Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 3 (2011), с. 75–88.

УДК 517.98

И. А. Романенко

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КОМПАКТОВ В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Дается описание подходящих фундаментальных систем компактов в общих интегральных пространствах L_p и пространствах Соболева $W^{n,p}$ функций одной переменной. Исследованы свойства шкал подпространств, порожденных фундаментальными системами компактов.

Ключевые слова: фундаментальные системы компактов, критерий компактности, компактные вложения, интегральные пространства, пространства Соболева, интегральный модуль непрерывности, индуктивная шкала пространств, индуктивный предел.

Введение

Начиная с классического критерия компактности Арцела - Асколи в пространстве непрерывных функций [1], в анализе уделялось много внимания получению критериев компактности в различных функциональных пространствах. Одним из наиболее известных является критерий М. Рисса в пространствах L_p (см. [2]), который обобщался затем в различных направлениях (см., например, [3]).

Однако, в ряде экстремальных задач удобнее не применять индивидуальный критерий компактности (или предкомпактности) множества, а описать подходящую, по возможности минимальную, фундаментальную систему компактных множеств, которые поглощают все остальные компакты в данном пространстве.

Так, в работах Орлова И.В. [4, 5] было показано, что удобную фундаментальную систему компактов в пространствах l_p образуют *компактные эллипсоиды*. Эти результаты были, в частности, применены к решению экстремальных вариационных задач в пространстве Соболева $H^1[a;b]$ (см. [6]), а также к исследованию проблемы Радона - Никодима для интеграла Бохнера (см. [7]).

Нашей задачей является описание подходящих фундаментальных систем компактов в общих интегральных пространствах L_p и пространствах Соболева $W^{n,p}$

функций одной переменной на отрезке, которые по своим свойствам сходны с системами компактных эллипсоидов в l_p.

С этой целью в работе введены так называемые *ω-компакты*, определяемые с помощью интегрального модуля непрерывности в $L_p[a;b]$ (соответственно, в $W^{n,p}[a;b]$).

В первом разделе работы введено понятие *ω-эллипсоида* в L_p и рассмотрены основные свойства ω-эллипсоидов. Во втором разделе показано, что компактные ω-эллипсоиды (ω-компакты) образуют фундаментальную систему компактов, то есть поглощают все остальные компакты в L_p. В разделах 3 и 4 показано, что подпространства, порожденные ω-компактами, образуют σ-индуктивную шкалу банаховых пространств с компактными вложениями, индуктивный предел которой совпадает с исходным пространством, а также показана плотность вложений таких подпространств в исходное пространство и эквивалентность непрерывного и векторного вложений. Наконец, предыдущие результаты перенесены на случай пространств Соболева $W^{n,p}$.

1. ω-эллипсоиды в $L_p[a;b]$ и их элементарные свойства.

Пусть $L_p[a;b]$, $(1 \le p < \infty)$ — пространство абсолютно интегрируемых по Лебегу в p-ой степени функций на $[a;b]$ с нормой

$$\|x\|_{L_p} = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Зададим произвольную положительную функцию $\varepsilon = \varepsilon(\delta)$, $0 < \delta \le b-a$, убывающую при $\delta \searrow +0$, и число $R > 0$.

Определение 1.1. Назовем *ω-эллипсоидом* в $L_p[a;b]$ множество вида

$$\Omega_\varepsilon^R = \left\{ x \in L_p[a;b] \;\middle|\; \|x\|_{L_p} \le R\,;\ \sup_{\delta>0} \frac{\omega_x^p(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 1 \right\},$$

где $\omega_x^p(\delta) = \sup\limits_{|h|\le\delta} \|x(t+h)-x(t)\|_{L_p}$ — интегральный модуль непрерывности в $L_p[a;b]$ (см. [8]).

Рассмотрим ряд свойств ω-эллипсоидов.

Предложение 1.1. *Любой ω-эллипсоид — абсолютно выпуклое множество.*

Доказательство. 1). Пусть $x_1,\ x_2 \in \Omega_\varepsilon^R$. Тогда

$$\|x_i\|_{L_p} \le R\,; \quad \sup_{\delta>0} \frac{\omega_{x_i}^p(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 1 \quad (i = 1, 2).$$

Отсюда при любом $0 \le \lambda \le 1$ имеем:

$a)$ $\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|_{L_p} \le |\lambda| \cdot \|x_1\|_{L_p} + |1-\lambda| \cdot \|x_2\|_{L_p} \le \lambda \cdot R + (1-\lambda) \cdot R = R$;

$$b)\ \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{\lambda x_1+(1-\lambda)x_2}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} =$$

$$= \sup_{\delta>0} \frac{\sup\limits_{|h|\le\delta} \|\lambda x_1(t+h) + (1-\lambda)x_2(t+h) - (\lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t))\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} \le$$

$$\le \sup_{\delta>0} \frac{\lambda \sup\limits_{|h|\le\delta} \|x_1(t+h) - x_1(t)\|_{L_p} + (1-\lambda) \sup\limits_{|h|\le\delta} \|x_2(t+h) - x_2(t)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} \le$$

$$\le \lambda \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_1}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} + (1-\lambda) \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_2}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le \lambda + (1-\lambda) = 1.$$

Таким образом, $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Omega^R_\varepsilon$, то есть множество Ω^R_ε выпукло.

2). Пусть $x \in \Omega^R_\varepsilon$. Тогда

$$a)\ \|-x\|_{L_p} = \|x\|_{L_p} \le R; \quad b)\ \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{-x}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} = \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 1.$$

Значит, $(-x) \in \Omega^R_\varepsilon$.

Таким образом, множество Ω^R_ε выпукло и симметрично, то есть абсолютно выпукло.

□

Предложение 1.2. *Любой ω-эллипсоид — замкнутое множество.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность точек из ω-эллипсоида Ω^R_ε, сходящаяся по норме L_p к некоторому $x_0 \in L_p[a;b]$. Тогда

$$\|x_n\|_{L_p} \le R\,; \quad \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_n}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \le 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N});$$
$$\|x_n - x_0\|_{L_p} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Отсюда:

$a)$ $\|x_0\|_{L_p} = \|\lim\limits_{n\to\infty} x_n\|_{L_p} = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_{L_p} \le \lim\limits_{n\to\infty} R = R$;

$$b)\ \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_0}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} = \sup_{\delta>0} \frac{\sup\limits_{|h|\le\delta} \|x_0(t+h) - x_0(t)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} =$$

$$= \sup_{\delta>0} \frac{\sup\limits_{|h|\le\delta} \|x_0(t+h) - x_n(t+h) + x_n(t+h) - x_n(t) + x_n(t) - x_0(t)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} \le$$

$$\leq \sup_{\delta>0} \frac{\sup\limits_{|h|\leq\delta} \|x_n(t+h) - x_0(t+h)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} + \sup_{\delta>0} \frac{\sup\limits_{|h|\leq\delta} \|x_n(t+h) - x_n(t)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} +$$

$$+ \sup_{\delta>0} \frac{\|x_n(t) - x_0(t)\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} \leq 2 \sup_{\delta>0} \frac{\|x_n - x_0\|_{L_p}}{\varepsilon(\delta)} + \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_n}(\delta)}{\varepsilon(\delta)}. \tag{1}$$

Зафиксируем $\eta > 0$, $\delta > 0$ и подберем номер $N = N(\eta, \delta)$ такой, чтобы

$$(n > N) \Rightarrow \|x_n - x_0\|_{L_p} < \eta \cdot \varepsilon(\delta). \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует при $n > N$:

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_0}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \leq 2 \sup_{\delta>0} \frac{\eta \cdot \varepsilon(\delta)}{\varepsilon(\delta)} + 1 \leq 2\eta + 1. \tag{3}$$

Отсюда, переходя к пределу справа в (3) при $\eta \to 0$, получаем

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_0}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \leq 1 \text{ и, следовательно, } x_0 \in \Omega^R_\varepsilon.$$

Таким образом, ω-эллипсоид Ω^R_ε замкнут.

□

Предложение 1.3. *Для любого ω-эллипсоида Ω^R_ε и любого $\lambda > 0$ верно:*

$$\lambda \cdot \Omega^R_\varepsilon = \Omega^{\lambda R}_{\lambda\varepsilon}.$$

Доказательство. 1). Пусть $x \in \Omega^R_\varepsilon$, $\lambda > 0$. Тогда

a) $\|\lambda x\|_{L_p} = \lambda \|x\|_{L_p} \leq \lambda R$;

b) $\omega^p_{\lambda x}(\delta) = \sup\limits_{|h|\leq\delta} \|\lambda x(t+h) - \lambda x(t)\|_{L_p} = \lambda \sup\limits_{|h|\leq\delta} \|x(t+h) - x(t)\|_{L_p} = \lambda\, \omega^p_x(\delta)$,

откуда

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{\lambda x}(\delta)}{\lambda\, \varepsilon(\delta)} = \sup_{\delta>0} \frac{\lambda \omega^p_x(\delta)}{\lambda\, \varepsilon(\delta)} = \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_x(\delta)}{\varepsilon(\delta)} \leq 1.$$

Значит, $\lambda x \in \Omega^{\lambda R}_{\lambda\varepsilon}$ и, следовательно, $\lambda \cdot \Omega^R_\varepsilon \subset \Omega^{\lambda R}_{\lambda\varepsilon}$.

2). Обратно, пусть $x \in \Omega^{\lambda R}_{\lambda\varepsilon}$. Тогда

$$a)\ \left\| \frac{1}{\lambda} x \right\|_{L_p} = \frac{1}{\lambda} \|x\|_{L_p} \leq \frac{1}{\lambda} \lambda R = R;$$

$$b)\ \omega^p_{\frac{1}{\lambda} x}(\delta) = \sup_{|h|\leq\delta} \left\| \frac{1}{\lambda} x(t+h) - \frac{1}{\lambda} x(t) \right\|_{L_p} = \frac{1}{\lambda}\, \omega^p_x(\delta).$$

Отсюда

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{\frac{1}{\lambda} x}(\delta)}{\varepsilon(\delta)} = \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_x(\delta)}{\lambda\, \varepsilon(\delta)} \leq 1.$$

Следовательно, $\frac{1}{\lambda} x \in \Omega^R_\varepsilon$, откуда $\frac{1}{\lambda} \cdot \Omega^{\lambda R}_{\lambda\varepsilon} \subset \Omega^R_\varepsilon$, т. е. $\Omega^{\lambda R}_{\lambda\varepsilon} \subset \lambda \cdot \Omega^R_\varepsilon$.

Таким образом, $\lambda \cdot \Omega_{\varepsilon}^{R} = \Omega_{\lambda\varepsilon}^{\lambda R}$.

$\square$

Предложение 1.4. *Для любых двух ω-эллипсоидов $\Omega_{\varepsilon_1}^{R}$ и $\Omega_{\varepsilon_2}^{R}$ верно:*

$$\left(\sup_{\delta>0} \frac{\varepsilon_1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} \leq 1\right) \Rightarrow \left(\Omega_{\varepsilon_1}^{R} \subset \Omega_{\varepsilon_2}^{R}\right). \tag{4}$$

Если $\varepsilon_1(+0) = 0$, то верно и обратное:

$$\left(\Omega_{\varepsilon_1}^{R} \subset \Omega_{\varepsilon_2}^{R}\right) \Rightarrow \left(\sup_{\delta>0} \frac{\varepsilon_1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} \leq 1\right).$$

Доказательство. Пусть условие (4) выполнено, $x \in \Omega_{\varepsilon_1}^{R}$. Тогда

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega_x^p(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} = \sup_{\delta>0} \left(\frac{\omega_x^p(\delta)}{\varepsilon_1(\delta)} \cdot \frac{\varepsilon_1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)}\right) \leq \sup_{\delta>0} \frac{\omega_x^p(\delta)}{\varepsilon_1(\delta)} \cdot \sup_{\delta>0} \frac{\varepsilon_1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} \leq 1.$$

Отсюда $x \in \Omega_{\varepsilon_2}^{R}$ и, следовательно, $\Omega_{\varepsilon_1}^{R} \subset \Omega_{\varepsilon_2}^{R}$.

Обратно, пусть $\Omega_{\varepsilon_1}^{R} \subset \Omega_{\varepsilon_2}^{R}$, $\varepsilon_1(+0) = 0$. Допустим, что условие (4) не выполнено, т. е.

$$\sup_{\delta>0} \frac{\varepsilon_1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} > 1. \tag{5}$$

Покажем, что найдется такая функция $x \in \Omega_{\varepsilon_1}^{R}$, для которой $\omega_x^p(\delta) = \varepsilon_1(\delta)$.

Для простоты предположим, что $p = 1$, $[a;b] = [0;1]$, $\varepsilon_1 \in C^1[0;1]$. Положим $x(t) = \varepsilon_1'(1-t)$, $0 \leq t \leq 1$. Тогда при $h > 0$:

$$\int_0^1 |x(t+h) - x(t)|dt = \int_{1-h}^1 x(t)dt = \int_{1-h}^1 \varepsilon_1'(1-t)dt = -\int_h^0 \varepsilon_1'(u)du =$$
$$= \varepsilon_1(h) - \varepsilon_1(+0) = \varepsilon_1(h). \tag{6}$$

При $h < 0$ выкладка аналогична. Отсюда, переходя в (6) к супремуму по $|h| \leq \delta$, получаем

$$\omega_x^1(\delta) = \varepsilon_1(\delta). \tag{7}$$

Из (5) и (7) следует:

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega_x^1(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} > 1,$$

откуда $x \notin \Omega_{\varepsilon_2}^{R}$, что ведет к противоречию. К общему случаю ($\varepsilon_1 \notin C^1$) легко перейти, аппроксимируя $\varepsilon_1(\delta)$ функциями класса C^1.

$\square$

2. Компактные ω-эллипсоиды, как фундаментальная система компактов в $L_p[a;b]$.

Получим вначале критерий компактности ω-эллипсоида Ω_ε^R, используя известный критерий М. Рисса [2] компактности в $L_p[a;b]$, сформулированный в виде леммы.

Лемма 2.1. *Ограниченное замкнутое множество $C \subset L_p[a,b]$ компактно тогда и только тогда, когда*

$$\omega_x^p(\delta) \rightrightarrows 0 \text{ при } \delta \to +0 \ \text{ по } x \in C.$$

Теорема 2.1. *ω-эллипсоид Ω_ε^R в $L_p[a;b]$, $1 \le p < \infty$ компактен тогда и только тогда, когда $\varepsilon(\delta) \searrow 0$ при $\delta \searrow +0$.*

Доказательство. Пусть Ω_ε^R компактен. Тогда, по лемме 2.1 $\omega_x^p(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$ равномерно по $x \in \Omega_\varepsilon^R$. Следовательно, по sup-критерию равномерной сходимости, $\widetilde{\varepsilon}(\delta) = \sup\limits_{x \in \Omega_\varepsilon^R} \omega_x^p(\delta) \searrow 0$ при $\delta \searrow +0$. При этом из неравенства $\omega_x^p \le \varepsilon(\delta)$ переходом к супремуму по $x \in \Omega_\varepsilon^R$ получаем $\widetilde{\varepsilon}(\delta) \le \varepsilon(\delta)$, откуда $\Omega_{\widetilde{\varepsilon}}^R \subset \Omega_\varepsilon^R$. С другой стороны, для любого $\delta > 0$ и любого $x \in \Omega_\varepsilon^R$ получаем $\dfrac{\omega_x^p(\delta)}{\widetilde{\varepsilon}(\delta)} \le 1$, откуда $\sup\limits_{\delta>0} \dfrac{\omega_x^p(\delta)}{\widetilde{\varepsilon}(\delta)} \le 1$. Отсюда $x \in \Omega_{\widetilde{\varepsilon}}^R$, а значит, $\Omega_\varepsilon^R \subset \Omega_{\widetilde{\varepsilon}}^R$. Таким образом, $\Omega_{\widetilde{\varepsilon}}^R = \Omega_\varepsilon^R$, а т. к. $\widetilde{\varepsilon}(\delta) \searrow 0$, то и $\varepsilon(\delta) \searrow 0$ при $\delta \searrow +0$.

Обратно, пусть $\varepsilon(\delta) \searrow 0$ при $\delta \searrow +0$. Эллипсоид Ω_ε^R замкнут по предложению 1.2. При этом

$$\forall\, x \in \Omega_\varepsilon^R \quad \omega_x^p(\delta) \le \varepsilon(\delta) \searrow 0 \text{ при } \delta \searrow +0, \text{ откуда } \sup_{x \in \Omega_\varepsilon^R} \omega_x^p \le \varepsilon(\delta).$$

Следовательно, по критерию М. Рисса (**лемма 2.1**), Ω_ε^R компактен.

□

Определение 2.1. Назовем *ω-компактом* любой компактный ω-эллипсоид Ω_ε^R в $L_p[a;b]$.

Как и в [5], под термином *"фундаментальная система компактов"* мы будем понимать систему абсолютно выпуклых компактных множеств, поглощающих все остальные компакты в данном пространстве. Покажем, что ω-компакты образуют фундаментальную систему компактов в $L_p[a;b]$.

Теорема 2.2. *Замкнутое ограниченное множество $C \subset L_p[a;b]$ компактно тогда и только тогда, когда C содержится в некотором ω-компакте Ω_ε^R.*

Доказательство. Пусть C содержится в некотором ω-компакте Ω_ε^R. Тогда C — компакт, как замкнутое подмножество компакта.

Обратно, пусть C — компакт в $L_p[a;b]$. Тогда, по критерию М. Рисса, $\omega_x^p(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$ равномерно по $x \in C$. Пусть $\varepsilon(\delta) = \sup\limits_{x\in C} \omega_x^p(\delta)$. Следовательно, $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$. Кроме того, т. к. C ограничено, то $\sup\limits_{x\in C} \|x\| =: R < \infty$.

Рассмотрим эллипсоид Ω_ε^R. Тогда он компактен, т. к. $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to +0$. При этом $C \subset \Omega_\varepsilon^R$, т. к.

$$x \in C \Rightarrow \|x\| \le R, \quad \omega_x^p(\delta) \le \varepsilon(\delta) \Rightarrow x \in \Omega_\varepsilon^R.$$

$\square$

3. Разложение банаховых пространств в К-шкалу с компактными вложениями.

В работе [7] было показано, что любое пространство Фреше является индуктивным пределом шкалы банаховых подпространств, порожденных всеми абсолютно выпуклыми компактами (К-шкалы). При этом индуктивную шкалу таких подпространств можно рассматривать как шкалу с компактными (и даже с σ-компактными) вложениями. В данном разделе предложена более простая схема доказательства этих фактов в случае, когда E — банахово пространство.

Пусть E — банахово пространство, $\mathcal{C}(E)$ — система всех абсолютно выпуклых компактов в E.

Для каждого $C \in \mathcal{C}(E)$ обозначим $E_C = (spanC, \|\cdot\|_C)$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_C$, порожденной множеством C.

Индуктивную шкалу банаховых пространств $\{E_C\}_{C\in\mathcal{C}(E)}$ обозначим $\overrightarrow{E}_{\mathcal{C}}$, а ее индуктивный предел — $E_{\mathcal{C}}$, т. е.

$$\overrightarrow{E}_{\mathcal{C}} = \{E_C\}_{C\in\mathcal{C}(E)}; \quad E_{\mathcal{C}} = \varinjlim_{C\in\mathcal{C}(E)} E_C = \varinjlim \overrightarrow{E}_{\mathcal{C}}.$$

Как показано в [5], для любого банахова пространства E верно: $E_{\mathcal{C}} \cong E$.

Определение 3.1. Будем говорить, что банахово пространство E *обладает свойством компактной аппроксимации* ($E \in K_{ap}$), если $\forall\, C \in \mathcal{C}(E)\ \exists\, C' \in \mathcal{C}(E)$ такой, что имеет место компактное вложение $E_C \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C'}$.

Теорема 3.1. *Любое банахово пространство E обладает свойством компактной аппроксимации ($E \in K_{ap}$). Более того, положим*

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{\|x\|}},\ x \ne 0; \quad \varphi(0) = 0.$$

Тогда:

(*i*) $\forall\, C \in \mathcal{C}(E)$ *вложение* $E_C \hookrightarrow\!\!\hookrightarrow E_{C_\varphi}$ *компактно, где* $C_\varphi = \overline{co}\,\varphi(C)$;

(*ii*)

$$(x \in C) \Rightarrow \left(\|x\|_{C_\varphi} \le \sqrt{\|x\|}\right). \tag{8}$$

Доказательство. Функция $\varphi(x) = \dfrac{x}{\sqrt{\|x\|}}$ непрерывна при $x \neq 0$. Проверим непрерывность при $x = 0$:

$$\|\varphi(x)\| = \left\|\frac{x}{\sqrt{\|x\|}}\right\| = \frac{\|x\|}{\sqrt{\|x\|}} = \sqrt{\|x\|} \to 0 = \varphi(0) \text{ при } x \to 0.$$

Следовательно, $\varphi(C)$ — компакт по теореме Вейерштрасса. Легко видеть при этом, что $\varphi(C)$, а значит, и $\overline{co}\,\varphi(C)$ — абсолютно выпуклое множество, вместе с C. Поскольку $C_\varphi = \overline{co}\,\varphi(C)$ — также компакт (см. [9]), то $C_\varphi \in \mathcal{C}(E)$. Докажем, что вложение E_C в E_{C_φ} компактно.

Пусть $\widetilde{x} \in \partial^{co} C$ ($\partial^{co} C$ — выпуклая граница C). Тогда, при некотором $\lambda \ge \dfrac{1}{\sqrt{\|\widetilde{x}\|}}$, верно $\lambda\,\widetilde{x} \in \partial^{co} C_\varphi$. Отсюда

$$\|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \le \sqrt{\|\widetilde{x}\|}. \tag{9}$$

Если же $x \in C$, $\widetilde{x} = \mu\, x$ (при некотором $\mu \ge 1$), то подставляя $\widetilde{x} = \mu\, x$ в (9), получаем:

$$\|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} = \|\mu\, x\|_{C_\varphi} = \mu \|x\|_{C_\varphi} \le \sqrt{\|\widetilde{x}\|} = \sqrt{\|\mu\, x\|}.$$

Отсюда

$$\|x\|_{C_\varphi} \le \frac{1}{\mu}\sqrt{\|\mu\, x\|} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\sqrt{\|x\|} \le \sqrt{\|x\|}, \tag{10}$$

т. е. (8) верно. Заметим также, что из (10) следует при $\mu \ge 1$:

$$\sqrt{\|x\|} \ge \sqrt{\|\mu\, x\|} \ge \mu\sqrt{\|x\|}.$$

Пусть $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset C$. Тогда, существует подпоследовательность $\{x_{k_n}\}$, сходящаяся к некоторому $x_0 \in C$, т. е. $x_{k_n} - x_0 \overset{E_C}{\to} 0$. При этом

$$x_{k_n} - x_0 \in C - C = 2\, C, \text{ т. е. } \frac{x_{k_n} - x_0}{2} \in C \ (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Применяя (8) к $x = \dfrac{x_{k_n} - x_0}{2}$, получаем:

$$\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|_{C_\varphi} \le \sqrt{\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|}, \text{ откуда } \|x_{k_n} - x_0\|_{C_\varphi} \le 2\sqrt{\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|} \to 0$$

при $n \to \infty$, ввиду непрерывности φ. Таким образом, $x_{k_n} - x_0 \overset{E_{C_\varphi}}{\to} 0$, т. е. C предкомпактно в E_{C_φ} и, следовательно, вложение E_C в E_{C_φ} компактно.

□

Следствие 3.1. *Для любого ω-компакта $\Omega_\varepsilon^R \subset E = L_p[a;b]$ существует ω-компакт $\Omega_{\varepsilon'}^{R'} \subset E$ такой, что вложение $E_{\Omega_\varepsilon^R} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\Omega_{\varepsilon'}^{R'}}$ компактно, т.е. индуктивная шкала пространств $\left\{E_{\Omega_\varepsilon^R}\right\}_{\Omega_\varepsilon^R \in \mathcal{C}(E)}$ — шкала с компактными вложениями.*

Доказательство. По теореме 3.1 вложение $E_{\Omega_\varepsilon^R} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{(\Omega_\varepsilon^R)_\varphi} =: E_{C_\varphi}$ компактно. Так как ω-компакты Ω_ε^R образуют фундаментальную систему компактов, то C_φ содержиться в некотором ω-компакте $\Omega_{\varepsilon'}^{R'}$, а значит, вложение $E_{C_\varphi} \hookrightarrow E_{\Omega_{\varepsilon'}^{R'}}$ непрерывно. Следовательно, вложение $E_{\Omega_\varepsilon^R} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\Omega_{\varepsilon'}^{R'}}$ компактно.

$\square$

Доказанный результат можно усилить.

Определение 3.2. Будем говорить, что банахово пространство E *обладает свойством σ-компактной аппроксимации* $\left(E \in K_{ap}^\sigma\right)$, если $\forall \{C_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}(E)\ \exists C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что все вложения $E_{C_n} \hookrightarrow\hookrightarrow E_C$ компактны $(n \in \mathbb{N})$.

Далее нам потребуется следующее утверждение, доказанное в [7].

Лемма 3.1. *Пусть E — пространство Фреше с определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_m\}_{m=1}^\infty$. Если $\{C_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{C}(E)$ и $\forall m \in \mathbb{N} \quad \alpha_n = o\left(\frac{1}{diam_m(C_n)}\right)$, то*

$$C = \overline{co}\left(\bigcup_{n=1}^\infty \alpha_n C_n\right) \in \mathcal{C}(E). \tag{11}$$

В частности, если $\lim\limits_{n\to\infty} diam_m(C_n) = 0\ \forall m \in \mathbb{N}$ (т.е. $\alpha_n = 1$ в (11)), то $C \in \mathcal{C}(E)$.

Теорема 3.2. *Любое банахово пространство E обладает свойством σ-компактной аппроксимации $\left(E \in K_{ap}^\sigma\right)$.*

Доказательство. Пусть $C_n \in \mathcal{C}(E)$. Обозначим

$$r_n = \sup_{x,\, y \in C_n} \|x - y\| = diam(C_n) \quad (r_n < \infty,\ n \in \mathbb{N}).$$

Пусть $\alpha_n = \dfrac{1}{n\, r_n}$. Тогда

$$\frac{\alpha_n}{\frac{1}{r_n}} = \frac{1}{n} \to 0, \text{ то есть } \alpha_n = o\left(\frac{1}{r_n}\right) \text{ при } n \to \infty.$$

Положим

$$C = \overline{co}\left(\bigcup_{n=1}^\infty \frac{1}{n\, r_n}\, C_n\right).$$

Тогда $C \in \mathcal{C}(E)$ по лемме 3.1. Применяя следствие 3.1, найдем такое $C_\varphi \in \mathcal{C}(E)$, что вложение $E_C \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C_\varphi}$ компактно. Тем более, $\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$E_{C_n} = E_{\alpha_n C_n} \hookrightarrow E_C \hookrightarrow\hookrightarrow E_{C_\varphi}.$$

Таким образом, шкала пространств $\overrightarrow{E}_{\mathcal{C}}$ — σ-индуктивная шкала с компактными вложениями [7].

□

Следствие 3.2. *Для любой последовательности ω-компактов $\{\Omega^{R_n}_{\varepsilon_n}\}_{n=1}^\infty \subset E = L_p[a;b]$ существует ω-компакт $\Omega^{R'}_{\varepsilon'} \subset E$ такой, что вложения $E_{\Omega^{R_n}_{\varepsilon_n}} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\Omega^{R'}_{\varepsilon'}}$ компактны $\forall\, n \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. По теореме 3.2, существует $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что вложения $E_{\Omega^{R_n}_{\varepsilon_n}} \hookrightarrow\hookrightarrow E_C$ компактны $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Так как ω-компакты Ω^R_ε образуют фундаментальную систему компактов, то C содержится в некотором ω-компакте $\Omega^{R'}_{\varepsilon'}$. Тогда, вложение $E_C \hookrightarrow E_{\Omega^{R'}_{\varepsilon'}}$ непрерывно. Следовательно, все вложения $E_{\Omega^{R_n}_{\varepsilon_n}} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\Omega^{R'}_{\varepsilon'}}$ компактны.

Таким образом, шкала пространств $\{E_{\Omega^R_\varepsilon}\}_{\Omega^R_\varepsilon \in \mathcal{C}(E)}$ — σ-индуктивная шкала с компактными вложениями.

□

4. Дополнительные свойства вложений в K-шкале интегральных пространств и пространств Соболева.

Вначале отметим, что предложение 1.3 позволяет включать в фундаментальную систему только ω-компакты Ω^R_ε с фиксированным $R = R_0 > 0$ (например, $R_0 = 1$). Далее, поскольку множество многочленов плотно в любом $E = L_p[a;b]$, то мы докажем, что вложение $E_{\Omega^1_\varepsilon} \hookrightarrow E$ плотно, доказав следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Существует такой ω-компакт $\Omega^1_{\varepsilon_0}$, что множество всех многочленов на $[a;b]$* плотно в $E_{\Omega^1_{\varepsilon_0}}$.

Доказательство. Пусть $P_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k t^k$. Оценим модуль непрерывности многочлена P_n в $L_p[a;b]$:

$$\omega^p_{P_n}(\delta) = \sup_{|h|\le\delta} \|P_n(t+h) - P_n(t)\|_{L_p} = \sup_{|h|\le\delta} \left\| \sum_{k=0}^{n} a_k (t+h)^k - \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \right\|_{L_p} =$$

$$= \sup_{|h|\le\delta} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \left((t+h)^k - t^k \right) \right\|_{L_p} = \sup_{|h|\le\delta} \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{m=1}^{k} C_k^m\, t^{k-m} h^m \right\|_{L_p} =$$

$$= \sup_{|h|\le\delta}\left\|\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k} a_k\, C_k^m\, t^{k-m}h^m\right\|_{L_p} \le \sup_{|h|\le\delta}\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{k} C_k^m|a_k\, h^m|\|t^{k-m}\|_{L_p} \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} c_k\delta^k \le M\cdot\delta \text{ при некотором } M>0,$$

где c_k $(k=\overline{1,n})$ — некоторые положительные константы.

Пусть $\varepsilon_0(\delta)=M\cdot\delta$. Тогда

$$\sup_{\delta>0}\frac{\omega^p_{P_n}(\delta)}{\varepsilon_0(\delta)}\le 1.$$

Следовательно, $P_n\in E_{\Omega^1_{\varepsilon_0}}$.

$\square$

Следствие 4.1. *Для любого ω-компакта Ω^R_ε при $\sup\limits_{\delta>0}\dfrac{\delta}{\varepsilon_0(\delta)}<\infty$ в $E=L_p[a;b]$ вложение $E_{\Omega^R_\varepsilon}\hookrightarrow E$ плотно. Тем более, если $\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}$ поглощает $\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}$, то вложение $E_{\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}}\hookrightarrow E_{\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}}$ плотно.*

Таким образом, К-шкалу $\{E_{\Omega^R_\varepsilon}\}$ можно рассматривать как шкалу с плотными вложениями.

Следующая теорема доказывает эквивалентность векторного и непрерывного вложений $E_{\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}}$ в $E_{\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}}$.

Теорема 4.2. *Для любых ω-компактов $\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}$ и $\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}$ в $E=L_p[a;b]$ имеем:*

$$\left(E_{\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}}\subset E_{\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}}\right)\Leftrightarrow\left(\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}\subset\lambda\cdot\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}\right)$$

при некотором $\lambda>0$. Следовательно, векторное вложение и непрерывное вложение для пространств $E_{\Omega^{R_1}_{\varepsilon_1}}$ и $E_{\Omega^{R_2}_{\varepsilon_2}}$ эквивалентны.

Доказательство. В силу сделанного выше замечания, доказательство достаточно провести для случая $R_1=R_2=1$. Кроме всего, отметим, что условие $\Omega^1_{\varepsilon_1}\subset\lambda\cdot\Omega^1_{\varepsilon_2}$ равносильно непрерывному вложению $E_{\Omega^1_{\varepsilon_1}}\hookrightarrow E_{\Omega^1_{\varepsilon_2}}$, из которого, очевидно, следует векторное вложение $E_{\Omega^1_{\varepsilon_1}}\hookrightarrow E_{\Omega^1_{\varepsilon_2}}$. Допустим теперь, что векторное вложение $E_{\Omega^1_{\varepsilon_1}}$ в $E_{\Omega^1_{\varepsilon_2}}$ разрывно, т. е.

$$\Omega^1_{\varepsilon_1}\not\subset\lambda\Omega^1_{\varepsilon_2}\quad(\forall\,\lambda>0).$$

Следовательно,

$$\forall\,\lambda>0\quad\exists\,x_\lambda\in\Omega^1_{\varepsilon_1}:\ x_\lambda\notin\lambda\Omega^1_{\varepsilon_2}\Leftrightarrow\frac{x_\lambda}{\lambda}\notin\Omega^1_{\varepsilon_2}.$$

Выберем последовательность $\lambda_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ и, соответственно,

$$x_n:=x_{\lambda_n}\in\Omega^1_{\varepsilon_1}:\frac{x_n}{\lambda_n}\notin\Omega^1_{\varepsilon_2}.$$

Так как $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ содержится в ω-компакте $\Omega^1_{\varepsilon_1}$, то существует подпоследовательность $x_{n_k} \xrightarrow{E} x_0 \in \Omega^1_{\varepsilon_1}$ при $k \to \infty$. При этом

$$\frac{x_{n_k}}{\lambda_{n_k}} \notin \Omega^1_{\varepsilon_2} \Rightarrow \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{\frac{x_{n_k}}{\lambda_{n_k}}}(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} > 1 \Leftrightarrow \sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_{n_k}}(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} > \lambda_{n_k} \quad (\forall\, k \in \mathbb{N}). \tag{12}$$

Отсюда:

$$\begin{aligned}\omega^p_{x_{n_k}}(\delta) &= \sup_{|h|\le\delta} \|x_{n_k}(t+h) - x_{n_k}(t)\|_{L_p} = \\ &= \sup_{|h|\le\delta} \|x_{n_k}(t+h) - x_0(t+h) + x_0(t+h) - x_0(t) + x_0(t) - x_{n_k}(t)\|_{L_p} \le \\ &\le \sup_{|h|\le\delta} \|x_{n_k}(t+h) - x_0(t+h)\|_{L_p} + \sup_{|h|\le\delta} \|x_0(t+h) - x_0(t)\|_{L_p} + \\ &+ \|x_{n_k}(t) - x_0(t)\|_{L_p} \le 2\|x_{n_k} - x_0\|_{L_p} + \omega^p_{x_0}(\delta).\end{aligned}$$

Итак,

$$\omega^p_{x_{n_k}}(\delta) - \omega^p_{x_0}(\delta) \le 2\|x_{n_k} - x_0\|_{L_p}.$$

Меняя местами x_{n_k} и x_0 в предыдущей выкладке, получим:

$$\omega^p_{x_0}(\delta) - \omega^p_{x_{n_k}}(\delta) \le 2\|x_{n_k} - x_0\|_{L_p},$$

откуда

$$|\omega^p_{x_{n_k}}(\delta) - \omega^p_{x_0}(\delta)| \le 2\|x_{n_k} - x_0\|_{L_p}.$$

Следовательно,

$$\|x_{n_k}(t+h) - x_0(t)\|_{L_p} \to 0 \Rightarrow |\omega^p_{x_{n_k}}(\delta) - \omega^p_{x_0}(\delta)| \rightrightarrows 0$$

при $k \to \infty$ (равномерно по δ).

Переходя теперь в последнем неравенстве в (12) к пределу при $k \to \infty$, получаем:

$$\sup_{\delta>0} \frac{\omega^p_{x_0}(\delta)}{\varepsilon_2(\delta)} = \infty \Rightarrow x_0 \notin E_{\Omega^1_{\varepsilon_2}},$$

что противоречит условию.

$\square$

Очевидно, все предыдущие результаты работы остаются в силе для пространств $L_p([a;b], \mathbb{R}^s)$, $s \in \mathbb{N}$, векторнозначных функций. Теперь несложно перенести полученные результаты на случай пространств Соболева векторнозначных функций $W^{n,p}([a;b], \mathbb{R}^m)$, $1 \le p < \infty$, $m \in \mathbb{N}$.

Теорема 4.3. *Для любого пространства Соболева* $W^{n,p}([a;b], \mathbb{R}^m)$ *в соответствующем пространстве* $L_p\left([a;b], \mathbb{R}^{m(n+1)}\right)$ *можно задать такую норму, эквивалентную стандартной, в которой справедливо изометричное вложение*

$$W^{n,p}([a;b], \mathbb{R}^m) \xrightarrow{\sim} L_p\left([a;b], \mathbb{R}^{m(n+1)}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим пространство Соболева $W^{n,p}\left([a;b],\,\mathbb{R}^m\right),\ (n\in\mathbb{N}_0,$ $p\geq 1,\ m\in\mathbb{N})$ со стандартной нормой:

$$\|x\|_{W^{n,p}}=\left(\sum_{k=0}^{n}\int\limits_a^b\left(\|x^{(k)}(t)\|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Поставим в соответствие каждому элементу $x\in W^{n,p}$ векторнозначную функцию $y:[a;b]\to\mathbb{R}^{m(n+1)}$ вида $y=(x,x',x'',\ldots,x^{(n)})$. При этом $y\in L_p\left([a;b],\,\mathbb{R}^{m(n+1)}\right)$.

Зададим в $L_p\left([a;b],\,\mathbb{R}^{m(n+1)}\right)$ следующую норму, эквивалентную стандартной:

$$\|y\|_{L_p}=\left(\sum_{k=0}^{n}\int\limits_a^b\left(\|(y_{km+1},\ldots,y_{(k+1)m})\|\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В этой норме, при соответствии $x\leftrightarrow y=(x,x',x'',\ldots,x^{(n)})$ имеем:

$$\|x\|_{W^{n,p}}=\|y\|_{L_p},$$

откуда следует изометричное вложение

$$W^{n,p}\left([a;b],\,\mathbb{R}^m\right)\overset{\sim}{\hookrightarrow}L_p\left([a;b],\,\mathbb{R}^{m(n+1)}\right).$$

$\square$

Поскольку все доказанные ранее результаты автоматически переносятся на замкнутые подпространства пространств L_p, то из теоремы немедленно вытекает

Следствие 4.2. *Все предыдущие результаты* §§ 2−4 *справедливы, с соответствующими изменениями, для ω-эллипсоидов, ω-компактов и разложений в K-шкалы пространств Соболева* $W^{n,p}\left([a;b],\,\mathbb{R}^m\right)$.

Автор выражает благодарность И.В. Орлову за постановку задачи и полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Зорич В.А. *Математический анализ. Учебник Ч.II.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 640 С.

[2] Богачев В.И. *Основы теории меры Т.1.* – Москва-Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2003. – 544 С.

[3] Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения.* – Москва: Мир, 1969. – 1072 С.

[4] Орлов И.В. *Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы.* // Современная математика. Фундаментальные направления. – Т.29(2008). – С. 165–175.

[5] Орлов И.В. *Универсальные компакты в l_p.* // Кибернетика и системный анализ. – 2010. – №5. – С. 112–121.

[6] Орлов И.В., Божонок Е.В. *Дополнительные главы современного естествознания. Вариационное исчисление в пространстве Соболева H^1.* Учебное пособие / – Симферополь: ДИАЙПИ, 2010. – 156 С.

[7] Орлов И.В., Стонякин Ф.С. *Предельная форма свойства Радона-Никодима справедлива в любом пространстве Фреше.* // Современная математика. Фундаментальные направления. – Т.37(2010). – С. 55–69.

[8] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша: Теория и применения.* – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. –344 С.

[9] Шефер Х. *Топологические векторные пространства.* – Москва: Мир, 1971. – 359 С.

Фундаментальні системи компактів в інтегральних просторах.

Дається опис відповідних фундаментальних систем компактів в загальних інтегральних просторах L_p і просторах Соболєва $W^{n,p}$ функцій однієї змінної. Досліджено властивості шкал підпросторів, породжених фундаментальними системами компактів.

Ключові слова: фундаментальні системи компактів, критерій компактності, компактні вкладення, інтегральні простори, простори Соболєва, інтегральний модуль неперервності, індуктивна шкала просторів, індуктивна границя.

Fundamental systems of compacta in integral spaces.

Description of appropriate fundamental systems of compacta in general integral spaces L_p and Sobolev spaces $W^{n,p}$ of functions of one variable is given. The properties of scales of subspaces generated by the fundamental systems of compacta were researched.

Keywords: fundamental systems of compacta, compactness criterion, compact embeddings, integral spaces, Sobolev spaces, integral modulus of continuity, inductive scale of spaces, inductive limit.