Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского
Серия «Физико-математические науки». Том 25 (64). 2012 г. № 1. С. 71-74

УДК 510.13

РІВНЯННЯ РУХУ СПАДКОВО-ПРУЖНОГО СТРИЖНЯ В ОКОЛІ КВАЗІФРОНТУ

Черненко В.П.

Кременчуцький національний університет імені Михайла Остроградського, Кременчук, Україна
E-mail: cher_var@mail.ru

Застосовано новий підхід до виводу рівняння руху спадково-пружного стрижня в околі квазіфронту. Показано як з цього рівняння можна отримати рівняння руху стрижня в околі переднього фронту хвилі. Розв'язок крайової задачі для отриманого рівняння знаходиться за допомогою інтегрального перетворення Лапласу і метода контурного інтегрування.
Ключові слова: спадково-пружний стрижень, модель Работнова, квазіфронт хвилі.

ВСТУП

Картина розповсюдження хвиль в спадково-пружних стрижнях, яка описана в [1-3], виглядає наступним чином. Спочатку иде хвиля с миттєвою швидкістю c, за фронтом сигнал швидко затухає за експоненціальним законом. По мірі наближення до квазіфронту хвилі, яка розповсюджується з тривалою швидкістю c_∞, інтенсивність сигналу збільшується, а за квазіфронтом залишається постійною. Отже, пружно-деформований стан для фіксованого часу $\tau = const >> 1$ можна розчленити на чотири зони [4] та розв'язувати відповідну задачу в кожний зоні окремо.

У даний статті розглядається зона пограншару в околі квазіфронту і виводиться рівняння руху спадково-пружного стрижня в цій зоні без допомоги апарату дрібного диференціювання [4].

1. ВИВІД РІВНЯННЯ РУХУ СПАДКОВО-ПРУЖНОГО СТРИЖНЯ

Розглянемо тонкий напівнескінчений стрижень будь-якого поперечного перерізу. Спадково-пружні властивості материалу будемо описувати за допомогою рівняння спадкової пружності, взятого у інтегрально-операторної формі [4]:

$$\frac{\partial \sigma(\xi,\tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u(\xi,\tau)}{\partial \tau^2} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u(\xi,\tau)}{\partial \xi} = \sigma(\xi,\tau) + \int_0^\tau K(\tau-\tau_*)\sigma(\xi,\tau_*)d\tau_* . \tag{2}$$

Гранична умова на лівому кінці стрижня має вигляд:

$$\sigma(0,\tau) = I^* H(\tau), \tag{3}$$

умова неперервності переміщення на квазіфронті хвилі задається так:

$$u(\xi,\tau)\Big|_{\xi=k_c\tau} = 0. \tag{4}$$

В формулах (1)-(4) σ – напруга, u – переміщення, τ – час, ξ – повздовжня координата, I^* – амплітуда впливу, $H(\tau)$ – одинична функція Хевісайда, $K(\tau-\tau_*)$ – ядро повзучості Работнова, яке має вигляд [2]:

$$K(\tau)=\tau^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\beta)^n\tau^{n/2}}{\Gamma[(n+1)/2]},$$

де $\beta>0$ – параметр матеріалу.

В даний роботі будемо розглядати тільки окіл квазіфронту, який рухається за законом

$$\xi=k_c\tau \tag{5}$$

зі швидкістю

$$k_c=\sqrt{\frac{\beta}{\beta+1}}.$$

Для отримання рівняння руху квазіфронту використаємо рівнянням руху стрижня (1) та умову рівності нулю переміщень на квазіфронті (4). Для цього продиференціюємо тричі вздовж фронту хвилі умову (4). В результаті отримуємо:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^3}k_c^3+3\frac{\partial^3 u}{\partial\xi^2\partial\tau}k_c^2+\frac{\partial^3 u}{\partial\xi\partial\tau^2}k_c+\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}=0. \tag{6}$$

На основі рівняння руху (1) можна записати:

$$\frac{\partial^3 u}{\partial\tau^3}=\frac{\partial^2\sigma}{\partial\xi\partial\tau}.$$

Підставивши це рівняння в рівність (6) та проінтеґрувавши отримане рівняння в околі квазіфронту за повздовжньою координатою ξ, отримуємо:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}k_c^3+3\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\tau}k_c^2+\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}k_c+\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}=0. \tag{7}$$

Підставивши в рівняння (7) закон руху (1) і закон спадкової пружності (2), отримуємо рівняння руху стрижня в околі квазіфронта:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}\left(1+\frac{3}{k_c}\right)+\frac{\partial\sigma}{\partial\tau}\left(\frac{3}{k_c}+\frac{1}{k_c^3}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{3}{k_c}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}=0, \tag{8}$$

де

$$\varphi=\int_0^{\tau}K(\tau-\tau_*)\sigma(\xi,\tau_*)d\tau_*.$$

2. РОЗВ'ЯЗОК КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ РУХУ СТРИЖНЯ В ОКОЛІ КВАЗІФРОНТА

Розглянемо крайову задачу для рівняння (8) с граничною умовою (3).

Розв'язувати цю задачу будемо за допомогою інтеґрального перетворення Лапласа за часом τ [3].

Зображення за Лапласом ядра Работнова має вигляд [2]:

$$\overline{K} = \frac{1}{\sqrt{s} + \beta}, \ \beta > 0 .$$

Отже, застосовуючи перетворення Лапласа до задачі (8), (3) і використовуючи теорему про згортку [3], отримуємо крайову задачу в зображеннях за Лапласом для рівняння

$$\frac{d\overline{\sigma}}{d\xi}\left(1 + \frac{3}{k_c^2} + \frac{1}{\sqrt{s} + \beta}\right) + \frac{3s}{k_c}\left(1 + \frac{1}{3k_c^2} + \frac{1}{\sqrt{s} + \beta}\right)\overline{\sigma} = 0 \tag{9}$$

з граничною умовою

$$\overline{\sigma}(0, \tau) = \frac{I^*}{s}, \tag{10}$$

де s – параметр інтеґрального перетворення Лапласа.

Розв'язок крайової задачі (9), (10) має вигляд:

$$\overline{\sigma} = \frac{I^*}{s} exp\left(-\frac{3s}{k_c}\left[\frac{1 + \dfrac{1}{3k_c^2} + \dfrac{1}{\sqrt{s} + \beta}}{1 + \dfrac{3}{k_c^2} + \dfrac{1}{\sqrt{s} + \beta}} \right]\xi \right). \tag{11}$$

Для знаходження асимптотичного розв'язка будемо розкладати показник степеня експоненти в зображенні (11) в ряд за додатними степенями параметра s, залишив перші два члена розкладу. Тоді отримуємо:

$$\overline{\sigma} = \frac{I^*}{s} \exp\left(-\left[s - As^{3/2} + Bs^2 \right]\xi \right), \tag{12}$$

де

$$A = \frac{1}{2\beta(\beta + 1)k_c}, \ B = \frac{4\beta + 3}{8\beta^2 (\beta + 1)^2 k_c} .$$

За допомогою метода контурного інтеґрування [3] отримуємо наступний оригінал зображення (12):

$$\sigma = I^* \left[1 - \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{p} exp\left[-\left(\left(\tau - \frac{\xi}{k_c} \right)p + B\xi p^2 \right) \right] sin\left(A\xi p^{3/2} \right) dp \right].$$

Зауваження. Якщо покласти $k_c = 1$ в рівнянні (8), то отримуємо рівняння руху переднього фронту хвилі у вигляді:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \xi} + \frac{\partial \sigma}{\partial \tau} + \frac{1}{4}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{3}{4}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = 0 .$$

ВИСНОВКИ

Розглянуто новий підхід до виводу рівняння руху квазіфронту спадково-пружного стрижня. Отримане рівняння має перший порядок на відміну від точного рівняння руху. В основі виводу цього рівняння лежіть умова неперервності переміщень на квазіфронті хвилі. Результати досліджень можна розповсюдити на неодномірні задачі.

Список літератури

1. Блитштейн Ю. М. Распространение волн в вязкоупругих средах / Блитштейн Ю. М. Мешков С. И. – Кишинев : Штиинца, 1977. – 205 с.
2. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Работнов Ю. Н. – М. : Наука, 1977. – 384 с.
3. Chu B. T. Stress Waves in Isotropic Linear Viscoelastic Materials / Chu B. T. // J. Mech. – 1962. – Vol. 1, No 14. – P. 439-461.
4. Анофрикова Н. С. Нестационарные продольные волны в вязкоупругих стержнях / Анофрикова Н. С., Черненко В. П // Труды V Российской конференции с международным участием “Смешанные задачи механики деформируемого твердого тела”. – Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2005. – С. 36-39.
5. Свешников А. Г. Теория функции комплексной переменной / Свешников А. Г., Тихонов А. Н. – М. : Наука, 1974. – 320 с.

Черненко В. П. Уравнение движения наследственно-упругого стержня в окрестности квазифронта / Черненко В. П. // Ученые записки Таврического национального университета имени В.И. Вернадского. Серия: Физико-математические науки. – 2012. – Т. 25(64), № 1. – С. 71-74.
Рассмотрен новый подход к выводу уравнения движения наследственно-упругого стержня в окрестности квазифронта. Показано как из этого уравнения можно получить уравнение движения стержня в окрестности переднего фронта волны. Решение краевой задачи для полученного уравнения находится с помощью интегрального преобразования Лапласа и метода контурного интегрирования.
Ключевые слова: наследственно-упругий стержень, модель Работнова, квазифронт волны.

Chernenko V. P. The movement equation of viscoelastic rod in vicinity of quasifront / Chernenko V. P. // Scientific Notes of Taurida National V.I. Vernadsky University. – Series: Physics and Mathematics Sciences. – 2012. – Vol. 25(64), No 1. – P. 71-74.
The new approach to the conclusion of movement equation of viscoelastic rod in the vicinity of quasifront is considered. It’s showed how to receive movement equation of viscoelastic rod in the vicinity of wave front. The solution of border problem for received equation is considered by Laplace’s integral transformation and the method of contour integration.
Keyword: viscoelastic rod, Rabotnov's model, quasifront of wave.

Поступила в редакцию 03.02.2012 г.