Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 71–75.

УДК 517. 432

Ю. Л. Кудряшов

МИНИМАЛЬНОСТЬ σ — СИММЕТРИЧЕСКОЙ ДИЛАТАЦИИ ОПЕРАТОРНОГО УЗЛА

В статье доказывается минимальность σ — симметрической дилатации операторного узла неограниченного оператора с непустым множеством регулярных точек.

Ключевые слова: неограниченный оператор, узел, дилатация.

Введение

Определение 1. Пусть $\lambda_0 \in \rho(A)$, где A — линейный не обязательно ограниченный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Оператор $\widetilde{A}$, действующий в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$, называется дилатацией оператора A [1], если

1) $\lambda_0 \in \rho(A) \cap \rho(\widetilde{A})$,

2) $H \subset \widetilde{H}$,

3) $R^n_{\lambda_0}(A)\, h = PR^n_{\lambda_0}(\widetilde{A})\, h$, для любого $n \in \mathbb{N}$ и $h \in H$, P — ортопроектор из $\widetilde{H}$ на H, $R_{\lambda_0}(A) = (A - \lambda_0\, I)^{-1}$, $R_{\lambda_0}(\widetilde{A}) = (\widetilde{A} - \lambda_0\, I)^{-1}$.

Исходя из этого определения, естественно дать следующее определение минимальной дилатации оператора.

Определение 2. Дилатация $\widetilde{A}$, действующая в $\widetilde{H}$ оператор A, действующего в H называется минимальной, если

$$\widetilde{H}_{\min} = \operatorname{span}\{R^n_{\lambda_0}(\widetilde{A})\, h|\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\},\ h \in H\} -$$

— замкнутая линейная оболочка векторов.

Очевидно, что $\widetilde{H}_{\min} \subset \widetilde{H}$ и $\widetilde{H}_{\min}$ инвариантно относительно $R_\lambda(\widetilde{A})$, но не обязательно инвариантно относительно самого оператора $\widetilde{A}$. Поэтому не всякую дилатацию можно сузить до минимальной, как в случае изометрической дилатации оператора сжатия [2].

Предварительные сведения

Пусть $\overline{\mathfrak{D}(A)} = H,\ \lambda_0 \in \rho(A)$, $\operatorname{Im}\lambda_0 < 0$.

Рассмотрим оператор

$$B_{\lambda_0} = i\,R_{\lambda_0} - i\,R^*_{\lambda_0} + \operatorname{Im}\lambda_0\,R^*_{\lambda_0}\,R_{\lambda_0},\ \text{где } R_{\lambda_0} = R_{\lambda_0}(A).$$

Множество линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертова пространства H_1 в гильбертово пространство H_2, обозначим $L(H_1,\ H_2)$.

Определение 3. Совокупность гильбертовых пространств H, E и операторов A, действующего в H, $\varphi \in L(H,\ E)$, $\sigma \in L(E,\ E)$, $\sigma = \sigma^*$ называется операторным узлом [3]

$$\theta = (A, H, \varphi, E, \sigma),\ \text{если } B_{\lambda_0} = \varphi^*\,\sigma\,\varphi.$$

Оператор A называется основным, φ — каналовым, σ — метрическим операторами узла θ. Пространство H называется внутренним, E — внешним пространствами узла θ.

Определение 4. Оператор $\widetilde{A}$ называется дилатацией операторного узла θ, если $\widetilde{A}$ является дилатацией основного оператора A узла θ при любых φ и σ из узла θ [3].

В [3] построена σ — симметрическая дилатация S узла θ следующим образом.

Рассмотрим линейное многообразие вектор — функций $V(t)$ со значениями в гильбертовом пространстве E при $t \in [0;\ \infty)$. Обозначим через $L_2(0,\ \infty;\ E)$ гильбертово пространство, полученное в результате замыкания данного линейного многообразия вектор — функций по норме

$$\|V\|^2_{L^2(0,\ \infty;\ E)} = \int\limits_0^\infty \|V(t)\|^2_E\,dt < \infty.$$

Введем пространство $\widetilde{H} = H \oplus L_2(0,\ \infty;\ E)$, $\tilde{h} = \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix}$, $\tilde{h}_1 = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ h_1 \end{pmatrix}$ со скалярным произведением

$$(\tilde{h},\ \tilde{h}_1)_{\widetilde{H}} = (V(t),\ V_1(t))_{L^2(0,\ \infty;\ E)} + (h,\ h_1)_H.$$

С помощью метрического оператора σ узла θ введем в пространстве $\widetilde{H}$ σ — метрику следующим образом:

$$\sigma\begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}V \\ h \end{pmatrix},$$

где $\tilde{\sigma}V = \sigma V(t)$ при каждом $t \in [0;\ \infty)$.

Обозначим $[f,\ g]_{\widetilde{H}} = (\sigma f,\ g)_{\widetilde{H}}$.

Определение 5. Оператор L, действующий в гильбертовом пространстве $\widetilde{H}$ называется σ — симметрическим, если для любых $\{f,\ g\} \subset \mathfrak{D}(L)$

$$[Lf,\ g]_{\widetilde{H}} = [f,\ Lg]_{\widetilde{H}} \quad \overline{\mathfrak{D}(L)} = \widetilde{H}$$

в обычной метрике пространства $\widetilde{H}$.

Построим в пространстве $\widetilde{H}$ оператор S следующим образом: вектор $\tilde{h} = \begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} \in \mathfrak{D}(S)$ тогда и только тогда, когда

1) $\left\{V(t),\ \dfrac{dV(t)}{dt}\right\} \subset L_2(0,\ \infty;\ E)$;

2) $h \in \mathfrak{D}(A)$;

3) $V(0) = i\,\varphi(A - \lambda_0\, I)h$.

Оператор S определяется так

$$S\tilde{h} = S\begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\,\dfrac{dV(t)}{dt} \\ Ah \end{pmatrix}.$$

В дальнейшем положим $\lambda_0 = -i$, что упростит выкладки и не нарушит общности рассуждений.

Основной результат

Теорема 1. *Если пространство $E = \overline{\varphi H}$ — сепарабельно, то дилатация S узла θ является минимальной.*

Доказательство. В [3] получено выражение для $(S + i\,I)^{-1} = R_{-i}(S)$.

$$R_{-i}(S)\begin{pmatrix} V(t) \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathcal{P}_0 + i\,I)^{-1}V(t) + i\,e^{-t}\varphi h \\ R_{-i}(A)\,h \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $(\mathcal{P}_0 + i\,I)^{-1}V(x) = \dfrac{1}{i}\displaystyle\int\limits_0^x e^{t-x}V(t)\,dt$. Обозначим $R_{-i}(A) = R_{-i}$.

Отсюда, получаем

$$R_{-i}(S)\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\,e^{-t}\varphi\,h \\ R_{-i}\,h \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Применяя метод математической индукции, докажем формулу для n-ой степени резольвенты оператора S:

$$R^n_{-i}(S)\begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_n \\ h_n \end{pmatrix},\ \text{где } n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$V_n = e^{-t} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!\, i^{n-k-1}}\, \varphi\, R_{-i}^{k-1} h, \quad h_n = R_{-i}^{n}\, h.$$

Как легко видеть, при $n = 1$ мы получаем формулу (2).

Пусть равенство (3) верно для n и докажем его справедливость для $n + 1$, т. е. что $h_{n+1} = R_{-i}^{n+1}\, h, \quad V_{n+1} = e^{-t} \sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\, i^{n-k}}\, \varphi\, R_{-i}^{k-1}\, h.$

Применяя формулу (1), получаем:

$$R_{-i}^{n+1}(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = R_{-i}(S) \cdot R_{-i}^{n}(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_{n+1}' \\ h_{n+1}' \end{pmatrix},$$

где

$$V_{n+1}' = \frac{1}{i} \int_0^t e^{x-t} \cdot e^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!\, i^{n-k-1}}\, \varphi\, R_{-i}^{k-1} h\, dx + i\, e^{-t}\, \varphi\, R_{-i}^{n}\, h,$$

$h_{n+1}' = R_{-i}^{n+1}\, h = h_{n+1}.$

$$V_{n+1}' = e^{-t} \sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{x^{n-k}}{(n-k)!\, i^{n-k}}\, dx\, \varphi\, R_{-i}^{k-1}\, h \; + i\, e^{-t}\, \varphi\, R_{-i}^{n}\, h =$$

$$= e^{-t} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\, i^{n-k}}\, \varphi\, R_{-i}^{k-1}\, h \; + i\, e^{-t} \varphi\, R_{-i}^{n}\, h = V_{n+1}.$$

Пусть $h_0 \in \mathfrak{D}(A)$, тогда при $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, получаем:

$$R_{-i}^{n+1}(S) \begin{pmatrix} 0 \\ (A + i\, I) h_0 \end{pmatrix} - R_{-i}^{n}(S) \begin{pmatrix} 0 \\ h_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_n'' \\ h_n'' \end{pmatrix},$$

где $h_n'' = 0$,

$$V_n'' = e^{-t} \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\, i^{n-k}}\, \varphi\, R_{-i}^{k-2}\, h_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!\, i^{n-k-1}}\, \varphi\, R_{-i}^{k-1}\, h_0 \right) =$$

$$= e^{-t} \left(\frac{t^n}{n!\, i^{n-1}}\, \varphi\, (A + i\, I)\, h_0 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{t^{n-k+1}}{(n-k+1)!\, i^{n-k}}\, \varphi\, R_{-i}^{k-2}\, h_0 \right) -$$

$$- e^{-t} \sum_{k=1}^{n} \frac{t^{n-k}}{(n-k)!\, i^{n-k+1}}\, \varphi\, R_{-i}^{k-1}\, h_0.$$

Производя замену в первой сумме $q = k - 1$, получим:

$$V_n'' = \frac{e^{-t}\, t^n}{n!\, i^{n-1}}\, \varphi\, (A + i\, I)\, h_0.$$

Т. к. $\overline{\varphi\, (A + i\, I)\, \mathfrak{D}(A)} = \overline{\varphi\, H} = E$, то в силу сепарабельности пространства E, множество вектор — функций вида $t^n\, e^{-t}\, h$, где $h \in E$, $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ плотно в $L_2(0,\ \infty;\ E)$.

Тогда $\operatorname{span}\{R^n_{-i}(S)\,h|\ n\in\mathbb{N},\ h\in H\} = L_2(0,\ \infty;\ E)$. $\square$

Выводы

Если при построении дилатации положить $\widetilde{H} = H\oplus L_2(0,\ \infty;\ \widetilde{E})$, где $E=\overline{\varphi\, H}$ и $\overline{\varphi\, H}\subset\widetilde{E}$, то полученная дилатация, как легко видеть, минимальной не будет. Выбирая φ из узла θ, можно получить минимальность дилатации.

Список литературы

[1] Золотарев В.А. *Аналитические методы спектральных представлений несамосопряженных и неунитарных операторов.* – Харьков: ХНУ, 2003. – 342 с.

[2] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч. *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* – М.: Мир, – 1970. – 431 с.

[3] Кудряшов Ю.Л. *σ – симметрическая дилатация операторного узла неограниченного оператора.* // Ученые записки ТНУ им. В.И. Вернадского. – 2010. – Т. 23 (62) №1. – С. 80–84.

Мінімальність σ — симетричної дилатації операторного вузла

У статті доводиться мінімальність σ — симетричної дилатації операторного вузла необмеженого оператора з непорожньою множиною регулярних точок.

Ключові слова: необмежений оператор, вузол, дилатація.

Minimality σ — symmetrical dilation of knot of unbounded operator

In the paper minimality σ — symmetrical dilation of knot of unbounded operator with unempty set of regular points is prove.

Keywords: unbounded operator, knot, dilation.