Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 75–89.

УДК 517.922

Е. В. Сёмкина

СПЕКТРАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА, АССОЦИИРОВАННАЯ С ЗАДАЧЕЙ О МАЛЫХ ДВИЖЕНИЯХ ДИССИПАТИВНОЙ СИСТЕМЫ

Изучены случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты для спектральной задачи, ассоциированной с задачей Коши для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве. В каждом из случаев получены свойства спектра, найдены асимптотики, а также исследованы свойства собственных векторов.

Ключевые слова: базис Рисса, индефинитная метрика, самосопряжённый оператор.

1. Введение

Рассматривается спектральная проблема, ассоциированная с задачей Коши

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0,\ u'(0) = u^1, \tag{1}$$

для дифференциального уравнения в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Это уравнение описывает малые движения диссипативной динамической системы в окрестности состояния равновесия. Здесь функция $u = u(t)$ — это перемещения динамической системы, $0 < A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ — оператор кинетической энергии системы, $B = B^* \gg 0$ — оператор потенциальной энергии, $F = F^* \gg 0$ — оператор диссипации. Движения системы являются свободными, если поле внешних сил $f(t) \equiv 0$.

Замечание 5. Будем считать, что оператор A действует не в $\mathcal{H}$, а в шкале пространств $\mathcal{E}^\alpha$, построенной по оператору A^{-1} с первоначальной областью определения $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{R}(A) \subset \mathcal{H}$. Тогда

$$\mathcal{H} = \mathcal{E}^0, \quad \mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{E}^1, \quad \mathcal{D}(A^{-1/2}) = \mathcal{E}^{1/2},$$

причём $A^{-1/2} : \mathcal{E}^{\alpha/2} \to \mathcal{E}^{(\alpha-1)/2}$ — ограниченный оператор.

С учётом этого замечания дадим определение сильного решения задачи (1) со значениями в пространстве $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$.

Определение 1. Назовем сильным решением задачи (1) на отрезке $[0, T]$ такую функцию $u(t)$ со значениями в $\mathcal{E}^{1/2} = \mathcal{D}(A^{-1/2})$, для которой выполнены следующие свойства:

1°. $u(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}B))$;

2°. $u'(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(B^{1/2})) \cap C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}F))$;

3°. $Au''(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

4°. все слагаемые в уравнении (1) непрерывны по t и принадлежат пространству $C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2}))$;

5°. при любом $t \in [0,T]$ выполнено уравнение (1);

6°. выполнены начальные условия $u(0) = u^0$, $u'(0) = u^1$. □

Необходимыми условиями существования сильного решения задачи (1) являются, очевидно, условия

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}) \cap \mathcal{D}(A^{-1/2}F), \quad f(t) \in C([0,T]; \mathcal{D}(A^{-1/2})).$$

Осуществим переход от этой задачи к задаче Коши для системы двух дифференциальных уравнений первого порядка. Именно, вводя в (1) замену $A^{1/2}u =: v$ и применяя слева оператор $A^{-1/2}$ (это можно сделать для сильного решения), приходим к задаче:

$$\frac{d^2v}{dt^2} + A^{-1/2}FA^{-1/2}\frac{dv}{dt} + A^{-1/2}BA^{-1/2}v = A^{-1/2}f(t),$$
$$v(0) = A^{1/2}u^0, \quad v'(0) = A^{1/2}u^1.$$

Здесь все слагаемые в уравнении являются элементами из $C([0,T]; \mathcal{H})$.

Введём далее новую искомую функцию:

$$-iB^{1/2}A^{-1/2}v(t) =: \frac{dw}{dt}, \quad w(0) = 0.$$

В силу свойства 2° из определения 1 получаем, что $d^2w/dt^2 \in C([0,T]; \mathcal{H})$ и потому

$$\frac{d^2w}{dt^2} + iB^{1/2}A^{-1/2}\frac{dv}{dt} = 0, \quad w'(0) = -iB^{1/2}A^{-1/2}v(0) = -iB^{1/2}u^0.$$

Отсюда приходим к выводу, что задача (1) равносильна задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{dz}{dt} + \mathcal{F}z = \widetilde{f}_0(t), \tag{2}$$
$$z(0) = z^0 := (A^{1/2}u^1; -iB^{1/2}u^0)^\tau,$$
$$z(t) := (v'(t); w'(t))^\tau \in \widetilde{\mathcal{H}} := \mathcal{H} \oplus \mathcal{H},$$
$$\widetilde{f}_0(t) := (A^{-1/2}f(t); 0)^\tau,$$

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} A^{-1/2}FA^{-1/2} & iA^{-1/2}B^{1/2} \\ iB^{1/2}A^{-1/2} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \Big(\mathcal{D}(A^{-1/2}FA^{-1/2}) \cap \mathcal{D}(B^{1/2}A^{-1/2})\Big) \oplus \mathcal{D}(A^{-1/2}B^{1/2}),$$

2. Постановка спектральной проблемы

Рассмотрим тот частный случай, когда операторы кинетической энергии A и диссипации F являются степенными функциями от оператора потенциальной энергии B

$$A := B^{-\alpha}, \quad F := 2\rho B^{\beta}, \quad \alpha > 0, \quad \rho, \beta \geqslant 0. \tag{3}$$

При этом считаем, что $0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$; тогда собственные элементы оператора B образуют ортонормированный базис в $\mathcal{H}$, а все собственные значения положительны и имеют предельную точку $+\infty$.

Это позволяет подробно изучить случаи малой, большой и средней интенсивности диссипации энергии системы и промежуточные между ними варианты, а также проследить, как видоизменяется (перестраивается) спектр этой задачи при возрастании ρ и различных α и β.

Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях, отвечающую в задаче (2) свободным движениям динамической системы:

$$f(t) \equiv 0, \quad z(t) = e^{-\lambda t} z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Тогда для амплитудных элементов z возникает спектральная задача

$$\mathcal{F} z = \lambda z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \tag{4}$$

где оператор $\mathcal{F}$ в условиях (3) имеет вид

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \Big(\mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \cap \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}})\Big) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}).$$

Необходимо отметить, что аналогичная спектральная задача для случая, когда оператор кинетической энергии системы $A = I$, была рассмотрена в монографии [1], и данное исследование проводилось на её основе.

Отметим предварительно, что при $\rho = 0$ (т.е. для консервативной системы) оператор задачи (4)-(5) является кососамосопряженным на $\mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}})$, и эта задача имеет решения

$$\lambda_k^{\pm} = \pm i \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B), \quad \widetilde{z}_k^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm u_k(B); u_k(B))^{\tau}, \quad k = 1, 2 \ldots, \tag{6}$$

где $\{\lambda_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ — положительные собственные значения оператора B, а $\{u_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующая им система собственных элементов, образующих ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. При этом собственные элементы $\{\widetilde{z}_k^+\}_{k=1}^{\infty} \cup \{\widetilde{z}_k^-\}_{k=1}^{\infty}$ образуют ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{H}^2$.

2.1. **Первый случай: слабо демпфированная динамическая система.** Будем сначала считать, что

$$\rho > 0, \quad 0 < \alpha < 1, \quad 0 \leqslant \beta < \frac{1-\alpha}{2}. \tag{7}$$

Тогда

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -2\rho i B^{\beta+\frac{\alpha-1}{2}} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

и так как при условиях (7) оператор $B^{\beta+\frac{\alpha-1}{2}} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, то проблема сводится к спектральной задаче для слабовозмущенного самосопряженного оператора. Собственные значения этой задачи таковы:

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B). \end{cases} \quad k = 1, 2 \ldots \tag{8}$$

Если, в частности, $\rho^2 < \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$, то все собственные значения $\lambda_k^{\pm}$ невещественны и расположены на пересечении окружностей

$$|\mathrm{Re}\lambda_k|^2 + |\mathrm{Im}\lambda_k|^2 = r_k^2, \quad r_k := \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

и кривых

$$|\mathrm{Im}\lambda_k|^2 = (\mathrm{Re}\lambda_k/\rho)^{\frac{\alpha+1}{\alpha+\beta}} - (\mathrm{Re}\lambda_k)^2, \quad \mathrm{Re}\lambda > \rho^{\frac{1+\alpha}{1-\alpha-2\beta}}. \tag{10}$$

В этом случае собственные элементы имеют вид

$$z_k^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} u_k(B) \\ i\varepsilon_k u_k(B) \end{pmatrix}, \quad z_k^- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -i\varepsilon_k u_k(B) \\ u_k(B) \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$\varepsilon_k := \rho \lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - i\sqrt{1 - \rho^2 \lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)}, \quad |\varepsilon_k| = 1, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{12}$$

Они обладают следующими свойствами

$$(z_k^{\pm}, z_l^{\pm})_{\mathcal{H}^2} = \delta_{kl}, \quad (z_k^+, z_l^-)_{\mathcal{H}^2} = i\,\mathrm{Re}\,\varepsilon_l\,\delta_{kl}, \quad k, l = 1, 2, \ldots,$$

и потому уже не образуют ортогональную систему элементов в $\mathcal{H}^2$. Заметим еще, что по отношению к индефинитному скалярному произведению с оператором $\mathcal{J} = \mathrm{diag}(I; -I) = \mathcal{J}^* = \mathcal{J}^{-1}$ оператор $\mathcal{F}$ является $\mathcal{J}$-симметричным, а все собственные элементы (4)-(5) являются $\mathcal{J}$-нейтральными:

$$(\mathcal{J} z_k^{\pm}, z_k^{\pm})_{\mathcal{H}^2} = [z_k^{\pm}, z_k^{\pm}] = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отметим еще одно важное обстоятельство: собственные элементы $z_k^{\pm}$ выражаются через собственные элементы $\widetilde{z}_k^{\pm}$, т.е. через элементы (6) ортонормированного базиса в $\mathcal{H}^2$, посредством следующих формул:

$$z_k^{\pm} = \mathcal{K}_{\pm}\widetilde{z}_k^{\pm}, \quad \mathcal{K}_{+} := \operatorname{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_{-} := \operatorname{diag}(iK; I), \tag{13}$$

$$K := \rho B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}} - i(I-\rho^2 B^{2\beta+\alpha-1})^{1/2}, \quad ||K|| = 1. \tag{14}$$

В самом деле, для $u = u_k(B)$ имеем

$$iKu_k(B) = i(\rho\lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - i\sqrt{1-\rho^2\lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)})u_k(B) = i\varepsilon_k u_k(B).$$

Лемма 1. *Если выполнено условие*

$$\rho^2 < \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B), \tag{15}$$

то собственные элементы (11) *задачи* (4)-(5), (7) *образуют базис Рисса в пространстве* $\mathcal{H}^2$.

Доказательство. Убедимся сначала, что эти элементы образуют полную систему в $\mathcal{H}^2$. Пусть $z_0 = (z_{01}; z_{02})^{\tau} \in \mathcal{H}^2$ ортогонален всем элементам системы (4)-(5),(7). Тогда выполнены условия

$$(z_k^{+}, z_0)_{\mathcal{H}^2} = 0, \quad (z_k^{-}, z_0)_{\mathcal{H}^2} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

т.е. имеют место соотношения

$$(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} + i\varepsilon_k(u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0,$$

$$-i\varepsilon_k(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} + (u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Так как $|\varepsilon_k| = 1$, то $\varepsilon_k^{-1} = 1/\overline{\varepsilon}_k$, и вторая совокупность уравнений дает

$$(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} + i\overline{\varepsilon}_k(u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Отсюда и из первых соотношений получаем

$$\operatorname{Im}\varepsilon_k(u_k(B), z_{02})_{\mathcal{H}} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и поскольку $\operatorname{Im}\varepsilon_k \neq 0$ при любом k (см. (12)), то в силу ортогональной базисности системы $\{u_k(B)\}_{k=1}^{\infty}$ в $\mathcal{H}$, получаем, что $z_{02} = 0$. Но тогда $(u_k(B), z_{01})_{\mathcal{H}} = 0$ (при любом k), что и дает свойство $z_{01} = 0$. Таким образом система элементов

$$\{z_k^{+}\}_{k=1}^{\infty} \cup \{z_k^{-}\}_{k=1}^{\infty}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{16}$$

полна в пространстве $\mathcal{H}^2$.

Воспользуемся теперь тем фактом, что в представлении (14) оператор K ограниченно обратим и

$$K^* = K^{-1} = \rho B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}} + i(I-\rho^2 B^{2\beta+\alpha-1})^{1/2},$$

т.е. K — унитарный оператор, действующий в пространстве $\mathcal{H}$. Отсюда следует, что операторы $\mathcal{K}_\pm$ из (13) имеют ограниченные обратные операторы:

$$(\mathcal{K}_+)^{-1} = \mathrm{diag}(I; -iK^*), \quad (\mathcal{K}_-)^{-1} = \mathrm{diag}(-iK^*; I).$$

Таким образом, элементы z_k^+ получаются применением ограниченного и ограниченно обратимого оператора $\mathcal{K}_+$ к элементам ортонормированного базиса $\widetilde{z}_k^+$ из (6), а элементы z_k^- — применением ограниченного и ограниченно обратимого оператора $\mathcal{K}_-$ к элементам $\widetilde{z}_k^-$. Отсюда следует, что совокупность собственных элементов (16) задачи (4)-(5) при выполнении условия (15) образует базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2$. □

Замечание 6. Если для заданного $m \in \mathbb{N}$ выполнены условия

$$\lambda_m^{1-\alpha-2\beta}(B) < \rho^2 < \lambda_{m+1}^{1-\alpha-2\beta}(B), \tag{17}$$

то задача имеет ровно m пар вещественных положительных собственных значений $\lambda_j^\pm$ с номерами $j = \overline{1,m}$, а отвечающие этим значениям собственные элементы образуют равномерно дефинитные инвариантные подпространства

$$\mathcal{L}_1^+ := \mathrm{sp}\{y_j^+\}_{j=1}^m, \quad \mathcal{L}_1^- := \mathrm{sp}\{y_j^-\}_{j=1}^m, \quad j = \overline{1,m}.$$

Доказательство. Собственные значения задачи при условиях (17) находятся по формулам

$$\lambda_j^\pm = \lambda_j^{\alpha+\beta}(B)(\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}), \quad j = \overline{1,m}. \tag{18}$$

Этим номерам $j = \overline{1,m}$ отвечают $\mathcal{J}$-положительные (для λ_j^+) и соответственно $\mathcal{J}$-отрицательные (для λ_j^-) собственные элементы

$$y_j^+ = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^\tau, \quad y_j^- = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^\tau, \quad j = \overline{1,m},$$

$$\tilde{\varepsilon} := \rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - \sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1} > 0.$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
[y_j^+, y_j^+] &= (\mathcal{J}y_j^+, y_j^+)_{\mathcal{H}^2} = ||u_j(B)||^2 - |\tilde{\varepsilon}_j|^2||u_j(B)||^2 = 1 - |\varepsilon_j|^2 = \\
&= 2\sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}\left(\rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - \sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}\right) = \\
&= 2\tilde{\varepsilon}_j\sqrt{\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B)\rho^2 - 1} =: c^2 > 0, \quad j = \overline{1,m}, \\
[y_j^-, y_j^-] &= (Jy_j^-, y_j^-)_{\mathcal{H}^2} = |\varepsilon_j|^2 - 1 < 0, \quad j = \overline{1,m}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Так как подпространства, натянутые на собственные элементы y_j^+, являются $\mathcal{J}$-ортогональными для несовпадающих между собой собственных значений λ_j^+, то, разлагая любой элемент из $\mathcal{L}_1^+$ по $\mathcal{J}$-ортогональному базису $\{y_j^+\}_{j=1}^m$ и используя неравенства (19), приходим к выводу, что

$$[z, z] \geqslant c^2||z||_{\mathcal{H}^2}^2, \quad c^2 > 0, \quad \forall z \in \mathcal{L}_1^+,$$

то есть $\mathcal{L}_1^+$ — равномерно положительное подпространство. Аналогично можно доказать, что $\mathcal{L}_1^-$ — равномерно отрицательное подпространство, поэтому $\mathcal{L}_1^\pm$ — равномерно дефинитны. $\square$

Лемма 2. *При условии* (17) *пространство* $\mathcal{H}^2$ *допускает разложение*

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{L}^+ \dot{+} \mathcal{L}^-,$$

где

$$\mathcal{L}^+ := \mathcal{L}_1^+ \dot{+} \mathcal{L}_0^+, \quad \mathcal{L}_0^+ := \underline{sp}\{y_k^+ : \underline{Im}\lambda_k^+ > 0,\ k = m+1, \ldots\},$$

— неотрицательное подпространство, а

$$\mathcal{L}^- := \mathcal{L}_1^- \dot{+} \mathcal{L}_0^-, \quad \mathcal{L}_0^- := \underline{sp}\{y_k^- : \underline{Im}\lambda_k^- > 0,\ k = m+1, \ldots\},$$

— соответствующее неположительное подпространство.

Доказательство. Будем сначала считать, что выполнено условие (15). Тогда, так как в $\mathcal{H}$ имеется ортонормированный базис $\{u_k(B)\}_{k=1}^\infty$, то любой элемент $z = (z_1; z_2)^\tau \in \mathcal{H}^2$ можно представить в виде

$$z = \left(\sum_{k=1}^\infty a_{1k} u_k(B); \sum_{k=1}^\infty a_{2k} u_k(B)\right)^\tau,$$

$$a_{1k} = (z_1, u_k(B))_{\mathcal{H}}, \quad a_{2k}(z_2, u_k(B))_{\mathcal{H}}.$$

Тогда соотношение $z = z^+ + z^-$, $z^\pm \in \mathcal{L}^\pm$ приводит к равенству

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^\infty c_k^+ \begin{pmatrix} u_k(B) \\ i\varepsilon_k u_k(B) \end{pmatrix} + \sum_{k=1}^\infty c_k^- \begin{pmatrix} -i\varepsilon_k u_k(B) \\ u_k(B) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^\infty a_{1k} u_k(B) \\ \sum\limits_{k=1}^\infty a_{2k} u_k(B) \end{pmatrix} \tag{20}$$

откуда получаем, что должны выполняться условия

$$c_k^+ - i\varepsilon_k c_k^- = a_{1k}, \quad i\varepsilon_k c_k^+ + c_k^- = a_{2k}.$$

Отсюда имеем

$$c_k^+ = \frac{a_{1k} + i\varepsilon_k a_{2k}}{1 - \varepsilon_k^2}, \quad c_k^- = \frac{a_{2k} - i\varepsilon_k a_{1k}}{1 - \varepsilon_k^2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Так как здесь

$$1 - \varepsilon_k^2 = 1 - \left(\rho \lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) - i\sqrt{1 - \rho^2 \lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)}\right)^2 \sim$$

$$\sim 2 + 2i\rho\lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)\sqrt{1 - \rho^2\lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B)} - 2\rho^2\lambda_k^{2\beta+\alpha-1}(B) \to 2 \quad (k \to \infty),$$

то ряды в средней части (20) сходятся, и утверждение при (15) доказано. Если вместо этого условия выполнено условие (17), то все те же рассуждения можно провести в подпространстве $\mathcal{L}_0^+ \dot{+} \mathcal{L}_0^-$ пространства $\mathcal{H}^2$ с коразмерностью $2m$, а в конечномерном ($2m$-мерном) дополнении $\mathcal{L}_1^+ \dot{+} \mathcal{L}_1^-$ утверждение очевидно. $\square$

Подведем итоги рассмотрения спектральной задачи (4)-(5) в условиях (7). Эта задача имеет дискретный спектр (8) с предельной точкой $\lambda = \infty$, все собственные значения (за исключением, быть может, конечного числа положительных собственных значений) невещественны и расположены на пересечении окружностей (9) и кривых (10). Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис в $\mathcal{H}^2$. Отметим, наконец, что при возрастании ρ количество вещественных (положительных) собственных значений увеличивается.

2.2. **Второй случай: пограничный вариант.** Будем теперь считать, что

$$\beta = \frac{1-\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha < 1, \quad \rho > 0.$$

Здесь операторная матрица из (5) имеет факторизацию

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\frac{\alpha+1}{2}} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -2\rho i I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

и уже не является слабым возмущением оператора

$$i\mathcal{B} := i \begin{pmatrix} 0 & B^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ B^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поэтому свойство локализации спектра в окрестности мнимой оси, которое имело место в п.2.1, здесь не выполнено. Собственные значения оператора задачи таковы

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - 1}], & \rho \geqslant 1; \\ \lambda_k^{\frac{\alpha+1}{2}}(B)[\rho \pm i\sqrt{1 - \rho^2}], & 0 < \rho < 1. \end{cases} \qquad k = 1, 2 \ldots \tag{21}$$

Соответственно, собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^+ = (u_k(B); i\varepsilon u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\varepsilon u_k(B); u_k(B))^\tau, \quad \varepsilon := \rho - i\sqrt{1-\rho^2},$$

а собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:

$$z_k^+ = (u_k(B); i\tilde{\varepsilon} u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\tilde{\varepsilon} u_k(B); u_k(B))^\tau, \quad \tilde{\varepsilon} := \rho - \sqrt{\rho^2 - 1} > 0.$$

Отметим, что спектр задачи дискретный с предельной точкой ∞, если выполнено условие $0 < \rho < 1$. В этом случае все собственные значения невещественны, и расположены на пересечении окружностей (9) и прямых

$$\mathrm{Im}\lambda = \pm \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho} \mathrm{Re}\lambda, \quad \mathrm{Re}\lambda \geqslant 0.$$

При выполнении условия $0 < \rho < 1$ собственные элементы образуют базис Рисса в пространстве $\mathcal{H}^2$, при этом

$$z_k^+ = \operatorname{diag}(I; i\varepsilon I)\widetilde{z}_k^+, \quad z_k^- = \operatorname{diag}(i\varepsilon I; I)\widetilde{z}_k^-,$$

где $\widetilde{z}_k^\pm$, $k = 1, 2, \ldots$ — ортонормированный базис из (6).

Если выполнено условие $\rho \geqslant 1$, то собственные значения вещественны, положительны и образуют две ветви (см. первую формулу (21)), причем каждая из ветвей имеет предельную точку $+\infty$. При этом собственные элементы $\{z_j^+\}_{j=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^\infty$, являются $\mathcal{J}$-положительными:

$$[z_j^+, z_j^+] = 1 - \tilde{\varepsilon}^2 = 2\tilde{\varepsilon}\sqrt{\rho^2 - 1} > 0.$$

Соответственно, собственные элементы $\{z_j^-\}_{j=1}^\infty$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^\infty$, являются $\mathcal{J}$-отрицательными:

$$[z_j^-, z_j^-] = \tilde{\varepsilon}^2 - 1 < 0.$$

Учитывая тот факт, что собственные значения $\mathcal{J}$-самосопряженного оператора, отвечающие несовпадающим собственным значениям, являются $\mathcal{J}$-ортогональными, то есть

$$[z_j^\pm, z_i^\mp] = 0, \quad i, j = 1, 2, \ldots,$$

а также то, что $\{z_j^+\}_{j=1}^\infty \cup \{z_j^-\}_{j=1}^\infty$ образуют (как и в п.2.1, см. лемму 1) полную систему в $\mathcal{H}^2$, приходим к выводу, что собственные элементы задачи образуют $\mathcal{J}$-ортогональный базис в пространстве $\mathcal{H}^2$. При этом

$$\mathcal{H}^2 = \mathcal{L}^+[+]\mathcal{L}^-, \quad \mathcal{L}^\pm := \operatorname{sp}\{z_j^\pm\}_{j=1}^\infty.$$

2.3. **Третий случай: средне демпфированная динамическая система.** Рассмотрим теперь вариант, когда $\rho > 0$, а параметры α и β удовлетворяют одному из условий

$$0 < \alpha < 1, \quad 0 < \frac{1-\alpha}{2} < \beta < 1, \tag{22}$$

или

$$\alpha \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \beta < 1. \tag{23}$$

Тогда имеет место факторизация

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}B^{1-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

где $B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta}$ — компактный положительный оператор, а $B^{\alpha+\beta}$ и $B^{1-\beta}$ — неограниченные положительно определенные операторы с компактными положительными обратными. Собственные значения этой задачи имеют вид

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B). \end{cases} \quad k = 1, 2 \ldots \tag{24}$$

Так как $\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) \to 0$ при $k \to +\infty$, то невещественных собственных значений может быть не более конечного числа. Остальные собственные значения разбиваются на две ветви:

$$\lambda_k^{+} = \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho + \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}] = 2\rho\lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[1 + o(1)] \quad (k \to +\infty), \tag{25}$$

$$\lambda_k^{-} = \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho - \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}] = \frac{1}{2\rho}\lambda_k^{1-\beta}(B)[1 + o(1)] \quad (k \to +\infty). \tag{26}$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_k^{\pm} \to +\infty \quad (k \to +\infty)$$

Соответствующие собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:

$$z_j^{+} = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^{\tau}, \quad z_j^{-} = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^{\tau},$$

$$\tilde{\varepsilon}_j := \lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}) = \frac{1}{2\rho}\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)[1 + o(1)] \to 0 \quad (j \to +\infty). \tag{27}$$

Нетрудно видеть также, что

$$z_j^{\pm} = \mathcal{K}_{\pm}\tilde{z}_j^{\pm}, \quad \mathcal{K}_{+} := \mathrm{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_{-} := \mathrm{diag}(iK; I),$$

$$K := B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2}) = B^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})^{-1},$$

$$K^{-1} := B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2}) = B^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})^{-1}.$$

Собственные элементы $\{z_j^{+}\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^{+}\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathcal{J}$-положительны:

$$[z_j^{+}, z_j^{+}] = (\mathcal{J}z_j^{+}, z_j^{+})_{\mathcal{H}^2} = 1 - \tilde{\varepsilon}_j^2 = \frac{2\sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}}{\rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) + \sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}} > 0,$$

причем в силу (27) $[z_j^{+}, z_j^{+}] \to 1$ $(j \to +\infty)$. Соответственно собственные элементы $\{z_j^{-}\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие собственным значениям $\{\lambda_j^{-}\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathcal{J}$-отрицательны:

$$[z_j^{-}, z_j^{-}] = \tilde{\varepsilon}_j^2 - 1 < 0, \quad [z_j^{-}, z_j^{-}] \to -1, \quad (j \to +\infty)$$

Отметим ещё, что при условии $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$ все собственные значения задачи вещественны. В противном случае собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^+ = (u_k(B); i\varepsilon_k u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\varepsilon_k u_k(B); u_k(B))^\tau,$$
$$\varepsilon_k := \lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - i\sqrt{\lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}), \quad k = \overline{1,m}.$$

Опираясь на вышеизложенное и проводя рассуждения, аналогичные приведенным в п.2.1, сформулируем результаты рассмотрения спектральной задачи (4)-(5) при условиях (22) или (23). Эта задача имеет дискретный спектр (24), все собственные значения (за исключением быть может конечного числа невещественных собственных значений) положительны, они разбиваются на две серии (см.(25)-(26)), каждая из которых имеет своей предельной точкой $\lambda = +\infty$. Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис (при условии, что $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$) в $\mathcal{H}^2$.

2.4. **Четвёртый случай: второй пограничный вариант.** Рассмотрим теперь второй промежуточный случай, когда

$$\beta = 1, \quad \alpha > 0, \quad \rho > 0. \tag{28}$$

Здесь имеет место факторизация

$$\mathcal{F}= \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+1} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{-1-\alpha}{2}} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{-1-\alpha}{2}} \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

показывающая, что предельными точками спектра могут быть точки $\lambda = +\infty$ и $\lambda = (2\rho)^{-1}$. Действительно, собственные значения этой задачи таковы

$$\lambda_k^\pm = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+1}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{-1-\alpha}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{-1-\alpha}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+1}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{-1-\alpha}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{-1-\alpha}(B). \end{cases} \qquad k = 1, 2\ldots$$

Так как $\lambda_k^{-1-\alpha}(B) \to 0$, то задача может иметь не более конечного числа невещественных собственных значений, а вещественные собственные значения задачи положительны и образуют две ветви:

$$\lambda_j^+ = 2\rho\lambda_j^{\alpha+1}(B)[1 + o(1)], \quad \lambda_j^- = \frac{1}{2\rho}[1 + o(1)] \quad (j \to +\infty). \tag{29}$$

Собственные элементы, отвечающие вещественным собственным значениям, таковы:

$$z_j^+ = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^\tau, \quad z_j^- = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^\tau,$$
$$\tilde{\varepsilon}_j := \lambda_j^{\frac{1+\alpha}{2}}(B)(\rho - \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{-1-\alpha}(B)}) = \frac{1}{2\rho}\lambda_j^{\frac{-\alpha-1}{2}}(B)[1 + o(1)] \to 0 \quad (k \to +\infty). \tag{30}$$

Нетрудно видеть, что

$$z_j^\pm = \mathcal{K}_\pm \tilde{z}_j^\pm, \quad \mathcal{K}_+ := \mathrm{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_- := \mathrm{diag}(iK; I),$$

$$K := B^{\frac{1+\alpha}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2}) = B^{\frac{-1-\alpha}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2})^{-1},$$
$$K^{-1} := B^{\frac{1+\alpha}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2}) = B^{\frac{-1-\alpha}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{-1-\alpha})^{1/2})^{-1}.$$

Собственные элементы $\{z_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие вещественным собственным значениям $\{\lambda_j^+\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathcal{J}$-положительны:

$$[z_j^+, z_j^+] = (\mathcal{J} z_j^+, z_j^+)_{\mathcal{H}^2} = 1 - \tilde{\varepsilon}_j^2 = \frac{2\sqrt{\rho^2 \lambda_j^{1+\alpha}(B) - 1}}{\rho \lambda_j^{\frac{1+\alpha}{2}}(B) + \sqrt{\rho^2 \lambda_j^{1+\alpha}(B) - 1}} > 0,$$

причем в силу (36) $[z_j^+, z_j^+] \to 1$ $(j \to +\infty)$. Соответственно собственные элементы $\{z_j^-\}_{j=1}^{\infty}$, отвечающие отрицательным собственным значениям $\{\lambda_j^-\}_{j=1}^{\infty}$, $\mathcal{J}$-отрицательны:

$$[z_j^-, z_j^-] = \tilde{\varepsilon}_j^2 - 1 < 0, \quad [z_j^-, z_j^-] \to -1 \quad (j \to +\infty).$$

Отметим ещё, что при условии $\rho^2 > \lambda_1^{-1-\alpha}(B)$ все собственные значения задачи вещественны. В противном случае собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^+ = (u_k(B); i\varepsilon_k u_k(B))^\tau, \quad z_k^- = (-i\varepsilon_k u_k(B); u_k(B))^\tau,$$
$$\varepsilon_k := \lambda_k^{\frac{1+\alpha}{2}}(B)(\rho - i\sqrt{\lambda_k^{-1-\alpha}(B) - \rho^2}), \quad k = \overline{1,m}.$$

Из сформулированных свойств получаем следующие выводы. Спектральная задача (4)-(5) при условиях (28) имеет дискретный спектр (24), все собственные значения (за исключением, быть может, конечного числа невещественных собственных значений) положительны, они разбиваются на две серии (см.(29)), одна из которых имеет своей предельной точкой $\lambda = +\infty$, а вторая положительное число $\lambda = (2\rho)^{-1}$. Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис (при условии, что $\rho^2 > \lambda_1^{-1-\alpha}(B)$) в $\mathcal{H}^2$.

2.5. **Пятый случай: сильно демпфированная динамическая система.** Рассмотрим, наконец, вариант

$$\beta > 1, \quad \alpha > 0, \quad \rho > 0. \tag{31}$$

Здесь оператор $\mathcal{F}$ допускает факторизацию

$$\mathcal{F} = \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\rho}B^{1-\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & i\frac{1}{2\rho}B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta} \\ 0 & I \end{pmatrix}, \tag{32}$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) = \mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}),$$

где $B^{\frac{1-\alpha}{2}-\beta}$, $B^{1-\beta}$ — компактные положительные операторы, а $B^{\alpha+\beta}$ — неограниченный положительно определенный оператор с дискретным спектром. Из (32) видно, что $\mathcal{F}$ — слабое возмущение оператора $\operatorname{diag}(2\rho B^{\alpha+\beta}, (2\rho)^{-1}B^{1-\beta})$, и потому следует ожидать, что в этом варианте задача на собственные значения для оператора $\mathcal{F}$ должна иметь дискретный спектр с двумя предельными точками $\lambda = +\infty$ и $\lambda = 0+$. Действительно, собственные значения этой задачи таковы:

$$\lambda_k^{\pm} = \begin{cases} \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm \sqrt{\rho^2 - \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B)}], & \rho^2 \geqslant \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B); \\ \lambda_k^{\alpha+\beta}(B)[\rho \pm i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}], & \rho^2 < \lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B). \end{cases} \quad k = 1, 2 \ldots \tag{33}$$

Отсюда получаем, что

$$\lambda_j^{+} = 2\rho\lambda_j^{\alpha+\beta}(B)[1 + o(1)] \to +\infty \quad (j \to +\infty), \tag{34}$$

$$\lambda_j^{-} = \frac{1}{2\rho}\lambda_j^{1-\beta}(B)[1 + o(1)] \to 0+ \quad (j \to +\infty). \tag{35}$$

Отвечающие этим собственным значениям собственные элементы имеют вид

$$z_j^{+} = (u_j(B); i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B))^{\tau}, \quad z_j^{-} = (-i\tilde{\varepsilon}_j u_j(B); u_j(B))^{\tau},$$

$$\tilde{\varepsilon}_j := \lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - \sqrt{\rho^2 - \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}) = \frac{\lambda_j^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(B)}{\rho + \sqrt{\rho^2 + \lambda_j^{1-\alpha-2\beta}(B)}} \to 0 \quad (k \to +\infty). \tag{36}$$

Отсюда следует, что

$$z_j^{\pm} = \mathcal{K}_{\pm}\tilde{z}_j^{\pm}, \quad \mathcal{K}_{+} := \operatorname{diag}(I; iK), \quad \mathcal{K}_{-} := \operatorname{diag}(iK; I),$$

$$K := B^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(\rho I - (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2}) = B^{\frac{1-\alpha-2\beta}{2}}(\rho I + (\rho^2 I - B^{1-\alpha-2\beta})^{1/2})^{-1}.$$

Собственные элементы z_j^{+} являются $\mathcal{J}$-положительными, а собственные элементы z_j^{-} являются $\mathcal{J}$-отрицательными:

$$[z_j^{+}, z_j^{+}] = (\mathcal{J}z_j^{+}, z_j^{+})_{\mathcal{H}^2} = 1 - \tilde{\varepsilon}_j^2 = \frac{2\sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}}{\rho\lambda_j^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B) + \sqrt{\rho^2\lambda_j^{2\beta+\alpha-1}(B) - 1}} > 0,$$

$$[z_j^{-}, z_j^{-}] = \tilde{\varepsilon}_j^2 - 1 < 0.$$

При этом

$$[z_j^{+}, z_j^{+}] \to 1, \quad [z_j^{-}, z_j^{-}] \to -1 \quad (k \to +\infty).$$

Отметим ещё, что при условии $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$ все собственные значения задачи вещественны. В противном случае собственные элементы, отвечающие невещественным собственным значениям, имеют вид

$$z_k^{+} = (u_k(B); i\varepsilon_k u_k(B))^{\tau}, \quad z_k^{-} = (-i\varepsilon_k u_k(B); u_k(B))^{\tau},$$

$$\varepsilon_k := \lambda_k^{\frac{2\beta+\alpha-1}{2}}(B)(\rho - i\sqrt{\lambda_k^{1-\alpha-2\beta}(B) - \rho^2}), \quad k = \overline{1, m}.$$

Сформулированные выше свойства позволяют сделать следующие выводы. Спектральная задача (4)-(5) при условиях (31) имеет дискретный спектр (33), все собственные значения (за исключением, быть может, конечного числа невещественных собственных значений) положительны, они разбиваются на две серии (см.(34)-(35)), одна из которых имеет своей предельной точкой $\lambda = +\infty$, а вторая $\lambda = 0+$. Собственные элементы задачи образуют базис Рисса и $\mathcal{J}$-ортогональный базис (при условии, что $\rho^2 > \lambda_1^{1-\alpha-2\beta}(B)$) в $\mathcal{H}^2$.

Подводя итоги рассмотрения спектральной задачи (4)-(5), отметим следующие важные обстоятельства.

При учете диссипации энергии в виде (3), спектр задачи существенно зависит от соотношения параметров α и β: при $0 < \alpha < 1, \quad 0 \leqslant \beta < \frac{1-\alpha}{2}$ имеет место малая диссипация и локализация спектра в окрестности мнимой оси; при $0 < \alpha < 1, \quad 0 \leqslant \beta < \frac{1-\alpha}{2}$ — средняя диссипация и локализация спектра в окрестности положительной полуоси, а также наличие лишь одной предельной точки на бесконечности; при $\alpha > 0, \quad \rho > 0$ — большая диссипация и наличие двух предельных точек на положительной полуоси.

Детальная структура спектра зависит от коэффициента диссипации ρ. В частности, при $\beta = \frac{1-\alpha}{2}, \quad 0 < \alpha < 1$ спектр существенно зависит от параметра ρ: при $0 < \rho < 1$ спектр невещественный, а при $\rho \geqslant 1$ — вещественный и положительный.

Во всем диапазоне изменения параметров α, β, δ собственные элементы образуют базис Рисса.

Список литературы

[1] Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. *Приложения индефинитной метрики.* // Симферополь: ДИАЙПИ, 2014. — 276 с.

Спектральна проблема, асоційована з задачею Коши про малі рухи дисипативної динамічної системи

Вивчено випадки малої, великої та середньої інтенсивності дисипації енергії системи і проміжні між ними варіанти для спектральної задачі, асоційованої з задачею Коши для диференціального рівняння другого порядку в гільбертовому просторі. У кожному з випадків отримано властивості спектра, знайдено асимптотики, а також досліджено властивості власних векторів.

Ключові слова: базис Рісса, індефінітна метрика, самоспряжений оператор.

Spectral problem associated with a Cauchy problem on small motions of a dissipative dynamical system

In Hilbert space $\mathcal{H}$, a spectral problem associated with Cauchy problem for differential second-order equation of the form

$$A\frac{d^2u}{dt^2} + F\frac{du}{dt} + Bu = f(t), \quad u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1, \tag{1}$$

is studied. The unknown function $u = u(t)$ with values in $\mathcal{H}$ describes the field of system displacements relative to the equilibrium state. The physical meanings of the operator coefficients in (1) are the following. A is a kinetic energy operator and therefore $A = A^* > 0$. Next, B is a potential energy operator; if the equilibrium state of the system is statically stable, then $B = B^* \geqslant 0$. The operator $F = F^* \geqslant 0$ takes into account energy dissipation. The system movements are free if field of external forces $f(t) \equiv 0$.

In this article we investigate a special case of problem (1) when a kinetic energy operator A and energy dissipation operator F are powers of potential energy operator B:

$$A := B^{-\alpha}, \quad F := 2\rho B^{\beta}, \quad \alpha > 0, \rho, \beta \geqslant 0. \tag{2}$$

Here we assume that $0 < B^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$, then its eigenelements formed orthonormal basis in $\mathcal{H}$, and all of eigenvalues are positive and tend to infinity.

Investigation of problem in this case is based on methods stated in [1].

The form of problem and properties of the operator coefficients (2) allow to pass from the differential equation in the Hilbert space $\mathcal{H}$ to a spectral problem in the orthogonal sum of 2 copies of the space $\mathcal{H}$, namely,

$$\mathcal{F}z = \lambda z, \quad z \in \mathcal{D}(\mathcal{F}), \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

where

$$\mathcal{F} := \begin{pmatrix} 2\rho B^{\alpha+\beta} & iB^{\frac{\alpha+1}{2}} \\ iB^{\frac{\alpha+1}{2}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{F}) := \left(\mathcal{D}(B^{\alpha+\beta}) \cap \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}})\right) \oplus \mathcal{D}(B^{\frac{\alpha+1}{2}}).$$

Finally associated spectral problem are studied. Properties of eigenvalues and eigenvectors of spectral problems are obtained by using theory of linear operators that are self adjoint in a Hilbert space with an indefinite metric.

Keywords: Riesz basis, indefinite metric, self-adjoint operator.