Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 24 (63) № 1 (2011), с. 59–70.

УДК 514.12

А. И. Криворучко

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП ОТРАЖЕНИЙ

Пусть G – бесконечная группа отражений, каждое собственное подмножество множества всех линейных оболочек орбит направлений симметрий которой является независимым. Вычисляются базисные инварианты группы G. Получены условия невырожденности алгебры полиномиальных инвариантов этой группы, а также условия полноты группы G.

Ключевые слова: отражение, группа, инвариант, орбита.

Введение

Известно, что линейная классификация нецилиндрических алгебраических гиперповерхностей с бесконечным множеством гиперплоскостей симметрии в конечномерном вещественном векторном пространстве V сводится к задаче о строении групп, порожденных объединением поэлементно коммутирующих квадратичных множеств отражений [1], т.е. множеств $M_1, \ldots, M_k$, удовлетворяющих следующим условиям:

(А) Каждое M_i определяется некоторой лежащей в V плоскостью A_i и соответствующей квадратичной формой φ_i; это значит, что отражение относительно гиперплоскости P в направлении вектора d принадлежит M_i тогда и только тогда, когда P сопряжена d относительно φ_i, а $d \in A_i \setminus P$.

(Б) Если два отражения принадлежат $M_1 \cup \cdots \cup M_k$ и не коммутируют между собой, то некоторое M_i содержит оба эти отражения.

Как показано в работах А.Е.Залесского [2] и А.Е.Велесько [3], алгебра полиномиальных инвариантов группы, порожденной множеством $M_1 \cup \cdots \cup M_k$, может не быть свободной и не обязательно является конечно порожденной, даже если дополнительно предполагать, что $M_1, \ldots, M_k$ удовлетворяют условию

(В) Каждое собственное подмножество множества $\{A_1, \ldots, A_k\}$ независимо.

В связи с этим естественно возникает *постановка следующей задачи*:

Пусть G – группа, порожденная объединением множеств $M_1, \dots, M_k$, которые удовлетворяют условиям (A)–(B). Найти алгебру полиномиальных инвариантов этой группы. Получить условия, при которых G действует на некоторой нецилиндрической алгебраической гиперповерхности и содержит все отражения, сохраняющие каждый инвариант группы G.

Цель работы – решение указанных задач.

Основные результаты работы: В п. 1^o вычисляются образующие поля рациональных инвариантов и описывается алгебра полиномиальных инвариантов группы G. В п. 2^o показывается, что G может действовать на нецилиндрических алгебраических гиперповерхностях, а $M_1 \cup \dots \cup M_k$ совпадать с множеством всех отражений, сохраняющих каждый инвариант группы G.

1^o**.** Далее V – конечномерное вещественное векторное пространство; $\mathcal{P}$ – алгебра всех полиномиальных функций на пространстве V, $\mathcal{Q}$ – поле всех рациональных функций на V; $M_1, \dots, M_k$ – квадратичные множества отражений, удовлетворяющие указанным выше условиям (A)–(B), $k > 2$, $M = M_1 \cup \dots \cup M_k$, G – группа, порожденная множеством M; $\mathcal{P}^G$ – алгебра всех полиномиальных инвариантов группы G, $\mathcal{Q}^G$ – поле всех рациональных инвариантов G.

Зафиксируем в V базис

$$(a_{i,j},\, b_{i,l},\, c_q \,:\, 1 \le i \le k;\, 1 \le j \le m_i\,;\, 1 \le l \le s_i;\; 1 \le q \le m) \tag{1}$$

с соответствующим двойственным базисом

$$(x_{i,j},\, y_{i,l},\, z_q \,:\, 1 \le i \le k;\, 1 \le j \le m_i\,;\, 1 \le l \le s_i;\; 1 \le q \le m).$$

На основании леммы, доказанной в [4], выбирая соответствующим образом значения параметров m_i, s_i, m и s, мы можем (и будем) считать, что

$$A_1 = \langle a_{1,j},\; b_{2,p} + \dots + b_{k,p},\; b_{1,l} \,:\, 1 \le j \le m_1;\; 1 \le p \le s;\; 1 \le l \le s_1 \rangle,$$

$$\varphi_1 = \sum_j \varepsilon_{1,j}\, x_{1,j}^2 + 2 \sum_l y_{1,l}\, \xi_{1,\,s+l} - 2 \sum_{p \le s} \xi_{1,p}\, y_{2,p},$$

$$A_r = \langle a_{r,j},\, b_{r,l} \,:\, 1 \le j \le m_r;\; 1 \le l \le s_r \rangle, \quad \varphi_r = \sum_j \varepsilon_{r,j}\, x_{r,j}^2 + 2 \sum_l y_{r,l}\, \xi_{r,l}$$

$$(r = 2, \dots, k),$$

где $\xi_{i,l} \in \langle z_1, \dots, z_m \rangle$, $\varepsilon_{i,j} \in \{-1;\, 1\}$ для всех допустимых значений i, j, l.

Базис, удовлетворяющий всем перечисленным выше условиям, будем называть каноническим базисом множества M (определяющего множества $M_1, \dots, M_k$ однозначно с точностью до изменения их нумерации).

Полагаем

$$h_1 = \sum_j \varepsilon_{1,j}\, x_{1,j}^2 + 2 \sum_l \xi_{1,\,s+l}\, y_{1,l}, \quad h_2 = \varphi_2,\; \dots,\; h_k = \varphi_k,$$

а если $s > 0$, то

$$\Delta = \begin{bmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{k,1} & \dots & \xi_{k,s} \end{bmatrix}, \quad K_i = \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,i} \\ \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i,1} & \dots & \xi_{i,i} \end{vmatrix}, \quad H_{i,j} = \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,i} & h_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i,1} & \dots & \xi_{i,i} & h_i \\ \xi_{j,1} & \dots & \xi_{j,i} & h_j \end{vmatrix}$$

$$(i = 1, \dots, \min\{k;\, s\};\ j = 1, \dots, k).$$

Пусть ρ – ранг матрицы Δ над полем $\mathcal{Q}$. Этот ранг не изменяется при переходе от одного канонического базиса к другому каноническому базису множества M. Поэтому если $\rho > 0$, то можно считать, что $K_\rho \neq 0$.

Теорема 1. (a) *Если* $\rho = 0$ *или* $s = 0$, *то*

$$\mathcal{Q}^G = \mathbb{R}(h_1, \dots, h_k, z_1, \dots, z_m), \quad \mathcal{P}^G = \mathbb{R}[h_1, \dots, h_k, z_1, \dots, z_m].$$

(b) *Если* $0 < \rho < k$, *и* $K_\rho \neq 0$, *то*

$$\mathcal{Q}^G = \mathbb{R}(H_{\rho,\rho+1}, \dots, H_{\rho,k}, z_1, \dots, z_m),$$

$$\mathcal{P}^G = \mathcal{P} \cap \mathbb{R}[H_{\rho,\rho+1}\, K_\rho^{-1}, \dots, H_{\rho,k}\, K_\rho^{-1}, z_1, \dots, z_m].$$

(c) *Если* $\rho = k$, *то* $\quad \mathcal{Q}^G = \mathbb{R}(z_1, \dots, z_m)$, $\ \mathcal{P}^G = \mathbb{R}[z_1, \dots, z_m]$.

Доказательство. Далее $\bar{z}$ обозначает кортеж координатных функций $z_1, \dots, z_m$. Эти функции – инварианты группы G.

Пусть G' – подгруппа группы G, порожденная объединением множеств $M_2, \dots, M_k$ и содержащегося в M_1 квадратичного множества отражений M_1', определяемого плоскостью $\langle a_{1,j} \,:\, j \geq 1\rangle \oplus \langle b_{1,l} \,:\, l \geq 1\rangle$ и квадратичной формой h_1. Из [5] следует, что

$$\mathcal{Q}^{G'} = \mathbb{R}(h_1, \dots, h_k, \bar{z}), \quad \mathcal{P}^{G'} = \mathbb{R}[h_1, \dots, h_k, \bar{z}]. \tag{2}$$

При этом

$$\mathcal{Q}^G \subseteq \mathcal{Q}^{G'}, \quad \mathcal{P}^G \subseteq \mathcal{P}^{G'}. \tag{3}$$

Пусть отражение R – принадлежащее M_1 отражение относительно гиперплоскости P в направлении вектора d. Тогда

$$d = \sum_j \alpha_j\, a_{1,j} - \sum_{p \leq s} \sum_{i > 1} \gamma_p\, b_{i,p} + \sum_l \beta_l\, b_{1,l},$$

$P = \ker \Xi$, где

$$\Xi = \sum_j \alpha_j\, \varepsilon_{1,j}\, x_{1,j} + \sum_{p \leq s} \gamma_p\, \xi_{1,p} + \sum_{l \geq 1} \beta_l\, \xi_{1,s+l}.$$

Положим

$$\sigma = \Xi(d).$$

Для каждого $i = 1, \dots, k$, действуя отражением R на многочлен h_i, получаем

$$h_i \cdot R = h_i + 4\,\sigma^{-1}\, \Xi \sum_{p \leq s} \gamma_p\, \xi_{i,p}. \tag{4}$$

В самом деле, форма φ_1 инвариантна относительно R и поэтому

$$h_1 \cdot R = \Bigl(\varphi_1 + 2\sum_{p\le s} y_{2,p}\,\xi_{1,p}\Bigr)\cdot R = \varphi_1 + 2\sum_{p\le s}(y_{2,p}\cdot R)\,\xi_{1,p} =$$

$$= h_1 - 2\sum_{p\le s} y_{2,p}\,\xi_{1,p} + 2\sum_{p\le s}(y_{2,p} + 2\,\sigma^{-1}\,\gamma_p\,\Xi)\,\xi_{1,p},$$

и получаем (4) для $i=1$; если же $i \ge 2$, то

$$h_i \cdot R = \sum_j \varepsilon_{i,j}\,x_{i,j}^2 + 2\sum_{p\le s}(y_{i,p} + 2\,\sigma^{-1}\,\gamma_p\,\Xi)\,\xi_{i,p} + 2\sum_{l>s}\xi_{i,l}\,y_{i,l},$$

и опять получаем (4).

Из (2)–(4) следует утверждение (a).

Пусть теперь $s>0$, $\rho>0$. Тогда из (4) следует, что для любых i и j

$$H_{i,j}\cdot R = \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,i} & h_1\cdot R \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i,1} & \dots & \xi_{i,i} & h_i\cdot R \\ \xi_{j,1} & \dots & \xi_{j,i} & h_j\cdot R \end{vmatrix} = H_{i,j} + 4\,\sigma^{-1}\,\Xi\sum_{p\le s}\gamma_p \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \dots & \xi_{1,i} & \xi_{1,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{i,1} & \dots & \xi_{i,i} & \xi_{i,p} \\ \xi_{j,1} & \dots & \xi_{j,i} & \xi_{j,p} \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Поэтому $H_{\rho,\,\rho+1},\dots,\,H_{\rho,\,k}$ – инварианты группы G.

В силу (2) и (3), остается доказать следующее:

Пусть $1\le r\le\rho$, $K_r\ne 0$, $g = f(h_1,\dots,\,h_k,\,\bar z)\in \mathcal{Q}^G\cap\mathbb{R}(h_1,\dots,\,h_k,\,\bar z)$;
если $r<k$, *то*

$$g = f(0,\dots,0,\,H_{r,\,r+1}\,K_r^{-1},\dots,\,H_{r,\,k}\,K_r^{-1},\,\bar z); \qquad (6)$$

если $r=k$, *то*

$$g = f(0,\dots,\,0,\,\bar z). \qquad (7)$$

Докажем это индукцией по r.

Для каждых $p\in\{1,\dots,\,s\}$ и $t\in\mathbb{R}$ пусть $T(p,t)$ – отражение относительно гиперплоскости $\varepsilon_{11}\,x_{11} + t\,\xi_{1,p} = 0$ в направлении $a_{1,1} - t(b_{2,p}+\dots+b_{k,p})$.

Допустим, что $r=1$, $K_1 = \xi_{1,1}\ne 0$. Тогда

$$g = f(h_1\cdot T(1,t),\dots,\,h_k\cdot T(1,t),\,\bar z) \qquad (8)$$

в силу $T(1,t)$-инвариантности g. Положим

$$t' = 4\,t\,(x_{1,1} + t\,\varepsilon_{1,1}^{-1}\,\xi_{1,1}).$$

Из (4) имеем:

$$h_i\cdot T(1,t) = h_i + t'\xi_{i,1} \quad (i=1,\dots,\,k). \qquad (9)$$

При этом элемент t' поля $\mathcal{Q}(t)$ трансцендентен над $\mathcal{Q}$, т.к. $t'\notin\mathcal{Q}$. Значит, из (8) и (9) следует, что в поле $\mathcal{Q}(t)$ выполняется равенство

$$g = f(h_1 + t\,\xi_{1,1},\dots,\,h_k + t\,\xi_{k,1},\,\bar z).$$

Из этого равенства при $t = -h_1\,\xi_{1,1}^{-1}$ получим (6) для $r = 1$.

Предположим, что (6) доказано для $r = l < k$. Пусть $r = l+1$ и $K_r \neq 0$. За счет изменения нумерации базисных векторов, при котором меняются местами первые $l+1$ столбцов матрицы Δ и, следовательно, сохраняются функции $H_{l+1,\,l+2}\,K_{l+1}^{-1}, \ldots,\ H_{l+1,\,k}\,K_{l+1}^{-1}$ (хотя не обязательно сохраняются $H_{l,\,l+1}, \ldots,\ H_{l,\,k}$ и K_l), можно считать, что $K_l \neq 0$. Тогда, по индуктивному предположению,

$$g = f(0, \ldots, 0,\ H_{l,\,l+1}\,K_l^{-1}, \ldots,\ H_{l,\,k}\,K_l^{-1},\ \bar z).$$

Отсюда и из $T(l+1,t)$-инвариантности g получаем

$$g = f(0, \ldots, 0,\ (H_{l,\,l+1}\,K_l^{-1}) \cdot T(l+1,\,t), \ldots,\ (H_{l,\,k}\,K_l^{-1}) \cdot T(l+1,\,t),\ \bar z). \tag{10}$$

Для каждого $j \in \{l+1, \ldots, k\}$, полагая

$$K_{l,j} = \begin{vmatrix} \xi_{1,1} & \ldots & \xi_{1,l} & \xi_{1,\,l+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{l,1} & \ldots & \xi_{l,l} & \xi_{l,\,l+1} \\ \xi_{j,1} & \ldots & \xi_{j,l} & \xi_{j,\,l+1} \end{vmatrix},$$

из (5) имеем:

$$H_{l,j} \cdot T(l+1,\,t) = H_{l,j} + 4\,t\,(x_{1,1} + t\,\varepsilon_{1,1}^{-1}\,\xi_{1,1})\,K_{l,j}.$$

Используя это, как и в случае $r = 1$, из (10) в поле $\mathcal{Q}(t)$ получаем:

$$g = f(0, \ldots, 0,\ (H_{l,\,l+1} + t\,K_{l,\,l+1})\,K_l^{-1}, \ldots,\ (H_{l,\,k} + t\,K_{l,k})\,K_l^{-1},\ \bar z).$$

Из этого равенства при $t = -H_{l,\,l+1}\,K_{l+1}^{-1}$, учитывая, что $K_{l,\,l+1} = K_{l+1}$, имеем:

$$\begin{aligned} g = f(0, \ldots, 0,\ 0,\ &(H_{l,\,l+2}\,K_{l,\,l+1} - H_{l,\,l+1}\,K_{l,\,l+2})\,K_l^{-1}\,K_{l+1}^{-1}, \ldots \\ &\ldots,\ (H_{l,k}\,K_{l,\,l+1} - H_{l,\,l+1}\,K_{l,k})\,K_l^{-1}\,K_{l+1}^{-1},\ \bar z). \end{aligned} \tag{11}$$

По детерминантному тождеству Сильвестра,

$$H_{l,j}\,K_{l,\,l+1} - H_{l,\,l+1}\,K_{l,j} = H_{l+1,\,j}\,K_l \quad (j = l+2, \ldots, k).$$

Отсюда и из (11), при $r = l+1 < k$ получаем (6), а при $r = l+1 = k$ получаем (7).

2^o. Пусть $X \subseteq \mathcal{Q}$. Назовем X вырожденным, если для некоторых принадлежащих V^* функций $y_1, \ldots, y_p$, число которых меньше $\dim V$, $X \subseteq \mathbb{R}(y_1, \ldots, y_p)$. В противном случае X назовем невырожденным.

Если для некоторого $i \leq k$ функции $\xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,s_i}$ линейно зависимы, то группа, порожденная множеством M_i, содержит сдвиги. В этом случае поле $\mathcal{Q}^G$ является вырожденным, и всякая неприводимая алгебраическая G-инвариантная поверхность цилиндрична.

Укажем условия, при которых G действует на нецилиндрических алгебраических поверхностях. При этом будем далее предполагать, что $\{M_1, \ldots, M_k\}$ – семейство *основного типа.* Это означает, что $M_1, \ldots, M_k$ удовлетворяют указанным выше условиям (A)–(B), для каждого i функции $\xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,s_i}$ линейно независимы, а строки матрицы Δ пропорциональны друг другу. Изучению строения группы G (называемой группой *основного типа*), для которой $\{M_1, \ldots, M_k\}$ – семейство основного типа, посвящен целый ряд работ (см., например, обзор [6] и список литературы из этого обзора).

Не нарушая общности, будем считать, что

$$\xi_{1,j} = \cdots = \xi_{k,j} \quad (j = 1, \ldots, s). \tag{12}$$

Из теоремы 1 следует, что в этом случае

$$\mathcal{Q}^G = \mathbb{R}(h_1 - h_2, \ldots, h_1 - h_k, \bar{z}), \quad \mathcal{P}^G = \mathbb{R}[h_1 - h_2, \ldots, h_1 - h_k, \bar{z}]. \tag{13}$$

Поэтому вырожденность $\mathcal{Q}^G$ эквивалентна вырожденности $\mathcal{P}^G$.

Положим

$$\Lambda = \langle \xi_{1,1}, \ldots, \xi_{1,s} \rangle, \quad \Lambda_i = \langle x_{i,1}, \ldots, x_{i,m_i}, \xi_{i,1}, \ldots, \xi_{i,s_i} \rangle \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Очевидно, что $\Lambda \subseteq \Lambda_1 \cap \cdots \cap \Lambda_k$.

Теорема 2. *G имеет невырожденную алгебру полиномиальных инвариантов тогда и только тогда, когда*

$$\Lambda_1 \cap \cdots \cap \Lambda_k = \Lambda.$$

Доказательство. Если $v \in V$, $f \in \mathcal{P}$, то f'_v будет обозначать производную функции f по вектору v.

Из (13) следует, что вырожденность $\mathcal{P}^G$ равносильна существованию ненулевого вектора

$$d = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\, a_{i,j} + \sum_{i,l} \beta_{i,l}\, b_{i,l}, \tag{14}$$

для которого

$$(h_1 - h_2)'_d = \cdots = (h_1 - h_k)'_d = 0. \tag{15}$$

При этом если выполнено (14), то (15) равносильно системе равенств

$$\alpha_{i,j} = 0 \quad (i = 1, \ldots, k; \;\; j = 1, \ldots, m_i), \tag{16}$$

$$\sum_l \beta_{1,l}\, \xi_{1,\,s+l} = \sum_l \beta_{i,l}\, \xi_{i,l} \quad (i = 2, \ldots, k). \tag{17}$$

Допустим, что существует ненулевой вектор d, удовлетворяющий условиям (14) и (15). Но тогда $s_1 > s$ и найдется l, для которого $\beta_{1,l} \neq 0$. Отсюда следует, что

$$\sum_l \beta_{1,l}\, \xi_{1,\,s+l} \in (\Lambda_1 \cap \cdots \cap \Lambda_k) \setminus \Lambda.$$

Обратно, пусть $\xi \in (\Lambda_1 \cap \cdots \cap \Lambda_k) \setminus \Lambda$. Тогда

$$\xi = \sum_{i \le s} \gamma_i\, \xi_{1,i} + \sum_l \beta_{1,l}\, \xi_{1,\,s+l} = \sum_{i \le s} \gamma_{j,i}\, \xi_{1,i} + \sum_{l > s} \beta_{j,l}\, \xi_{j,l} \quad (j = 2, \ldots, k).$$

Полагая
$$\beta_{j,i} = \gamma_{j,i} - \gamma_i \quad (j = 2, \ldots, k; \;\; i = 1, \ldots, s),$$
получаем ненулевой вектор d, для которого выполняются равенства (14)–(17).

Замечание. Если G имеет вырожденную алгебру инвариантов, то найдется ненулевой вектор d, удовлетворяющий следующему условию: *каждый инвариант группы G сохраняется любым отражением в направлении d*. Если это условие выполнено, то из доказательства теоремы 2 следует, что $d \in \langle b_{i,j} \;:\; i \geq 1; \; j \geq 1 \rangle$ и поэтому d сохраняется каждым отражением, принадлежащим M; значит, d – G-инвариантный вектор. Но если R – отражение в направлении d, то $R(d) = -d$, и $R \notin G$.

Отметим также, что множество всех отражений в направлении фиксированного вектора не может быть подмножеством объединения каких-либо поэлементно коммутирующих квадратичных множеств отражений.

Для каждого $i \leq k$ пусть $\mu_i : A_i \to \Lambda_i$ – линейный изоморфизм, сопоставляющий каждому вектору, принадлежащему A_i, линейную форму, φ_i-сопряженную этому вектору,
$$\Lambda'_i = \bigcap_{j \neq i} \Lambda_j;$$
если $\eta \in \Lambda'_i$, $\xi \in \Lambda_i$, $\xi(\mu_i^{-1}(\xi)) \neq 0$ (т.е. если M_i содержит отражение относительно гиперплоскости $\ker(\xi)$), и
$$\nu_i(\xi, \eta) = \mu_i^{-1}(\xi) + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta), \tag{18}$$
то $(\xi - \eta)(\nu_i(\xi, \eta)) = \xi(\mu_i^{-1}(\xi)) \neq 0$ и поэтому определено отражение $T_i[\xi, \eta]$ относительно гиперплоскости $\ker(\xi - \eta)$ в направлении вектора $\nu_i(\xi, \eta)$. Положим
$$\widetilde{M}_i = \{T_i[\xi, \eta] \;:\; \eta \in \Lambda'_i, \; \xi \in \Lambda_i, \; \xi(\mu_i^{-1}(\xi)) \neq 0\}, \quad \widetilde{M} = \widetilde{M}_1 \cup \cdots \cup \widetilde{M}_k.$$

Теорема 3. *Пусть G имеет невырожденную алгебру полиномиальных инвариантов. Тогда $\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_k$ – квадратичные множества отражений. При этом $\{\widetilde{M}_1, \ldots, \widetilde{M}_k\}$ – семейство основного типа, $\widetilde{M}$ – множество всех отражений, сохраняющих каждый инвариант группы G.*

Доказательство. 1. Отметим сначала следующее свойство согласованости отображений $\mu_1, \ldots, \mu_k$:
$$\Big(\forall\, (a_1, \ldots, a_k) \in \prod_i A_i\Big) \; \Big(\Big(\sum_i a_i = 0\Big) \iff \big(\mu_1(a_1) = \cdots = \mu_k(a_k)\big)\Big). \tag{19}$$

В самом деле, если $(a_1, \ldots, a_k) \in A_1 \times \cdots \times A_k$ и $a_1 + \cdots + a_k = 0$, то используя разложение векторов $a_1, \ldots, a_k$ по базисным векторам (1), получаем, что найдутся вещественные $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, для которых
$$a_i = \gamma_1 \, b_{i,1} + \cdots + \gamma_s \, b_{i,s} \quad (i = 2, \ldots, k). \tag{20}$$

Применяя теперь равенства (12) и

$$\xi_{1,p} = \mu_1(b_{2,p} + \dots + b_{k,p}) \quad (p = 1, \dots, s), \tag{21}$$

получаем, что $\mu_1(a_1) = \dots = \mu_k(a_k)$.

Обратно, если $\mu_1(a_1) = \dots = \mu_k(a_k) = \omega$, то $\omega \in \Lambda_1 \cap \dots \cap \Lambda_k$, и, по теореме 2, найдутся вещественные $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, для которых $\omega = \gamma_1 \xi_{1,1} + \dots + \gamma_s \xi_{1,s}$. Теперь из (12), (21) и инъективности отображений $\mu_1, \dots, \mu_k$ получаем равенства (20) и равенство $-a_1 = a_2 + \dots + a_k$.

2. Покажем, что $\widetilde{M}_1, \dots, \widetilde{M}_k$ – квадратичные множества отражений.

Пусть $i \in \{1, \dots, k\}$,

$$\nu_i : \Lambda_i \times \Lambda_i' \to V$$

– линейное отображение, определяемое равенством (18); положим

$$\widetilde{A}_i = \nu_i(\Lambda_i \times \Lambda_i').$$

Если (ξ, η) и (ξ', η') принадлежат $\Lambda_i \times \Lambda_i'$ и $\xi - \eta = \xi' - \eta'$, то

$$\xi' - \xi = \eta' - \eta = \omega \in \Lambda_i \cap \Lambda_i' = \Lambda,$$

$$\nu_i(\xi', \eta') = \nu_i(\xi + \omega, \eta + \omega) = \mu_i^{-1}(\xi + \eta) + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta + \omega) =$$

$$= \mu_i^{-1}(\xi) + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta) + \sum_{l} \mu_l^{-1}(\omega) = \nu_i(\xi, \eta),$$

т.к. $\mu_1^{-1}(\omega) + \dots + \mu_k^{-1}(\omega) = 0$ в силу (19).

Обратно, если $\nu_i(\xi, \eta) = \nu_i(\xi', \eta')$, то

$$\mu_i^{-1}(\xi - \xi') + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\nu - \nu') = 0,$$

и из (19) следует, что $\xi - \xi' = \nu - \nu'$, т.е. $\xi - \eta = \xi' - \eta'$.

Таким образом,

$$(\forall (\xi, \eta) \in \Lambda_i \times \Lambda_i') (\forall (\xi', \eta') \in \Lambda_i \times \Lambda_i') \big((\nu_i(\xi, \eta) = \nu_i(\xi', \eta')) \iff (\xi - \eta = \xi' - \eta')\big).$$

Отсюда следует, что равенство $\widetilde{\mu}_i(\nu_i(\xi, \eta)) = \xi - \eta$ однозначно определяет линейный изоморфизм

$$\widetilde{\mu}_i : \widetilde{A}_i \to \Lambda_i + \Lambda_i'.$$

При этом если (ξ, η) и (ξ', η') принадлежат $\Lambda_i \times \Lambda_i'$, то

$$(\xi - \eta)\Big(\mu_i^{-1}(\xi') + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta')\Big) = \xi(\mu_i^{-1}(\xi')) =$$

$$= \xi'(\mu_i^{-1}(\xi)) = (\xi' - \eta')\Big(\mu_i^{-1}(\xi) + \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta)\Big).$$

Значит, для любых a и a', принадлежащих $\widetilde{A}_i$, $\widetilde{\mu}_i(a)(a') = \widetilde{\mu}_i(a')(a)$. Поэтому плоскость $\widetilde{A}_i$ и отображение $\widetilde{\mu}_i$ определяют квадратичное множество отражений, содержащее отражение R относительно гиперплоскости P в направлении d тогда и только тогда, когда $P = \ker(\widetilde{\mu}_i(d))$ и $d \in \widetilde{A}_i \setminus P$. Это равносильно условию $R \in \widetilde{M}_i$.

3. $\widetilde{M}$ – множество всех отражений, сохраняющих каждый инвариант группы G.

В самом деле, пусть

$$d = \sum_{i,j} \alpha_{i,j}\, a_{i,j} + \sum_{i,l} \beta_{i,l}\, b_{i,l} + \sum_q \gamma_q\, c_q \in V, \quad \theta \in V^*, \quad \theta(d) \neq 0, \quad P = \ker(\theta),$$

R – и отражение относительно P в направлении d. Это отражение сохраняет каждый инвариант группы G в том и только том случае, если

$$(z_q)'_d \parallel \theta \quad (q = 1, \ldots, m), \qquad (h_1 - h_i)'_d \parallel \theta \quad (i = 2, \ldots, k),$$

т.е. если

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = 0, \tag{22}$$

$$\sum_j \alpha_{i,j}\, \varepsilon_{i,j}\, x_{i,j} - \sum_j \alpha_{1,j}\, \varepsilon_{1,j}\, x_{1,j} + \sum_l \beta_{i,l}\, \xi_{i,l} - \sum_l \beta_{1,l}\, \xi_{1,\, s+l} \ \parallel \theta \qquad (i = 2, \ldots, k). \tag{23}$$

Из (22) и невырожденности $\mathcal{P}^G$ следует, что найдется натуральное число $\tau > 1$, для которого $(h_1 - h_\tau)'_d$ – ненулевая линейная форма.

3.1. Допустим, что R сохраняет все инварианты группы G. Тогда найдется $\alpha_{p,\lambda}$, не равное 0; в самом деле, если это не так, то из (23) при $i = \tau$ следует, что θ принадлежит $\langle z_1, \ldots, z_m \rangle$, а тогда, в силу (22), $\theta(d) = 0$.

Если $p = 1$, то, в силу (23) при $i = 2$, можно считать, что

$$\theta = \sum_j \alpha_{1,j}\, \varepsilon_{1,j}\, x_{1,j} - \sum_j \alpha_{2,j}\, \varepsilon_{2,j}\, x_{2,j} + \sum_l \beta_{1,l}\, \xi_{1,\, s+l} - \sum_l \beta_{2,l}\, \xi_{2,l}.$$

Отсюда и из (23) при $i > 2$ получаем:

$$\alpha_{r,j} = 0 \quad (r = 2, \ldots, k;\ j = 1, \ldots, m_r),$$

и $\theta = \xi - \eta$, где

$$\xi = \sum_j \alpha_{1,j}\, \varepsilon_{1,j}\, x_{1,j} + \sum_l \beta_{1,l}\, \xi_{1,\, s+l}, \tag{24}$$

$$\eta = \sum_l \beta_{r,l}\, \xi_{r,l} \quad (r = 2, \ldots, k). \tag{25}$$

Значит, $\xi \in \Lambda_1$, $\eta \in \Lambda'_1$, $R = T_1[\xi, \eta] \in \widetilde{M}_1$.

Если же $p > 1$, то, в силу (23) при $i = p$, можно считать, что

$$\theta = \sum_j \alpha_{p,j}\, \varepsilon_{p,j}\, x_{p,j} - \sum_j \alpha_{1,j}\, \varepsilon_{1,j}\, x_{1,j} + \sum_l \beta_{p,l}\, \xi_{p,l} - \sum_l \beta_{1,l}\, \xi_{1,\, s+l}.$$

Отсюда и из (23) при $i \neq p$ получаем:

$$\alpha_{r,j} = 0 \quad (r = 1, \ldots, k;\ r \neq p;\ j = 1, \ldots, m_r),$$

и $\theta = \xi - \eta$, где

$$\xi = \sum_j \alpha_{p,j}\, \varepsilon_{p,j}\, x_{p,j} + \sum_l \beta_{p,l}\, \xi_{p,l}, \tag{26}$$

$$\eta = \sum_l \beta_{1,l}\, \xi_{1,\,s+l} = \sum_l \beta_{r,l}\, \xi_{r,l} \quad (r = 2, \ldots, k;\ r \neq p). \tag{27}$$

Значит, $\xi \in \Lambda_p$, $\eta \in \Lambda'_p$ и $R = T_p[\xi, \eta] \in \widetilde{M}_p$.

3.2. Покажем, что если $R \in \widetilde{M}$, то R сохраняет все инварианты группы G.

Пусть $p \in \{1, \ldots, k\}$, $R \in \widetilde{M}_p$, $\xi' \in \Lambda_p$, $\eta' \in \Lambda'_p$, $P = \ker(\xi' - \eta')$, $d = \nu_p(\xi', \eta')$.

Если $p = 1$, то $\xi' = \xi + \xi_0$, где $\xi_0 \in \Lambda$, а ξ удовлетворяет равенству (24); поэтому полагая $\eta = \eta' - \xi_0$, получаем: η принадлежит Λ'_1 и поэтому удовлетворяет равенствам (25).

Если же $p > 1$, то $\eta' = \eta + \eta_0$, где $\eta \in \langle \xi_{1,\,s+l} \,:\, l \geq 1 \rangle$, $\eta_0 \in \Lambda$. Следовательно, η принадлежит Λ_p и поэтому удовлетворяет равенствам (27). Полагая $\xi = \xi' - \eta_0$, имеем: ξ принадлежит Λ_p и поэтому удовлетворяет равенствам (26).

Таким образом, для любого $p \geq 1$ получаем: $\xi' - \eta' = \xi - \eta$. Поэтому $d = \nu_p(\xi, \eta)$. Но при $p = 1$ из (24) и (25), а при $p > 1$ из (26) и (27) следует, что

$$\nu_p(\xi, \eta) = \sum_j \alpha_{p,j}\, a_{p,j} + \sum_{i,l} \beta_{i,l}\, b_{i,l}.$$

Отсюда $(z_1)'_d = \cdots = (z_m)'_d = 0$. При этом если $p = 1$, то из (24) и (25) имеем:

$$(h_1 - h_2)'_d = \cdots = (h_1 - h_k)'_d = 2\,(\xi - \eta),$$

а если $p > 1$, то из (26) и (27) следует, что

$$(h_1 - h_p)'_d = 2\,(\xi - \eta), \qquad (h_1 - h_i)'_d = 0 \quad (i = 2, \ldots, k;\ i \neq p).$$

Значит, R сохраняет все инварианты группы G.

4. Проверим, что $\widetilde{\mu}_1, \ldots, \widetilde{\mu}_k$ удовлетворяют условию согласованности, аналогичному условию (19) согласованности отображений $\mu_1, \ldots, \mu_k$. Пусть

$$\xi_i \in \Lambda_i, \quad \eta_i \in \Lambda'_i, \quad v_i = \nu_i(\xi_i, \eta_i), \quad \omega_i = \xi_i + \sum_{j \neq i} \eta_j \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Тогда

$$\sum_i v_i = \sum_i \mu_i^{-1}(\xi_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \mu_j^{-1}(\eta_i) =$$

$$= \sum_i \mu_i^{-1}(\xi_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} \mu_i^{-1}(\eta_j) = \sum_i \mu_i^{-1}(\omega_i).$$

В силу (19), $v_1 + \cdots + v_k = 0$ тогда и только тогда, когда $\omega_1 = \cdots = \omega_k$. Но для любых i и j

$$\omega_i = \omega_j \iff \xi_i + \eta_j = \xi_j + \eta_i \iff \xi_i - \eta_i = \xi_j - \eta_j \iff \widetilde{\mu}_i(v_i) = \widetilde{\mu}_j(v_j).$$

Поэтому

$$v_1 + \cdots + v_k = 0 \iff \widetilde{\mu}_1(v_1) = \cdots = \widetilde{\mu}_k(v_k). \tag{28}$$

5. Каждое собственное подмножество множества $\{\widetilde{A}_1, \ldots, \widetilde{A}_k\}$ независимо. В самом деле, пусть $(v_1, \ldots, v_k) \in \widetilde{A}_1 \times \cdots \times \widetilde{A}_k$, $v_1 + \cdots + v_k = 0$ и при этом найдется i, для которого $v_i = 0$. Тогда $\widetilde{\mu}_i(v_i) = 0$ и из (28) следует, что $\widetilde{\mu}_1(v_1) = \cdots = \widetilde{\mu}_k(v_k) = 0$. Значит, $v_1 = \cdots = v_k = 0$. Теорема доказана.

Следствие. $M_1 \cup \cdots \cup M_k$ *– множество всех отражений, сохраняюших каждый инвариант группы G, тогда и только тогда, когда* $\Lambda'_1 = \cdots = \Lambda'_k = \Lambda$.

Выводы

В работе продолжено исследование строения бесконечной группы G, порожденной объединением квадратичных множеств отражений. Построены базисные рациональные инварианты группы G в том случае, когда каждое собственное подмножество множества всех линейных оболочек G-орбит направлений симметрии отражений, принадлежащих группе, образует прямую сумму. Получены условия, при которых такая группа действует на нецилиндрических алгебраических гиперповерхностях, а множество всех отражений, сохраняющих каждый полиномиальный инвариант группы G, совпадает с порождающим ее объединением квадратичных множеств отражений.

Список литературы

[1] Криворучко А.И. О строении множества орбит отражений бесконечной группы, порожденной отражениями // Таврический вестник информатики и математики. – 2003. – № 1. – С. 78–92.

[2] Zalesskii A.E. The fixed algebra of a group generated by reflections is not always free // Arch. Math. – 1983. – V.41, № 5. – P. 434–437.

[3] Велесько А.Е. Существование групп, порожденных отражениями, с бесконечно порожденными кольцами инвариантов // Докл. АН БССР. – 1985. – Т.30, № 2. – С. 105–107.

[4] Криворучко А.И.О двойном отношении четверки линейных оболочек орбит направлений симметрии бесконечной группы, порожденной отражениями // Ученые записки ТНУ. Сер. "Математика". – 2001.– Т.14, № 1. – С. 60–64.

[5] Криворучко А.И.О бесконечных группах отражений с двумя линейными оболочками орбит направлений симметрии// Ученые записки ТНУ. Сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн.". – 2009. – Т.22, № 1. – С. 78–85.

[6] Игнатенко В.Ф. Диаметральная теория алгебраических поверхностей и геометрическая теория инвариантов групп, порожденных отражениями. III // Укр. математ. журн. – 1998. – Т. 50, № 10. – С. 1324–1340.

Про деякі нескінченні групи віддзеркалень

Нехай G є нескінченна група віддзеркалень, кожна власна підмножина множини всіх лінійних оболонок G-орбіт напрямків симетрій якої незалежна. Обчислюються базисні інваріанти групи G. Отримані умови невиродженості алгебри інваріантів цієї групи, а також умови повноти групи G.

Ключові слова: віддзеркалення, група, орбіта, інваріант.

On some infinite reflection groups

Let G be an infinite reflection group and each proper subset of the set of all linear spans of G-orbits of symmetry directions is independent. In the paper all basic invariants of G are calculated and the conditions of completeness of G are obtained.

Keywords: reflection, group, orbit, invariant.