline{0,(n-2)}$, $\ell=\overline{0,(n-1)}, r=\overline{2,k}$.

Ключевые слова: псевдоортогональная группа, действие группы, регулярный путь

1. Введение

Одним из важных инструментов решения задачи об эквивалентности кривых при действии линейных групп является теория инвариантов для таких групп, основы которой были заложены в работах Г.Вейля [4], Т.Спрингера [10], D.Mumford, J.Fogarty [3], Х.Крафта [2] и других. При изучении задачи об эквивалентности бесконечно дифференцируемых вектор-функций естественно возникает вопрос об описании образующих в дифференциальных полях дифференциально рациональных функций, инвариантных относительно действия той или иной линейной группы. С помощью найденных систем образующих указанных полей, как правило, удается получить удобные критерии для эквивалентности путей и кривых при действии различных классов линейных групп. Такой подход использовался в [1] при решения задачи об эквивалентности кривых для действия полупрямого произведения $R^n \triangleleft SL(R,n)$ групп R^n и $SL(R,n)$, а также в [12] для действия групп $R^n \triangleleft O(n,R)$ и $R^n \triangleleft SO(R,n)$.

В [8], [9] этим методом была решена задача об эквивалентности путей и кривых при действии симплектической группы.

В данной работе рассматривается задача об эквивалентности конечных систем путей для действия псевдоортогональной группы $O(p,q)$ и специальной псевдоортогональной группы $SO\,(p,q)$ и дается полное решение этой задачи с помощью теории дифференциальных инвариантов.

Используется терминология и обозначения из [11].

2. Предварительные сведения.

Пусть $E = C^n_{p,q}$ (где p,q - натуральные числа, $p+q=n$) - n - мерное комплексное пространство. Элементы из $C^n_{p,q}$ будем представлять в виде n - мерных вектор-столбцов. В $C^n_{p,q}$ рассматривается билинейная форма

$$[x,\, y] = x_1\, y_1 + \cdots + x_p\, y_p - x_{p+1}\, y_{p+1} - \cdots - x_n\, y_n,$$

где $x = \{x_i\}_{i=1}^n,\; y \;= \{y_i\}_{i=1}^n \in E$. Через $GL\,(n,C)$ будем обозначать группу всех обратимых линейных преобразований пространства E, а через $O\,(p,q)$ - подгруппу всех псевдоортогональных преобразований, т.е. $O\,(p,q) = \{g \in GL(n,C) : g^T I\, g = I\}$, где g^T - транспонированная матрица к g, $I = (I_{i\,j}\}_{i,j=1}^n,\;\; I_{i\,i} = 1$ при $i = \overline{1,p}$, $I_{i\,i} = -1$, при $i = \overline{(p+1),n}$, $I_{i\,j} = 0$ при $i \neq j$.

Пусть G - произвольная подгруппа в $GL\,(n,C)$. Рассмотрим естественное действие $(g,x) \to g\,x$ группы G на векторном пространстве E, как обычное умножение матрицы на вектор-столбец. Это действие естественным образом продолжается до действия G в E^k по формуле $g(\{x^i\}_{i=1}^k) = \{g\,x^i\}_{i=1}^k$, где $x^i = \{x^i_j\}_{j=1}^n \in E, i = \overline{1,k}$.

Непрерывное отображение $x(t)$ из $[0,1]$ в E называется путем. Если координаты $x_j(t),\; j = \overline{1,n}$ пути $x(t)$ является бесконечно дифференцируемымы функциями на $[0,1]$, то говорят, что $x(t)$ есть C^∞ - путь. В дальнейшем мы рассматриваем только C^∞ - пути.

Производной r - го порядка пути $x(t) = \{x_j(t)\}_{j=1}^n$ назовем вектор $\overset{(r)}{x}(t) = \{\overset{(r)}{x_j}(t)\}_{j=1}^n$, где $\overset{(r)}{x_j}(t)$ - r - ая производная координатной функции $x_j(t)$, $j = \overline{1,n}$. Для каждого пути $x(t)$ рассмотрим $n \times n$ - матрицу $M\,(x)(t)$, в которой r - столбцом служат координаты вектора $\overset{(r-1)}{x}(t)$, $r = \overline{1,n}$. Если для пути $x(t)$ определитель $\det M(x)(t)$ отличен от нуля при всех $t \in [0,1]$, то путь $x(t)$ называют регулярным

Рассмотрим кольцо $C\,\{x^1,...,x^k\} = C\,\{x_1^1,...,x_n^1,...,x_1^k,...,x_n^k\}$ всех многочленов от счетного числа переменных $x_1^1,...,x_n^1$, $(x_1^1)',...,(x_n^1)',...,$ $(x_1^1)^{(r)},...,(x_n^1)^{(r)},...,$ $x_1^k,...,x_n^k,(x_1^k)',...,(x_n^k)',...,(x_1^k)^{(r)},...,(x_n^k)^{(r)},...$ над полем комплексных чисел C. Положим $d(x_j^i)^{(r)} = (x_j^i)^{(r+1)}$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,n}$. Тогда d однозначно продолжается до дифференцирования в кольце $C\,\{x^1,...,x^k\}$, наделяя это кольцо структурой дифференциального кольца (d - кольца) [7]. Элементы этого d - кольца называются d - многочленами (дифференциальными многочленами). Известно [7], что дифференцирование d на $C\,\{x^1,...,x^k\}$ единственным образом продолжается до дифференцирования на соответствующее поле отношений. Это поле будем обозначать через $C < x^1,...,x^k >$, а его элементы будем называть d - рациональными функциями и будем записывать в виде $f < x^1,...,x^k >$. Говорят, что d - рациональная функция $f < x^1,...,x^k > - G$ - инвариантна, если $f < g\,x^1,...,g\,x^k >= f < x^1,...,x^k >$ для любых $g \in G$.

Множество всех G - инвариантных d - рациональных функций обозначим через $C < x^1,...,x^k >^G$. Известно ([11], с. 22), что оно является дифференциальным подполем в $C < x^1,...,x^k >$, при этом $C < x^1,...,x^k >^G$ инвариантно относительно действия дифференцирования из $C < x^1,...,x^k >$ [5].

Дифференциальное кольцо всех G - инвариантных многочленов будем обозначать через $C\{x^1,...,x^k\}^G$.

Заметим, что поле отнощений для d - кольца $C\{x^1,\ldots,x^k\}^G$ совпадает с d - полем $C < x^1,\ldots,x^k >^G$ ([6], гл. I, § 2).

Говорят, что система элементов $A = \{a_i, i \in T\}$ является системой образующих d - поля $C < x^1,\ldots,x^k >$ (d - кольца $C\{x^1,\ldots,x^k\}$), если любой элемент $b \in C < x^1,\ldots,x^k >$ может быть получен из конечного числа элементов множества A применением конечного числа раз операций d - поля $C < x^1,\ldots,x^k >$ (d - кольца $C\{x^1,\ldots,x^k\}$). В случае, когда в качестве системы образующих может быть выбрано конечное множество $A = \{a_1,\ldots,a_p\}$, говорят, что d - поле (d - кольцо) имеет конечное число образующих $a_1,...,\ a_p$. Элементы $a_1,\ldots,a_p$ из $C < x^1,\ldots,x^k >$ называются d - алгебраически зависимыми, если существует такой ненулевой многочлен $f \in C\{x^1,\ldots,x^k\}$, что $f(a_1,\ldots,a_p) = 0$. В противном случае, система элементов $a_1,\ldots,a_p$ называется d - алгебраически независимой.

Конечный набор образующих в d - поля $C < x^1, \ldots, x^k >$ называется d - рациональным базисом, если этот набор d - алгебраически независим. Аналогично определяется d - рациональный базис в подполе $C < x^1, \ldots, x^k >^G$.

В дальнейшем для набора $\{x_j^i\}_{j=1}^n \in E, i = \overline{1,k}$, символом $[x^1, x^2 ... x^n]$ обозначается компонентный определитель

$$\begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & ... & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & ... & x_2^n \\ ... & ... & ... & ... \\ x_n^1 & x_n^2 & ... & x_n^n \end{vmatrix}.$$

3. Описание систем образующих для d - полей $C < x^1, \ldots, x^k >^{O(p,q)}$ и $C < x^1, \ldots, x^k >^{SO(p,q)}$

Для нахождения условий, обеспечивающих эквивалентность путей при действии псевдоортогональной и специальной псевдоортогональной групп нам понадобится описание конечных систем образующих в d - полях $C < x^1, ..., x^k >^G$, где $G = O(p,q)$ либо $G = SO(p,q) = \{g \in O(p,q) : \det g = 1\}$.

В случае $G = O(n,C)$ известна следующая

Теорема 1. *([11], теорема 12.5). Система d - многочленов*

$$q_1^{(m)} < x^1, \ldots, x^k >= (\overset{(m)}{x^1}, \overset{(m)}{x^1}), \psi_r^{(m)} < x^1, \ldots, x^k >= (\overset{(m)}{x^1}, x^r), m = \overline{0, n-1}, r = \overline{2,k}$$

является d - рациональным базисом в $C < x^1, \ldots, x^k >^{O(n,C)}$.

С помощью теоремы 1 устанавливается

Теорема 2. *Следующие d - многочлены*

$$f_1^{(m)} < x^1, \ldots, x^k > = [\overset{(m)}{x^1}, \overset{(m)}{x^1}],$$

$$f_r^{(m)} < x^1, \ldots, x^k > = [\overset{(m)}{x^1}, x^r], m = \overline{0, n-1}, r = \overline{2,k},$$

образуют d - рациональным базисом в d - поле $C < x^1, \ldots, x^k >^{O(p,q)}$.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся четыре леммы.

Лемма 1. *Если $g \in GL(n,C)$, то $g \in O(p,q)$ тогда и только тогда, когда $[g\,x, g\,y] = [x,y]$ для любых $x, y \in E$.*

Доказательство. Поскольку $O(p,q) = \{g \in GL(n,C) : g^T I\, g = I\}$, то из равенств $[x,y] = (x)^T I\, y$ и $(x)^T (g^T I\, g) y = (g\,x)^T I\, (g\,y) = [g\,x, g\,y]$ следует утверждение леммы 1. $\square$

Укажем теперь связь группы $O\,(p,q)$ с группой $O\,(n,C)=\{g\in GL(n,C): g^T g = e\}$ всех ортогональных линейных преобразований пространства E (здесь e - тождественное преобразование в E). Пусть $h=(h_{i\,j}\}_{i,j=1}^{n}\in GL(n,C)$, где $h_{j\,j}=1$ при $j=\overline{1,p}$, $h_{j\,j}=i$ (здесь $i^2=-1$) при $j=\overline{(p+1),n}$, $h_{i\,j}=0$ при $i\neq j$. Ясно, что $h^T=h$ и $h^2=I=h^{-2}$. Положим $G(h)=\{h\,g\,h^{-1}: g\in O(p,q)\}$.

Лемма 2. $G(h)=O(n,C)$.

Доказательство. Пусть $g_1=h\,g\,h^{-1}$, $g\in O\,(p,q)$. Используя равенство $h^T=I\,h^{-1}$, получим

$$g_1^T g_1=(h\,g\,h^{-1})^T(h\,g\,h^{-1})=(h^T)^{-1}g^T h^T h\,g\,h^{-1}=(h^T)^{-1}g^T I\,g\,h^{-1}=(h^T)^{-1}I\,h^{-1}=$$

$$=(I\,h^{-1})^{-1}I\,h^{-1}=h\,I^{-1}I\,h^{-1}=e.$$

т.е. $g_1=h\,g\,h^{-1}\in O(n,C)$ и поэтому $G(h)\subset O(n,C)$.

Обратно, пусть $g\in O(n,C)$, т.е. $g^T g=e$. Рассмотрим $g_1=h^{-1}g\,h$. Имеем, что

$$g_1^T I\,g_1=(h^{-1}g\,h)^T I(h^{-1}g\,h)=h^T g^T (h^T)^{-1} I\,h^{-1}g\,h=h^T g^T (h^T)^{-1} h^T g\,h=h^T h=I.$$

Следовательно $g_1\in O(p,q)$, и поэтому $g=h\,g_1 h^{-1}\in G(h)$, т.е. $O(n,C)\subset G(h)$. Таким образом, $G(h)=O(n,C)$. $\square$

Лемма 3. *Многочлен $p(x^1,\dots,x^k)$ инвариантен относительно действия группы $O\,(p,q)$ тогда и только тогда, когда многочлен $q(x^1,\dots,x^k)=p(h^{-1}x^1,\dots,h^{-1}x^k)$ инвариантен относительно действия группы $O(n,C)$.*

Доказательство. Пусть многочлен $p(x^1,\dots,x^k)$ - инвариантен относительно $O\,(p,q)$, т.е. $p(x^1,\dots,x^k)=p(g\,x^1,\dots,g\,x^k)$ для любого $g\in O\,(p,q)$.

Положим $q(x^1,\dots,x^k)=p(h^{-1}x^1,\dots,h^{-1}x^k)$. Согласно лемме 2, любое $t\in O(n,C)$ представимо в виде $t=h\,g\,h^{-1}$ для некоторого $g\in O\,(p,q)$, и поэтому

$$q(t\,x^1,\dots,t\,x^k)=q(h\,g\,h^{-1}x^1,\dots,h\,g\,h^{-1}x^k)=p(h^{-1}h\,g\,h^{-1}x^1,\dots,h^{-1}h\,g\,h^{-1}x^k)=$$

$$=p(g\,h^{-1}x^1,\dots,g\,h^{-1}x^k)=p(h^{-1}x^1,\dots,h^{-1}x^k)=q(x^1,\dots,x^k),$$

т.е. многочлен $q(x^1,\dots,x^k)$ инвариантен относительно ортогональной группы $O(n,C)$.

Аналогично показывается, что $O(n,C)$ - инвариантность многочлена $q(x^1,\dots,x^k)=p(h^{-1}x^1,...,\,h^{-1}x^k)$ влечет $O\,(p,q)$ - инвариантность многочлена $p(x^1,\dots,x^k)$. $\square$

Лемма 4. *d - рациональная функция $f<x^1,\dots,x^k>$ инвариантна относительно группы $O\,(p,q)$ тогда и только тогда, когда d - рациональная функция $\varphi<x^1,\dots,x^k>=f<h^{-1}x^1,\dots,h^{-1}x^k>$ инвариантна относительно группы $O\,(n,C)$.*

Доказательство леммы 4 аналогично доказательству леммы 3.

Возвращаемся к доказательству теоремы 2.

Как установлено в теореме 1, для d - поля $C<x^1,\dots,x^k>^{O(n,C)}$ многочлены

$$q_1^{(m)}<x^1,\dots,x^k>=(\overset{(m)}{x^1},\overset{(m)}{x^1}),\psi_r^{(m)}<x^1,\dots,x^k>=(\overset{(m)}{x^1},x^r),m=\overline{0,n-1},r=\overline{2,k}$$

образуют d - рациональный базис в $C<x^1,\dots,x^k>^{O(n,C)}$. Следовательно, в силу леммы 4, многочлены

$$q_1^{(m)}<h^{-1}x^1,\dots,h^{-1}x^k>,\psi_r^{(m)}<h^{-1}x^1,\dots,h^{-1}x^k>$$

инвариантны относительно действия псевдоортогональной группы $O\,(p,q)$ и образуют d - рациональный базис в $C<x^1,\dots,x^k>^{O(p,q)}$. Заметим, что

$$q_1^{(m)}<h^{-1}x^1,\dots,h^{-1}x^k>=(h^{-1}\overset{(m)}{x^1},h^{-1}\overset{(m)}{x^1})=(h^{-1}\overset{(m)}{x^1})^T(h^{-1}\overset{(m)}{x^1})=(\overset{(m)}{x^1})^T(h^{-1})^Th^{-1}\overset{(m)}{x^1}=$$

$$=(\overset{(m)}{x^1})^Th^{-1}h^{-1}\overset{(m)}{x^1}=(\overset{(m)}{x^1})^TI\,\overset{(m)}{x^1}=[\overset{(m)}{x^1},\overset{(m)}{x^1}]=f_1^{(m)}<x^1,\dots,x^k>,$$

$$\psi_r^{(m)}<h^{-1}x^1,\dots,h^{-1}x^k>=(h^{-1}\overset{(m)}{x^1},h^{-1}x^r)=(h^{-1}\overset{(m)}{x^1})^Th^{-1}x^r=(\overset{(m)}{x^1})^T(h^{-1})^Th^{-1}x^r=$$

$$=(\overset{(m)}{x^1})^Th^{-1}h^{-1}x^r=[\overset{(m)}{x^1},x^r]=f_r^{(m)}<x^1,\dots,x^k>.$$

Это означает, что d - многочлены $f_1^{(m)}<x^1,\dots,x^k>$, $f_r^{(m)}<x^1,\dots,x^k>$ инвариантны относительно действия псевдоортогональной группы и образуют d - рациональный базис в $C<x^1,\dots,x^k>^{O(p,q)}$ (см. лемму 4).

Рассмотрим теперь специальную псевдоортогональную группу $SO(p,q)$. Для описания системы образующих d - поля $C<x^1,...,x^k>^{SO(p,q)}$ нам понадобится следующая

Теорема 3. *([11], теорема 12.7). Система d - многочленов*

$$(\overset{(m)}{x^1},\overset{(m)}{x^1}),(\overset{(\ell)}{x^1},x^r),[x^1\overset{(1)}{x^1}\dots\overset{(n-1)}{x^1}],$$

где $m=\overline{0,(n-2)},\ell=\overline{0,(n-1)},r=\overline{2,k}$, является d - рациональным базисом в d - поле $C<x^1,...,x^k>^{SO(n,C)}$.

Используя теперь лемму 4 и теорему 3, получим следующую теорему.

Теорема 4. *В d - поле $C<x^1,...,x^k>^{SO(p,q)}$ следующая система многочленов*

$$[\overset{(m)}{x^1},\overset{(m)}{x^1}],\ [\overset{(\ell)}{x^1}x^r],(-i)^q[x^1\overset{(1)}{x^1}\dots\overset{(n-1)}{x^1}],$$

где $m=\overline{0,(n-2)},\ell=\overline{0,(n-1)},r=\overline{2,k}$, является d - рациональным базисом.

Доказательство. Согласно теореме 3, многочлены

$$q^{(m)} < x^1, \dots, x^k >= (\overset{(m)}{x^1}, \overset{(m)}{x^1});$$

$$\psi_r^{(\ell)} < x^1, \dots, x^k >= (\overset{(\ell)}{x^1}, x^r), \psi < x^1, ..., x^k >= [x^1 \overset{(1)}{x^1} \dots \overset{(n-1)}{x^1}]$$

образуют d - рациональный базис в d - поле $C < x^1, \dots, x^k >^{SO(n,C)}$, где $m = \overline{0, (n-2)}, \ell = \overline{0, (n-1)}, r = \overline{2, k}$.

Повторяя доказательство теоремы 2, получим, что

$$q^{(m)} < h^{-1}x^1, ..., h^{-1}x^k > = [\overset{(m)}{x^1}, \overset{(m)}{x^1}];$$

$$\psi_r^{(\ell)} < h^{-1}x^1, ..., h^{-1}x^k > = [\overset{(\ell)}{x^1}, x^r].$$

Кроме того,

$$\psi(h^{-1}x^1, \dots, h^{-1}x^k) = [(h^{-1}x^1)(h^{-1}\overset{(1)}{x^1}) \dots (h^{-1} \overset{(n-1)}{x^1})] =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^1 & \cdots & \overset{(n-1)}{x_1^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_p^1 & \cdots & \overset{(n-1)}{x_p^1} \\ -i\, x_{p+1}^1 & \cdots & -i\, \overset{(n-1)}{x_{p+1}^1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ -i\, x_n^1 & \cdots & -i\, \overset{(n-1)}{x_n^1} \end{vmatrix} = (-i)^q \left[x^{-1} \overset{(1)}{x^1} \dots \overset{(n-1)}{x^1} \right].$$

В силу теоремы 3 и леммы 4, получим, что многочлены, указанные в формулировке теоремы 4, образуют d - рациональный базис в d - поле $C < x^1, \dots, x^k >^{SO(p,q)}$. $\square$

4. Эквивалентность путей для действия специальной псевдоортогональной группы.

Пусть G - подгруппа в группе $GL(n, C)$. Две системы путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ и $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ называются G - эквивалентными, если существует такое $g \in G$, что $y^i(t) = g\, x^i(t)$ при любых $t \in [0, 1]$, $i = \overline{1, k}$.

Рассмотрим конечную систему путей $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$ в E, для которой один путь является регулярным. Не ограничивая общности, всегда можно считать, что путь $x^1(t)$ - регулярен. Такие системы путей будем называть регулярными.

Следующая теорема дает необходимые и достаточные условия для $O\,(p, q)$ (соответственно $SO\,(p, q)$) - эквивалентности регулярных систем путей на языке матриц $M(x)(t)$.

Теорема 5. (i) *Две регулярные системы путей* $\{x^i(t), i=\overline{1,k}\}$ *и* $\{y^i(t), i=\overline{1,k}\}$ *в* E *являются* $O\,(p,q)$ *- эквивалентными тогда и только тогда, когда выполнены следующие равенства:*

$$1)\ \big(M(x^1)(t)\big)^{-1}M'(x^1(t)) = \big(M(y^1(t))\big)^{-1}M'(y^1(t)); \tag{1}$$

$$2)\ M^T(x^1(t))I\,M(x^1(t)) = M^T(y^1(t))I\,M(y^1(t)); \tag{2}$$

$$3)\ \big(M(x^1(t))\big)^{-1}x^i(t) = \big(M(y^1(t))\big)^{-1}y^i(t), \tag{3}$$

для всех $t\in[0,1]$, $i=\overline{2,k}$.

(ii) *Две регулярные системы путей* $\{x^i(t), i=\overline{1,k}\}$ *и* $\{y^i(t), i=\overline{1,k}\}$ *-* $SO\,(p,q))$ *- эквивалентны в том и только в том случае, когда верны равенства (1) - (3) и равенство*

$$\det M(x^1(t)) = \det M(y^1(t)) \tag{4}$$

для всех $t\in[0,1]$.

Доказательство. Необходимость. Если $\{x^i(t), i=\overline{1,k}\}$ и $\{y^i(t), i=\overline{1,k}\}$ - $O\,(p,q)$ - эквивалентны (соответственно, - $SO\,(p,q))$ - эквивалентны), то существует такое $g\in O\,(p,q)$ (соответственно, $g\in SO\,(p,q)$), что $y^i(t)=g\,x^i(t)$ для всех $i=\overline{1,k}$. Справедливость соотношений 1), 2), 3) теперь легко проверяется:

$$\big(M(y^1)\big)^{-1}M'(y^1) = \big(g\,M(x^1)\big)^{-1}g\,M'(x^1) = \big(M(x^1)\big)^{-1}g^{-1}g\,M'(x^1) = \big(M(x^1)\big)^{-1}M'(x^1);$$

$$M^T(y^1)I\,M(y^1) = (g\,M(x^1)^T I\,g\,M(x^1) = M^T(x^1)\,g^T I\,g\,M(x^1) = M^T(x^1)I\,M(x^1);$$

$$\big(M(y^1)\big)^{-1}y^i = \big(g\,M(x^1)\big)^{-1}(g\,x^i) = \big(M(x^1)\big)^{-1}g^{-1}g\,x^i = \big(M(x^1)\big)^{-1}x^i.$$

В случае п. (ii) для группы $SO\,(p,q)$ имеем также, что $\det M(y^1) = \det(g\,M(x^1)) = \det g\cdot\det M(x^1) = \det M(x^1)$.

Достаточность. Пусть для регулярных конечных систем путей $\{x^i(t), i=\overline{1,k}\}$ и $\{y^i(t), i=1,k\}$ выполняются соотношения 1) - 3). Если $A=A(t)$ - обратимая матрица, то, очевидно, что $(A^{-1})' = -A^{-1}A'A^{-1}$. Используя, это равенство, соотношение 1) может быть переписано в виде

$1')\Big(M(y^1)\,\big(M(x^1)\big)^{-1}\Big)' = 0.$

Кроме того, соотношение 2) переписывается в виде

$2')\Big((M(y^1)\,\big(M(x^1)\big)^{-1}\Big)^T I\,M(y^1)\,\big(M(x^1)\big)^{-1} = I.$

Равенства $1')$, $2')$ означают, что $M(y^1)M^{-1}(x^1) = g\in O(p,q)$, т.е. $M(y^1) = g\,M(x^1)$, в частности, $y^1 = g\,x^1$. Из равенства 3) вытекает, что

$$\big(M(x^1)\big)^{-1}x^i = \big(M(y^1)\big)^{-1}y^i = \big(g\,M(x^1)\big)^{-1}y^i = \big(M(x^1)\big)^{-1}g^{-1}y^i,$$

т.е. $y^i = g\,x^i$ для любых $i=\overline{1,k}$, В случае п. (ii), используя равенство 4), получим, что $\det M(x^1) = \det M(y^1) = \det(gM(x^1)) = \det g\cdot\det M(x^1)$, т.е. $\det g = 1$, и поэтому $g\in SO\,(p,q)$. □

Приведем теперь, критерий $O\,(p,q)$ - эквивалентности (соответственно, $SO\,(p,q)$ - эквивалентности) двух регулярных конечных систем путей на языке равенства билинейных форм.

Теорема 6. (i) *Две регулярные системы путей* $\{x^i(t), i=\overline{1,k}\}$ *и* $\{y^i(t), i=\overline{1,k}\}$ *являются* $O\,(p,q)$ *- эквивалентными тогда и только тогда, когда*

$$[\overset{(m)}{x^1}, \overset{(m)}{x^1}](t) = [\overset{(m)}{y^1}, \overset{(m)}{y^1}](t); \tag{5}$$

$$[\overset{(\ell)}{x^1}, x^r](t) = [\overset{(\ell)}{y^1}, y^r](t)$$

для всех $t\in[0,1], m=\overline{0,(n-1)}, \ell=\overline{0,(n-1)}, r=\overline{2,k}$.

(ii) *Две регулярные системы путей* $\{x^i(t), i=\overline{1,k}\}$ *и* $\{y^i(t), i=\overline{1,k}\}$ *являются* $SO\,(p,q)$ *- эквивалентны в том и только в том случае, когда выполняются равенства (5), для всех* $m=\overline{0,(n-2)}, \ell=\overline{0,(n-1)}, r=\overline{2,k}$, *а также равенство*

$$[x^1\,\overset{(1)}{x^1}\ldots\overset{(n-1)}{x^1}](t) = [y^1\,\overset{(1)}{y^1}\ldots\overset{(n-1)}{y^1}](t) \tag{6}$$

для всех $t\in[0,1]$.

Доказательство. (i) Ясно, что из равенства $y^i = g\,x^i, g\in O\,(p,q)$ следуют равенства (5) (см. лемму 1).

Обратно, предположим, что верны равенства (5). Согласно теореме 2, имеем, что $f < y^1,...,y^k >= f < x^1,...,x^k >$ для любой d - рациональной функции $f \in C < x^1,...,x^k >^{O(p,q)}$.

Следовательно верны равенства 1), 2) и 3) из теоремы 5. Поэтому, в силу этой теоремы, системы путей $\{x^i(t), i=\overline{1,k}\}$ и $\{y^i(t), i=\overline{1,k}\}$ - $O\,(p,q)$ - эквивалентны.

(ii) Если $y^i = g\,x^i$ для всех $i=\overline{1,k}$, где $g\in SO\,(p,q)$, то, очевидно, выполняются равенства (5) (см. лемму 1). Кроме того, из равенства $M(y^1)=M(g\,x^1)=g\,M(x^1)$ следует, что

$$[y^1\,\overset{(1)}{y^1}\ldots\overset{(n-1)}{y^1}] = \det M(y^1) = \det g \det M(x^1) = [x^1\,\overset{(1)}{x^1}\ldots\overset{(n-1)}{x^1}],$$

т.е. выполняется равенство (6).

Пусть теперь верны равенства (5) для всех $m=\overline{0,(n-2)}, \ell=\overline{0,(n-1)}, r=\overline{2,k}, t\in[0,1]$, а также равенство (6) для всех $t\in[0,1]$. Согласно теореме 4, получаем, что $f < y^1,...,y^k >= f < x^1,...,x^k >$ для любых $f\in C < x^1,...,x^k >^{SO(p,q)}$. Следовательно, верны равенства (1) - (4) из теоремы 5. Используя теорему 5 (ii), получим, что системы путей $\{x^i(t), i=\overline{1,k}\}$ и $\{y^i(t), i=\overline{1,k}\}$ является $SO\,(p,q)$ - эквивалентными.

□

Список литературы

[1] Khadjiev Dj., Peksen O. The complete of global integral and differential invariants for equi - affine curves // Differential Geometry and Applications – 2004. – V.20, № 2. – P. 167 - 175.

[2] Kraft H. Geometrische Methoden in der Invarianten - theorie. – Braunschweig / Wiesbaden: Viewed, 1984. – 308 s.

[3] Mumford D., Fogarty J. Geometric invariant theory. – Berlin: Springer - Verlag, 1982. - 219 p.

[4] Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. —М.: ИЛ. – 1947. – 408 с.

[5] Винберг Э.Б., Попов И.Л. Теория инвариантов. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. – М.: ВИНИТИ. – 1989. – Т. 55. – С. 137 - 309.

[6] Дьёдонне Ж., Керрол Дж., Мамфорд Д. Геометрическая теория инвариантов – М.: Мир, – 1974. – 280 с.

[7] Капланский И. Введение в дифференциальную алгебру – М.: ИЛ. – 1959. – 86 с.

[8] Муминов К.К. Эквивалентность путей относительно действия симплектической группы // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 7. – С. 27 - 38.

[9] Муминов К.К. Эквивалентность кривых относительно действия симплектической группы // Известия вузов. Математика. – 2009. – № 6. – С. 31 - 36.

[10] Спрингер Т. Теория инвариантов. – М.:Наука. – 1981.– 191 с.

[11] Хаджиев Дж. Приложение теории инвариантов к дифференциальной геометрии кривых. — Ташкент: ФАН, 1988. — 136 с.

[12] Хаджиев Дж., Арипов Р.Г. Полная система глобальных дифференциальных и интегральных инвариантов кривой в евклидовой геометрии // Известия вузов. Математика. — 2007. — № 7. — С. 3 - 16.

Эквівалентність скінченних сістем шляхів відносно дії спеціальній псевдоортогонаній групи

Нехай E - n - мірний комплексний простір, $[x, y] = x_1y_1 + \cdots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \cdots - x_ny_n$ — індефінітна метрика в E, та $SO(p, q)$ — спеціальна псевдоортогональна підгрупа в $GL(n, C)$. C^∞ — диференціруемий шлях $x : [0, 1] \to E$ називається регулярним, якщо $\det M(x)(t) \neq 0$ для всіх $t \in [0, 1]$, де $M(x)(t)$ є $n \times n$ — матриця $(x(t)\, x'(t) \ldots x^{(n-1)}(t))$. Скінеченна система C^∞ — диференціруемих шляхів $\{x^i(t),\ i = \overline{1, k}\}$ называється регулярной, якщо $x^1(t)$ є регулярний шлях.

Дві системы $\{x^i(t), i = \overline{1, k}\}$, $\{y^i(t), i = \overline{1, k}\}$ шляхів в E є $SO(p, q)$ — еквивалентні, якщо існує таке $g \in SO(p, q)$, що $y^i(t) = g\, x^i(t)$ для всіх $t \in [0, 1]$, $i = \overline{1, k}$.

Теорема. *Дві регулярні системи шляхів* $\{x^i(t), i = \overline{1,k}\}$ *і* $\{y^i(t), i = \overline{1,k}\}$ *є* $SO(p,q)$ *є еквівалентні тоді і тільки тоді, коли*

$$[\overset{(m)}{x^1}, \overset{(m)}{x_1^1}](t) = [\overset{(m)}{y^1}, \overset{(m)}{y^1}](t), \quad [\overset{(\ell)}{x^1}, x^r](t) = [\overset{(\ell)}{y^1}, y^r](t),$$

$$\det M(x^1)\,(t) = \det M(y^1)\,(t)$$

для всіх $t \in [0,1]$, $m = \overline{0,(n-2)}$, $\ell = \overline{0,(n-1)}, r = \overline{2,k}$.

Ключові слова: псевдоортогональна група, дія групы, регулярний шлях

The equivalence of finite systems of pathes respect to action of the special pseudoorthogonal group

Let E *be a* n *- dimensional complex space,* $[x,y] = x_1y_1 + \dots + x_py_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_ny_n$ *be an indefinite metrics in* E *and* $SO(p,q)$ *be the special pseudoorthogonal subgroup of* $GL(n,C)$. C^∞ *- differentiable path* $x : [0,1] \to E$ *is called regular, if* $\det M(x)(t) \neq 0$ *for any* $t \in [0,1]$, *where* $M(x)(t)$ *is the* $n \times n$ *- matrix* $(x(t)\,x'(t)\dots x^{(n-1)}(t))$. *The finite system of* C^∞ *- differentiable paths* $\{x^i(t),\ i = \overline{1,k}\}$ *is called regular, if* $x^1(t)$ *is the regular path.*

Two systems $\{x^i(t), i = \overline{1,k}\}, \{y^i(t), i = \overline{1,k}\}$ *of paths in* E *is said to be* $SO(p,q)$ *- equivalent if there exists element* $g \in SO(p,q)$ *such that* $y^i(t) = g\,x^i(t)$ *for all* $t \in [0,1]$, $i = \overline{1,k}$.

Theorem. *Two regular systems* $\{x^i(t), i = \overline{1,k}\}, \{y^i(t), i = \overline{1,k}\}$ *of paths in* E *are* $SO(p,q)$ *- equivalent if and only if*

$$[\overset{(m)}{x^1}, \overset{(m)}{x^1}](t) = [\overset{(m)}{y^1}, \overset{(m)}{y^1}](t), \quad [\overset{(\ell)}{x^1}, x^r](t) = [\overset{(\ell)}{y^1}, y^r](t),$$

$$\det M(x^1)\,(t) = \det M(y^1)\,(t)$$

for all $t \in [0,1]$, $m = \overline{0,(n-2)}$, $\ell = \overline{0,(n-1)}, r = \overline{2,k}$.

Keywords: pseudoorthogonal group, action of group, regular path