Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 89–97.

УДК 517.98

В. М. Статкевич

АНАЛОГИ ФОРМУЛ КРАМЕРА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕРЕГУЛЯРНЫМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Предложена система линейных дифференциальных уравнений для функций на бесконечномерном гильбертовом пространстве, когда в качестве операторных коэффициентов выступают многочлены от нерегулярного эллиптического оператора $(Lu)(x) = j(u''(x))$. Для такой системы доказаны аналоги формул Крамера.

Ключевые слова: бесконечномерное пространство, оператор Лапласа-Леви, нерегулярный (существенно бесконечномерный) эллиптический оператор, формулы Крамера.

Введение

Оператор Лапласа для функций бесконечномерного аргумента ввёл П. Леви [1]. Предложенный им оператор Лапласа-Леви имеет необычные свойства с точки зрения конечномерной теории для оператора второго порядка– удовлетворяет правилу Лейбница $L(uv) = Lu \cdot v + u \cdot Lv$ и обращается в нуль на цилиндрических функциях. Последнее дало основание Г.Е. Шилову, редактору перевода [1], назвать такой оператор "существенно бесконечномерным". Различные версии оператора Лапласа-Леви изучались Е.М. Полищуком, М.Н. Феллером, Г.Е. Шиловым, А.С. Немировским, И.Я. Дорфман, В.Я. Сикирявым (подробная библиография и современное состояние теории изложено в [2]). Существенно бесконечномерный эллиптический оператор (СБЭО), введённый Ю.В. Богданским [3] (см. также [4, 5]), обобщает оператор Лапласа-Леви и наследует его основные свойства. Другой подход к построению дифференциальных операторов в бесконечномерном пространстве, основанный на представлении $(Lu)(x) = \operatorname{tr} Au''(x)$, где A – неотрицательный ядерный оператор,

$\operatorname{tr} A$ – его след, был предложен независимо Ю.Л. Далецким и Л. Гроссом (подробную библиографию см., например, в [6]).

Линейные уравнения порядка n с оператором Лапласа-Леви изучались в [7, 8], с оператором квазидифференцирования (одним из обобщений оператора Лапласа-Леви) – в [9, 10], с СБЭО – в [11]. В [11, теорема 1] для СБЭО и в данной работе для нерегулярного эллиптического оператора (см. п. 2) доказана единственность решений, а явные формулы решений совпадают: выясняется, что результат обусловлен функциональным классом и, как следствие, нильпотентностью полугруппы, порождаемой оператором. В [7, 10] в иных функциональных классах доказано существование фундаментальной системы решений, содержащей n элементов, построен аналог вронскиана. Полученные в п. 2 результаты используются в п. 3, но имеют также самостоятельное значение.

Системы $(Lu_k)(x) = \Phi_k(x, u_1, \ldots, u_n)$, $k = 1, \ldots, n$ с оператором Лапласа-Леви исследовались в [8], с оператором квазидифференцирования – в [9], с СБЭО – в [12]: получены условия существования и единственности решения, а для линейных систем $(Lu_k)(x) = \sum_{i=1}^{n} f_{ik}(x)u_i(x) + \psi_k(x)$ (в [8] $\psi_k \equiv 0$) найдены явные формулы. Предлагаемая в п. 3 настоящей работы система линейных уравнений с нерегулярным эллиптическим оператором рассматривается, по-видимому, впервые; аналогичный результат с СБЭО был доложен автором на конференции ”КРОМШ-2011” [13].

1. Нерегулярные эллиптические операторы

Пусть H – бесконечномерное сепарабельное вещественное гильбертово пространство; $B_C(H)$ – банахово (относительно операторной нормы) пространство самосопряжённых ограниченных линейных операторов в H; $B_R = \{x \in H \mid \|x\| \leqslant R\}$ – фиксированный шар радиуса R; J – конус неотрицательных линейных функционалов на $B_C(H)$.

Пусть $j \in J$ – ненулевой функционал, ядру которого принадлежат все операторы конечного ранга. В работе [3] такой функционал предложено называть существенно бесконечномерным, такие функционалы образуют конус $J_+ \subset J$. Каждый функционал $j \in J$ допускает разложение $j = j_1 + j_2$, где $j_1(C) = \operatorname{tr} AC$, A – неотрицательный ядерный оператор, $j_2 \in J_+$, причём такое разложение единственно (см., например, [4, 5]).

Назовём множество $D \subset B_C(H)$ почти компактным, если любого $\varepsilon > 0$ существуют компактное множество $K \subset B_C(H)$ и числа $n \in \mathbb{N}$, $d > 0$ такие, что $K + Q_{n,d}$ является ε-сетью для D (тут $Q_{n,d} \subset B_C(H)$ – множество операторов, ранг которых не превышает n, а норма не превышает d).

Пусть Z – множество функций класса $C^2(H)$ по Фреше, носители которых лежат в шаре B_R, u'' равномерно непрерывна на H, а множество $\{u''(x) \mid x \in B_R\}$ является почти компактным. X – замыкание Z по норме $\sup_{x \in B_R} |u(x)|$ – вещественная коммутативная банахова алгебра без единицы относительно поточечных операций.

Оператор $L\colon X \supset Z \ni u(x) \mapsto \frac{1}{2} j(u''(x)) \in X$ является дифференциальным оператором второго порядка. Если он представим в виде $\frac{1}{2} \operatorname{tr} Au''(x)$, то согласно [14] назовём его регулярным эллиптическим, если же непредставим – нерегулярным. Согласно [3] под СБЭО понимается оператор L в случае $j \in J_+$, такой оператор удовлетворяет правилу Лейбница.

Нерегулярный оператор L корректно определён и допускает замыкание $\bar{L}$, порождающее в X (C_0)-полугруппу сжатий $T(t)$ [4, 5]. Полугруппа нильпотентна $(\exists t_0 > 0 : \ T(t_0) = 0)$, позитивна $(\forall u \geqslant 0, \ \forall t \geqslant 0 : \ T(t)u \geqslant 0)$, кроме того, $(u \in Z) \Rightarrow (T(t)u \in Z)$. Для СБЭО результат усиливается – полугруппа приобретает свойство мультипликативности $(\forall u, v \in X, \ \forall t \geqslant 0 : \ T(t)(uv) = T(t)u \cdot T(t)v)$.

2. Линейные уравнения высшего порядка

Пусть Q – произвольное множество; $\mathcal{F}(Q)$ – банахова алгебра всех вещественных ограниченных функций на Q (относительно поточечных операций и sup-нормы); $\mathcal{X}$ – замкнутая подалгебра в $\mathcal{F}(Q)$ (потому $(u \in X) \Rightarrow (|u| \in X)$); $S(s)$ – нильпотентная (C_0)-полугруппа в $\mathcal{X}$ $(\exists s_0 > 0 : \ S(s_0) = 0)$. Генератор полугруппы $A = S'(0)$ определён на плотном в $\mathcal{X}$ множестве $D(A)$, более того, множество $D(A^\infty) = \bigcap_{n=1}^\infty D(A^n)$ также плотно в $\mathcal{X}$ [15, теорема 2.3, с. 60].

В данном пункте рассматривается линейное уравнение порядка n

$$(A^n u)(x) + a_1 (A^{n-1} u)(x) + \ldots + a_{n-1}(Au)(x) + a_n u(x) = f(x) \tag{1}$$

с постоянными коэффициентами $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{X}$. Область определения u – множество $D(A^n)$, которое плотно в $\mathcal{X}$, так как содержит $D(A^\infty)$. Пусть многочлен $P_n(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \ldots + a_{n-1} t + a_n$ имеет различные корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ кратности $p_1, \ldots, p_k$ соответственно.

Лемма 1. *Пусть $P_n(t)$ имеет единственный корень $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Тогда уравнение* (1) *имеет и притом единственное решение $u(x) = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 s} s^{n-1} (S(s)f)(x) ds$.*

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по n.

База индукции $n = 1$. Уравнение (1) принимает вид $Au - \lambda_1 u = f$. Резольвента $R_{\lambda_1} u = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1 s} S(s) u ds = \int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 s} S(s) u ds$ существует для всех λ_1, потому $u = -\int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 s} S(s) f ds$.

Шаг индукции $P_{n+1}(t) = (t - \lambda_1)^{n+1} = (t - \lambda_1) P_n(t)$. Уравнение (1) записывается следующим образом: $(A - \lambda_1) P_n(A) u = f$, $P_n(A) u = -\int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 \tau} S(\tau) f d\tau$, $u = \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 s} s^{n-1} S(s) \left(-\int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 \tau} S(\tau) f d\tau \right) ds$. Полугрупповое свойство $S(s)$, замена $t = s + \tau$ и изменение порядка интегрирования приводят к формуле $u = \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} \int_0^{s_0} e^{-\lambda_1 t} S(t) f dt \int\limits_0^t s^{n-1} ds$, которая и доказывает лемму.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *имеет и притом единственное решение* $u(x) = -\int_0^{s_0} \sum_{m=1}^k \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_m} \frac{e^{-\lambda s}}{P_n(\lambda)} (S(s)f)(x) ds$, *где* Res *обозначает вычет функции в точке.*

Доказательство. Теорема доказывается индукцией по k.

Базу индукции $k = 1$ (единственный корень λ_1 кратности n) доказывает лемма 1, поскольку вычет $\operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_1} \frac{e^{-\lambda s}}{P_n(\lambda)} = \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_1} \frac{e^{-\lambda s}}{(\lambda-\lambda_1)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{\lambda\to\lambda_1} \frac{d^{n-1}}{d\lambda^{n-1}} \left((\lambda-\lambda_1)^n \frac{e^{-\lambda s}}{(\lambda-\lambda_1)^n} \right) = \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda_1 s} s^{n-1}$.

Шаг индукции. Рассмотрим новый многочлен $G(t) = P_n(t)(t - \lambda_{k+1})^p$. Уравнение (1) принимает вид $G(A)u = P_n(A)(A - \lambda_{k+1} I)^p u = f$, $u = -\int_0^{s_0} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{k+1}} \frac{e^{-\lambda s}}{(\lambda-\lambda_{k+1})^p} S(s) \left(-\int_0^{s_0} \sum_{m=1}^k \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_m} \frac{e^{-\lambda\tau}}{P_n(\lambda)} S(\tau) f d\tau \right) ds$. Здесь и далее I – единичный оператор. Поскольку все корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$ различны, то можно выбрать охватывающие их контура $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k+1}$ попарно непересекающимися. Меняем порядок интегрирования, делаем замену $t = s + \tau$:

$$u = -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{s_0} ds \int\limits_0^{s_0 - s} S(s+\tau) f d\tau \sum_{m=1}^k \oint\limits_{\Gamma_{k+1}} \frac{dz_1}{(z_1 - \lambda_{k+1})^p} \oint\limits_{\Gamma_m} \frac{e^{-z_1 s - z_2 \tau}}{P_n(z_2)} dz_2 =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{s_0} S(t) f dt \sum_{m=1}^k \oint\limits_{\Gamma_{k+1}} \frac{dz_1}{(z_1 - \lambda_{k+1})^p} \oint\limits_{\Gamma_m} \frac{dz_2}{P_n(z_2)} \int\limits_0^t e^{(z_2 - z_1)s - z_2 t} ds =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{s_0} S(t) f dt \oint\limits_{\Gamma_{k+1}} \frac{e^{-z_1 t}}{(z_1 - \lambda_{k+1})^p} dz_1 \sum_{m=1}^k \oint\limits_{\Gamma_m} \frac{dz_2}{(z_1 - z_2) P_n(z_2)} -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \int\limits_0^{s_0} S(t) f dt \sum_{m=1}^k \oint\limits_{\Gamma_m} \frac{e^{-z_2 t}}{P_n(z_2)} dz_2 \oint\limits_{\Gamma_{k+1}} \frac{dz_1}{(z_1 - \lambda_{k+1})^p (z_1 - z_2)} = I_1 - I_2. \quad (2)$$

Применив к функции $w(z_2) = \frac{1}{(z_1 - z_2) P_n(z_2)}$ теорему о полной сумме вычетов, получим, что $\sum_{m=1}^k \oint_{\Gamma_m} \frac{dz_2}{(z_1-z_2)P_n(z_2)} = \frac{2\pi i}{P_n(z_1)}$, $I_1 = -\int_0^{s_0} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{k+1}} \frac{e^{-\lambda t}}{G(\lambda)} S(t) f dt$. Внутренний интеграл I_2 имеет вид $\oint_{\Gamma_{k+1}} \frac{dz_1}{(z_1-\lambda_{k+1})^p (z_1 - z_2)} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_1=\lambda_{k+1}} \frac{1}{(z_1-\lambda_{k+1})^p(z_1-z_2)} = \frac{2\pi i}{(p-1)!} \lim_{z_1\to\lambda_{k+1}} \frac{d^{p-1}}{dz_1^{p-1}} \left((z_1-\lambda_{k+1})^p \frac{1}{(z_1-\lambda_{k+1})^p (z_1-z_2)} \right) = -\frac{2\pi i}{(z_2-\lambda_{k+1})^p}$. Подстановка этих результатов в формулу (2) доказывает теорему по индукции. Единственность решения уравнения (1) следует из существования резольвенты оператора A.

Следствие 1 (о непрерывной зависимости решения уравнения (1) от функции f)**.** *Пусть $u(x) = u(x, f)$, $u_0(x) = u_0(x, f_0)$ – решения уравнения* (1) *с функциями f, f_0 соответственно. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:\ (\|f - f_0\| < \delta) \Rightarrow (\|u - u_0\| < \varepsilon)$.*

Доказательство. Факт следует из того, что $u - u_0 = (-1)^n R_{\lambda_1}^{p_1} \ldots R_{\lambda_k}^{p_k}(f - f_0)$, $\|u - u_0\| \leqslant \|R_{\lambda_1}\|^{p_1} \cdot \ldots \cdot \|R_{\lambda_k}\|^{p_k} \cdot \|f - f_0\|$.

Следствие 2. *Пусть $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Тогда решение уравнения* (1) *есть вещественная функция.*

Доказательство. Уравнение (1) запишем в виде $(A - \lambda_1 I)^{p_1} \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_k I)^{p_k} u = f$. В условиях следствия корни $P_n(t)$ или вещественные, или комплексно-сопряжённые, потому следствие достаточно доказать для уравнения $(A - \mu I)(A - \mu^* I)u = f$, где $\mu = \alpha + \beta i$, $\mu^* = \alpha - \beta i$. А решение данного уравнения (согласно формуле Эйлера) – $u = -\int_0^{s_0} \left(\lim_{\lambda \to \mu} \left((\lambda - \mu)\frac{e^{-\lambda s}}{(\lambda-\mu)(\lambda-\mu^*)}\right) + \lim_{\lambda \to \mu^*} \left((\lambda - \mu^*)\frac{e^{-\lambda s}}{(\lambda-\mu)(\lambda-\mu^*)}\right)\right) S(s) f ds = \frac{1}{\beta}\int_0^{s_0} e^{-\alpha s} \sin(\beta s) S(s) f ds$. Заметим, что решение уравнения (1) в общем случае расписывается с учётом формулы Эйлера подобным образом.

Следствие 3. *Резольвентные множества операторов A^n и $P_n(A)$ таковы: $\rho(A^n) = \mathbb{C}$, $\rho(P_n(A)) = \mathbb{C}$.*

Следствие 4. *Оператор $P_n(A)$ замкнут (см.* [16, теорема 7, с. 642]*).*

Следствие 5. $R_{\lambda_1}^{p_1} \ldots R_{\lambda_k}^{p_k} f = (-1)^{n-1} \int_0^{s_0} \sum_{m=1}^k \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_m} \frac{e^{-\lambda s}}{P_n(\lambda)} S(s) f ds.$

Положим $Q = H$, $\mathcal{X} = X$, $A = \bar{L}$ (см. п. 1). Тогда результаты данного пункта справедливы для уравнения (1) с нерегулярным эллиптическим оператором, в частности, с СБЭО. Кроме того, возможно повысить гладкость решения:

Следствие 6 (о повышении гладкости решения)**.** *Для уравнения* (1) *с нерегулярным эллиптическим оператором из $f \in Z$ следует $u \in Z$.*

Доказательство. Согласно п. 1 в условиях следствия $T(t)f \in Z$, откуда $u \in Z$.

3. Система линейных уравнений с операторными коэффициентами (многочленами от оператора A)

Рассмотрим систему линейных уравнений с операторными коэффициентами (многочленами от оператора A, см. п. 2):

$$\sum_{k=1}^{n} P_{i,k}(A) u_k = f_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{3}$$

Тут $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{X}$; $P_{i,k}(t) = t^{d_{i,k}} + a_1^{i,k} t^{d_{i,k}-1} + \ldots + a_{d_{i,k}-1}^{i,k} t + a_{d_{i,k}}^{i,k}$ – многочлен степени $d_{i,k} \geqslant 0$ с коэффициентами $a_1^{i,k}, \ldots, a_{d_{i,k}}^{i,k} \in \mathbb{R}$. Степень многочлена $P_{i,k}$ будем также обозначать $\deg P_{i,k}$. Оператор $P_{i,k}(A)$ при $d_{i,k} > 0$ определён на плотном в $\mathcal{X}$ множестве $D(A^{d_{i,k}})$ и, в силу следствия 4, замкнут; при $d_{i,k} = 0$ он кратен I и определён на всём $\mathcal{X}$. Потому областью определения u_k является множество $D(A^{\hat{d}_k})$, где $\hat{d}_k = \max(d_{1,k}, \dots, d_{n,k})$; при $\hat{d}_k = 0$ областью определения u_k является всё $\mathcal{X}$. В дальнейшем будут приведены достаточные условия существования и единственности решения системы (3).

Пусть многочлен $Q(t)$ степени $d > 0$ с вещественными коэффициентами имеет различные корни $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$. Оператор $Q(A)\colon D(A^d) \to \mathcal{X}$ согласно п. 2 имеет обратный $(Q(A))^{-1} = -\int_0^{s_0} \sum_{m=1}^{k} \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_m} \frac{e^{-\lambda s}}{Q(\lambda)} S(s) ds\colon \mathcal{X} \to D(A^d)$, в силу следствия 2 сумма в данной формуле вещественна. Соответствующий многочлену нулевой степени оператор $Q(A) = aI$ при $a \neq 0$ также имеет обратный $(Q(A))^{-1} = \frac{1}{a} I$. $D(A^\infty)$ – собственное линейное многообразие (незамкнутое) операторов $Q(A)$ и $(Q(A))^{-1}$, т.е. $Q(A)(D(A^\infty)) \subset D(A^\infty)$, $(Q(A))^{-1}(D(A^\infty)) \subset D(A^\infty)$.

Пусть $\mathcal{F} = \{\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}\}$ – поле рациональных функций (оно является полем частных кольца многочленов). Каждой функции $\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)} \in \mathcal{F}$ сопоставим некий замкнутый оператор $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})$. При этом для отображения ϕ должны выполняться условия: а) $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)} + \frac{Q_3(t)}{Q_4(t)}) = \phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}) + \phi(\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)})$; б) $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)} \cdot \frac{Q_3(t)}{Q_4(t)}) = \phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}) \cdot \phi(\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)})$, поскольку функции $\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}$, $\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)}$ коммутируют, то и операторы $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})$, $\phi(\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)})$ должны коммутировать; в) $\phi(1) = I$; г) $\phi((\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})^{-1}) = (\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)}))^{-1}$. Проверку условий а)-г) необходимо проводить с учётом областей определения замкнутых операторов. Тогда можно считать, что $\phi(\mathcal{F})$ является полем замкнутых операторов, и применять аппарат линейной алгебры.

Отображение $\phi\colon \frac{Q_1(t)}{Q_2(t)} \mapsto (Q_2(A))^{-1}|_{D(A^\infty)} Q_1(A)|_{D(A^\infty)}$ удовлетворяет условиям а)-г), перечисленным выше, в частности, имеет место коммутация $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})$ и $\phi(\frac{Q_3(t)}{Q_4(t)})$. Операторы $\phi(\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)})$ записываются в явном виде согласно п. 2. Заметим, что для отображений $\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)} \mapsto (Q_2(A))^{-1} Q_1(A)$ и $\frac{Q_1(t)}{Q_2(t)} \mapsto Q_1(A)(Q_2(A))^{-1}$ – более простых и "очевидных" – в условиях а)-б) возникают трудности, связанные с областями определения соответствующих операторов. Действительно, оператор $(Q_2(A))^{-1} Q_1(A)$ переводит $D(A^{d_1})$ в $D(A^{d_2})$, где $d_1 = \deg Q_1 > 0$, $d_2 = \deg Q_2 > 0$. Оператор $Q_1(A)(Q_2(A))^{-1}$ имеет бóльшую область определения: при $d_1 = d_2$ он переводит $\mathcal{X}$ в $\mathcal{X}$; при $d_1 > d_2$ – $D(A^{d_1 - d_2})$ в $\mathcal{X}$; при $d_1 < d_2$ – $\mathcal{X}$ в $D(A^{d_2 - d_1})$.

Положим $\mathbb{P} = (P_{i,k}(A)|_{D(A^\infty)})_{i,k=1}^n$. Пусть $\det \mathbb{P} = \det \big| P_{i,k}(A)|_{D(A^\infty)} \big|_{i,k=1}^n = \sum_\sigma (-1)^{l(\sigma)} P_{k_1,1}(A)|_{D(A^\infty)} \dots P_{k_n,n}(A)|_{D(A^\infty)}$ – определитель матрицы $\mathbb{P}$, где $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \dots & n \\ k_1 & \dots & k_n \end{smallmatrix}\right)$ – перестановка длины n, $l(\sigma)$ – чётность перестановки σ. Нестандартной индексации $P_{k_m,m}$ (вместо привычной P_{m,k_m}) объяснение будет дано далее. $\det \mathbb{P}$ является многочленом от оператора A степени $\deg \det \mathbb{P}$ не выше $\max_\sigma (d_{k_1,1} + \ldots + d_{k_n,n})$, все формулы классического определителя сохраняются. Если $\det \mathbb{P} \neq 0$ (т.е. нулевому оператору), то матрица $\mathbb{P}$ имеет обратную $\mathbb{P}^{-1} = (\det \mathbb{P})^{-1} (\tilde{P}_{i,k})^T$. Тут

$\tilde{P}_{i,k}$ – алгебраическое дополнение элемента (i,k) матрицы $\mathbb{P}$ – многочлен от оператора A степени $\deg \tilde{P}_{i,k}$. Заметим, что необязательно $\deg\det\mathbb{P} > \deg \tilde{P}_{i,k}$, может выполняться и обратное неравенство, и равенство.

Предположим, что $\det\mathbb{P} \neq 0$ и выполнены условия $f_1,\dots,f_n \in D(A^\infty)$. Тогда существует $\mathbb{P}^{-1}$, $u_i = \sum_{k=1}^n (\mathbb{P}^{-1})_{i,k} f_k = (\det\mathbb{P})^{-1}\sum_{k=1}^n \tilde{P}_{k,i} f_k$, $i=1,\dots,n$.

Рассмотрим сумму, стоящую в правой части последней формулы. Для системы линейных алгебраических уравнений это результат раскрытия по i-му столбцу определителя, полученного заменой i-го столбца на столбец правой части. Но, если в определении $\det\mathbb{P}$, механически заменить $P_{i,n}$ на f_i, то соответствующие слагаемые превратятся в элементы $\mathcal{X}$; замена же $P_{i,k}$ на f_i для $k \neq n$ приведёт к тому, что соответствующие слагаемые вообще не определены. Пусть $\det_s\mathbb{P} = \det\big|P_{i,1}(A)|_{D(A^\infty)} \ \dots \ P_{i,s-1}(A)|_{D(A^\infty)} \ f_i \ P_{i,s+1}(A)|_{D(A^\infty)} \ \dots \ P_{i,n}(A)|_{D(A^\infty)}\big|_{i=1}^n = \sum_\sigma (-1)^{l(\sigma)} P_{k_1,1}(A)|_{D(A^\infty)} \dots P_{k_{s-1},s-1}(A)|_{D(A^\infty)} P_{k_{s+1},s+1}(A)|_{D(A^\infty)} P_{k_n,n}(A)|_{D(A^\infty)} f_{k_s}$; такой аналог определителя, в отличие от оператора $\det\mathbb{P}$, является элементом $\mathcal{X}$. Нестандартная индексация в определении $\det\mathbb{P}$ теперь объясняется тем, что в противном случае определение $\det_s\mathbb{P}$ пришлось бы чрезмерно усложнять.

Таким образом доказана теорема:

Теорема 2. *Пусть* $\det\mathbb{P} \neq 0$*;* $f_1,\dots,f_n \in D(A^\infty)$*. Тогда единственное решение системы* (3) *имеет вид* $u_i = (\det\mathbb{P})^{-1}\det_i\mathbb{P}$*,* $i=1,\dots,n$*. Эти формулы естественно назвать аналогами формул Крамера.*

Положив $Q = H$, $\mathcal{X} = X$, $A = \bar{L}$ (см. п. 1), получим аналоги формул Крамера для системы (3) с нерегулярным эллиптическим оператором, в частности, с СБЭО.

Пример. Рассмотрим систему $\bar{L}u_1 + u_1 + u_2 = f_1$, $\bar{L}^2 u_1 + \bar{L}u_2 = f_2$ с нерегулярным эллиптическим оператором. Сначала предположим, что $f_1, f_2 \in D(\bar{L}^\infty)$. Здесь $\mathbb{P} = \begin{pmatrix} (\bar{L}+I)|_{D(\bar{L}^\infty)} & I|_{D(\bar{L}^\infty)} \\ \bar{L}^2|_{D(\bar{L}^\infty)} & \bar{L}|_{D(\bar{L}^\infty)} \end{pmatrix}$; оператор $\det\mathbb{P} = \det\begin{vmatrix} (\bar{L}+I)|_{D(\bar{L}^\infty)} & I|_{D(\bar{L}^\infty)} \\ \bar{L}^2|_{D(\bar{L}^\infty)} & \bar{L}|_{D(\bar{L}^\infty)} \end{vmatrix} = (\bar{L}+I)|_{D(\bar{L}^\infty)}\bar{L}|_{D(\bar{L}^\infty)} - \bar{L}^2|_{D(\bar{L}^\infty)} I|_{D(\bar{L}^\infty)} = \bar{L}|_{D(\bar{L}^\infty)}$ ненулевой. $D(\bar{L}^\infty)$ – собственное линейное многообразие соответствующих операторов, потому искомое решение $u_1 = (\det\mathbb{P})^{-1}\det\begin{vmatrix} f_1 & I|_{D(\bar{L}^\infty)} \\ f_2 & \bar{L}|_{D(\bar{L}^\infty)} \end{vmatrix} = \bar{L}^{-1}(\bar{L}f_1 - f_2) = f_1 + \int_0^{t_0} T(t) f_2 dt$, $u_2 = (\det\mathbb{P})^{-1}\det\begin{vmatrix} (\bar{L}+I)|_{D(\bar{L}^\infty)} & f_1 \\ \bar{L}^2|_{D(\bar{L}^\infty)} & f_2 \end{vmatrix} = \bar{L}^{-1}(\bar{L}f_2 + f_2 - \bar{L}^2 f_1) = -\bar{L}f_1 + f_2 - \int_0^{t_0} T(t) f_2 dt$. Здесь $u_1, u_2 \in D(\bar{L}^\infty)$.

Теперь откажемся от условий $f_1, f_2 \in D(\bar{L}^\infty)$. Область определения u_1 – множество $D(\bar{L}^2)$, u_2 – $D(\bar{L})$. Оператор $\bar{L}$ замкнут, потому можно показать, что решение находится по формулам, приведенным выше, при $f_1 \in D(\bar{L}^2)$, $f_2 \in D(\bar{L})$. Кроме того, при дополнительных условиях $\bar{L}f_1 \in Z$, $f_2 \in Z$ решение имеет повышенную гладкость $u_1, u_2 \in Z$.

Выводы

В работе предложена система линейных уравнений с операторными коэффициентами – многочленами от нерегулярного эллиптического оператора. Приведены достаточные условия существования и единственности решения, а само решение представлено в виде явных формул – аналогов формул Крамера. Также исследовано линейное уравнение высшего порядка с нерегулярным эллиптическим оператором для случая постоянных коэффициентов.

Автор благодарит Ю.В. Богданского за ценные замечания и внимание к работе.

Список литературы

[1] Леви П. *Конкретные проблемы функционального анализа.* – М.: Наука, 1967. – 512с.

[2] Feller M.N. *The Lévy Laplacian.* – Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 2005. – 153p.

[3] Богданский Ю.В. *Задача Коши для параболических уравнений с существенно бесконечномерными эллиптическими операторами* // Укр. мат. журнал. – 1977. – **29**, №6. – С. 781-784.

[4] Богданский Ю.В. *Задача Коши для уравнения теплопроводности с нерегулярными эллиптическими операторами* // Укр. мат. журнал. – 1989. – **41**, №5. – С. 584-590.

[5] Bogdansky Yu.V., Dalecky Yu.L. *Cauchy problem for the simpliest parabolic equation with essentially infinite-dimensional elliptic operator* // Suppl. to chapters IV, V in book: Dalecky Yu.L., Fomin S.V. *Measures and differential equations in infinite-dimensional space.* – Amsterdam – New York: Kluwer Acad. Publ., 1991. – pp. 309-322.

[6] Далецкий Ю.Л., Фомин С.В. *Меры и дифференциальные уравнения в бесконечномерных пространствах.* – М.: Наука, 1983. – 384с.

[7] Полищук Е.М. *Линейные уравнения в функциональных лапласианах* // УМН. – 1964. – т. 19, вып. 2(116). – С. 163-170.

[8] Шилов Г.Е. *О некоторых вопросах анализа в гильбертовом пространстве. III* // Мат. сборник. – 1967. – т. 74(116), №1. – С. 161-168.

[9] Сикирявый В.Я. *Оператор квазидифференцирования и связанные с ним краевые задачи* // Труды Моск. матем. об-ва. – 1972. – т. 27. – С. 195-246.

[10] Сикирявый В.Я. *Линейные квазидифференциальные уравнения* // Укр. мат. журнал. – 1975. – **27**, №1. – С. 121-127.

[11] Богданський Ю.В., Статкевич В.М. *Лінійні диференціальні рівняння з суттево нескінченновимірними операторами* // Наукові вісті НТУУ "КПІ". – 2008. – №2. – С. 144-147.

[12] Статкевич В.М. *Системи суттєво нескінченновимірних диференціальних рівнянь* // Укр. мат. журнал. – 2011. – **63**, №9. – С. 1257-1262.

[13] Статкевич В.М. *Об одной системе линейных существенно бесконечномерных уравнений* // КРОМШ-2011. Тезисы докладов. – Симферополь, 2011. – С. 51.

[14] Авербух В.И., Смолянов О.Г., Фомин С.В. *Обобщённые функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. II. Дифференциальные операторы и их преобразования Фурье* // Труды Моск. матем. об-ва. – 1972. – т. 27. – С. 247-282.

[15] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1967. – 464с.

[16] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. *Линейные операторы. Т. 1 Общая теория. Пер. с англ.* – М.: ИЛ, 1962. – 896с.

Аналоги формул Крамера для системи лінійних диференціальних рівнянь з нерегулярним еліптичним оператором

Запропонована система лінійних диференціальних рівнянь для функцій на нескінченновимірному гільбертовому просторі, коли в якості операторних коефіцієнтів виступають многочлени від нерегулярного еліптичного оператора $(Lu)(x) = j(u''(x))$. *Для такої системи доведені аналоги формул Крамера.*

Ключові слова: нескінченновимірний простір, оператор Лапласа-Леві, нерегулярний (суттєво нескінченновимірний) еліптичний оператор, формули Крамера.

Cramer's rule analog for simultaneous linear differential equations with nonregular elliptic operator

Simultaneous linear differential equations for functions on an infinite-dimensional Hilbert space with nonregular elliptic operator $(Lu)(x) = j(u''(x))$ *polynomial coefficients are proposed. Cramer's rule for such simultaneous equations is proved.*

Keywords: infinite-dimensional space, Laplace-Levý operator, nonregular (essentially infinite-dimensional) elliptic operator, Cramer's rule.