Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 27 (66) № 1 (2014), с. 65–74.

УДК 519.216.73, 517.986.7, 517.982.46

И. В. Мельникова, О. С. Старкова

СЛАБЫЕ И ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ АБСТРАКТНОЙ СТОХАСТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ КОШИ

В работе рассматриваются три вида решений (слабое, обобщенное по временной переменной и обобщенное по случайной переменной) бесконечномерной стохастической задачи Коши $X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t), t \geq 0$, $X(0) = \zeta$, где A, в общем случае, генератор регуляризованной полугруппы в некотором гильбертовом пространстве H и $\mathbb{W}$ — белый шум в другом гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$. Исследованы свойства указанных решений и связи между ними.

Ключевые слова: белый шум, винеровский процесс, обобщенное, слабое, регуляризованное решение, распределение, полугруппа операторов.

Введение

Работа посвящена конструкции и сравнению различных решений задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения

$$X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t),\ t \geq 0, \quad X(0) = \zeta, \tag{1}$$

с генератором полугруппы класса C_0 или некоторой регуляризованной (интегрированной, K-конволюционной) полугруппы операторов в гильбертовом пространстве.

Среди подходов к решению стохастических задач, в том числе абстрактных (то есть рассматриваемых в бесконечномерных пространствах) известным является переход к интегральной задаче с интегралом Ито по некоторому винеровскому процессу $\{W(t), t \geq 0\}$, "первообразной" от белого шума $\{\mathbb{W}(t), t \geq 0\}$ (см., напр., [1]–[5]).

Для задачи (1) — это интегральная задача Коши с абстрактным интегралом Ито по винеровскому процессу :

$$X(t) = \zeta + \int_0^t AX(s)ds + \int_0^t BdW(t), \quad t \geq 0,$$

записываемая обычно, как и в случае конечномерных винеровских процессов, в форме дифференциалов:

$$dX(t) = AX(t)dt + BdW(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \zeta. \tag{2}$$

Другой подход к решению задачи (1) — это решение именно дифференциальной задачи в пространствах абстрактных распределений. В пространствах распределений по временной переменной t дано определение процесса Q-белого шума $\{\mathbb{W}(t), t \geq 0\}$ и построено решение задачи с генератором регуляризованной полугруппы, в общем случае не являющейся полугруппой класса C_0. В пространствах распределений по случайной переменной ω, называемых стохастическими распределениями, определен более общий процесс $\{\mathbb{W}(t), t \geq 0\}$ — сингулярный белый шум, но решение получено для задачи с генератором полугруппы класса C_0 (см., напр., [6], [7], [5], [9]).

Настоящая работа посвящена исследованию свойств и сравнению слабых решений стохастической задачи Коши в форме (2) и обобщенных решений задачи (1), рассматриваемой в пространствах распределений. В первом разделе даны необходимые определения и сведения о существовании каждого из трех типов решений: слабых решений, решений, обобщенных по t, и решений, обобщенных по ω. Во втором разделе приведены результаты сравнения слабых и обобщенных по t решений при условии существования каждого из них, в третьем — слабого и обобщенного по ω решений.

Слабые и обобщенные решения стохастической задачи Коши

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство с нормальной фильтрацией $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ и $H, \mathbb{H}$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $\{W(t),\ t \geq 0\}$ — $\mathbb{H}$-значный Q-винеровский процесс: $W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k \beta_k(t) e_k$, где Q — симметричный неотрицательный оператор следа в $\mathbb{H}$, $\{e_k\}$ — полная ортонормированная система, состоящая из собственных векторов оператора Q: $Qe_k = \sigma_k^2 e_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 < \infty$ и $\beta_k(t)$ — независимые броуновские движения.

Для абстрактной стохастической задачи Коши в форме (2), где ζ — $\mathcal{F}_0$-измеримая H-значная случайная величина, оператор A порождает некоторую полугруппу в H, в общем случае неограниченных операторов решения однородной задачи; $B : \mathbb{H} \to H$ линейный ограниченный оператор, $\{W(t),\ t \geq 0\}$ — $\mathbb{H}$-значный Q-винеровский процесс, будем рассматривать следующие типы слабых решений.

H-значный случайный предсказуемый процесс $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ называется *слабым решением* задачи Коши (2), если $\int_0^t \|X(s)\|_H \, ds < \infty$ п.н. ($\mathbf{P}_{a.s.}$) и

$$\langle X(t), y\rangle = \langle \zeta, y\rangle + \int_0^t \langle X(s), A^* y\rangle\, ds + \langle BW(t), y\rangle,\ \mathbf{P}_{a.s.} \quad y \in \operatorname{dom} A^*\,, \tag{3}$$

слабым K-конволюционным решением, если

$$\langle X(t), y\rangle = \langle \int_0^t K(s)\zeta\, ds, y\rangle + \langle \int_0^t X(s)\, ds, A^* y\rangle + \langle \int_0^t \int_0^s K(s-r)\, BdW(r)\, ds, y\rangle, \tag{4}$$

в частности, *слабым n-интегральным решением* при $K(s) = \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}$.

По аналогии с классическим случаем каждое из решений, определяемых (3)–(4), ищется в форме $X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\, dW(s) =: S(t)\zeta + W_A(t), t \geq 0$, где $S = \{S(t),\ t \geq 0\}$ для уравнения (3) является полугруппой операторов решения соответствующей однородной задачи, для (4) — K-конволюционной полугруппой.

В случае полугруппы класса C_0 имеет место следующая теорема [1], [3]–[5]:

Теорема 1. *Пусть A — генератор полугруппы $S = \{S(t), t \geq 0\}$ класса C_0, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$, $\{W(t), t \geq 0\}$ — $\mathbb{H}$-значный Q-винеровский процесс и $\Psi(s) = S(t-s)B,\ t \geq s \geq 0$, удовлетворяет условию существования интеграла Ито: $\int_0^t \|\Psi(s)\|^2_{HS}\, ds < \infty$, $\|\Psi(s)\|^2_{HS} := \sum_{j=1}^{\infty} \|\Psi(s)Q^{\frac{1}{2}} e_j\|^2 = \operatorname{tr} \Psi(s)Q\Psi^*(s)$. Тогда для любого $\mathcal{F}_0$-измеримого $\zeta \in H$ случайный процесс $X(t) = S(t)\zeta + W_A(t),\ t \geq 0$, существует и является единственным слабым решением задачи (2).*

Слабое K-конволюционное и слабое n раз интегрированное решение также представимо в форме $X(t) = S(t)\zeta + W_A(t)$; здесь $\{S(t), t \geq 0\}$ — соответствующая полугруппа операторов — K-конволюционная или n раз интегрированная [3]–[5].

Теперь об обобщенных решениях; сначала о решениях в пространствах абстрактных распределений по временной переменной, затем о решениях в пространствах стохастических распределений. Пусть $\mathcal{D}'(H)$ — пространство H-значных распределений над пространством основных функций Л. Шварца $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'_0(H)$ — пространство H-значных распределений с носителем на $[0, \infty)$. В пространстве распределений корректно определен Q-белый шум $\mathbb{W} \in \mathcal{D}'_0(L_2(\Omega, \mathbb{H}))$ как обобщенная производная по t от Q-винеровского процесса, продолженного нулем при $t < 0$: $\langle \varphi, \mathbb{W}\rangle := -\int_0^\infty W(t)\varphi'(t)\, dt,\ \varphi \in \mathcal{D}$.

Задачу Коши (1), следуя [8], запишем в следующем виде:

$$P * X = \delta \otimes \zeta + B\mathbb{W}, \quad P := \delta' \otimes I - \delta \otimes A\,, \tag{5}$$

здесь $P \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}([\operatorname{dom} A], H))$, $[\operatorname{dom} A]$ — область определения оператора A с граф-нормой $\|x\|_{[\operatorname{dom} A]} = \|x\| + \|Ax\|$.

Распределение $G \in \mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(H, [\operatorname{dom} A]))$ называется *обратным относительно свертки с оператором P*, если $G * P = \delta \otimes I_{[\operatorname{dom} A]}, P * G = \delta \otimes I_H$, где $I_{[\operatorname{dom} A]}$ и I_H — единичные операторы в $[\operatorname{dom} A]$ и H, соответственно. В силу свойств распределения обратного к P относительно свертки, доказано (см., напр., [5]), что единственное решение задачи Коши (5) имеет вид

$$X = G * \delta\zeta + G * B\mathbb{W}, \quad X \in \mathcal{D}_0'([\mathrm{dom}\, A]) \cap \mathcal{D}_0'(L_2(\Omega, [\mathrm{dom}\, A])). \tag{6}$$

В частности, если A порождает полугруппу S класса C_0, то $G = \mathbf{S}$, где распределение $\mathbf{S}$ — это продолженные нулем при $t < 0$ операторы полугруппы S, и для X имеет место равенство $\langle \varphi, X\rangle = \int_0^\infty \varphi(t)S(t)\zeta\, dt - \int_0^\infty \varphi'(t)\, dt \int_0^t S(t-s)BW(s)\, ds\,, \varphi \in \mathcal{D}$. Если A порождает n раз интегрированную полугруппу, то

$$\langle \varphi, X\rangle = (-1)^n \left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)S(t)\zeta\, dt - \int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)\, dt \int_0^t S(t-s)BW(s)ds \right]. \tag{7}$$

Для решения задачи Коши с генератором K-конволюционной полугруппы S, в связи с необходимостью нахождения оператора, обратного к свертке с функцией $K(t), t \geq 0$, определяющей полугруппу, требуется более широкий класс распределений, так называемых ультрараспределений. Оператором, обратным относительно свертки с функцией $K(t)$, будет оператор бесконечного дифференцирования $P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right)$. В таком случае для решения обобщенной задачи Коши (5) в пространстве ультрараспределений $\mathcal{D}'_{0,M_n}(H)$ имеет место следующее равенство:

$$\langle \varphi, X\rangle = \int_0^\infty P^*_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)S(t)\zeta\, dt - \int_0^\infty P^*_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi'(t)\, dt \int_0^t S(t-s)B\, W(s)ds, \ \varphi \in \mathcal{D}_{M_n}. \tag{8}$$

В заключение этого раздела рассмотрим задачу (1) в пространствах абстрактных стохастических распределений $(\mathcal{S})^*(H)$ и решение, обобщенное по случайной переменной ω. Пусть $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$ — вероятностное пространство над пространством $\mathcal{S}'$ распределений Шварца медленного роста. По аналогии с тройкой Гельфанда $\mathcal{S} \subset L_2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}^*$, для гильбертова пространства $(L_2)(H) := L_2(\mathcal{S}', \mu; H)$ (см., напр., [7], [5]) строится цепочка пространств $(\mathcal{S})(H) \subset ... \subset (\mathcal{S}_p)(H) \subset ... \subset (L_2)(H) \subset ... \subset (\mathcal{S}_{-p})(H) \subset ... \subset (\mathcal{S})^*(H)$, где элементы пространств $(\mathcal{S}_p)(H)$ и $(\mathcal{S}_{-p})(H)$ определяются в соответствии с поведением (убыванием или возрастанием, соответственно) коэффициентов Фурье в разложении по стохастическим полиномам Эрмита $\mathbf{h}_\alpha(\omega) := \prod_{i=1}^{\infty} h_{\alpha_i}(\langle \xi_i, \omega\rangle), \omega \in \mathcal{S}', \alpha \in \mathcal{T}$, где $\xi_i(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}((i-1)!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} h_{i-1}(\sqrt{2}x)$ — функции Эрмита, $h_i(x) = (-1)^i e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^i}{dx^i} e^{-\frac{x^2}{2}}$ — полиномы Эрмиты, и $\mathcal{T}$ — множество всевозможных конечных мультииндексов.

$\mathbb{H}$-значный Q-винеровский процесс $\{W(t),\, t \geq 0\}$, определяемый в $\mathbb{H}$ рядом $W(t) = \sum_{k=1}^\infty \sigma_k \beta_k(t) e_k$, в пространствах стохастических распределений имеет вид:

$$W(t) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t \xi_i(s)\, ds (\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}} e_j) = \sum_{n=1}^\infty \sigma_{j(n)} \left(\int_0^t \xi_{i(n)}(s)\, ds e_{j(n)} \right) \mathbf{h}_{\epsilon_n}$$

и принадлежит $(L_2)(\mathbb{H})$. Кроме того, в этих пространствах определен Q-белый шум:

$$\mathbb{W}(t) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \xi_i(t)(\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}} e_j) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sigma_{j(n)} \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t)\mathbf{h}_{\epsilon_n} \in (\mathcal{S})^*(\mathbb{H}), \tag{9}$$

где $\mathbb{W}_{\epsilon_n}(t) := \xi_{i(n)}(t)e_{j(n)}$ и $n(i(n), j(n)) = n$, и, более того, сингулярный белый шум:

$$\mathbb{W}(t) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t)(\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}} e_j) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{W}_{\epsilon_n}(t)\mathbf{h}_{\epsilon_n} \in (\mathcal{S})^*(\mathbb{H}). \tag{10}$$

Обобщенное (по ω) решение задачи Коши (1) с $\mathbb{W}(t) \in (\mathcal{S})^*(\mathbb{H})$ строится следующим образом [5].

Теорема 2. *Пусть A — генератор полугруппы класса C_0 $\{S(t),\ t \geq 0\}$ в гильбертовом пространстве H; пусть $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$ и $\mathbb{W}$ — белый шум (Q-белый шум (9) или сингулярный белый шум (10)). Тогда для любого $\zeta = \sum\limits_{\alpha} \zeta_\alpha h_\alpha \in (domA)$*

$$X(t) = \sum_{\alpha} X_\alpha(t) h_\alpha \in (\mathcal{S})^*(H), \quad t \geq 0, \tag{11}$$

где

$$X_\alpha(t) = \begin{cases} S(t)\zeta_{\epsilon_n} + \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}_{\epsilon_n}(s)\,ds, & \alpha = \epsilon_n \\ S(t)\zeta_\alpha, & \alpha \neq \epsilon_n \end{cases},$$

является единственным решением задачи Коши (1) *в* $(\mathcal{S})^*(H)$.

Связь между слабыми и обобщенными по t решениями

В условиях существования каждого из решений докажем совпадение решений обобщенной задачи Коши (5) со слабыми решениями задачи Коши (2).

Теорема 3. *Пусть оператор A — генератор полугруппы $\{S(t),\ t \geq 0\}$ класса C_0. Тогда слабое решение является решением обобщенной задачи Коши (5), где Q-белый шум $\mathbb{W}$ является обобщенной производной Q-винеровского процесса W. Обратно, обобщенное решение, определяемое равенством (6), является слабым решением задачи Коши (2).*

Доказательство. Проверим, что слабое решение задачи Коши в смысле Ито, определяемое процессом $\{X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\,dW(s), t \geq 0\}$ и продолженное нулем при $t < 0$, удовлетворяет уравнению (5) для любой H-значной $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ζ. Для этого домножим X на функцию $\varphi \in \mathcal{D}$ и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности. Из равенства интегралов

$$\int\limits_0^\infty W(t)\varphi'(t)\,dt = \int\limits_0^\infty \varphi(t)\,dW(t) \tag{12}$$

(которое следует из обобщения формулы Ито на бесконечномерный случай) получаем, что для слабого решения (для п.в. ω) имеет место равенство:

$$\langle \varphi, X \rangle = \langle \varphi, S\zeta \rangle - \langle \varphi', \int_0^t S(t-s)B\,W(s)ds \rangle. \tag{13}$$

Равенство (13) может быть записано следующим образом

$$\langle \varphi, X \rangle = \langle \varphi, \mathbf{S}\zeta \rangle - \langle \varphi', \mathbf{S} * B\,W \rangle = \langle \varphi, \mathbf{S}\zeta \rangle + \langle \varphi, \mathbf{S} * B\,\mathbb{W} \rangle, \tag{14}$$

где (регулярное) распределение $\mathbf{S} \in \mathcal{D}_0'(\mathcal{L}(H, [\mathrm{dom}\, A]))$ получено продолжением нулем при $t < 0$ операторов полугруппы $S(t), t \geq 0$. Равенство (14) означает, что продолженный нулем при $t < 0$ процесс $\{X(t) = S(t)\zeta + W_A(t)$, дающий слабое решение задачи Коши в смысле Ито (2), совпадает с обобщенным решением задачи (5), определяемым равенством (6) при $G = \mathbf{S}$:

$$\langle \varphi, X \rangle = \int_0^\infty \varphi(t)S(t)\zeta\, dt - \int_0^\infty \varphi'(t)\, dt \int_0^t S(t-s)BW(s)\, ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}.$$

Обратно, если идти снизу вверх из равенств (14)–(13) следует, что обобщенное решение $\mathbf{S}\zeta + \mathbf{S} * B\,\mathbb{W}$ задачи (5) в случае генератора полугруппы класса C_0 совпадает со слабым решением $X(t) = S(t)\zeta + W_A(t), t \geq 0$, задачи (2). $\square$

Анализируя конструкцию построенных решений и проведенное исследование связи между обобщенным и слабым решениями, мы видим, что в случае генератора полугруппы операторов $\{S(t), t \geq 0\}$ класса C_0, образующих операторы решения соответствующей однородной задачи, сумма двух слагаемых $S(t)\zeta + W_A(t), t \geq 0$, является слабым решением для любой H-значной $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ζ за счет того, что не требуется применять оператор A ни к $S(t)\zeta$, ни к $W_A(t)$, — вместо этого оператор A^* применяется к элементам $y \in \mathrm{dom}\, A^*$. Обобщенным решением эта же сумма является за счет равенства (12), из которого следует, что действие оператора A "смягчается" действием основных функций φ. Более конкретно, в силу свойств операторов полугруппы $\{S(t), t \geq 0\}$ действие оператора A переходит в операцию дифференцирования по t, которая по свойствам обобщенного дифференцирования перебрасывается на основную (бесконечно дифференцируемую) функцию φ. Более того, за счет основных функций мы получаем обобщенное решение со значениями в $[\mathrm{dom}\, A]$.

Для случая n раз интегрированных и K-конволюционных полугрупп покажем, что обобщенное решение совпадает, соответственно, с n-й производной от n раз интегрального решения и некоторой ультрадифференциальной производной от K-конволюционного решения (при тех же условиях на ζ и W).

Теорема 4. *Пусть оператор A — генератор n раз интегрированной полугруппы S. Тогда n-ая обобщенная производная слабого n интегрального решения $X(t) =$*

$S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\,dW(s)$ является решением обобщенной задачи Коши (5). Обратно, решение обобщенной задачи (5) является n-ой производной слабого n интегрального решения.

Доказательство. Пусть $X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\,dW(s), t \geq 0$ — слабое n интегральное решение, продолженное нулем при $t < 0$, тогда

$$\langle \varphi, X^{(n)} \rangle = (-1)^n \Big[\int\limits_0^\infty \varphi^{(n)}(s) S(s)\zeta\,ds \ + \int\limits_0^\infty \varphi^{(n)}(t)\,dt \int\limits_0^t S(t-s)B\,dW(s) \Big] =$$

$$= (-1)^n \Big[\int\limits_0^\infty \varphi^{(n)}(t) S(t)\zeta\,dt - \int\limits_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)\,dt \int\limits_0^t S(t-s)BW(s)ds \Big],\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Следовательно, в силу равенства (7), распределение $X^{(n)}$ является обобщенным решением задачи (5) (для п.в. ω). Из полученных равенств, свойств свертки и определения белого шума следует и обратное утверждение. □

Теорема 5. *Пусть оператор A — генератор K-конволюционной полугруппы $\{S(t),\ t \geq 0\}$. Тогда процесс $P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) X(t), t \geq 0$, где X — слабое K-конволюционное решение (8), является решением обобщенной задачи Коши (5). Обратно, обобщенное решение задачи (5) является результатом действия оператора ультрадифференцирования $P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right)$ на слабое K-конволюционное решение.*

Доказательство. Пусть $X(t) = S(t)\zeta + \int_0^t S(t-s)B\,dW(s), t \geq 0$ — слабое K-конволюционное решение. Применим к процессу X, продолженному нулем при $t < 0$, оператор ультрадифференцирования $P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right)$. Получим

$$\langle \varphi, P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) X \rangle = \langle P^*_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi(t), X(t) \rangle = \int\limits_0^t P^*_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi(t) S(t)\zeta\,dt$$

$$- \int\limits_0^t P^*_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi'(t)\,dt \int\limits_0^t S(t-s)B\,W(s)ds. \tag{15}$$

Таким образом,в силу равенства (8), получаем, что $P_{ult}\left(\frac{d}{dt}\right) X$ является обобщенным решением задачи (5). Из равенств (15) следует и обратное утверждение. □

Связь между слабыми и обобщенными по ω решениями

Рассмотрим решение (11), полученное для стохастической задачи Коши в пространствах стохастических распределений $(\mathcal{S})^*(H)$ с оператором A — генератором полугруппы класса C_0, с Q-белым шумом $\mathbb{W}$ и начальным условием $\zeta \in (\operatorname{dom} A)$. Как было отмечено ранее, решение в этих пространствах может быть получено для задачи с сингулярным белым шумом, а не только Q-белым шумом, но, тем не менее, с начальным условием только из области определения оператора A. Покажем, что обобщенное по ω решение совпадает со слабым решением при условии существования каждого из них.

Теорема 6. *Пусть A — генератор полугруппы класса C_0, $\zeta \in (\operatorname{dom} A)$, и W — Q-винеровский процесс. Тогда обобщенное по ω решение и слабое решение совпадают.*

Доказательство. Решение, определяемое равенством (11), может быть записано в следующем виде: $X(t) = S\zeta + \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)\,ds$, $t \geq 0$, где

$$\int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)\,ds := \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t \Psi(s)e_j\xi_i(s)\,ds\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}}. \tag{16}$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом нами случае для доказательства теоремы достаточно показать, что интеграл, определяемый равенством (16), совпадает с интегралом Ито:

$$\int_0^t S(t-s)B\,dW(s) = \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)\,ds. \tag{17}$$

В первую очередь покажем, что сумма (16) принадлежит пространству $(L_2)(H) = L_2(\mathcal{S}', \mu; H)$. Этот результат следует из равенств:

$$\sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j^2 \left\| \int_0^t S(t-s)Be_j\zeta_i(s)\,ds \right\|_H^2 = \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \sum_{i\in\mathbb{N}} \left(\int_0^t \zeta_i(s)\,(\sigma_j S(t-s)Be_j,\, g_k)_H\,ds \right)^2$$
$$= \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \left\| \mathbf{1}_{[0,t]}(\sigma_j S(t-\cdot)Be_j,\, g_k)^2_{L_2(\mathbb{R})} \right\|$$
$$= \sum_{j,k\in\mathbb{N}} \int_0^t |(S(t-\cdot)BQ^{\frac{1}{2}}, g_k)_H|^2\,ds = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_0^t \sum_{k\in\mathbb{N}} (S(t-\cdot)BQ^{\frac{1}{2}}e_j,\, g_k)_H^2\,ds$$
$$= \int_0^t \sum_{j\in\mathbb{N}} \|S(t-s)BQ^{\frac{1}{2}}e_j\|_H^2\,ds = \int_0^t \|S(t-s)B\|_{\mathtt{HS}}^2\,ds.$$

Здесь $\{g_k\}$ — ортонормированный базис в H. Доказательство равенства интегралов (17) в пространстве $(L_2)(H)$ проведем для элементарных функций с последующим переходом к пределу. Покажем (17) на элементарных функциях $\Psi_n(s)$, приближающих $S(t-s)B$:

$$\int_0^t \Psi_n(s)\mathbb{W}(s)\,ds = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \int_0^t \Psi_n(s)e_j\xi_i(s)\,ds\mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}}$$

$$= \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \sum_{k=0}^{N-1} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \Psi_{nk}\xi_i(s)\, ds\, e_j \mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}} = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_{nk} \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \int_{t_{k-1}}^{t_k} \xi_i(s)\, ds\, e_j \mathbf{h}_{\epsilon_{n(i,j)}}$$

$$= \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_{nk}\, [W(t_k) - W(t_{k-1})] = \int_0^t \Psi_n(t)\, dW(t).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим (17). Отсюда следует, что обобщенное по ω и слабое решения совпадают при условии их существования. □

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00090.

Список литературы

[1] Da Prato G. Stochastic equations in infinite dimensions / G. Da Prato, J. Zabczyk // Cambridge Univ. Press, 1992.

[2] Gawarecki L. Stochastic differential equations in infinite dimensions / L. Gawarecki, V. Mandrekar // Springer-Verlag Berlin Heidellberg, 2011.

[3] Melnikova I.V. Abstract Stochastic Equations I. Classical and Distributional Solutions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, U.A. Anufrieva // J. of Math. Sciences 111(2), 3430–3465 (2002).

[4] Melnikova I.V. Abstract Stochastic Problems with Generators of Regularized Semigroups / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov // J. of Communications in Applied Analysis 13(2), 195–212 (2009).

[5] Альшанский М.А. Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач / М.А. Альшанский, И.В. Мельникова // Матем. сб., 202(11), 3–30 (2011).

[6] Holden H. Stochastic Partial differential equations / H. Holden, B. Oksendal, J. Uboe, T. Zhang // Birkhauser, Boston - Basel - Berlin, 1996.

[7] Melnikova I.V. Abstract Stochastic Equations II. Solutions in spaces of abstract stochastic distributions / I.V. Melnikova, A.I. Filinkov, M.A. Alshansky // J. of Math. Sciences 116(5), 3620–3656 (2003).

[8] Fattorini H.O. The Cauchy problem / H.O. Fattorini // Addison–Wesley, 1983.

[9] Melnikova I.V. Generalized solutions of differential-operator equations with singular white noise / I.V. Melnikova // Diffeerential Equations 49(4), 475–486 (2013).

Слабкі та узагальнені розв'язки абстрактної стохастичної задачі Коші

У роботі розглядаються три види розв'язків (слабкий, узагальнений за змінною часу та узагальнений за випадковою змінною) нескінченновимірної стохастичної задач Коші $X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t), t \geq 0,\ X(0) = \zeta$, де A, у загальному випадку є генератором регулярізованої півгрупи у деякому гільбертовому просторі H, а $\mathbb{W}$ — білий шум у деякому гільбертовому *просторі* $\mathbb{H}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$. *Досліджені властивості зазаначених розв'язків та зв'язки між ними.*

Ключові слова: білий шум, вінеровський процес, узагальнений, слабкий, регулярізований розв'язок, розподіл, півгрупа операторів.

Weak and generalized solutions of the abstract cauchy problem *We consider three types of solutions (weak, generalized with respect to* t *and with respect to a random variable) for the infinite dimensional stochastic Cauchy problem* $X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t), t \geq 0, X(0) = \zeta$, *with* A *being the generator of a regularized semigroup in a Hilbert space* H *and a white noise* $\mathbb{W}$ *in another Hilbert space* $\mathbb{H}$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{H}, H)$. *It is proved coincidence of the solutions under the conditions they exist.*

Keywords: white noise, Wiener process, generalized, weak, regularized solution, distribution, semigroup of operators.