Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 78–91.

УДК 517.968.7

И. И. Карпенко

НЕЭРМИТОВО САМОСОПРЯЖЕННЫЕ МАТРИЦЫ НАД ТЕЛОМ КВАТЕРНИОНОВ

В работе рассматривается класс матриц, самосопряженных относительно неэрмитовой инволюции в вещественной алгебре кватернионов (a–самосопряженные матрицы). Для этого класса матриц получен аналог разложения Такаги. В качестве приложений доказана теорема о подобии произвольной кватернионной матрицы некоторой a–самосопряженной матрице и рассмотрены свойства конечномерного кватернионного модуля с внутренним произведением.

Ключевые слова: кватернион, алгебры с инволюцией, разложение Такаги, внутреннее произведение.

Введение

В комплексном матричном анализе наряду с эрмитовыми матрицами ($A^* = A$) рассматриваются симметричные матрицы ($A^T = A$). И хотя последние встречаются в приложениях значительно реже, однако они всё-таки используются, например, при изучении регулярных аналитических отображений единичного круга в комплексную плоскость. Для комплексных симметрических матриц известен ряд результатов, например, теорема о разложении Такаги [1], согласно которой любая симметричная матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ всегда может быть представлена в виде $A = U\Sigma U^T$, где $U-$ унитарная матрица, $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)-$ неотрицательная диагональная матрица, причем столбцы матрицы U образуют множество ортонормированных собственных векторов матрицы $A\bar{A}$, и соответствующие диагональные элементы матрицы Σ являются неотрицательными квадратными корнями из собственных значений матрицы $A\bar{A}$, отвечающих этим собственным векторам.

Заметим, что операция транспонирования наряду с операцией эрмитова сопряжения является инволюцией в вещественной алгебре $M_n(\mathbb{C})$.

В кватернионном конечномерном анализе, как правило, рассматривается операция эрмитова сопряжения матриц, порожденная классической инволюцией в алгебре кватернионов. Однако в вещественной алгебре кватернионов $\mathbb{H}$ существуют (с точностью до изоморфизма) ровно две инволюции, и соответственно мы имеем еще одну инволюцию (неэрмитову) в $M_n(\mathbb{H})$. В настоящей работе рассматриваются классы самосопряженных матриц в алгебре $M_n(\mathbb{H})$, порожденные неэрмитовой инволюцией. Как оказалось, этот класс матриц является аналогом комплексных симметрических матриц и по аналогии с ними имеет ряд интересных свойств. Упоминание о таком инволютивном преобразовании мы встречаем в работе [2], где кососамосопряженнные (в неэрмитовом смысле) матрицы рассматриваются в качестве генераторов ортогональной группы. Причем, в этой работе неэрмитова инволюция рассматривается просто как возможная альтернатива для операции транспонирования, у которой в алгебре матриц над телом кватернионов отсутствует антикоммутативность .

1. Инволюции в вещественной алгебре кватернионов $\mathbb{H}$

Пусть $\mathbb{H}$ — вещественная алгебра размерности 4 с базисом $\{1, i, j, k\}$ и правилами умножения

$$\begin{array}{lll} i^2 = -1 & j^2 = -1 & k^2 = -1 \\ ij = k & jk = i & ki = j \\ ji = -k & kj = -i & ik = -j \end{array}$$

Элементы такой алгебры называют *кватернионами.* Для любого кватерниона $q \in \mathbb{H}$ существуют единственные q_0, q_1, q_2, $q_3 \in \mathbb{R}$ такие, что $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ (*вещественное представление* кватерниона q). Полезна также *векторная форма* записи кватерниона: $q = q_0 + \vec{q}$, где $\vec{q} = q_1 i + q_2 j + q_3 k$ — *векторная* или *мнимая часть* q (кватернион, совпадающий со своей векторной частью, называется *мнимым* или *векторным*).Так, например, векторная форма произведения кватернионов q и p имеет вид

$$qp = q_0 p_0 - (\vec{q}, \vec{p}) + p_0 \vec{q} + q_0 \vec{p} + [\vec{q}, \vec{p}]. \tag{1}$$

Здесь $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение, а $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в 3–мерном подпространстве векторных кватернионов $\mathbb{R}\langle i, j, k\rangle$.

Множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ можно рассматривать как вещественную подалгебру в $\mathbb{H}$: $\mathbb{C} = \mathbb{R}\langle 1, i\rangle$. Вложение $\mathbb{C}$ в $\mathbb{H}$ позволяет получить *комплексное* (или *симплектическое*) представление кватернионов. А именно, если $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, то $q = (q_0 + q_1 i) + (q_2 + q_3 i)j = z_1 + z_2 j$, где z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

Линейный оператор J, действующий в вещественной алгебре $\mathbb{H}$, называется *инволюцией* в $\mathbb{H}$, если выполняются условия:

(1) $J^2 = I$;
(2) $J(pq) = J(q)J(p)$ $(\forall p, q \in \mathbb{H})$.

Примером такой инволюции служит операция сопряжения в $\mathbb{H}$:

$$\overline{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k.$$

При этом $q\overline{q} = \sum_{t=0}^{3} q_t^2$. Модуль $|q|$ кватерниона q определяется равенством $|q| = (q\overline{q})^{1/2}$, превращая таким образом $\mathbb{H}$ в нормированную алгебру с делением. Действительно, нетрудно видеть, что

$$q^{-1} = |q|^{-1/2}\overline{q}.$$

Следовательно, инволюция алгебры $\mathbb{H}$ дополнительно удовлетворяет равенству

$$J(1) = 1.$$

Заметим, что в отличие от комплексного случая тождественное отображение в $\mathbb{R}$–алгебре $\mathbb{H}$ уже не является инволюцией в силу некоммутативности этой алгебры. Выясним, существуют ли другие инволюции в $\mathbb{H}$ помимо приведенной выше операции сопряжения.

Так как всякая инволюция однозначно определяется своим действием на базисные векторы, положим

$$J(1) = 1, \quad J(i) = u, \quad J(j) = v, \quad J(k) = w.$$

Так как $i^2 = -1$, то $u^2 = -1$, откуда следует, что $\mathrm{Re}\, u = 0$, т.е. u — чисто мнимый кватернион, причем $|u| = 1$. Аналогично,

$$\mathrm{Re}\, v = \mathrm{Re}\, w = 0, \ |v| = |w| = 1.$$

Кроме того, действуя оператором J на равенство $ij = -ji$, получим $vu = -uv$. Следовательно, с учетом формулы (1) имеем:

$$-(v,u) + [v,u] = (u,v) - [u,v],$$

откуда следует, что $(u,v) = 0$.

Обратимся теперь к кватерниону w. Так как $k = ij$, то

$$w = vu = -(v,u) + [v,u] = [v,u].$$

Следовательно, вещественная часть кватерниона w равна нулю, и векторы u, v, w образуют левую ортогональную тройку в $\mathbb{R}^3$. Пусть $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$. Тогда матрица оператора J в базисе $\{1, i, j, k\}$ имеет вид :

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_1 & v_1 & w_1 \\ 0 & u_2 & v_2 & w_2 \\ 0 & u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$\det J = \det \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = (u, v, w) = ([u, v], w) = -(w, w) = -1.$$

Так как столбцы матрицы J образуют ортонормированную систему, то J — ортогональная матрица. Кроме того, $J^2 = I$, поэтому собственные значения матрицы J удовлетворяют равенству $\lambda^2 = 1$. Следовательно, $\lambda = \pm 1$. Ортогональность матрицы J и вещественность ее спектра означают, что матрица J вещественно подобна диагональной матрице, на диагонали которой стоят ± 1. Так как $\det J = -1$, то возможны два варианта:

(1) $J_1 = \mathrm{diag}\{1, -1, -1, -1\}$;

(2) $J_2 = \mathrm{diag}\{1, 1, -1, 1\}$ (с точностью до расположения -1).

Таким образом, в вещественной алгебре $\mathbb{H}$ (с точностью до изоморфизма) существует ровно две инволюции J_1 и J_2, для кватерниона $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$ определяемые равенствами:

$$J_1(q) = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k,$$
$$J_2(q) = q_0 + q_1 i - q_2 j + q_3 k.$$

Очевидно, что первая инволюция есть ни что иное, как введенная выше операция сопряжения: $J_1(q) = \overline{q}$. Для второй инволюции примем обозначение $J_2(q) = \widehat{q}$. Для указанных инволюций справедливо соотношение:

$$\widehat{q} = -j\overline{q}j. \tag{2}$$

Интересно отметить, что композиция этих инволюций дает автоморфизм алгебры $\mathbb{H}$:

$$q^c := \overline{\widehat{q}} = \widehat{\overline{q}} = -jqj.$$

Если кватернион q представлен своим симплектическим разложением $q = z_1 + z_2 j$, где z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$, то

$$\overline{q} = \overline{z_1} - z_2 j, \ \widehat{q} = z_1 - \overline{z_2} j, \ q^c = \overline{z_1} + \overline{z_2} j.$$

2. Инволюции и автоморфизмы в вещественной алгебре $M_n(\mathbb{H})$

Рассмотренные выше отображения вещественной алгебры $\mathbb{H}$ порождают вещественные линейные отображения в правом $\mathbb{H}$–модуле $M_{m\times n}(\mathbb{H})$. Пусть $A \in M_{m\times n}(\mathbb{H})$, $A = \|a_{st}\|$. Вводя следующие обозначения:

$$\overline{A} = \|\overline{a}_{st}\|, \quad \widehat{A} = \|\widehat{a}_{st}\|,$$

определим операции $(^a)$ и $(^*)$ над матрицами из $M_{m\times n}(\mathbb{H})$ следующим образом:

$$A^* := \overline{A}^{\,T}; \quad A^a := \widehat{A}^{\,T}.$$

Нетрудно показать, что отображения $(^a)$ и $(^*)$ являются $\mathbb{R}$–линейными в $M_{m\times n}(\mathbb{H})$, и, кроме того, для матриц подходящих размерностей

$$(AB)^* = B^*A^*,\ (AB)^a = B^aA^a.$$

Таким образом, отображения $(^a)$ и $(^*)$ являются инволюциями вещественной алгебры $M_n(\mathbb{H})$, причем

$$A^a = -JA^*J, \tag{3}$$

где $J = Ej$, E — единичная матрица. Инволюцию $(^*)$ называют, как правило, *эрмитовой*. Поэтому инволюцию $(^a)$ мы будем называть *неэрмитовой*.

Автоморфизм $q \to q^c$ порождает $\mathbb{H}$–линейное отображение в в правом $\mathbb{H}$–модуле $M_{m\times n}(\mathbb{H})$:

$$A^c = \|a^c_{st}\|.$$

Для такого отображения уже имеем $(AB)^c = A^cB^c$, что, в частности, означает, что $(^c)$ — автоморфизм алгебры $M_n(\mathbb{H})$. Кроме того,

$$(A^a)^* = (A^*)^a = A^c. \tag{4}$$

3. a–самосопряженные матрицы

Пусть $A = \|a_{st}\| \in M_n(\mathbb{H})$. Матрицу A назовем *a–самосопряженной*, если $A = A^a$.

Ввиду равенства (3) a–самосопряженная матрица A удовлетворяет условию:

$$A^* = -JAJ.$$

Лемма 1. *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ является a–самосопряженной, то собственные значения матрицы AA^c неотрицательны. Причем для каждого собственного значения σ существует вектор $v \in \mathbb{H}^n$ такой, что*

$$Av^c = v\sigma.$$

Доказательство. Пусть A — a–самосопряженная матрица из $M_n(\mathbb{H})$. Так как $A = A^a$, то $A^c = \overline{\widehat{A}} = (A^a)^* = A^*$. Следовательно, матрица AA^c является самосопряженной неотрицательной матрицей с неотрицательными собственными значениями.

Пусть $x \in \mathbb{H}^n$ — собственный вектор матрицы AA^c, соответствующий собственному значению σ^2. Возможны две ситуации:

(1) векторы Ax^c и x линейно зависимы;

(2) векторы Ax^c и x линейно независимы.

В первом случае существует такой кватернион q, что $Ax^c = xq$. Применяя операцию сопряжения $(^c)$, имеем $A^cx = x^cq^c$, откуда

$$AA^cx = Ax^cq^c = xqq^c.$$

Следовательно, $qq^c = \sigma^2$.

Во втором случае для любого $q \in \mathbb{H}$ вектор $y = Ax^c + xq$ отличен от нуля. Выберем q таким образом, чтобы выполнялось равенство $qq^c = \sigma^2$. Тогда

$$Ay^c = A(A^c x + x^c q^c) = x\sigma^2 + Ax^c q^c = xqq^c + Ax^c q^c = yq^c.$$

Таким образом, мы доказали, что всегда существует вектор $z \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ и $p \in \mathbb{H}$ такие, что $pp^c = \sigma^2$, и

$$Az^c = zp. \tag{5}$$

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $p = \sigma$. Действительно, умножая справа равенство (5) на u^c, $u \in \mathbb{H}$, $|u| = 1$, получим

$$A(zu)^c = (zu)(\overline{u}pu^c).$$

Здесь за счет выбора кватерниона u мы можем добиться равенства $\overline{u}pu^c = \sigma$. $\square$

Теорема 1. *Если матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ является а–самосопряженной, то она допускает разложение вида:*

$$A = U\Sigma U^a,$$

где U — унитарная матрица, столбцы которой образуют множество ортонормированных собственных векторов матрицы AA^c, Σ — неотрицательная диагональная матрица, диагональные элементы которой являются неотрицательными квадратными корнями из собственных значений матрицы AA^c, соответствующих этим собственным векторам.

Доказательство. Пусть A — a–самосопряженная матрица из $M_n(\mathbb{H})$, $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_n^2$ $(\sigma_t \geq 0)$ — собственные значения матрицы AA^c. Согласно лемме 1 мы можем утверждать, что существует вектор $x_1 \in \mathbb{H}^n \setminus \{0\}$ такой, что

$$Ax_1^c = x_1\sigma_1. \tag{6}$$

Дополним вектор x_1 до ортонормированного базиса в $\mathbb{H}^n$: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обозначим через V_1 унитарную матрицу, столбцы которой совпадают с векторами этого базиса. Действуя на равенство $V_1V_1^* = E$ операцией $(^a)$, с учетом формулы (4) получим:

$$(V_1^*)^a V_1^a = V_1^c V_1^a = E.$$

Заметим также, что $(V_1^c)^a = V_1^*, (V_1^*)^a = V_1^c$ и, следовательно, матрица $V_1^* A V_1^c$ является a–самосопряженной.

В силу равенства (6) имеем:

$$V_1^* A V_1^c = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & A^{(1)} \end{bmatrix}$$

где матрица $A^{(1)}$ также a–самосопряженная. Применяя этот процесс редукции к матрице $A^{(1)}$ и ее преемникам самое большее $n-1$ раз, получим в результате равенство:

$$V_{n-1}^* \dots V_2^* V_1^* A V_1^c V_2^c \dots V_{n-1}^c = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma_n \end{bmatrix} = \Sigma.$$

Полагая $U = V_1 V_2 \dots V_{n-1}$, получаем:

$$U^* A U^c = \Sigma.$$

Умножая это равенство справа на U^a и слева на U, окончательно получим:

$$A = U \Sigma U^a.$$

□

В качестве примера a–самосопряженной матрицы рассмотрим матрицу $S = \frac{1}{\sqrt{2}}(E + iB)$, где

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Отметим ряд достаточно очевидных свойств матрицы S:

1) $S^T = S$;

2) $\widehat{S} = S$;

3) $S^a = S$.

Так как $B^2 = E$, то $S\overline{S} = \frac{1}{2}(E + iB)(E - iB) = E$. Отсюда следует, что $\overline{S} = S^{-1}$. Отметим также, что $SS^* = S^*S = E$. Таким образом, матрица S является не только a–самосопряженной, но еще и нормальной матрицей.

Пусть $J_k(\lambda)$ — жорданов блок порядка $k \geq 2$, $J_k(\lambda) = \lambda E + N$, где $\lambda \in \mathbb{C}$ и

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$BNB = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} = N^a,$$

при этом $(BNB)^T = N$ или $(BNB)^a = N$. Так как

$$BN = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \ NB = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

то $(BN)^a = BN, (NB)^a = NB$. Следовательно,

$$SJ_k(\lambda)S^{-1} = SJ_k(\lambda)\bar{S} = \frac{1}{2}(E+iB)(\lambda E + N)(E - iB) =$$
$$= \lambda E + 1/2(N + BNB) + i/2(BN - NB).$$

В полученном равенстве все три слагаемых есть a–самосопряженные матрицы. Таким образом, *жорданов блок $J_k(\lambda)$ подобен a-самосопряженной матрице.*

Теорема 2. *Каждая матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$ подобна некоторой a–самосопряженной матрице.*

Доказательство. Пусть матрица $A \in M_n(\mathbb{H})$. Известно, (см., напр., [3]), что каждая квадратная матрица над алгеброй $\mathbb{H}$ подобна комплексной жордановой нормальной форме

$$J = J_{n_1}(\lambda_1) \oplus J_{n_2}(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus J_{n_s}(\lambda_s),$$

где $J_{n_t}(\lambda_t) \in M_n(\mathbb{C}),\ t = \overline{1,s}$.

Если ввести в рассмотрение матрицы $S_{n_t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(E+iB) \in M_{n_t}(\mathbb{C})$ для $n_t \geq 2$, $S_{n_t} = [1]$ для $n_t = 1$, и обозначить

$$S = S_{n_1} \oplus S_{n_2} \oplus \ldots \oplus S_{n_s},$$

то

$$SJS^{-1} = S_{n_1}J_{n_1}(\lambda_1)\bar{S}_{n_1} \oplus \ldots \oplus S_{n_s}J_{n_s}(\lambda_s)\bar{S}_{n_s}.$$

На основании проведенных выше рассуждений последняя матрица есть прямая сумма a–самосопряженных матриц, и, следовательно, сама является a-самосопряженной. □

Следовательно, каждый класс подобия в $M_n(\mathbb{H})$ содержит a–самосопряженную матрицу, каждому линейному оператору в $\mathbb{H}^n$ соответствует a-самосопряженное представление в некотором базисе. Из этого результата, в частности, следует, что спектр и жорданова форма a–самосопряженных матриц не имеют никакой специфики.

Другой вывод из приведенного выше результата заключается в том, что каждая матрица "диагонализуема"в некотором смысле.

Следствие 1. *Для всякой матрицы $A \in M_n(\mathbb{H})$ найдутся такие невырожденная матрица T и унитарная матрица U, что матрица $(TU)^{-1}A(TU^c)$ будет диагональной матрицей с неотрицательными элементами на главной диагонали.*

Доказательство. Согласно теореме 2

$$A = TBT^{-1},$$

где $B^a = B$. Тогда согласно теореме 1

$$B = U\Sigma U^a,$$

где U — унитарная матрица, Σ — неотрицательная диагональная матрица. Следовательно,

$$A = TU\Sigma U^a T^{-1}. \tag{7}$$

Так как $U^{-1} = U^*$ и $(U^a)^{-1} = (U^{-1})^a = (U^*)^a = U^c$, то равенство (7) можно переписать следующим образом:

$$A = TU\Sigma(TU^c)^{-1},$$

откуда $(TU)^{-1}A(TU^c) = \Sigma$. □

4. Внутреннее произведение в $\mathbb{H}$–модулях

Полученные результаты находят применение в исследовании $\mathbb{H}$–модулей со специальным внутренним произведением. Так, отображение $(^a)$ позволяет ввести внутреннее произведение на правом $\mathbb{H}$–модуле $\mathbb{H}^n$: для $x = (x_t),\ y = (y_t)$

$$[x, y] := y^a x = \sum_{t=1}^{n} y_t^a x_t.$$

Такое внутреннее произведение обладает следующими свойствами:

1. $[x, y]^a = [y, x]$;
2. $[x + y, z] = [x, z] + [y, z]$;
3. $[x, y + z] = [x, y] + [x, z]$;
4. $[xq, y] = [x, y]q$ $(\forall q \in \mathbb{H})$;
5. $[x, yq] = q^a[x, y]$ $(\forall q \in \mathbb{H})$.

Заметим, что относительно данного внутреннего произведения справедливо равенство

$$[Ax, y] = [x, A^a y].$$

В правом $\mathbb{H}$–модуле $\mathbb{H}^n$ всегда можно ввести классическое скалярное произведение, которое определяется как

$$\langle x, y\rangle := \sum_{t=1}^{n} \overline{y}_t x_t.$$

Поэтому с помощью равенства (2) легко установить связь между внутренним и скалярным произведениями:

$$[x, y] = -j\langle Jx, y\rangle,$$

где $J = Ej,\ E$ — единичная матрица. Отметим, что линейный оператор J является антиинволюцией в $\mathbb{H}^n$:

$$J^* = -J_0, \quad J^2 = -I.$$

Векторы x, y назовем *J–ортогональными* ($x[\perp]y$), если $[x, y] = 0$. Подмодули H_1, H_2 модуля H назовем *J–ортогональными подмодулями*, если для любых $x \in H_1,\ y \in H_2:\ [x, y] = 0$. *J–ортогональным дополнением* к подмодулю H_1 в модуле H называется множество вида:

$$H_1^{[\perp]} = \{x \in H \mid [x, y] = 0, \forall y \ \in H_1\}.$$

Множество $H_1^0 = H_1 \cap H_1^{[\perp]}$ назовем *изотропной частью* подмодуля H_1. Если изотропная часть подмодуля H_1 равна $\{0\}$, то такой подмодуль называется *невырожденным*.

Так, сам модуль H является невырожденным. Действительно, если предположить, что $[x, y] = 0, \forall y \ \in H$, то, как следствие, $\langle Jx, y\rangle = 0, \forall y \ \in H$, откуда $Jx = 0$ и $x = 0$.

Определение 1. $\mathbb{H}$–подмодуль H_1 в H назовем *проекционно полным*, если имеет место равенство:

$$H_1[+]H_1^{[\perp]} = H.$$

Пусть H_1 — $\mathbb{H}$–подмодуль в H, P_1 — ортопроектор на H_1, P_2 — ортопроектор на $H_1^{\perp}$.

Теорема 3. *(Первый критерий проекционной полноты подмодуля.) $\mathbb{H}$–подмодуль H_1 является проекционно полным в H тогда и только тогда, когда H_1 удовлетворяет условию $P_1JH_1 = H_1$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathbb{H}$-подмодуль H_1 удовлетворяет условию

$$P_1JH_1 = H_1.$$

С учетом свойств антиинволюции J для любого $x \in H$ имеет место представление: $x = Jx_0,\ x_0 \in H$. Кроме того, $x_0 = x_1 + x_2, Jx_1 \in H_1,\ x_2 \in H_1^{\perp}$. Так как по условию $x_1 = P_1Jx_1',\ x_1' \in H_1$, то

$$x = J(P_1Jx_1' + x_2) = J((I - P_2)Jx_1' + x_2) = -x_1' + J(-P_2Jx_1' + x_2) = -x_1' + Jx_2',$$

где $x_1' \in H_1,\ x_2' \in H_1^{\perp},\ Jx_2' \in H_1^{[\perp]}$. Полученное разложение доказывает равенство

$$H = H_1[+]H_1^{[\perp]}.$$

Достаточность. Обратно, пусть подмодуль H_1 проекционно полный в H. Тогда для любого $x \in H_1$

$$Jx = x_1 + x_2, \quad x_1 \in H_1,\ x_2 \in H_1^{[\perp]}. \tag{8}$$

Принимая во внимание свойства антиинволюции J, $x_2' = Jx_2 \in H_1^{\perp}$. Действуя на равенство (8) оператором $-J$, имеем:

$$x = -Jx_1 - x_2',$$

откуда под действием оператора P_1 получим:

$$x_1 = -P_1 J x_1 = P_1 J(-x_1),$$

что доказывает справедливость равенства $P_1 J H_1 = H_1$. $\square$

Определим матрицу Грама G системы векторов $f_1, f_2, \ldots, f_m$ из H относительно внутреннего произведения $[\cdot,\cdot]$:

$$G = \begin{pmatrix} [f_1, f_1] & [f_2, f_1] & \ldots & [f_m, f_1] \\ [f_1, f_2] & [f_2, f_2] & \ldots & [f_m, f_2] \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ [f_1, f_m] & [f_2, f_m] & \ldots & [f_m, f_m] \end{pmatrix}$$

Лемма 2. *Матрица Грама G линейно независимой системы векторов $f_1, f_2, \ldots, f_m$ является обратимой тогда и только тогда, когда подмодуль $H_1 = \mathrm{Lin}_{\mathbb{H}}\langle f_1, f_2, \ldots, f_m\rangle$ является невырожденным.*

Доказательство. Допустим, что $H_1^0 \neq \{0\}$. Тогда найдется $x \in H_1 \backslash \{0\}$ такой, что $x[\perp]H_1$. При этом $x = \sum_{t=1}^m f_t x_t$. Обозначим

$$g_t = ([f_1, f_t], [f_2, f_t], \ldots, [f_m, f_t]), t = \overline{1, m}.$$

Тогда

$$\sum_t g_t x_t = ([f_1, x], [f_2, x], \ldots, [f_m, x]) = 0.$$

Следовательно, строки матрицы $G \in M_m(\mathbb{H})$ линейно зависимы. Для обоснования необратимости матрицы G обратимся к ее симплектическому образу G^s. Если $G = G_1 + G_2 j,\ G_1, G_2 \in M_m(\mathbb{C})$, то строки матрицы $G^s = \begin{pmatrix} G_1 & -\overline{G}_2 \\ G_2 & \overline{G}_1 \end{pmatrix}$ также линейно зависимы. В этом случае $\det G^s = 0$, и матрица G^s является необратимой. Тогда матрица G также необратима.

Обратно, если матрица G необратима, то аналогичными рассуждениями можно показать, что строки матрицы G линейно зависимы, откуда следует существование ненулевого вектора x в $H_1 \cap H_1^{[\perp]}$. $\square$

Доказанная лемма позволяет получить еще один критерий проекционной полноты.

Теорема 4. *(Второй критерий проекционной полноты подмодуля.) Подмодуль H_1 является проекционно полным в H тогда и только тогда, когда подмодуль H_1 — невырожденный.*

Доказательство. Пусть $\dim H_1 = m$, $f_1, f_2, \ldots, f_m$ — ортонормированный базис в H_1. Тогда $Jf_t = \sum_{r=1}^m f_r a_r + g$, где $g \in H_1^{\perp}$. Следовательно, $a_u = \langle Jf_t, f_u\rangle = [f_t, f_u]$. Таким образом,

$$P_1 Jf_t = \sum_{r=1}^{m} f_r [f_t, f_r].$$

Пусть $y \in H_1$. Рассмотрим уравнение

$$P_1 Jx = y \tag{9}$$

и выясним, при каком условии оно имеет решение в H_1.

Пусть $x = \sum_{t=1}^m f_t x_t$, тогда

$$P_1 Jx = \sum_t (P_1 Jf_t)x_t = \sum_{t=1}^{m}\sum_{r=1}^{m} f_r[f_t, f_r]x_t = \sum_{r=1}^{m} f_r \sum_{t=1}^{m}[f_t, f_r]x_t.$$

Так как $y \in H_1$, то $y = \sum_{r=1}^m f_r y_r$. Следовательно, задача о разрешимости уравнения (9) в H_1 сводится к разрешимости системы линейных уравнений:

$$\sum_{t=1}^{m}[f_t, f_r]x_t = y_r, \qquad r = \overline{1, m}. \tag{10}$$

Очевидно, система линейных уравнений (10) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда матрица Грама G обратима. Согласно лемме 2 это условие равносильно невырожденности подмодуля H_1. □

В $\mathbb{H}$–модуле $\mathbb{H}^n$ с внутренним произведением $[\cdot, \cdot]$ имеет место аналог процесса ортогонализации Грама-Шмидта.

Лемма 3. *Пусть заданы векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{H}^n$, $m \le n$. Тогда существуют векторы $y_1, y_2, \ldots, y_m \in \mathbb{H}^n$ такие, что*

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{H}}\langle y_1, \ldots, y_m\rangle = \mathrm{Lin}_{\mathbb{H}}\langle x_1, \ldots, x_m\rangle,$$

причем $[y_t, y_s] = 0, t \ne s$, $[y_t, y_t] = 1$, если $t \le r$, и $[y_t, y_t] = 1$, если $t \ge r$. Здесь $r = \operatorname{rank} X^a X$, а $X = \|x_1\, x_2 \ldots x_k\|$.

Доказательство. Рассмотрим a–самосопряженную матрицу $X^a X$. Согласно теореме 1

$$X^a X = U \Sigma U^a,$$

где U — унитарная матрица, $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0\}, \sigma_t \ge 0$, $t = \overline{1, r}$. Пусть

$$D = \mathrm{diag}\{\sqrt{\sigma_1}, \ldots, \sqrt{\sigma_r}, 1, 1, \ldots, 1\}, \quad I_r = \mathrm{diag}\{\underbrace{1, \ldots, 1}_{r}, 0, 0, \ldots, 0\}.$$

Тогда $X^a X = (UD)I_r(UD)^a$, где UD — невырожденная матрица. Введем обозначение $S := (UD)^a$. В этом случае $X^a X = S^a I_r S$ и $(S^a)^{-1} X^a X S^{-1} = I_r$, или $(XS^{-1})^a XS^{-1} = I_r$. Таким образом, матрица $XS^{-1} = \|y_1\, y_2\, \ldots y_m\|$, где $y_1, y_2, \ldots, y_m$ — требуемая система векторов. Отсюда

$$[x_1\, x_2 \ldots x_m] = [y_1\, y_2 \ldots y_m]S,$$

где $S = \begin{bmatrix} s_1^T \\ s_2^T \\ \vdots \\ s_m^T \end{bmatrix}$, $s_t^T = (s_{t1}, s_{t2}, \ldots, s_{tk})$.

Пусть $a = x_1\alpha_1 + \ldots + x_m\alpha_m, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)^T$. Тогда

$$a = y_1(s_1^T\alpha) + y_2(s_2^T\alpha) + \ldots + y_k(s_k^T\alpha),$$

откуда

$$\mathrm{Lin}_{\mathbb{H}}\langle y_1, \ldots, y_m\rangle \subset \mathrm{Lin}_{\mathbb{H}}\langle x_1, \ldots, x_m\rangle.$$

Обратное включение доказывается аналогично. □

Выводы

В работе приведено обоснование использования неэрмитовой инволюции в алгебре матриц над телом кватернионов. Получен аналог разложения Такаги для класса a–самосопряженных матриц. В качестве приложения рассмотрены свойства конечномерного кватернионного модуля с внутренним произведением.

Список литературы

[1] Хорн З., Джонсон Ч. *Матричный анализ.* – Москва: Мир, 1989. – 655 С.

[2] De Leo S. *Hypercomplex Group Theory.* – arXiv:physics/9703033 v1 31 Mar.1997 – P.1-18.

[3] De Leo S., Scolarici G., Solombino L. *Quaternionic eigenvalue problem* // J.Math. Phys. Bd.43. - 2002. - Vol.11. - P.5815-5829.

[4] Березин А.В., Курочкин Ю.А., Толкачев Е.А. *Кватернионы в релятивистской физике.* – М.: Едиториал УРСС. - 2003. - 200 с.

Карпенко І.І. Неєрмітово самоспряжені матриці над тілом кватерніонів

У роботі розглядається клас матриць, самоспряжених щодо неєрмітової інволюції в дійсній алгебрі кватерніонов (a–самоспряжені матриці). Для цього класу матриць отриманий аналог розкладу Такаги. Як застосування доведено теорему про подібність довільної кватерніонної матриці деякой a–самоспряженій матриці та досліджені властивості скінченновимірного кватерніонного модуля із внутрішнім добутком.

Ключові слова: кватерніон, алгебри із інволюцією, розклад Такаги, внутрішній добуток.

Karpenko I.I. Non-Hermitian self-adjoint quaternionic matrixes

In this paper there considered matrices which are self-adjoint concerning the non-Hermitian involution in the real algebra of quaternions (a– self-adjoint matrices). Analog of Takagi decomposition for this matrix class is received. As applications the theorem about similarity of any quaternionic matrix and some a–self-adjoint matrix is proved and properties of the finite-dimensional quaternionic module with the inner product are investigated.

Keywords: quaternion, involution algebra, Takagi decomposition, inner product.