Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 76–89.

УДК 517.972

Е. М.Кузьменко

УСЛОВИЯ КОРРЕКТНОЙ ОПРЕДЕЛЕННОСТИ И КОМПАКТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ВАРИАЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА $W^{1,p}(\Omega)$

Понятие псевдоквадратичного интегранта вариационного функционала обобщается на случай произвольных банаховых пространств. На компактные области Ω в R^n распространено известное ранее для отрезка утверждение о корректной определенности и условие компактной непрерывности в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}(\Omega)$ вариационнного функционала с псевдоквадратичным интегрантом.
Полученные результаты обобщены на случай вариационных функционалов с псевдополиномиальным интегрантом и соответствующих пространств Соболева $W^{1,p}(\Omega)$ при произвольном $p \in \mathbb{N}$ и произвольной компактной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: вариационный функционал, псевдоквадратичность, пространства Соболева, псевдополиномиальность, корректная определенность, компактная непре-
рывность

e-mail: kuzmenko.e.m@mail.ru

Введение

В работах И.В.Орлова и Е.В.Божонок [1]– [3] исследовались общие условия корректной определенности вариационных функционалов в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a,b] = H^1[a,b]$. При этом, от классической жесткой оценки интегранта $f(x,y,z) \le \alpha + \beta z^2$ классического вариационного функционала $\Phi(y) =$

$\int_a^b f(x,y,y')dx, \quad y(\cdot) \in W^{1,2}[a,b]$, был совершен переход к значительно более общему классу псевдоквадратичных по z интегрантов. Было показано, что псевдоквадратичность гарантирует корректную определенность функционала $\Phi(y)$ в данном пространстве Соболева [2].

В настоящей работе упомянутые результаты обобщаются по следующим направлениям:

1) Понятие псевдоквадратичного отображения переносится на случай произвольных банаховых пространств.

2) Теорема о корректной определенности вариационного функционала $\Phi(y)$ с псевдоквадратичным интегрантом переносится на случай пространства Соболева $W^{1,2}(\Omega)$ над произвольной компактной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

3) Вводится более общее понятие K-псевдополиномиального отображения ($\forall\, p \in \mathbb{N}$) и теорема о корректной определенности вариационного функционала $\Phi(y)$ переносится на случай вариационного функционала с K-псевдополиномиальным интегрантом в пространстве Соболева $W^{1,p}(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

4) Условие компактной непрерывности вариационных функционалов в $H^1(\Omega)$ переносится на случай пространств Соболева $W^{1,p}(\Omega),\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Таким образом, создается база для обобщения построенной указанными авторами теории компактных экстремумов вариационных функционалов в гильбертовом пространстве Соболева $W^{1,2}[a,b]$ на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $p \in \mathbb{N}$ над произвольной компактной областью $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Предварительные сведения

Исследования вариационных функционалов в классах Соболева было начато в 20-х годах прошлого века в работах Тонелли и других авторов. Классическая теорема Тонелли связывает существование абсолютного экстремума вариационного функционала в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$, с p-степенной оценкой снизу по старшей производной, так называемое „условие роста“. Дополнительно на интегрант накладывается условие квазирегулярности.

Напомним более подробно классические результаты [4]. Далее Ω–компакная область в $\mathbb{R}^n$.

Определение 1. Интегрант $f(x,y,z)$,$(x,y,z) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, называется квазирегулярным, если $\forall (x,y) \in \Omega \times \mathbb{R}$ функция f является выпуклой по z.

Сформулируем теорему Тонелли, доказанную вначале для одномерного случая и позднее обобщенную на n-мерный случай [4].

Теорема 1. *Пусть интегрант* $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *в задаче*

$$\Phi(y) = \int_\Omega f(x,y,\nabla y)dx \to abs.min$$

$$\big(y \in W^{1,p}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n, \quad 1 < p < \infty, \quad y\big|_{\partial\Omega} = 0\big) \tag{1}$$

непрерывен по всем переменным, непрерывно дифференцируем по z*, квазирегулярен и удовлетворяет следующему „условию роста“:*

$$f(x,y,z) \geq \gamma\|z\|^p - \delta, \quad (\delta > 0, \gamma > 0) \tag{2}$$

Тогда задача (1) *имеет решение в пространстве* $W^{1,p}(\Omega)$.

Коректная определенность функционала (1) гарантируется посредством p-степенной оценки сверху.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 при выполнении неравенства:*

$$|f(x,y,z)| \leq \alpha\|z\|^p + \beta, \quad (\alpha > 0, \beta > 0) \tag{3}$$

вариационный функционал (1) *определен всюду в пространстве* $W^{1,p}(\Omega)$.

Возникает естественный вопрос: можно ли от оценок (2) и (3) перейти к оценкам, в которых константы заменяются функциями от x, y, z (вообще говоря неограниченными)? Достаточно общий ответ на этот вопрос, как упоминалось, был получен в работах Орлова И.В. и Божонок Е.В.
Приведем соответствующие результаты. Базисным в дальнейшем является понятие псевдоквадратичной функции [1], [3].

Определение 2. Борелевская функция $f : \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z \to \mathbb{R}$ называется *псевдоквадратичной по* z $(f \in K_2(z))$, если f допускает представление в виде

$$f(x,y,z) = P(x,y,z) + Q(x,y,z)z + R(x,y,z)z^2 \tag{4}$$

где, при любом выборе компактов $C_x \subset \mathbb{R}_x$, $C_y \subset \mathbb{R}_y$ коэффициенты P, Q, R ограничены независимо от выбора $z \in \mathbb{R}_z$.

Заметим, что средний член в псевдоквадратичном представлении (4) может быть исключен. Отметим также, что псевдоквадратичность влечет за собой квадратичную оценку

$$|f(x,y,z)| \leq \alpha(x,y)\|z\|^2 + \beta(x,y),$$

коэффициенты α, β которой ограничены лишь локально по x и y, в отличии от глобальной ограниченности коэффициентов в классической оценке. Имеет место следующая теорема существования.

Теорема 3. *Пусть* $\Omega = [a;b]$. *Если* $f \in K_2(z)$*, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа* $\Phi(y) = \int_\Omega f(x,y,y')dx, \quad \big(y(\cdot) \in W^{1,2}(\Omega)\big)$ *всюду определен в пространстве* $W^{1,2}(\Omega)$.

Свойство K-непрерывности функционала $\Phi(y) = \int_\Omega f(x,y,y')dx$ в H^1 требует более сильных условий для f, чем псевдоквадратичность.

Определение 3. Пусть, в обозначениях определения 2, функция $f \in K_2(z)$ и непрерывна в $\mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}_z$. Отображение f назовем вейерштрассовским псевдоквадратичным ($f \in WK_2(z)$), если представление (4) можно выбрать таким образом, что функции P, Q, R равномерно непрерывны и ограничены на $C_x \times C_y \times \mathbb{R}_z$ при любом выборе компактов $C_x \subset \mathbb{R}_x \, C_y \subset \mathbb{R}_y$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $u = f(x, y, z)$, $f : \Omega \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Если $f \in WK_2(z)$, то вариационный функционал Эйлера–Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_{\Omega} f(x, y, y')dx$$

K- непрерывен всюду на $H^1(\Omega)$.

2. Общее понятие псевдоквадратичности. Корректная определенность функционала на $W^{1,2}(\Omega)$ в многомерном случае

Перейдем к изложению основных результатов.
Вначале обобщим понятие псевдоквадратичного интегранта на случай банаховых пространств. Далее, для произвольного банахова пространства Z,через Z^* обозначено банахово пространство всех линейных непрерывных функционалов на Z, через $(Z, Z)^*$ банахово пространство всех билинейных непрерывных симметричных функционалов на Z.

Определение 4. Пусть X, Y, Z– вещественные банаховы пространства; $\Omega \subset X$, $D_y \subset Y$,$D_z \subset Z$ - открытые области. Борелевская функция $f : \Omega \times D_y \times D_z \to \mathbb{R}$ *псевдоквадратична по z* ($f \in K_2(z)$), если f допускает представление в виде

$$f(x, y, z) = P(x, y, z) + Q(x, y, z)z + R(x, y, z)z^2 \tag{5}$$

где,
1) $P : \Omega \times D_y \times D_z \to \mathbb{R}$
2) $Q : \Omega \times D_y \times D_z \to Z^*$;
3) $R : \Omega \times D_y \times D_z \to (Z, Z)^* := L_2(Z; \mathbb{R})$,
причем при любом выборе компактов $C_x \subset \Omega$, $C_y \subset D_y$ коэффициенты P, Q, R ограничены независимо от выбора $z \in D_z$ (иначе говоря,P, Q, R ограничены локально по x, y и глобально по z).

Заметим, что из представления (5), как и в одномерном случае, следует квадратичная оценка:

$$|f(x, y, z)| \leq \alpha(x, y)\|z\|^p + \beta(x, y),$$

коэффициенты α, β которой ограничены локально по x и y. Далее, справедлива теорема о корректной определенности вариационного функционала, обобщающая на n-мерный случай приведенную ранее теорему 3.

Теорема 5. *Пусть Ω – компактная область в $\mathbb{R}^n$. Пусть $u = f(x, y, z)$, интегрант $f : \Omega \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z \to \mathbb{R}$. Тогда, если $f \in K_2(z)$, то вариационный функционал Эйлера–-Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_{\Omega} f(x, y, \nabla y) dx, \quad (y(\cdot) \in W^{1,2}(\Omega), \quad \Omega \subset R^n) \tag{6}$$

всюду определен в пространстве $W^{1,2}(\Omega)$. При этом для любого компакта $C \subset W^{1,2}(\Omega)$ справедлива квадратичная оценка по норме $\|y\|$:

$$|\Phi(y)| \le A_C + B_C \|y\|^2_{W^{1,2}} \quad (y \in C), \tag{7}$$

где коэффициенты A_C, B_C зависят только от выбора компакта C.

Доказательство. Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,2}(\Omega)$ и обозначим $C_y = y(\Omega)$ –компакт в $\mathbb{R}_y$. Тогда, в соответствии с определением 4, найдутся такие константы M_P, M_Q, M_R при любом фиксированном $x \in \Omega$:

$$|P(x, y, \nabla y)| \le M_P, \quad \|Q(x, y, \nabla y)\| \le M_Q, \quad \|R(x, y, \nabla y)\| \le M_R. \tag{8}$$

Используя для f псевдркквадратичное представление (5), имеем:

$$\Phi(y) = \int\limits_{\Omega} P(x, y, \nabla y) dx + \int\limits_{\Omega} \left(Q(x, y, \nabla y) \cdot \nabla y\right) dx + \int\limits_{\Omega} \left(R(x, y, \nabla y) \cdot (\nabla y)^2\right) dx \tag{9}$$

Используя (8), получаем (с учетом свойств непрерывных линейных и билинейных функционалов и неравенства Коши-Буняковского):

A)

$$\left| \int\limits_{\Omega} P(x, y, \nabla y) dx \right| \le \int\limits_{\Omega} |P(x, y, \nabla y)| dx \le M_P \cdot mes(\Omega). \tag{10}$$

B)

$$\left| \int\limits_{\Omega} \left(Q(x, y, \nabla y) \cdot \nabla y\right) dx \right| \le \int\limits_{\Omega} |Q(x, y, \nabla y) \cdot \nabla y| dx \le \int\limits_{\Omega} \|Q(x, y, \nabla y)\| \cdot \|\nabla y\| dx \le$$

$$\le M_Q \cdot \int\limits_{\Omega} \|\nabla y\| dx \le M_Q \sqrt{\int\limits_{\Omega} \|\nabla y\|^2 dx \cdot \int\limits_{\Omega} dx} =$$

$$= M_Q \sqrt{mes(\Omega)} \cdot \sqrt{\int\limits_{\Omega} \|\nabla y\|^2 dx} \le M_Q \sqrt{mes(\Omega)} \cdot \|y\|^2_{W^{1,2}} \tag{11}$$

C)

$$\left|\int\limits_{\Omega}\left(R(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^2\right)dx\right|\leq\int\limits_{\Omega}\left|\left(R(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^2\right)\right|dx\leq$$

$$\leq\int\limits_{\Omega}\|R(x,y,\nabla y)\|\cdot\|\nabla y\|^2dx\leq M_R\cdot\int\limits_{\Omega}\|\nabla y\|^2dx\leq M_R\cdot\|y\|^2_{W^{1,2}} \tag{12}$$

Из (9) и (10)– (12) получаем:

$$|\Phi(y)|\leq\left|\int\limits_{\Omega}P(x,y,\nabla y)dx\right|+\left|\int\limits_{\Omega}(Q(x,y,\nabla y)\nabla y)dx\right|+\left|\int\limits_{\Omega}R(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^2dx\right|\leq$$

$$\leq M_P\cdot mes(\Omega)+M_Q\cdot\sqrt{mes(\Omega)}\cdot\|y\|_{W^{1,2}}+M_R\cdot\|y\|^2_{W^{1,2}}<\infty. \tag{13}$$

Таким образом, из (9) следует что $|\Phi(y)|<\infty$, при любом $y(\cdot)\in W^{1,2}(\Omega)$, т.е. функционал (6) определен всюду на $W^{1,2}(\Omega)$.

Получим теперь квадратичную оценку по норме (7), коэффициенты которой зависят лишь от выбора компакта $C\subset W_{1,2}(\Omega)$.

Так как $y(\cdot)\in C\subset W^{1,2}$, то множество $\widetilde{C}=\{y(x)\mid x\in\Omega, y(\cdot)\in C\}$ –компакт в $\mathbb{R}$. Поскольку P,Q,R, вместе с f, ограничены локально по x,y и глобально по z, то на множестве $\Omega\times\widetilde{C}\times\mathbb{R}_z$ также выполнены оценки типа (8):

$$|P(x,y,\nabla y)|\leq\widetilde{M}_P,\quad \|Q(x,y,\nabla y)\|\leq\widetilde{M}_Q,\quad \|R(x,y,\nabla y)\|\leq\widetilde{M}_R. \tag{14}$$

Воспользовавшись оценками (14) (где константы $\widetilde{M}_P,\widetilde{M}_Q,\widetilde{M}_R$ зависят только от выбора компакта $C\subset W^{1,2}(\Omega)$) и оценкой (13), мы получаем:

$$|\Phi(y)|\leq A_C+D_C\|y\|_{W^{1,2}}+B_C\|y\|^2_{W^{1,2}}, \tag{15}$$

где A_C,D_C,B_C-константы зависящие только от выбора компакта C. Средний член поглощается старшей степенью переменной и мы получаем оценку (7). □

Заметим, что предположение о симметричности функционалов из класса $L_2(\mathbb{R}^n_z,\mathbb{R})$, было введено только для упрощения доказательства и может быть опущено.

Итак, псевдоквадратичность интегранта вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,2}(\Omega)$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, кроме корректной определенности функционала гарантирует квадратичную оценку $|\Phi(y)|$ по норме $\|y\|$ на любом компакте из данного пространства Соболева.

3. К-псевдополиномы. Корректная определенность вариационного функционала на $W^{1,p}(\Omega)$

Обобщим конструкцию предыдущего пункта на случай произвольного пространства Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, где $\Omega\subset\mathbb{R}^n$–компактная область, $p\geq 1$. Далее, для произвольного вещественного банахова пространства Z, обозначим через Z^* его сопряженное, через $(\overbrace{Z,\dots Z}^{k})^*$–банахово пространство всех к-линейных симметричных непрерывных функционалов на Z.

Определение 5. Пусть X, Y, Z — банаховы пространства; $\Omega \subset X$, $\mathrm{D}_y \subset Y$, $\mathrm{D}_z \subset Z$– открытые области. Назовем борелевскую функцию $f : \Omega \times D_y \times D_z \to \mathbb{R}$ *K-псевдополиномом по* z $(f \in K_p(z))$,если f можно представить в виде

$$f(x,y,z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x,y,z)(z)^k \tag{16}$$

где:
1) $R_0 : \Omega \times D_y \times D_z \to \mathbb{R}$,
2) $R_k : \Omega \times D_y \times D_z \to (Z,\dots Z)^* := L_k(Z;\mathbb{R})$ $(k = \overline{1,p})$; причем при любом выборе компактов $C_x \subset \Omega$, $\quad C_y \subset D_y$ коэффициенты R_k ограничены независимо от выбора $z \in D_z$.

Справедлива теорема о корректной определенности вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, обобщающая приведенную ранее для случая $p = 2$ теорему 5.

Теорема 6. *Пусть Ω-компактная область в $\mathbb{R}^n$. Пусть $u = f(x,y,z)$,интегрант $f : \Omega \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z \to \mathbb{R}$. Тогда, если $f \in K_p(z)$, то вариационный функционал Эйлера- -Лагранжа*

$$\Phi(y) = \int\limits_{\Omega} f(x,y,\nabla y)dx, \quad (y(\cdot) \in W^{1,p}(\Omega)) \tag{17}$$

всюду определен в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$. При этом для любого компакта $C \ \subset W^{1,p}(\Omega)$ справедлива оценка $|\Phi(y)|$ по норме $\|y\|$:

$$|\Phi(y)| \le A^0_C + A^p_C \|y\|^p_{W^{1,p}}, \quad y \in C. \tag{18}$$

где коэффициенты A^0_C, A^p_C зависят только от выбора компакта C.

Доказательство. Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(\Omega)$ и обозначим $C_y = y(\Omega)$ – компакт в $\mathbb{R}_y$. Тогда, в соответствии с определением 5, найдутся такие константы M_k, $k = \overline{0,p}$, что :

$$\forall x \in \Omega : |R_0(x,y,\nabla y)| \le M_0, \qquad \|R_k(x,y,\nabla y)\| \le M_k, \quad (1 \le k \le p). \tag{19}$$

Используя для f K-псевдополиномиальное представление (16), имеем

$$\Phi(y) = \sum_{k=0}^{p} \int\limits_{\Omega} \Big(R_k(x,y,\nabla y) \cdot (\nabla y)^k \Big)\, dx. \tag{20}$$

Используя (19), получаем (с учетом свойств k-линейных непрерывных форм и неравенства Гельдера-Минковского [2]):
А) при $k = 0$

$$\left|\int\limits_{\Omega} R_0(x,y,\nabla y)dx\right| \leq \int\limits_{\Omega} |R_0(x,y,\nabla y)|dx \leq M_0 \cdot mes(\Omega). \tag{21}$$

В) при $1 \leq k \leq p$

$$\left|\int\limits_{\Omega} \left(R_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k\right)dx\right| \leq \int\limits_{\Omega} \left|(R_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k)\right|dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega} \left(\|R_k(x,y,\nabla y)\|\cdot\|\nabla y\|^k\right)dx \leq M_k \cdot \int\limits_{\Omega} \|\nabla y\|^k dx \leq$$

$$\leq M_k \left[\int\limits_{\Omega} \left(\|\nabla y\|^k\right)^{\frac{p}{k}} dx\right]^{\frac{k}{p}} \cdot \left[\int\limits_{\Omega} (dx)\right]^{\frac{p}{p-k}} \leq M_k \left[mes(\Omega)\right]^{\frac{p}{p-k}} \|y\|^k_{W^{1,p}}. \tag{22}$$

Из (20) – (22) получаем:

$$|\Phi(y)| \leq \left|\sum_{k=0}^{p}\int\limits_{\Omega} \left(R_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k\right)dx\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{p}\left|\int\limits_{\Omega}(R_k(x,y,\nabla y)\cdot(\nabla y)^k)dx\right| \leq \sum_{k=0}^{p} M_k\left[mes(\Omega)\right]^{\frac{p}{p-k}}\|y\|^k_{W^{1,p}} < \infty. \tag{23}$$

Таким образом, $|\Phi(y)| < \infty$, т.е. функционал (17) определен всюду на $W^{1,p}(\Omega)$. Проведем теперь аналогично соответствующему пункту доказательства теоремы 5 оценку по норме (18), коэффициенты которой зависят лишь от выбора компакта $C \subset W^{1,p}(\Omega)$. Так как $y(\cdot) \in C \subset W^{1,p}$, то множество $\widetilde{C} = \{y(x) \mid x \in \Omega, y(\cdot) \in C\}$-
-компакт в $\mathbb{R}$. Поскольку $R_k \quad (0 \leq k \leq p)$, вместе с f, ограничены локально по x, y и глобально z, то на множестве $\Omega \times \widetilde{C} \times \mathbb{R}_z$ также выполнены оценки типа (19):

$$\forall x \in \Omega : |R_0(x,y,\nabla y)| \leq \widetilde{M}_0, \qquad \|R_k(x,y,\nabla y)\| \leq \widetilde{M}_k, \quad (1 \leq k \leq p). \tag{24}$$

Воспользовавшись оценками (24) (где константы $\widetilde{M}_k$ зависят только от выбора компакта $C \subset W^{1,p}(\Omega)$) и оценкой (23), мы получаем:

$$|\Phi(y)| \leq A_C^0 + A_C^1\|y\|_{W^{1,p}} + \ldots + A_C^p\|y\|^p_{W^{1,p}}, \tag{25}$$

где $A_C^0, A_C^1, \ldots A_C^p$–константы зависящие только от выбора компакта C. Средние члены поглощаются старшей степенью переменной, и мы получаем оценку (18). □
Заметим, что предложение о симметричности функционалов из классов $L_k(\mathbb{R}^n_z, \mathbb{R})$ было введено только для упрощения доказательства и может быть опущено.

Итак, К-псевдополиномиальность интегранта вариационного функционала в пространстве Соболева $W^{1,p}(\Omega) \quad (p \in \mathbb{N})$, кроме корректной определенности функционала гарантирует степенную оценку порядка p по норме $\|y\|$ на любом компакте из данного пространства Соболева.

4. Условие компактной непрерывности вариационного функционала в пространствах Соболева $W^{1,p}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n$

Напомним вначале определение K–непрерывности функционала.

Определение 6. Пусть E– произвольное полное локально выпуклое пространство, $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Для всякого абсолютно выпуклого компакта $C \subset E$ обозначим через E_C–банахово пространство $(spanC, \|\cdot\|_C)$, где норма $\|\cdot\|_C$ есть функционал Минковского множества C. Функционал Φ называется *компактно непрерывным (K–непрерывным)* в точке $y(\cdot) \in E$, если все сужения Φ на подпространства $(y + E_C)$ непрерывны в точке y.

Наша цель обобщить теорему 4 на случай произвольных пространств Соболева $W^{1,p}(\Omega)$. Для этого введем подходящий класс гладкости К-псевдополиномиальных интег-
рантов $WK_p(z)$.

Определение 7. Пусть, в обозначениях определения 5, функция $f \in K_p(z)$ и непрерывна в $\Omega \times D_y \times D_z$ по (y, z). Назовем отображение f *вейерштрассовским К-псевдополиномом* ($f \in WK_p(z)$), если представление (16) можно выбрать таким образом, что при любом выборе компактов $C_x \subset \Omega, \quad C_y \subset D_y$ коэффициенты $R_k(k = \overline{0,p})$ равномерно непрерывны и ограничены на $C_x \times C_y \times D_z$.

Теорема 7. *Пусть интегрант $u = f(x, y, z)$ есть отображение $f : \Omega \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z \to \mathbb{R}$; $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}_y$, $z \in \mathbb{R}^n_z$, где Ω-компактная область в $\mathbb{R}^n_x$. Тогда, если f принадлежит вейерштрассовскому классу $WK_p(z)$, то вариационный функк-
ционал Эйлера–Лагранжа* (17) *K–непрерывен всюду в пространстве $W^{1,p}(\Omega)$.*

Доказательство.
1)Фиксируем $y(\cdot) \in W^{1,p}(\Omega)$ и произвольный абсолютно выпуклый компакт $C_\Delta \subset W^{1,p}(\Omega)$. Воспользуемся каноническим представлением (16) для функции f:

$$f(x, y, z) = \sum_{k=0}^{p} R_k(x, y, z)(z)^k,$$

где коэффициенты $R_k : T_\Omega = \Omega \times \mathbb{R}_y \times \mathbb{R}^n_z \to L_k(T_\Omega; \mathbb{R})$, согласно условию $f \in WK_p(z)$, равномерно непрерывны и ограничены локально по x,y и глобально по z.

Заметим, что в силу компактности множества $(y + C_\Delta)$ в $W^{1,p}(\Omega)$, числовое множество

$$K^{y,\Delta} := \bigcup_{h \in C_\Delta} (y+h)(\Omega)$$

есть компакт. Следовательно, на множестве $T_\Omega^{y,\Delta} = \Omega \times K^{y,\Delta} \times \mathbb{R}_z^n$ все коэффициенты R_k ограничены и равномерно непрерывны. Отсюда, в частности, следуют оценки

$$\left| R_k(x,y,z) \cdot (\zeta)^k \right| \leq M_k \cdot \|\zeta\|^k, \quad M_k < \infty \quad \left(k = \overline{0,p}; \quad (x,y,z) \in T_\Omega^{y,\Delta}, \quad \zeta \in \mathbb{R}_z^n \right) \tag{26}$$

Подставляя теперь в (17) представление (16),получим приращение вариационнного функционала Φ в точке $y(\cdot)$ при $h \in C_\Delta$:

$$\Phi(y+h) - \Phi(y) = \int_\Omega f(x, y+h, \nabla y + \nabla h)dx - \int_\Omega f(x,y,\nabla y)dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\Sigma_{k=0}^p R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y + \nabla h)^k \right) dx - \int_\Omega \left(\Sigma_{k=0}^p R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k \right) dx =$$

$$= \sum_{k=0}^p \int_\Omega \overbrace{\left[R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y + \nabla h)^k - R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k \right]}^{\Delta_k} dx \tag{27}$$

Фиксируем k и преобразуем выражение Δ_k:

$$\Delta_k = R_k(x, y + \nabla y, h + \nabla h) \cdot \left(\sum_{l=0}^k C_k^l (\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l} \right) - R_k(x,y,\nabla y)(\nabla y)^k =$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \underbrace{C_k^l R_k(x, y+h, \nabla y + \nabla h)(\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l}}_{A_{kl}} + \underbrace{[R_k(x, y + \nabla y, h + \nabla h) - R_k(x,y,\nabla y)](\nabla y)^k}_{B_k} \tag{28}$$

2) Проведем вначале оценку для интегралов от A_{kl} $\quad (l = \overline{0, k-1})$. Поскольку ввиду (26),

$$|A_{kl}| \leq C_k^l \cdot M_k \cdot \|(\nabla y)^l (\nabla h)^{k-l}\| \leq C_k^l \cdot M_k \cdot \|\nabla y\|^l \|\nabla h\|^{k-l},$$

то

$$\left| \int_\Omega \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl} \right) dx \right| \leq \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \cdot \int_\Omega \|\nabla y\|^l \|\nabla h\|^{k-l} dx \tag{29}$$

Применим к интегралам справа в (29) неравенство Гельдера-Минковского [5]:

$$\left| \int_\Omega \varphi(x)\psi(x)dx \right| \leq \left(\int_\Omega |\varphi(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_\Omega |\psi(x)|^{q'} dx \right)^{\frac{1}{q'}}$$

$$\left(1 < p', \quad q' < \infty; \quad \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = 1\right).$$

Получаем при $p' = \frac{p}{k-l}, \quad q' = \frac{p}{p-k+l}$:

$$\left|\int\limits_{\Omega} \|\nabla y\|^l \|\nabla h\|^{k-l} dx\right| \leq \left(\int\limits_{\Omega} \|\nabla h\|^p dx\right)^{\frac{k-l}{p}} \cdot \left(\int\limits_{\Omega} \|\nabla y\|^{\frac{pl}{p-k+l}} dx\right)^{\frac{p-k+l}{p}} =$$

$$= (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l} \cdot \left(\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l}}}\right)^l \tag{30}$$

Далее, элементарно проверяется неравенство $\frac{pl}{p-k+l} \leq p$, откуда следует неравенство для соответствующих соболевских норм:

$$\|y\|_{W^{1,\frac{pl}{p-k+l}}} \leq N_{kl} \cdot \|y\|_{W^{1,p}}, \tag{31}$$

где N_{kl}–постоянные.

Из неравенств (30), (31) следует:

$$\left|\int\limits_{\Omega} \|\nabla y\|^l \|\nabla h\|^{k-l} dx\right| \leq (N_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l}. \tag{32}$$

Наконец, подставляя оценки (32) при $l = \overline{0, k-1}$ в (29), получаем:

$$\left|\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl}\right) dx\right| \leq \sum_{l=0}^{k-1} C_k^l \cdot M_k \cdot (N_{kl})^l \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^l \cdot (\|h\|_{W^{1,p}})^{k-l} \tag{33}$$

Поскольку$(\|h\|_{C_\Delta} \longrightarrow 0) \Longrightarrow (\|h\|_{W^{1,p}} \longrightarrow 0)$, то из (33) следует:

$$\left|\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl}\right) dx\right| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{C_\Delta} \longrightarrow 0 \tag{34}$$

3)Теперь проведем оценку для интеграла от B_k.

Для любого фиксированного $\delta > 0$ обозначим

$$e_\delta = \left\{x \in \Omega \Big| |h|^p + |\nabla h|^p > \delta^p\right\}, \quad e^\delta = \left\{x \in \Omega \Big| |h| < \delta, |\nabla h| < \delta\right\} \tag{35}$$

Заметим, что

$$\left(\|h\|^p_{W^{1,p}} < \delta^{p+1}\right) \Rightarrow (me_\delta < \delta) \tag{36}$$

Действительно, в противном случае имеем:

$$\|h\|^p_{W^{1,p}} = \int\limits_{\Omega} (|h|^p + |\nabla h|^p) dx \geq \int\limits_{e_\delta} (|h|^p + |\nabla h|^p)\, dx > \delta^p \cdot me_\delta \geq \delta^{p+1}$$

Очевидно также, что

$$\Omega = e_\delta \cup e^\delta \tag{37}$$

Фиксируем теперь $\varepsilon > 0 \quad (\varepsilon < 1)$ и выберем $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ так, чтобы, с учетом абсолютной непрерывности интеграла Лебега и равномерной непрерывности R_k на множестве$T_{\Omega}^{y,\Delta}$, были выполнены условия:

$$\delta < \varepsilon, \qquad \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx < \varepsilon^{\frac{p}{k}} \tag{38}$$

$$(|h| < \delta, \|\nabla h\| < \delta) \Rightarrow ((\|\Delta R_k\| < \varepsilon), \quad k = \overline{0,p}, \ (\forall x \in \Omega)) \tag{39}$$

Далее, выберем такое $\eta > 0$,чтобы

$$(\|h\|_{C_\Delta} \leq \eta) \Rightarrow \left(\|h\|_{W^{1,p}} < \delta^{\frac{p+1}{p}}\right) \tag{40}$$

Тогда при $\|h\|_{C_\Delta} \leq \eta$, используя неравенства (26), (37)– (40), получаем:

$$\left|\int\limits_{\Omega} B_k dx\right| \leq \int\limits_{\Omega} |B_k| dx = \int\limits_{\Omega} |\Delta R_k \cdot (\nabla y)^k| dx \leq \int\limits_{\Omega} \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^k dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{e_\delta} \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^k dx + \int\limits_{e^\delta} \|\Delta R_k\| \cdot \|\nabla y\|^k dx < M_k \cdot \int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^k dx + \varepsilon \cdot \int\limits_{e^\delta} \|\nabla y\|^k dx \tag{41}$$

Применяя вновь неравенство Гельдера-Минковского, при $p' = \frac{p}{k}$ к интегралам справа в (41), находим:

$$\left|\int\limits_{\Omega} B_k dx\right| \leq \ldots \leq M_k \cdot N_k \cdot \left(\int\limits_{e_\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k}{p}} + N_k \cdot \varepsilon \cdot \left(\int\limits_{e\delta} \|\nabla y\|^p dx\right)^{\frac{k}{p}} \leq$$

$$\leq M_k \cdot N_k \cdot \left(\varepsilon^{\frac{p}{k}}\right)^{\frac{k}{p}} + N_k \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^k \cdot \varepsilon = \left[M_k \cdot N_k + N_k \cdot (\|y\|_{W^{1,p}})^k\right] \cdot \varepsilon \tag{42}$$

где

$$N_k = [m(e_\delta)]^{\frac{p-k}{p}} \leq [m(\Omega)]^{\frac{p-k}{p}}.$$

Таким образом, из (42) следует

$$\left|\int\limits_{\Omega} B_k dx\right| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \|h\|_{C_\Delta} \longrightarrow 0 \tag{43}$$

4) Наконец, из тождеств (27), (28) и оценок (34), (43) получаем:

$$|\Phi(y+h) - \Phi(y)| \leq \sum_{k=0}^{p} \left|\int\limits_{\Omega} \Delta_k dx\right| \leq \sum_{k=0}^{p} \left|\int\limits_{\Omega} \left(\sum_{l=0}^{k-1} A_{kl}\right) dx\right| + \sum_{k=0}^{p} \left|\int\limits_{\Omega} B_k dx\right| \longrightarrow 0$$

при $\|h\|_{C_\Delta} \longrightarrow 0$. В силу произвольности выбора абсолютно выпуклого компакта $C_\Delta \subset W^{1,p}(\Omega)$, это означает K–нерерывность вариационного функционала Φ в произвольной точке $y(\cdot) \in W^{1,p}(\Omega)$. $\square$

Таким образом,K–непрерывность вариационного функционала гарантируется принадлежностью интегранта к классу вейерштрассовских псевдо-p-адичных отображений. Заметим, что предположение о симметричности функционалов из классов $L_k(T_\Omega, \mathbb{R})$ было введено только для упрощения доказательства и может быть опущено.

Выводы

В статье введено понятие K-псевдополиномиального интегранта в пространствах Соболева $W^{1,p}(\Omega)$,$1 \leq p \leq \infty$, где Ω-компактная область в R^n. Получены утверждения о корректной определенности вариационного функционала с таким интегрантом и о компактной непрерывности вариационнного функционала с вейерштрассовским K-псевдополиномиальным интегрантом в данных пространствах Соболева.
Автор выражает благодарность И.В.Орлову и Е.В.Божонок за полезные обсуждения и замечания.

Список литературы

[1] Орлов И.В., Божонок Е.В. *Условия существования, K–непререрывности и K–дифференцируемости функционала Эйлера-Лагранжа в пространстве Соболева W_2^1* // Ученые записки ТНУ, серия "Математика. Механика. Информатика и кибернетика". – 2006. – Т. 19(58), № 2. – С. 63–78.

[2] Орлов И.В. *Дополнительные главы современного естествознания.Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1: учебное пособие* /[Орлов И.В., Божонок Е.В.].—Симфергполь:ДИАЙПИ,2010—156 с.

[3] Божонок Е.В. *Компактные экстремумы и компактно-аналитические свойства основного вариационного функционала в пространтсве Соболева H^1: дисс... канд.физ. -мат.наук:01.01.02 "Дифференциальные урвнения "*/[Божонок Е.В.]; — Симферополь, 2009.—161 с.

[4] *Оптимальное управление* / [Галеев Э.М., Зеликин М.И., Конягин С.В., Магарил-Ильяев Г.Г. и др.]; под ред. Н.П. Осмоловского, В.М. Тихомирова. — М.: МЦНМО, 2008. — 320 с.

[5] Березанский Ю.М. *Функциональный анализ.*/[Березанский Ю.М.,Ус Г.Ф.,Шефтель З.Г.]; — К.: Вища школа,1990.—600 с.

[6] Мазья В.Г. *Пространства С.Л.Соболева.*/[Мазья В.Г.]; — Л.: ЛГУ,1985.—416 с.

[7] Гельфанд И.М.*Вариационное исчисление.*/[Гельфанд И.М.,Фомин С.В.]; — М.: ФМ,1961.—230 с.

Умови коректної визначенності та компактної неперервності варіаційних функціоналів у просторах Соболєва $W^{1,p}(\Omega)$.

Поняття псевдоквадратичного інтегранта варіаційного функціонала узагальнюється на випадок довільних банахових просторів. На компактні області в $\mathbb{R}^n$ *поширюється відоме раніше для відрізка твердження про коректну визначеність і умова компактної неперервності у гільбертовому просторі Соболева* $W^{1,2}$ *варіаційного функціоналу із псевдоквадратичним інтегрантом.*
Отримані результати узагальнено на випадок K-псевдополіноміального интегранта $(\forall p \in \mathbb{N})$ *і просторів Соболева* $W^{1,p}$.

Ключові слова: варіаційний функціонал, псевдоквадратичність, простір Соболєва, K-псевдополіноміальність, коректна визначеність, компактна неперервність.

Conditions of well-posedness and compact continuity of variational functionals in Sobolev spaces $W^{1,p}(\Omega)$.

The concept of pseudoquadratic integrand of variational functional is generalized to the case of an arbitrary Banach spaces. The known statements on well-posedness and compact continuity of the variational functionals having pseudoquadratic integrand in the Hilbert-Sobolev space $W^{1,2}$ *over an interval are extended to the case of an arbitrary compact domain in* $\mathbb{R}^n$.
The obtained results are generalised to the case of the variational functionals having a K-pseudopolynomial integrand in the corresponding Sobolev space $W^{1,p}$ *for an arbitrary* $p \in \mathbb{N}$

Keywords: variational functional, pseudoquadraticity, Sobolev space, K-pseudopolynomial, well-posedness, compact continuity.