Ученые записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского

серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика»
Том 21(60) № 1 (2008), с. 39–51.

Ф. С. Стонякин

СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЙ ПОДХОД К ПОНЯТИЮ КОМПАКТНОГО СУБДИФФЕРЕНЦИАЛА ДЛЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В МЕТРИЗУЕМЫЕ ЛВП

В данной работе достаточные условия компактной субдифференцируемости вещественных функций в терминах производных чисел обобщены на отображения в отделимые локально выпуклые пространства (ЛВП), предложен секвенциальный подход к понятию компактного субдифференциала для отображений в пространства Фреше. Установлена невозможность распространения классической теоремы Данжуа о контингенции на отображения в бесконечномерные локально выпуклые пространства.

Введение

Многие важные для анализа функции не имеют производной в обычном смысле всюду, но обладают существенными дифференциальными свойствами, как, например, выпуклые функции. Для таких функций в качестве аналога производной часто используется субдифференциал, являющийся базовым понятием выпуклого анализа и широко применяемый в современной математике ([1] — [7]).

Наличие множества существенных свойств субдифференциалов выпуклых функций привело к различным аналогам и обобщениям этого понятия на невыпуклый случай. Наиболее удачным считается субдифференциал Кларка [8]. Ряд других известных понятий рассмотрен в [4] и [9] — [16]. Обзор работ по субдифференциалам имеется, например, в [17] — [19]. В [20] (см. также [21] — [25]) было введено новое в нелинейном анализе понятие компактного субдифференциала для отображений в локально выпуклые пространства (ЛВП), исследованы его свойства и получен ряд обобщённых формул конечных приращений, а также теорем о среднем. В настоящей работе удобные условия компактной субдифференцируемости и представление компактного субдифференциала вещественных функций в терминах производных чисел, полученные ранее в [22], обобщаются на отображения в метризуемые ЛВП на базе секвенциального подхода к компактному субдифференциалу. На основе полученных результатов устанавливается невозможность распространения теоремы Данжуа о контингенции [26] на отображения в бесконечномерные ЛВП.

1. Компактные субдифференциалы отображений в ЛВП

Пусть $U(0)$ — замкнутая абсолютно выпуклая окрестность нуля в ЛВП E.

Определение 1. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложениям при $\delta \to +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств отделимого вещественного ЛВП E, $B \subset E$. Будем говорить, что множество B есть K-*предел* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \to +0$:

$$B = K - \lim_{\delta \to +0} B_\delta \ ,$$

если:

(i) $\bigcap\limits_{\delta>0} B_\delta = B$;

(ii) $\forall U = U(0) \subset E \ \exists \delta = \delta_U > 0 : \ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U(0))$;

(iii) B — компактное множество в E .

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что K-предел обладает свойством линейности. Из пункта (ii) определения 1 вытекает замкнутость и выпуклость множества B.

Далее $I \subset \mathbb{R}$ — некоторый отрезок, E — ЛВП, $F : I \to E$.

Определение 2. Пусть $x \in I$, $\delta > 0$. *Частный K-субдифференциал* отображения F в точке x_0, отвечающий данному $\delta > 0$, есть замкнутое выпуклое множество

$$\partial_K F(x_0, \delta) = \overline{conv} \left\{ \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \quad | \quad 0 <| h |< \delta \right\} \ .$$

Аналогично вводятся *правый и левый частные K-субдифференциалы.*

$$\partial_K^+ F(x_0, \delta) = \overline{conv} \left\{ \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \quad | \quad 0 < h < \delta \right\} \ ;$$

$$\partial_K^- F(x_0, \delta) = \overline{conv} \left\{ \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \quad | \quad - \delta < h < 0 \right\} \ .$$

Определение 3. Назовём отображение $F : I \to E$ *компактно субдиффренцируемым* или K-*субдифференцируемым* в точке $x_0 \in I$, если существует K-предел частных K-субдифференциалов

$$\partial_K F(x_0) = K - \lim_{\delta \to +0} \partial_K F(x_0, \delta) \ .$$

Полученное множество $\partial_K F(x_0)$ назовём *компактным субдифференциалом*, или *K-субдифференциалом* отображения F в точке x_0. Аналогично вводятся *правый и левый K-субдифференциалы*:

$$\partial_K^+ F(x_0) = K - \lim_{\delta \to +0} \partial_K^+ F(x_0, \delta) \ ; \quad \partial_K^- F(x_0) = K - \lim_{\delta \to +\ 0} \partial_K^- F(x_0, \delta) \ .$$

Если отображение F дифференцируемо в точке x_0 в обычном смысле, то оно является компактно субдифференцируемым, причём $\partial_K F(x_0) = F'(x_0)$. В то же время, как отмечено в [22], существуют компактно субдифференцируемые отображения, не имеющие обычной производной.

2. Секвенциальное определение для K-субдифференциала.

Напомним хорошо известное секвенциальное определение производной для вещественных функций.

Определение 4. Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в точке x_0, если для произвольной сходящейся к x_0 последовательности $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, последовательность $\left\{\frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0}\right\}_{k=1}^{\infty}$ сходится к некоторому числу $f'(x_0)$, не зависящему от выбора $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$. Это число $f'(x_0)$ называется производной функции f в точке x_0.

Аналогичное определение (см. [22]) можно дать и для компактных субдифференциалов вещественных функций.

Определение 5. Функцию $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ назовём *K-субдифференцируемой* в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если существуют конечные нижняя и верхняя производные в этой точке:

$$\alpha = \underline{\lim_{h \to 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \quad \text{и} \quad \beta = \overline{\lim_{h \to 0}} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \ .$$

Множество $\partial_K f(x_0) = [\alpha; \beta]$ назовём *K-субдифференциалом* функции f в точке x_0.

Обобщим этот подход на отображения F отрезка вещественной оси в ЛВП. Обозначим через $\varphi_F(x_0, h) = \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ и $D_{F(x_0)}$ множество всех частичных пределов отношения $\varphi_F(x_0, h)$ при $h \to 0, \ h \neq 0$.

Мы покажем, что для метризуемых ЛВП $\partial_K F(x_0) = \overline{conv}\ D_{F(x_0)}$ и установим достаточные условия компактной субдифференцируемости отображений в отделимые ЛВП в терминах частичных пределов последовательностей $\varphi_F(x_0, h_k)$ при $h_k \to 0$. Начнём с очевидного утверждения.

Лемма 1. *Имеет место включение:*

$$\overline{conv}\ D_{F(x_0)} \subset \bigcap_{\delta > 0} \partial_K F(x_0, \delta) \ .$$

Лемма 2. *Если для произвольной последовательности* $\{\varphi_F(x_0,h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *при* $h_k \to 0$ *существует предельная точка, то*

$$\forall U(0) \subset E \quad \exists \delta_U > 0 : \ (0 < |\delta| < \delta_U) \Rightarrow \left(\varphi_F(x_0,\delta) \in D_{F(x_0)} + U(0)\right) \ .$$

Доказательство. Допустим, что это не так. Тогда существует последовательность $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\lim\limits_{k\to\infty} h_k = 0$ и

$$\varphi_F(x_0,h_k) \notin D_{F(x_0)} + U(0) \tag{1}$$

для некоторой окрестности $U(0) \subset E$. В силу условия леммы, можно выбрать подпоследовательность $\{h_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty} \subset \{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы существовал предел

$$x^0 = \lim_{\ell\to\infty} \varphi_F(x_0,h_{k_\ell}) \ .$$

Ясно, что $x^0 \in D_{F(x_0)}$. Поэтому $\exists \ell_0 \ \forall \ell \geqslant \ell_0$:

$$\varphi_F(x_0,h_{k_\ell}) \notin D_{F(x_0)} + U(0) \ ,$$

что противоречит (1).

Лемма 3. *Если для произвольной последовательности* $\{\varphi_F(x_0,h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *при* $h_k \to 0$ *существует предельная точка, то*

$$\overline{conv} \ D_{F(x_0)} \supset \bigcap_{\delta>0} \partial_K F(x_0,\delta) \ . \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $x \in \bigcap\limits_{\delta>0} \partial_K F(x_0,\delta)$. Тогда $x \in \partial_K F(x_0,\delta) \ \forall \delta > 0$. Покажем, что $\forall \ U(0) \subset E$:

$$x \in conv \ D_{F(x_0)} + U(0) \ . \tag{3}$$

Для этого выберем $U'(0) \subset E : \ U' + U' \subset U$ и $\delta_{U'} > 0$ такие, что

$$(0 < |\delta| < \delta_{U'}) \Rightarrow \varphi_F(x_0,\delta) \in conv \ D_{F(x_0)} + U'(0) \ .$$

Заметим, что $x \in \bigcap\limits_{\delta>0} \partial_K F(x_0,\delta)$. Поэтому $x = x_k$, где $x_k \in \partial_K F(x,\delta_k)$, $\delta_k \to 0$. Для произвольного $k \in \mathbb{N}$ выберем $x_{\delta_k} \in conv \ \{\varphi_F(x_0,h) \mid 0 < |h| < \delta_k\}$ так, чтобы $x_{\delta_k} \in x_k + U'(0)$. Это возможно в силу того, что $\overline{B} \subset B + U'(0) \ \forall U(0) \subset E$. При этом $x_{\delta_k} = \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m \varphi_F(x_0,\delta_m)$, где $|\delta_m| \leqslant \delta < \delta_{U'} \quad \forall m = \overline{1,n}$; $\sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m = 1$ $(\alpha_m \geqslant 0 \quad \forall m = \overline{1,n})$. Имеем:

$$x \in \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot \varphi_F(x_0,\delta_m) + U'(0) \subset \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot (convD_{F(x_0)} + U'(0)) + U'(0) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot convD_{F(x_0)} + \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot U'(0) + U'(0) = convD_{F(x_0)} + U'(0) + U'(0) \subset$$
$$\subset convD_{F(x_0)} + U(0)\ .$$

Итак, (3) доказано, откуда и вытекает утверждение леммы.

Напомним, что множество $K_s \subset E$ *секвенциально компактно*, если любая последовательность элементов этого множества содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке K_s. Множество в метрическом пространстве секвенциально компактно тогда и только тогда, когда оно компактно.

Теорема 1. *Пусть E — метризуемое ЛВП. Если $F : [a;b] \to E$ компактно субдифференцируемо в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то для произвольной последовательности $\{\varphi_F(x_0,h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ при $h_k \to 0$ существует предельная точка, принадлежащая $\partial_K F(x_0)$.*

Доказательство. В соответствии с определением K-субдифференциала,

$$\forall U(0) \subset E \quad \exists \delta_U > 0 :\ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (\partial_K F(x_0,\delta) \subset \partial_K F(x_0) + U(0))\ .$$

Обозначим через $\{U_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$ счётную базу абсолютно выпуклых окрестностей нуля в метризуемом ЛВП E и для произвольной последовательности $\{\varphi_F(x_0,h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ $\left(\lim\limits_{k\to\infty} h_k = 0\right)$ подберём $k_0 \in \mathbb{N}$ так, что $\forall k \geqslant k_0$:

$$\varphi_F(x_0,h_k) \in \partial_K F(x_0) + \frac{U_k(0)}{2}\ .$$

При этом существует последовательность $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \partial_K F(x_0)$ такая, что

$$\varphi_F(x_0,h_k) \in x_k + \frac{U_k(0)}{2}\ . \tag{4}$$

В силу компактности, а значит, и секвенциальной компактности, $\partial_K F(x_0)$ существует подпоследовательность $\{x_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty} \subset \{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $\exists\ x^0 = \lim\limits_{\ell\to\infty} x_{k_\ell}$, то есть $\exists\ \ell_0 :\ \forall \ell \geqslant \ell_0$

$$x_{k_\ell} \in x^0 + \frac{U_\ell(0)}{2}\ . \tag{5}$$

Из (4) и (5) вытекает, что

$$\varphi_F(x_0,h_{k_\ell}) \in x_{k_\ell} + \frac{U_\ell(0)}{2} \subset x^0 + \frac{U_\ell(0)}{2} + \frac{U_k(0)}{2} \subset x^0 + U_k(0) \quad \forall\ \ell \geqslant \ell_0\ ,$$

откуда имеем

$$x^0 = \lim_{\ell\to\infty} \varphi_F(x_0,h_{k_\ell})\ ,$$

что означает доказательство существования искомой предельной точки. Поскольку $\partial_K F(x_0)$ замкнуто, то $x^0 \in \partial_K F(x_0)$.

Теорема 2. *Пусть E — метризуемое ЛВП. Если отображение $F : [a;b] \to E$ компактно субдифференцируемо в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, то*

$$\partial_K F(x_0) = \overline{conv}\ D_{F(x_0)}\ .$$

Доказательство. В силу теоремы 1, множество $D_{F(x_0)}$ непусто и, поэтому, в силу леммы 1 и определения компактного субдифференциала имеем:

$$\overline{conv}\ D_{F(x_0)} \subset \bigcap_{\delta>0} \partial_K F(x_0, \delta) = \partial_K F(x_0)\ . \tag{6}$$

Обратное включение (2) следует из леммы 3, а из (2) – (6) вытекает утверждение теоремы.

Лемма 4. *Пусть E — метризуемое ЛВП. Если для произвольной последовательности $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ при $h_k \to 0$ существует предельная точка, то множество $D_{F(x_0)}$ секвенциально компактно.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $x_n \in D_{F(x_0)}$. Обозначим через $\{U_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$ фундаментальную систему абсолютно выпуклых окрестностей нуля пространства E. Выберем последовательность $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ так, чтобы:

$$(i)\ |h_k| < \frac{1}{k} \quad \forall k \in \mathbb{N}\ ; \qquad (ii)\ \varphi_F(x_0, h_k) \in x_k + U_k(0)\ .$$

В силу условий леммы, существует такая подпоследовательность $\{h_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty}$ выбранной последовательности $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\exists\ x^0 = \lim\limits_{\ell\to\infty} \varphi_F(x_0, h_{k_\ell})$, причём $x^0 \in \in D_{F(x_0)}$. Из (ii) вытекает, что $x^0 = \lim\limits_{\ell\to\infty} x_{k_\ell}$. Следовательно, множество $D_{F(x_0)}$ секвенциально компактно.

Напомним, что в конечномерных пространствах выпуклая оболочка компактного множества — компакт [4]. Поэтому, если $dimE < \infty$, то, в условиях леммы 4 $\overline{conv}\ D_{F(x_0)} = conv\ D_{F(x_0)}$ и справедливо

Следствие 1. *Если пространство E конечномерно и отображение F компактно субдифференцируемо в точке x_0, то*

$$\partial_K F(x_0) = conv\ D_{F(x_0)}\ . \tag{7}$$

Напомним также, что $a \in K$ — *крайняя точка* множества $K \subset E$, если из того, что $a = \alpha k_1 + (1-\alpha)k_2$ для некоторых $k_1,\ k_2 \in K$ и $0 < \alpha < 1$ вытекает $k_1 = k_2 = a$. Из теоремы 1, леммы 4, а также известного предложения о крайних точках ([27], с. 477, лемма 5) вытекает

Следствие 2. *Пусть E — метризуемое ЛВП. Если отображение $F : [a;b] \to E$ компактно субдифференцируемо в точке x_0, то множество $Q_{F(x_0)}$ крайних точек $\partial_K F(x_0)$ является подмножеством $D_{F(x_0)}$.*

Замечание 1. Равенство $Q_{F(x_0)} = D_{F(x_0)}$ может как выполняться, так и не выполняться.

Пример 1. Пусть $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$. Здесь $D_{f(0)} = Q_{f(0)} = \{-1;1\}$.

Пример 2. Пусть $f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin\frac{1}{x}\ , & \text{если } x \neq 0\ ; \\ 0\ , & \text{если } x = 0\ ; \end{cases} \qquad x_0 = 0\ .$

Здесь $D_{f(0)} = [-1;1]$; $Q_{f(0)} = \{-1;1\}$, т.е. $Q_{f(0)} \subsetneqq D_{f(0)}$.

Замечание 2. Отметим, что, в силу определения 5, для функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равенство $Q_{f(x_0)} = D_{f(x_0)}$ выполняется тогда и только тогда, когда существуют конечные односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$.

Теорема 3. *Если для произвольной последовательности $\{\varphi_F(x_0,h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ при $h_k \to 0$ существует предельная точка, и множество $\overline{conv}\ D_{F(x_0)}$ является компактным, то отображение F компактно субдифференцируемо в точке x_0 и верно* (7).

Доказательство. В силу лемм 1 и 3 имеем:

$$\bigcap_{\delta>0} \partial_K F(x_0,\delta) = \overline{conv}\ D_{F(x_0)}\ . \tag{8}$$

Покажем, что

$$\forall U(0) \subset E \quad \exists \delta_U > 0 :\ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (\partial_K F(x_0,\delta) \subset \overline{conv}\ D_{F(x_0)} + U(0))\ .$$

Для этого подберём $U'(0)$ так, чтобы $U'(0) + U'(0) \subset U(0)$. Согласно лемме 2, $\exists\ \delta_{U'} > 0 :\ (0 < |\delta| < \delta_{U'}) \Rightarrow \varphi_F(x_0,\delta) \in D_{F(x_0)} + U'(0)$. Положим $\delta_{U'} := \delta_U$ и $\delta < \delta_U$.

1) Пусть $y \in conv\{\ \varphi_F(x_0,\triangle x)\ |\ 0 < |\triangle x| \leqslant \delta\ \}$. Тогда $y = \sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot \varphi_F(x_0,\delta_m)$,

где $|\delta_m| \leqslant \delta < \delta_U$, $\sum\limits_{m=1}^{n} \alpha_m = 1$, $(\alpha_m \geqslant 0 \quad (\forall m = \overline{1,n})$. Согласно лемме 2 и в силу выпуклости $U'(0)$ имеем:

$$y = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot \varphi_F(x_0, \delta_m) \in \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot \overline{conv}\ D_{F(x_0)} + \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot U'(0) \subset \overline{conv}\ D_{F(x_0)} + U'(0)$$

при $0 < |\delta| < \delta_U$.
2) Пусть теперь $y \in \partial(\partial_K F(x_0, \delta))$. Тогда $\exists y' \in conv\{\varphi_F(x_0, \triangle x) \mid 0 < |\triangle x| < \delta\}$: $y \in y' + U'(0)$. В силу п.1 можно выбрать $\overline{y}' \in \overline{conv}\ D_{F(x_0)}$ так, что $y' \in \overline{y}' + U'(0)$,откуда

$$y \in y' + U'(0) \subset \overline{y}' + U'(0) + U'(0) \subset \overline{conv}\ D_{F(x_0)} + U(0)\ .$$

Итак, $\forall \delta > 0 :\ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow \partial_K F(x_0, \delta) \subset \overline{conv}\ D_{F(x_0)} + U(0)$.
Из пунктов 1 и 2 следует, что $\exists K - \lim\limits_{\delta \to 0} \partial_K F(x_0, \delta) = \overline{conv}\ D_{F(x_0)}$. Из компактности множества $\overline{conv}\ D_{F(x_0)}$ вытекает, что отображение F K-субдифференцируемо в точке x_0. Равенство (7) вытекает из (8).

Напомним, что метризуемое ЛВП E называется *пространством Фреше*, если оно полно.

Заметим, что в случае полного ЛВП E в силу известной теоремы М. Г. Крейна [28] замкнутая выпуклая оболочка любого компактного множества сама компактна. Учитывая это обстоятельство, из теоремы 3 и леммы 4 получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть E — пространство Фреше. Если для произвольной последовательности $\{\varphi_F(x_0, h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ при $h_k \to 0$ существует предельная точка, то отображение F компактно субдифференцируемо в точке x_0.*

Замечание 3. Теоремы 2 и 4 определяют необходимое и достаточное условие K-субдифференцируемости отображений в пространства Фреше.

Для пространств E, не являющихся пространствами Фреше, теорема 4, вообще говоря, неверна.

Пример 3. Пусть E — пространство всех ограниченных функций $x : [0;1) \to \mathbb{R}$, имеющих конечное число точек разрыва, с нормой $\|x\| = \sup\limits_{t \in [0;1)} |x(t)|$. E — неполное нормированное пространство.

Пусть $I_R(\cdot)$ — характеристическая функция множества R. Определим отображение $F:(-1;1)\to E$ следующим образом: $F(t):=tI_{[0;\ \sin\sigma(t))}(t)$, где $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\sigma(t)=\begin{cases}\pi n((n+1)|t|-1), & \text{если } |t|\in\left[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right)\ ;\\ 0, & \text{если } t=0\ .\end{cases}$$

Ясно, что при $t\neq 0$ $\varphi_F(0,t)=I_{[0;\sin\sigma(t))}(t)$. Функция σ отображает каждое из множеств $\left\{t:|t|\in\left[\frac{1}{n+1};\frac{1}{n}\right)\right\}$ на сегмент $[0;1]$.

Поэтому $D_{F(0)}=\{I_{[0;s)}(t)\}_{s\in[0;1]}$ — компакт в E. Однако множество $\overline{conv}D_{F(0)}$ уже компактным в E не является. Действительно, рассмотрим последовательность $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ функций из $\overline{conv}\ D_{F(0)}\subseteq E$:

$$f_N(t):=\sum_{n=1}^{N}2^{-n}I_{[0;1-2^{-n})}(t)+2^{-N}I_{[0;1)}(t);$$

или, после преобразования,

$$f_N(t)=\sum_{n=1}^{N}2^{1-n}I_{[1-2^{1-n};1-2^{-n})}(t)+2^{-N}I_{[1-2^{-N};1)}(t).$$

Легко видеть, что последовательность функций $\{f_N\}_{N=1}^{\infty}$ сходится по *sup*-норме к функции $f(t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{1-n}I_{[1-2^{1-n};1-2^{-n})}(t)$. Однако функция $f(t)$ имеет уже не конечное, а счётное множество точек разрыва и не принадлежит пространству E.

Итак, для компактного субдифференциала отображений в пространства Фреше на базе секвенциального подхода можно ввести следующее определение.

Определение 6. Отображение F назовём *компактно субдифференцируемым* или *K-субдифференцируемым* в точке x_0, если для произвольной последовательности $\{\varphi_F(x_0,h_k)\}_{k=1}^{\infty}$ при $h_k\to 0$ существует предельная точка. Множество $\partial_K F(x_0)==\overline{conv}\ D_{F(x_0)}$ назовём *компактным субдифференциалом* или *K-субдифференциалом* отображения F в точке x_0.

Если же пространство E конечномерно, то множество в определении 6 $\overline{conv}\ D_{F(x_0)}$ можно заменить на *conv* $D_{F(x_0)}$ (см. следствие 1).

3. О невозможности переноса теорема Данжуа о контингенции на отображения в ЛВП.

Будем рассматривать отображения отрезка вещественной оси в отделимые ЛВП. Если E конечномерно, то из теоремы Данжуа о контингенции [26] следует, что всякое компактно субдифференцируемое отображение почти всюду дифференцируемо. Воспользовавшись рассмотренным в предыдущем пункте достаточным условием K-субдифференцируемости (теорема 3), построим пример, показывающий невозможность, вообще говоря, построения аналога теоремы Данжуа о контингенции для бесконечномерных пространств. Мы отправляемся от [29], где приведён пример нигде не дифференцируемого липшицевого отображения отрезка вещественной оси в банахово пространство.

Пусть $S = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Рассмотрим пространство E всех вещественных функций $\xi = \xi(\theta)$, заданных на S, с семейством полунорм $\{\|\cdot\|_t\}_{t \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)}$, определяющим топологию поточечной сходимости. Определим на S отображение $x(s) = \xi_s(\cdot)$, принимающее значения из пространства E :

$$\xi_s(\theta) = \begin{cases} \frac{s}{\theta}, & \text{если } \frac{1}{3} < s \leqslant \theta < \frac{2}{3}\ ; \\ \\ \frac{s-1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta \leqslant s < \frac{2}{3}\ . \end{cases}$$

Зафиксируем некоторые $s \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ и $\theta \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Выбрав $\triangle s > 0$ так, чтобы в случае $s \neq \theta$ точки $s - \triangle s, s, s + \triangle s$ лежали на числовой прямой по одну сторону от θ, рассмотрим функции $\frac{x(s+\triangle s)-x(s)}{\triangle s}(\theta)$ и $\frac{x(s-\triangle s)-x(s)}{-\triangle s}(\theta)$:

$$\frac{x(s+\triangle s)-x(s)}{\triangle s}\ (\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } \frac{1}{3} < s < s+\triangle s \leqslant \theta < \frac{2}{3}\ ; \\ \\ \frac{1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta \leqslant s < s+\triangle s < \frac{2}{3}\ . \end{cases}$$

$$\frac{x(s-\triangle s)-x(s)}{-\triangle s}\ (\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } \frac{1}{3} < s-\triangle s < s \leqslant \theta < \frac{2}{3}; \\ \\ \frac{1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta \leqslant s-\triangle s < s < \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Это означает, что $\forall t \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$:

$$\left\| \frac{x(s+\triangle s)-x(s)}{\triangle s} - y_1(s) \right\|_t \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \triangle s \to +0\ ,$$

где $y_1(s) = \xi_s^1(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } \frac{1}{3} < s < \theta < \frac{2}{3} \ ; \\ \\ \frac{1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta \leqslant s < \frac{2}{3} \ ; \end{cases}$

$$\left\| \frac{x(s-\triangle s) - x(s)}{-\triangle s} - y_2(s) \right\|_t \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad \triangle s \to +0 \ ,$$

где $y_2(s) = \xi_s^2(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & \text{если } \frac{1}{3} < s \leqslant \theta < \frac{2}{3} \ ; \\ \\ \frac{1}{\theta-1}, & \text{если } \frac{1}{3} < \theta < s < \frac{2}{3} \ . \end{cases}$

В силу теоремы 3, $\forall s \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \ \exists \ \partial_K x(s) = [\xi_s^1(\cdot); \xi_s^2(\cdot)]$. При этом $y_1(s) \neq y_2(s)$ $\forall s \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Следовательно, отображение $x(s)$ всюду компактно субдифференцируемо на интервале $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ и при этом нигде на нём не дифференцируемо. Более того, $x(s)$ везде дифференцируемо и справа, и слева, но нигде не дифференцируемо, что невозможно при $dimE < \infty$ в силу теоремы Данжуа.

Заметим, что всюду компактно субдифференцируемые отображения могут нигде не иметь даже односторонних производных.

Пример 4. Пусть $x : S \to E$, где $x(s) = \xi_s(\cdot)$,

$$\xi_s(\theta) = \begin{cases} (s-\theta) \cdot \sin \frac{1}{s-\theta} \ , & \text{если } \theta \neq s \ ; \\ 0 \ , & \text{если } \theta = s \ . \end{cases}$$

Рассуждениями, аналогичными вышеуказанным, устанавливается, что

$$\partial_K x(s) = \partial_K^{\pm} x(s) \{y_\alpha(s)\}_{\alpha \in [-1;1]} \quad \forall s \in \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right), \quad \text{где}$$

$$y_\alpha(s) = \xi_s^\alpha(\theta) = \begin{cases} \sin \frac{1}{s-\theta} - \frac{1}{s-\theta} \cdot \cos \frac{1}{s-\theta}, & \text{если } \theta \neq s \ ; \\ \alpha, & \text{если } \theta = s \ . \end{cases}$$

Неодноточечность правых и левых K-субдифференциалов $\partial_K^+ x(s)$ и $\partial_K^- x(s)$ указывает на то, что отображение x нигде на S не является дифференцируемым ни справа, ни слева.

Список литературы

[1] *Кусраев А.Г., Кутателадзе С.С.* Субдифференциалы: теория и приложения. — Новосибирск: Наука, 1992.— 270 с.

[2] *Мордухович Б.Ш.* Методы аппроксимаций в задачах оптимизации и управления. — М.: Наука, 1988. — 360 с.

[3] *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия эксэкстремума. — М.: Наука, 1969. — 212 с.

[4] *Пшеничный Б.Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1971. — 320 с.

[5] *Рокафеллар.Р.* Выпуклый анализ. — М.:Мир, 1973. — 472 с.

[6] *Шор Н. З.* Методы минимизации недифференцируемых функций и их применение. — К.: Наукова думка, 1979. — 200 с.

[7] *Михалевич М.В., Сергиеко И.В.* Моделирование переходной экономики. Модели, методы, информационные технологии. — К.: Наукова думка, 2005. — 670 с.

[8] *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988. — 288 с.

[9] *Демьянов В.Ф., Рубинов А.М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.— М.: Наука, 1990. — 432 с.

[10] *Демьянов В.Ф., Васильев Л.В.* Недифференцируемая оптимизация. — М.: Наука, 1981. — 384 с.

[11] *Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н.* Введение в минимакс. — М.: Наука, 1972. — 288 с.

[12] *Демьянов В.Ф.* Обобщение понятия производной в негладком анализе. // Соросовский образовательный журнал. — 1996. — №5 — С. 121–127.

[13] *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ.— М.: Наука, 1988. — 512 с.

[14] *Girejko E., Piccoli B.* On some consepts of generalized differentials//Set-valued analysis. — 2007. — V. 15 — P. 163 – 183.

[15] *Michel P., Penot J.P.* Calculs sous-differential pour les fonctions lipschitzieness et non-lipschitzieness//C.R. Acad. Sc. Paris. Ser I. — 1984 — V. 298. — P. 269 – 272.

[16] *Sussmann H.J.* Warga derivetive containers an other generalized differentials// Proceedings of the 41stIEEE 2002 Conference on Decision and Control, Las Wegas, Newada, December 10-13, 2002, Vol. 1 (IEEE Publications, New York 2002) — P. 1101 – 1106.

[17] *Демьянов В.Ф., Рощина В.А.* Обобщённые субдифференциалы и экзостеры// Владикавказский математический журнал. — 2006. — Т.8 — № 4. — С. 19 – 31.

[18] *Demyanov V.F.* The rise of nonsmooth analysis: its main tools// Кибернетика и системный анализ. — 2002 — Вып. 4 — С. 63 – 85.

[19] *Borwein J.M., Zhu Q.J.* A survey of subdifferential calculus with applications// Nonlinear Analysis Ser. A: Theory and methods. — 1999. — V. 38, № 6. — P. 687 – 773.

[20] *Орлов И.В., Стонякин Ф.С.* К-субдифференциалы и К-теорема о среднем для отображений в локально выпуклые пространства// Международная конференция, посвящённая памяти И.Г. Петровского "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". Тезисы докладов. — М.: МГУ, 2007. — С. 220 – 221.

[21] *Орлов И.В., Стонякин Ф.С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты// Современная математика. Фундаментальные направления — Объём 18с. — В печати.

[22] *Стонякин Ф.С.* Компактный субдифференциал вещественных функций //Динамические системы — Симферополь: ТНУ, 2007. — Вып. 23 — С. 99 – 112.

[23] Стонякин Ф.С. Сравнение компактного субдифференциала с субдифференциалами Кларка, Фреше и обобщёнными дифференциалами Сассманна.// Компьютерная математика, — 2008. — **2**. — С. 50 – 56.

[24] *Orlov I.V., Stonyakin F.S.* Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral.// Methods of Functional Analysis and Topology, — 2009. — Vol. 15. — № 1. — P. 74 – 90.

[25] *Стонякин Ф.С.* Теорема о среднем для компактных субдифференциалов вещественных функций //Современные проблемы математики и её приложения в естественных науках и информационных технологиях. Сборник материалов международной научной конференции. — Харьков: ХНУ, 2007 — С. 100 – 103.

[26] *Брудно А.Л.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1971. — 119 с.

[27] *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы.Часть 1: Общая теория. — М.: ИЛ, 1962. — 896 с.

[28] *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.— М: Мир, 1969. — 1072 с.

[29] *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967. — 624 с.

У данній роботі достатні умови компактної субдиференційовності дійсних функцій у термінах похідних чисел узагальнено на відображення у віддільні локально опуклі простори (ЛОП), запропоновано секвенціальний підхід до поняття компактного субдиференціалу для відображень у простори Фреше. Встановлено неможливість поширення класичної теореми Данжуа про контингенцію на відображення у нескінченновимірні локально опуклі простори.

In this paper the sufficient conditions of compact subdifferentiability for real-valued functions in terms of derivative numbers are generalized for mappings into separable locally convex spaces (LCS), the sequential approach to the notion of the compact subdifferential for mappings into Frechet spaces is proposed. It is stated that the classical Denjoy theorem on contingency cannot be extended to infinite-dimensional locally convex spaces.