Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 92–96.

УДК 517. 432

Ю. Л. Кудряшов

σ–СИММЕТРИЧЕСКАЯ ДИЛАТАЦИЯ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА НЕОГРАНИЧЕННОГО ОПЕРАТОРА

В статье производится явное построение σ–симметрической дилатации узла неограниченного оператора с непустым множеством регулярных точек.

Ключевые слова: неограниченный оператор, узел, дилатация.

Введение

Множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2 обозначим $L(H_1,\ H_2)$.

Определение 1. Совокупность гильбертовых пространств H, E и операторов $A \in L(H,\ H)$, $\varphi \in L(H,\ E)$, $\sigma \in L(E,\ E)$, $\sigma = \sigma^*$ называется локальным узлом [1, 2]

$$\Delta = (A, H, \varphi, E, \sigma), \ \text{ если } \ A - A^* = i\varphi^*\sigma\varphi.$$

Оператор A называется основным оператором узла Δ, φ —каналовым, σ — метрическим оператором узла Δ. Пространство H — внутренним, E — внешним пространствами узла Δ.

Определение 2. Оператор B, действующий в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$ называется дилатацией оператора A, действующего в гильбертовом пространстве H, если

$$H \subset \widetilde{H} \quad P_H(B-\lambda I)^{-1}\big|_H = (A-\lambda I)^{-1}$$

при любых λ, принадлежащей некоторой области $\operatorname{Im}\lambda < -a \quad (a > 0)$ [1, 4].

Определение 3. Оператор B называется дилатацией узла Δ, если оператор B является дилатацией основного оператора узла при любых φ и σ.

В случае ограниченного диссипативного оператора A в [2] строится самосопряженная дилатация узла Δ при $\sigma = E$.

Частный случай, когда $\varphi = \varphi^* = \left(\frac{A-A^*}{i}\right)^{\frac{1}{2}}$ был построен в [3].

В данной работе введенные выше понятия обобщаются на случай неограниченных операторов.

1. Предварительные сведения

Пусть оператор A действует в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения $\overline{\mathfrak{D}(A)} = H$ и непустым множеством регулярных точек $\lambda_0 \in \rho(A)$ и $\operatorname{Im}\lambda_0 < 0$.

Рассмотрим оператор

$$B_{\lambda_0} = iR_{\lambda_0} - iR^*_{\lambda_0} + 2\operatorname{Im}\lambda_0 R^*_{\lambda_0} R_{\lambda_0}, \quad \text{где } R_{\lambda_0} = (A - \lambda_0 I)^{-1}.$$

Оператор B_{λ_0} назовем дефектным оператором оператора A, $B_{\lambda_0} \in L(H,\ H)$.

$$(B_{\lambda_0} f,\ f) = i(R_{\lambda_0} f,\ f) - i(R^*_{\lambda_0} f,\ f) + 2\operatorname{Im}\lambda_0 \|R_{\lambda_0} f\|^2,$$

пусть $g = R_{\lambda_0} f$, тогда

$$(B_{\lambda_0} f,\ f) = 2\operatorname{Im}(Ag,\ g) \tag{1}$$

Из (1) следует, что если оператор A диссипативный, то $B_{\lambda_0} \geq 0$.

Определение 4. Совокупность гильбертовых пространств H, E и оператора A (не обязательно ограниченного, действующего в H), $\psi \in L(H,\ E)$, $\sigma \in L(E,\ E)$, $\sigma = \sigma^*$ называется операторным узлом

$$\theta = (A, H, \psi, E, \sigma), \ \text{ если } \ B_{\lambda_0} = \psi^* \sigma \psi.$$

Название операторов и пространств, как и в случае узла Δ.

Любой оператор A с $\rho(A) \neq \emptyset$, $\lambda_0 \in \rho(A)$ может быть включен в узел, причем неоднозначно.

Можно положить

$$E = \overline{B_{\lambda_0} H}, \quad \psi = P_E, \quad \sigma = B_{\lambda_0}\big|_E,$$

P_E — ортопроектор из H на E.

Или

$$E = \overline{B_{\lambda_0} H}, \quad \psi = |B_{\lambda_0}|^{\frac{1}{2}}, \quad \sigma = \mathcal{J} = \operatorname{sign} B_{\lambda_0}. \tag{2}$$

Определение 5. Оператор B называется дилатацией операторного узла θ, если B является дилатацией основного оператора A узла θ при любых операторах ψ и σ из узла θ.

2. Построение σ — симметрической дилатации

Рассмотрим линейное многообразие вектор — функций $V(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве E при $t \in [0;\ +\infty)$. Обозначим через $L_2(0,\ \infty;\ E)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания данного линейного многообразия вектор — функций по норме

$$\|V\|^2_{L^2(0,\ \infty;\ E)} = \int\limits_0^\infty \|V(t)\|^2_E dt < \infty.$$

Введем пространство $\widetilde{H} = H \oplus L_2(0,\ \infty;\ E)$, $\tilde{h} = \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix}$, $\tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ h_1 \end{pmatrix}$ со скалярным произведением

$$(\tilde{h},\ \tilde{h}_1)_{\widetilde{H}} = (V(t),\ V_1(t))_{L^2(0,\ \infty;\ E)} + (h,\ h_1)_H.$$

С помощью метрического оператора σ узла θ введем в пространстве $\widetilde{H}$ σ — метрику следующим равенством:

$$\sigma \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma} V \\ h \end{pmatrix},$$

$\tilde{\sigma} V = \sigma V(t)$ при каждом $t \in [0;\ \infty)$.

Обозначим $[f,\ g]_{\widetilde{H}} = (\sigma f,\ g)_{\widetilde{H}}$.

Определение 6. Оператор B, действующий в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$ называется σ — симметрическим, если для любых $\{f,\ g\} \subset \mathfrak{D}(B)$

$$[Bf,\ g]_{\widetilde{H}} = [f,\ Bg]_{\widetilde{H}} \ \text{ и } \ \overline{\mathfrak{D}(B)} = \widetilde{H}$$

в обычной метрике пространства $\widetilde{H}$.

Построим в пространстве $\widetilde{H}$ оператор S следующим образом: вектор $\tilde{h} = \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{V(t),\ \dfrac{dV(t)}{dt}\right\} \subset L_2(0,\ \infty;\ E)$; 2) $h \in \mathfrak{D}(A)$; 3) $V(0) = i\psi(A - \lambda_0 I)h$.

Оператор S определяется так

$$S\tilde{h} = S \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\dfrac{dV(t)}{dt} \\ Ah \end{pmatrix}.$$

Теорема 1. *Оператор S является σ–симметрической дилатацией узла θ.*

Доказательство. Из (1) следует, что

$$(\sigma\psi(A - \lambda_0 I)h,\ \psi(A - \lambda_0 I)h) = 2\,\mathrm{Im}\,(Ah,\ h) \quad \text{для любого} \quad h \in \mathfrak{D}(A). \tag{3}$$

.

Пусть $\tilde{h} \in \mathfrak{D}(S)$, тогда

$$[S\tilde{h},\ \tilde{h}]_{\widetilde{H}} - [\tilde{h},\ S\tilde{h}]_{\widetilde{H}} = \left[i\frac{dV(t)}{dt},\ V\right]_{\widetilde{H}} - \left[V,\ i\frac{dV(t)}{dt}\right]_{\widetilde{H}} + 2i\,\mathrm{Im}\,(Ah,\ h)_H =$$
$$= -i(\sigma V(0),\ V(0))_H + 2i\,\mathrm{Im}\,(Ah,\ h)_H = 0.$$

Последнее равенство получилось, используя (3) и условие 3 на $\mathfrak{D}(S)$.

Используя, что $\overline{\mathfrak{D}(A)} = H$, легко показать, что $\overline{\mathfrak{D}(S)} = \widetilde{H}$.

Теперь докажем, что S — дилатация оператора A. Обозначим $\mathcal{P}_0 = i\left.\dfrac{dV(t)}{dt}\right|_M$, $M = \big\{\{V(t),\ V'(t)\} \subset L_2(0,\ \infty;\ E)\big|V(0) = 0\big\}$. Так как $\mathrm{Im}\,\lambda_0 < -a, \quad a > 0$, то $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(\mathcal{P}_0)$. Построим оператор R и докажем, что $R = (S - \lambda I)^{-1}$ для λ из некоторой окрестности точки λ_0, $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$.

$$R\tilde{h} = R\begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}V(t) + ie^{-i\lambda t}\psi(I + \mu R_\lambda)h \\ R_\lambda h \end{pmatrix},$$

где $\mu = \lambda - \lambda_0$, $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$,

$$(\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}V(x) = \frac{1}{i}\int\limits_0^x e^{-i\lambda(x-t)}V(t)dt.$$

Вектор $\tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ h_1 \end{pmatrix} = R\tilde{h} \in \mathfrak{D}(S)$, т. к. $V_1(t) \in W_2'(0,\ \infty;\ E)$ и $V_1(0) = [(\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}V(t) + ie^{-i\lambda t}\psi(I + \mu R_\lambda)h]_{t=0} = i\psi(I + \mu R_\lambda)h$, т. к. $h_1 = R_\lambda h$, а $h_1(0) = i\psi(A - \lambda_0 I)h_1$.

Таким образом, все три условия на $\mathfrak{D}(S)$ для вектора $R\tilde{h}$ выполняются.

Пусть $\tilde{h} \in \mathfrak{D}(S)$, тогда $R(S - \lambda I)\tilde{h} = \begin{pmatrix} \overline{V}(t) \\ h_0 \end{pmatrix}$, где

$$\overline{V}(t) = (\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}\left(\frac{idV(t)}{dt} - \lambda V\right) + ie^{-i\lambda t}\psi(I + \mu R_\lambda)(A - \lambda I)h =$$
$$= \overline{V}(t) + ie^{-i\lambda t}\psi(A - \lambda_0 I)h = V(t).$$

Аналогично, получаем

$$(S - \lambda I)R\tilde{h} = \begin{pmatrix} \overline{V}(t) \\ h_0 \end{pmatrix},$$

где

$$\overline{V}(t) = (\mathcal{P} - \lambda I)(\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}V(t) + ie^{-i\lambda t}\psi(I + \mu R_\lambda)h =$$
$$= (\mathcal{P} - \lambda I)(\mathcal{P}_0 - \lambda I)^{-1}V(t) = V(t), \quad \mathcal{P}V = i\frac{dV}{dt},$$

т. к.

$$(\mathcal{P} - \lambda I)(ie^{-i\lambda t}\psi(I + \mu R_\lambda)h) =$$

$$= -\psi(I+\mu R_\lambda)h\frac{d(e^{-i\lambda t})}{dt} - i\lambda e^{-i\lambda t}\psi(I+\mu R_\lambda)h = 0.$$

Из выражения для $R = (S-\lambda I)^{-1}$ следует, что S — дилатация оператора A. $\square$

Выводы

Заметим, что в случае неограниченного диссипативного оператора A с плотной областью определения и $-i \in \rho(A)$ ($\lambda_0 = -i$) симметрическая дилатация была получена в [4, 5], когда $\psi = \sqrt{B_{-i}}$, $\sigma = E$, а $\mathcal{J}$–симметрическая дилатация линейного оператора A с $-i \in \rho(A)$ была построена в [6], когда ψ и σ определяются равенствами (2).

Построение дилатации конкретного оператора связано с вычислением $\sqrt{B_{-i}}$, что довольно сложно. Эта задача была решена в [7] для одного класса операторов, когда $\dim \overline{B_{-i}H} = 1$. В общем случае проще подобрать ψ и σ из операторного узла.

Список литературы

[1] Лившиц М. С., Янцевич А. А. *Теория операторных узлов в гильбертовых пространствах.* — Харьков: Изд. Харьк. ун-та, 1971. — 160 с.

[2] Золотарев В. А. *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов.* — Харьков: ХНУ, 2003. – 342с.

[3] Павлов Б. С. *Самосопряженная дилатация диссипативного оператора Шредингера и разложение по его собственным функциям* // Мат. сб. — 1977. — Т. 102 (144), №4. — С. 511 — 536.

[4] Кужель А. В., Кудряшов Ю. Л. *Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов* // ДАН СССР. — 1980. — Т. 253 №4. — С. 812 — 815.

[5] Кудряшов Ю. Л. *Симметрические и самосопряженные дилатации диссипативных операторов*// Сб.: Теория функций, функц. анализ и их прил. — 1982. — вып. 37. — С. 51 — 54.

[6] Кудряшов Ю. Л. *J — эрмитовы и $\mathcal{J}$ — самосопряженные дилатации линейных операторов* // Динам. системы. — 1984. — вып. 3. — С. 94 — 98.

[7] Кудряшов Ю. Л. *Спектральное представление самосопряженной дилатации одного класса операторов* // Динам. системы. — 2007. — вып. 23. — С. 95 — 98.

σ–симетрична дилатація операторного вузла необмеженого оператора

У статті проводиться явна побудова σ–симетричної дилатації вузла необмеженого оператора з непорожньою множиною регулярних точок.

Ключові слова: необмежений оператор, вузол, дилатація.

σ–symmetrical dilation of operator knot of unbounded operator

In the paper σ–symmetrical dilation of knot of unbounded operator with unempty set of regular points is constructed explicitly.

Keywords: unbounded operator, knot, dilation.