Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 90–99.

УДК 519.816 MSC2000: 91A80517.922

Н. Г. Солдатова

О РЕШЕНИИ ТРЕХКРИТЕРИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ПРИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

В работе формализовано гарантированное решение трехкритериальной задачи при неопределенности на основе процедуры принятия решения в иерархической двухуровневой игре. Получены условия существования данного решения. Приведен пример.

E-mail: solnata@pochta.ru

1. Постановка задачи

Рассмотрим трехкритериальную задачу при неопределенности

$$\langle X, Y, F(x,y) \rangle, \tag{1}$$

где множество $X \subset \mathbb{R}^n$ *стратегий* x у ЛПР (лица, принимающего решение), множество $Y \subset \mathbb{R}^m$ *чистых неопределенностей* y, скалярные функции $F_i(x,y)$ $(i = 1, 2, 3)$ являются компонентами векторного критерия

$$F(x,y) = (F_1(x,y), F_2(x,y), F_3(x,y)).$$

На «содержательном уровне», цель ЛПР состоит в выборе такой стратегии $x \in X$, при которой все компоненты векторного критерия $F(x,y)$ принимают одновременно возможно *большие* значения, при этом ЛПР ориентируется на возможность реализации любой чистой неопределенности $y \in Y$.

Одновременно с чистыми неопределенностями $y \in Y$ здесь будем применять «информированные неопределенности» – m-вектор-функции $y(x) : X \to Y$, $y(\cdot) \in Y^X$. Последние использованы академиком Н.Н. Красовским при изучении детерминированного варианта антагонистической игры [5, с. 353 - 354], где выделяется случай различной информированности игроков. В (1) будем считать, что один игрок (ЛПР) ограничен только чистыми стратегиями $x \in X$, а второй (формирующий в (1) неопределенность) может использовать «любую мыслимую информацию»

[5, с. 354]. В частности, он может знать стратегию, реализуемую ЛПР, то есть имеет место так называемая *информационная дискриминация* ЛПР. Тогда неопределенность в задаче (1) формируется в виде m-вектор-функции $y(x) : X \to Y$, $y(\cdot) \in Y^X$, где Y^X — множество m-вектор-функций $y(x)$, определенных на X со значениями в Y. Такие функции $y(\cdot) \in Y^X$ называют в теории игр *контрстратегиями.* Далее ограничимся подмножеством Y^X, именно непрерывными m-вектор-функциями $y(x)$ (этот факт обозначаем $y(\cdot) \in C(X, Y)$). Задача вида (1), в которой в качестве неопределенностей используются контрстратегии (информированные неопределенности $y(x)$) названа в [5, с. 353] *минимаксной.*

2. Иерархическая интерпретация максимина

Сначала рассмотрим однокритериальную задачу при неопределенности

$$\langle X, Y, f(x, y)\rangle. \tag{2}$$

В (2) множество $X \subseteq \mathbb{R}^n$ стратегий x, множество $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ чистых неопределенностей y, скалярный критерий $f(x, y)$ определен на произведении $X \times Y$.

Определение 1. Пара $(x^g, f^g) \in X \times \mathbb{R}$ является максиминным решением задачи (2), если

$$\max_{x\in X}\min_{y\in Y} f(x, y) = \min_{y\in Y} f(x^g, y) = f^g. \tag{3}$$

Фактически в цепочке равенств (3) используются две операции: *внутреннего минимума* и *внешнего максимума.* В первой из них для каждого $x \in X$ находится m-вектор-функция $y(x) : X \to Y$ такая, что

$$\min_{y\in Y} f(x, y) = f(x, y(x)) = f[x] \qquad \forall x \in X, \tag{4}$$

во второй операции – *внешнего максимума* – как раз и определяются как стратегия x^g, так и число f^g такие, что

$$\max_{x\in X} f(x, y(x)) = f(x^g, y(x^g)) = f^g. \tag{5}$$

С точки зрения теории иерархических игр процесс построения (x^g, f^g) можно представить в виде иерархической двухуровневой трехходовой игры, в которой право **первого хода** принадлежит игроку верхнего уровня иерархии (ЛПР). Он сообщает игроку нижнего уровня «свои» возможные стратегии $x \in X$.

Второй ход за игроком нижнего уровня: он формирует «информированную» неопределенность $y(x) : X \to Y$, $y(\cdot) \in Y^X$, которая определена в (4) и отсылает найденную $y(x)$ на верхний уровень иерархии. В этом случае подразумевается *информационная дискриминация* ЛПР — игрока верхнего уровня иерархии. Наконец, **третий ход** снова за ЛПРом. Он, исходя из (5), формирует пару (x^g, f^g), которая как раз и является максиминным решением задачи $\langle X, Y, f(x, y)\rangle$ (рис. 1).

ЛПР предлагает пользователю применять стратегию $x^g \in X$ по двум причинам:

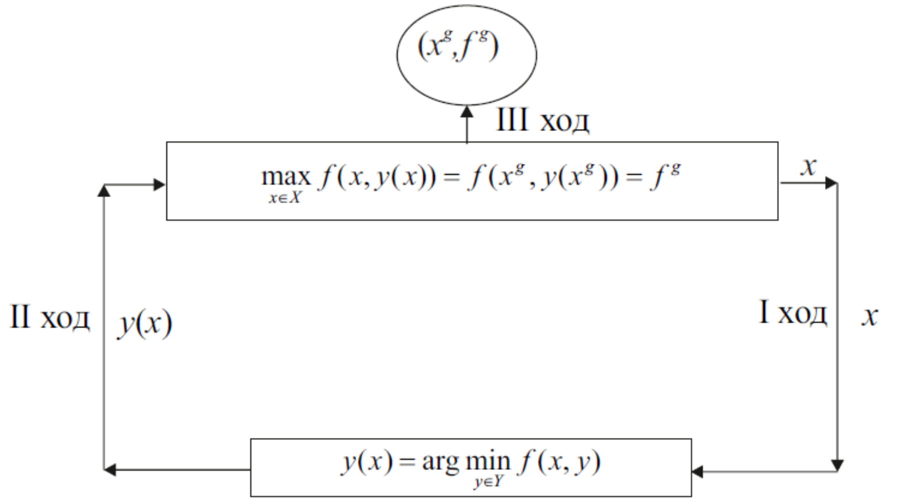

Рис. 1. Процедура построения максиминного решения (x^g, f^g)

a) каждой стратегии $x \in X$ (в результате операции *внутреннего минимума*) ставится в соответствие гарантия $f[x]$, ибо

$$f[x] \leqslant f(x, y) \qquad \forall y \in Y$$

(т.к. исход $f[x]$ «обеспечивает себе» ЛПР при любых $y \in Y$ за счет использования стратегии x);

b) из таких гарантий $f[x]$ игрок верхнего уровня (ЛПР) выбирает наибольшую (максимальную), ибо

$$f^g = f[x^g] \geqslant f[x] \qquad \forall x \in X.$$

3. Формализация сильно гарантированного решения трехкритериальной задачи

Приведем одно из возможных понятий гарантированного решения задачи (1).

Определение 2. Пару $(x^S, F^S = F[x^S]) \in X \times \mathbb{R}^3$ назовем сильно гарантированным решением задачи (1), если

1^o. существуют три непрерывные единственные m-вектор-функции $y^{(i)}(x) : X \to Y$, определяемые тождествами

$$\min_{y\in Y} F_i(x, y) = F_i(x, y^{(i)}(x)) = F_i[x] \qquad \forall x \in X \qquad (i = 1, 2, 3); \tag{6}$$

2^o. для трехкритериальной «задачи гарантий»

$$\langle X, F[x] = (F_1[x], F_2[x], F_3[x])\rangle \tag{7}$$

стратегия x^S максимальна по Слейтеру, то есть при всех $x \in X$ несовместна система строгих неравенств
$$F_i[x] > F_i[x^S] \qquad (i = 1, 2, 3).$$

Замечание 1. Пара (x^S, F^S) выбрана в качестве гарантированного решения задачи (1) по следующим двум причинам:

a) требование (6) ставит в соответствие каждой стратегии $x \in X$ векторную гарантию $F[x] = (F_1[x], F_2[x], F_3[x])$, ибо при $\forall y \in Y$ будет
$$F_i(x, y) \geqslant F_i[x] \qquad (i = 1, 2, 3);$$

b) из всех таких гарантий наибольшая (в «векторном смысле») будет $F[x^S]$.

Сам процесс построения сильно гарантированного решения (x^S, F^S) представим (аналогично рис. 1) следующей трехшаговой иерархической двухуровневой игрой двух лиц (рис. 2).

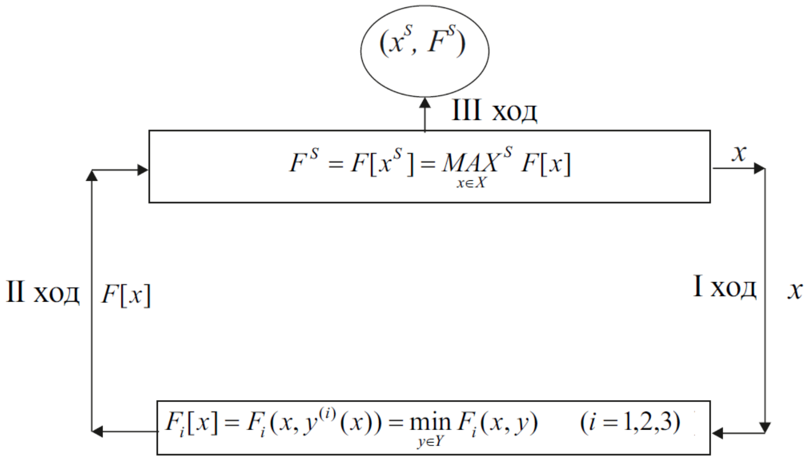

Рис. 2. Способ построения сильно гарантированного решения (x^S, F^S)

По схеме из рис. 2 **первый ход** за игроком верхнего уровня иерархии (ЛПР): он отсылает на нижний уровень свои возможные стратегии $x \in X$.

Второй ход за игроком, «ведающим» формированием неопределенности; здесь, аналогом операции внутреннего минимума (в определении максимина) является формирование для каждого критерия $F_i(x, y)$ «его» неопределенности
$$y^{(i)}(x) = arg \min_{y\in Y} F_i(x, y) \qquad (i = 1, 2, 3)$$
с последующим нахождением $F_i[x] = F_i(x, y^{(i)}(x))$ $(i = 1, 2, 3)$ и передачей векторного критерия $F[x]$ на верхний уровень иерархии.

Третий ход (аналог внешнего максимума в определении максимина) за ЛПР. Он определяет максимальную по Слейтеру стратегию x^S и максимум по Слейтеру F^S

в трехкритериальной задаче (7) (обозначение $F^S = F[x^S] = \underset{x \in X}{MAX^S} F[x]$ на рис. 2, взятое из [4], как раз и означает, что x^S является максимальной по Слейтеру стратегией в трехкритериальной задаче (7)). Затем ЛПР сообщает о результатах (x^S, F^S) пользователю. Последний же, основываясь на замечании 1, может использовать эту пару (x^S, F^S) как «руководство к действию».

4. Существование

Теорема 1. *Пусть в* (1)

1^o. *множества X, Y — компакты и Y выпукло;*

2^o. *каждый из критериев $F_i(x, y)$ непрерывен на $X \times Y$ и строго выпуклый по y для $\forall x \in X$.*

Тогда в трехкритериальной задаче существует сильно гарантированное решение.

Заметим, что функции $F_i(x, y)$ строго выпуклы по y при каждом $x \in X$, если при любых постоянных $\lambda \in (0, 1)$ и всяких $y^{(j)} \in Y$ $(j = 1, 2)$ имеет место

$$F_i(x, \lambda y^{(1)} + (1 - \lambda) y^{(2)}) < \lambda F_i(x, y^{(1)}) + (1 - \lambda) F_i(x, y^{(2)}) \qquad \forall x \in X.$$

Доказательство теоремы 1. В силу компактности и выпуклости множества $Y \subset \mathbb{R}^m$, строгой выпуклости $F_i(x, y)$ по y и [3, с. 80–83] существуют единственные непрерывные m-вектор-функции $y^{(i)}(x) : X \to Y$ такие, что имеют место тождества (6). Но тогда непрерывными на $X \times Y$ будут и скалярные функции $F_i[x] = F_i(x, y^{(i)}(x))$ как суперпозиции непрерывных $F_i(x, y)$ и $y^{(i)}(x)$. Наконец, из компактности X, непрерывности $F_i[x]$ и [6, с. 66–71, 137] следует существование максимальной по Слейтеру (в задаче (7)) стратегии x^S. Затем с помощью стратегии $x^S \in X$ определяем $F_i[x^S] = F_i^S$ — i-тые $(i = 1, 2, 3)$ компоненты векторной гарантии $F^S = F[x^S]$.

Замечание 2. Отметим, что приведенное доказательство справедливо для задачи (1) с каким угодно конечным числом критериев.

5. Линейно-квадратичная задача без ограничений

Будем считать, что в (2) будет $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$, и критерий

$$f(x, y) = x'Ax + 2x'By + y'Cy + 2a'x + 2c'y + d, \tag{8}$$

где матрицы A, B и C постоянны и соответствующих размерностей, кроме того A и C — симметричны, также вектора a и c соответствующих размерностей и постоянны, наконец d — постоянное число; штрих сверху означает операцию транспонирования. Если квадратичная форма $x'Ax$ $(y'Cy)$ определенно отрицательна (соответственно, положительна), то этот факт обозначается $A < 0$ $(C > 0)$, используем также нуль k-вектор $0_k \in \mathbb{R}^k$.

Далее в (1) ограничимся лишь специальным трехкомпонентным критерием $F[x] = (F_1[x], F_2[x], F_3[x])$, где $F_1[x] = \min\limits_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y)$, $F_2[x] = \min\limits_{y\in\mathbb{R}^m}[-\Phi(x,y)]$, $F_3[x] = -R_V[x]$, здесь критерий $f(x,y)$ определен в (8), *функция сожаления* (*по Сэвиджу*)

$$\Phi(x,y) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} f(x,y) - f(x,y) \tag{9}$$

и так называемый [1] *стратегический риск по Вальду*

$$R_V(x) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y) - \min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y). \tag{10}$$

*Замечание 3.*Для приведенной трехкритериальной задачи нельзя применить теорему 1, ибо здесь множества $X = \mathbb{R}^n$ и $Y = \mathbb{R}^m$ (не компакты). Однако специальный вид критерия $f(x,y)$ позволяет найти явный вид сильно гарантированного решения.

Построение сильно гарантированного решения для трехкритериальной задачи при неопределенности

$$\langle X = \mathbb{R}^n, Y = \mathbb{R}^m, \{f(x,y), -\Phi(x,y), -R_V[x]\}\rangle \tag{11}$$

сводится, согласно определению 2, к трем последовательным операциям:

I этап: нахождению явного вида функций $\Phi(x,y)$ и $R_V[x]$ согласно (9) и (10) соответственно;

II этап: построению двух функций $F_1[x] = \min\limits_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y)$, $F_2[x] = \min\limits_{y\in\mathbb{R}^m}[-\Phi(x,y)]$ и, вследствие *зависимости* $R_V[x]$ только от x, $F_3[x] = -R_V[x]$;

III этап: определению ситуации $x^S \in \mathbb{R}^n$ максимальной по Слейтеру в трехкритериальной «задаче гарантий»

$$\langle X, F[x] = (F_1[x], F_2[x], F_3[x])\rangle; \tag{12}$$

для этого достаточно (согласно теории многокритериальных задач [6, с. 69]), например, найти $x^S \in X$, исходя из равенства

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} \psi(x) = \psi(x^S),$$

где $\psi(x) = \sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i F_i[x]$, при каких-либо постоянных $\alpha_i \geqslant 0$ и $\sum\limits_{i=1}^{3} \alpha_i > 0$; наконец с помощью x^S построить вектор $F[x^S] = F^S$.

Тогда пара $(x^S, F^S) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^3$ как раз и образует сильно гарантированное решение задачи (11), (8).

Итак, далее следуем этапам I – III.

Этап I.

Утверждение 1. Если $A < 0$, то функция сожаления $\Phi(x,y)$ из (9) имеет вид

$$\Phi(x,y) = -(x'A' + y'B' + a')A^{-1}(Ax + By + a). \tag{13}$$

Эти формулы получены Жуковским В.И. в [2, с. 105 - 106].

Утверждение 2. Если $A < 0$ и $C > 0$, то стратегический риск по Вальду из (10) примет вид

$$R_V(x) = -(x'K - c'C^{-1}B' + a')K^{-1}(Kx - BC^{-1}c + a), \tag{14}$$

где $K = A - B'C^{-1}B < 0$.

Доказательство утверждения 2. Следуя (10), найдем

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y) = f(x, y^{(1)}(x) = F_1[x] \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

С учетом (8) достаточными условиями существования такого $y^{(1)}(x)$ будут

$$\frac{\partial F_1(x,y)}{\partial y}\Big|_{y^{(1)}(x)} = grad_x F_1(x,y)|_{y^{(1)}(x)} = 2Cy^{(1)}(x) + 2B'x + 2c = 0_m,$$

$$\frac{\partial^2 F_1(x,y)}{\partial y^2} = 2C > 0,$$

где $F_1(x,y) = y'Cy + 2x'By + 2cy$.

Из первого равенства получаем

$$y^{(1)}(x) = -C^{-1}(B'x + c) \tag{15}$$

и, кроме того,

$$[y^{(1)}(x)]'Cy^{(1)}(x) + 2x'By^{(1)}(x) + 2c'y^{(1)}(x) = -[y^{(1)}(x)]'Cy^{(1)}(x).$$

С учетом последнего тождества и (15)

$$\begin{gathered}\min_{y\in R^m} f(x,y) = f(x, y^{(1)}(x)) = F_1[x] = \\ = x'Ax + 2x'a + d - (c' + x'B)C^{-1}(B'x + c) = \\ = x'(A - B'C^{-1}B)x + 2x'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c = \\ = x'Kx + 2x'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c,\end{gathered} \tag{16}$$

где $K = A - B'C^{-1}B$.

Затем построим максиминную стратегию $x^g \in \mathbb{R}^n$ согласно

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n} F_1[x] = F_1[x^g].$$

Последнее равенство имеет место, если

$$\frac{\partial F_1[x]}{\partial x}\Big|_{x^g} = 2Kx^g + 2(a - BC^{-1}c) = 0_n, \tag{17}$$

$$\frac{\partial^2 F_1(x)}{\partial x^2} = 2K < 0.$$

Далее, *во-первых*, установим, что $K < 0$. Этот факт будет следовать из двух цепочек импликаций

$$(C > 0) \Rightarrow (C^{-1} > 0) \Rightarrow (BC^{-1}B' \geqslant 0) \Rightarrow (-BC^{-1}B' \leqslant 0),$$

$$(A < 0 \wedge -BC^{-1}B' \leqslant 0) \Rightarrow (K = A - B'C^{-1}B < 0);$$

здесь для симметричной $m \times m$-матрицы $M \leqslant 0$ ($\geqslant 0$) означает, что $y'My \leqslant 0$ (соответственно $\geqslant 0$) при $\forall y \in \mathbb{R}^m$. Согласно (17) и $K < 0 \Rightarrow \det K \neq 0 \Rightarrow \exists K^{-1}$ и тогда

$$x^g = -K^{-1}(a - BC^{-1}c). \tag{18}$$

Во-вторых, используя (16) – (18), получаем

$$\max_{x\in\mathbb{R}^n}\min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} F_1[x] =$$
$$= F_1[x^g] = (x^g)'Kx^g + 2(x^g)'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c =$$
$$= -(a' - c'C^{-1}B')K^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c =$$
$$= d - c'C^{-1}c - a'K^{-1}a + 2c'C^{-1}B'K^{-1}a - c'C^{-1}B'K^{-1}BC^{-1}c.$$

Наконец, с учетом последнего равенства, (16) и (10), имеем

$$R_V(x) = -x'Kx - 2x'(a - BC^{-1}c) - a'K^{-1}a + 2c'C^{-1}B'K^{-1}a -$$
$$-c'C^{-1}B'K^{-1}BC^{-1}c = -(x'K - c'C^{-1}B' + a')K^{-1}(Kx - BC^{-1}c + a).$$

Этап II.

Утверждение 3. Если $C > 0$ и $A < 0$, то

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m} f(x,y) = x'Kx + 2x'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c,$$

где $K = A - B'C^{-1}B < 0$.

Доказано в (16).

Утверждение 4. Если $A < 0$ и $\det B \neq 0$, то

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m}[-\Phi(x,y)] = \min_{y\in\mathbb{R}^m}(x'A' + y'B' + a')A^{-1}(Ax + By + a) = 0.$$

Доказательство утверждения 4. Достаточным условием существования $y^{(2)}(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ такого, что

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m}[-\Phi(x,y)] = -\Phi(x, y^{(2)}(x)) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

будет

$$\frac{\partial(-\Phi(x,y))}{\partial y}\Big|_{y^{(2)}(x)} = 2B'A^{-1}(Ax + By^{(2)}(x) + a) = 0_m, \tag{19}$$
$$\frac{\partial^2(-\Phi(x,y))}{\partial y^2} = 2B'A^{-1}B < 0.$$

Соотношение $B'A^{-1}B < 0$ имеет место, ибо

$$(A < 0 \wedge \det B \neq 0) \Rightarrow (B'C^{-1}B < 0).$$

Из (19) и $\det B \neq 0$ сразу следует

$$y^{(2)}(x) = -B^{-1}(Ax + a)$$

и тогда

$$\min_{y\in\mathbb{R}^m}[-\Phi(x,y)] = -\Phi(x, y^{(2)}(x)) = 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Замечание 4. Выполнение требования $\det B \neq 0$ автоматически приводит к условию $m = n$. Поэтому далее считаем, не оговаривая особо, что в (8) все матрицы A, B и C квадратные и размерности $n \times n$.

Замечание 5. Итак, будем считать в трехкритериальной задаче (12)

$$F_1[x] = x'Kx + 2x'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c,$$

$$F_2[x] = 0,$$

$$F_3[x] = -R_V(x) = (x'K - c'C^{-1}B' + a')K^{-1}(Kx - BC^{-1}c + a),$$

если только в (8) справедливы $A < 0$, $C > 0$, $m = n$ и $\det B \neq 0$.

Этап III.

Явный вид сильно гарантированного по исходу и рискам решения задачи (11) при $X = Y = \mathbb{R}^n$, критерии $f(x, y)$, заданном в (8), приводится в следующем утверждении.

Утверждение 5. Если в (8) матрицы $A < 0$, $C > 0$, $m = n$ и $\det B \neq 0$, то сильно гарантированное решение (x^S, F^S) задачи (11) будет

$$x^S = (A - BC^{-1}B')^{-1}(BC^{-1}c - a), \; F^S = (F_1^S, 0, 0),$$

где $F_1^S = -(a' - c'C^{-1}B')(A - BC^{-1}B')^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c.$

Доказательство утверждения 5. Составим функцию

$$\begin{aligned}\psi(x) = F_1[x] + F_3[x] = x'Kx + 2x'(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c+\\ +x'Kx + 2x'(a - BC^{-1}c) + a'K^{-1}a - 2c'C^{-1}B'K^{-1}a+\\ +c'C^{-1}B'K^{-1}BC^{-1}c = 2x'Kx + 4x'(a - BC^{-1}c) + d-\\ -c'C^{-1}(C - B'K^{-1}B)C^{-1}c - 2c'C^{-1}B'K^{-1}a + a'K^{-1}a,\end{aligned}$$

где $K = A - B'C^{-1}B$.

Найдем теперь стратегию $x^S \in \mathbb{R}^n$ согласно

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \psi(x) = \psi(x^S).$$

Достаточные условия в этом случае

$$\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\Big|_{x^S} = 4Kx^S + 4(a - BC^{-1}c) = 0_n,$$

$$\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} = 4K < 0.$$

Из первого соотношения и $K < 0$ получаем

$$x^S = -K^{-1}(a - BC^{-1}c)$$

и тогда компоненты $F_i[x^S]$ $(i = 1, 2, 3)$ векторной гарантии F^S будут

$$F_1^S = F_1[x^S] = \min_{y \in Y} f(x, y) = -(a' - c'C^{-1}B')K^{-1}(a - BC^{-1}c) + d - c'C^{-1}c,$$

$$F_2^S = F_3^S = 0.$$

6. Выводы

В данной работе на основе синтеза понятий максимина и решения по Штакельбергу (из теории иерархических игр) определяется сильно гарантированное решение многокритериальной задачи при неопределенности. Найден явный вид такого решения при линейно-квадратичном виде критерия.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Жуковского В.И. за обсуждение работы и замечания.

Список литературы

[1] Бардин А.Е., Солдатова Н.Г. *Однокритериальная задача при неопределенности с учетом рисков и сожалений* // Сборник научных трудов VII Международной школы-симпозиума «Анализ, Моделирование, Управление, Развитие экономических систем». Симферополь: ТНУ, 2013. - с. 37-39.

[2] Жуковский В.И. *Конфликты и риски.* М.: РосЗИТЛП, 2007. 456 с.

[3] Жуковский В.И., Кудрявцев К.Н., Смирнова Л.В. *Гарантированные решения конфликтов и их приложения.* М.: КРАСАНД, 2013. 368 с.

[4] Жуковский В.И., Молоствов В.С. *Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности.* М.: Международный НИИ проблем управления, 1988. 131 с.

[5] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* М.: Наука, 1974. 456 с.

[6] Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач.* М.: Наука, 1982. 254 с.

On the solution of three-criteria problem under uncertainty

In this paper the definition of guaranteed solution for three-criteria problem under uncertainty is introduced. New solution is based on the method of decision-making in hierarchical two-level game. The conditions of existence are formulated. The example is given.