

А. И. КРИВОРУЧКО

ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЯХ С АФФИННЫМИ ОСЯМИ СИММЕТРИИ

Получена аффинная классификация пар аффинных отражений относительно аффинных прямых, а также групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых; вычислены все полуинварианты этих групп.

Введение. Пусть Φ – алгебраическая поверхность, заданная в n -мерном аффинном пространстве уравнением $F = 0$, где F – неприводимый многочлен. Если Φ имеет бесконечное множество гиперплоскостей симметрии, то F – инвариант соответствующей бесконечной группы, порожденной отражениями относительно гиперплоскостей. Поэтому построение канонических уравнений алгебраических поверхностей с бесконечными множествами гиперплоскостей симметрии сводится к вычислению базисных инвариантов бесконечных групп отражений, чему посвящен целый ряд работ (см., например, [1]–[3]). В то же время при изучении алгебраических поверхностей с бесконечными множествами осей симметрии приходится учитывать следующее: если поверхность Φ имеет бесконечное множество осей симметрии, то F , являясь полуинвариантом соответствующей бесконечной группы, порожденной отражениями относительно прямых, может не быть инвариантом какой-либо бесконечной группы отражений. Пример такой поверхности, как следует из результатов работ [4] и [5], – линейчатая поверхность Кэли, которая задается в аффинной системе координат (x_1, x_2, x_3) трехмерного аффинного пространства уравнением $x_1 + x_2x_3 + x_3^3 = 0$. Поэтому найденные в [5] инварианты нецентроаффинных групп, порожденных отражениями относительно прямых и действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях, не позволяют прямо получить уравнение любой нецилиндрической алгебраической поверхности с бесконечным множеством осей симметрии, имеющих пустое пересечение. В связи с этим возникает *следующая задача*: Вычислить полуинварианты групп, порожденных аффинными отражениями относительно прямых.

Ниже эта задача решается для бесконечных групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых.

Цель работы – построение аффинной классификации пар отражений и групп, порождаемых двумя отражениями относительно прямых, а также вычисление полуинвариантов таких групп.

Основные результаты работы: Получена аффинная классификация пар отражений относительно прямых и групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых; вычислены полуинварианты бесконечных групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых.

1°. Инварианты некоторых однопараметрических групп. Пусть V – линейное вещественное n -мерное пространство,

$$(e_1, \dots, e_n) \quad (1)$$

– некоторый заданный в этом пространстве базис с соответствующей системой координатных функций (x_1, \dots, x_n) (т.е. двойственным базисом в пространстве V^*).

Если $A \subseteq V$, то $\langle A \rangle$ – линейная оболочка A .

Если X – множество с заданной на нем системой координат (x, \dots, z) , то равенство $T = \{x' = f(x, \dots, z), \dots, z' = h(x, \dots, z)\}$ означает, что $T: X \rightarrow X$ – отображение, имеющее координатное представление $x' = f(x, \dots, z), \dots, z' = h(x, \dots, z)$; при этом если значение y' некоторой координаты y не определяется в координатном представлении T , то считается, что $y' = y$.

Пусть Λ – аффинная прямая, P – гиперплоскость, лежащие в V , и $\Lambda \nparallel P$; тогда (Λ, P) обозначает отражение относительно Λ в направлении P . Если $c \in \Lambda$, a – направляющий вектор Λ , $\xi \in V^*$, $P = \ker \xi$, то для любого вектора $v \in V$

$$(\Lambda, P)(v) = -v + 2(\xi(a))^{-1} \xi(v - c) a + 2c.$$

Далее \mathbb{R} – поле вещественных чисел, $\mathbf{K} = \mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$; \mathbf{K}^G – алгебра полиномиальных инвариантов, а $\mathbf{K}(G)$ – множество всех полуинвариантов группы G .

Для любого подмножества $I \cup \{x, \dots, z\}$ кольца \mathbf{K} пусть $I \langle x, \dots, z \rangle$ – множество всех многочленов с коэффициентами, принадлежащими I , “переменными” x, \dots, z и одночленами, имеющими только четные степени относительно “переменных” x, \dots, z ; $I[x, \dots, z]$ – множество всех многочленов с коэффициентами, принадлежащими I , “переменными” x, \dots, z и одночленами, имеющими только нечетные степени относительно “переменных” x, \dots, z .

Пусть $F = f(x, \dots, z) \in I[x, \dots, z]$. Из равенства $f(-x, \dots, -z) = F$ следует, что $F \in I \langle x, \dots, z \rangle$, а если $f(-x, \dots, -z) = -F$, то $F \in I[x, \dots, z]$.

В системе координат (1) для любого $t \in \mathbb{R}$ положим

$$\begin{aligned} A^t &= \{x'_1 = x_1 + t x_2 + t^2 x_3/2 + t^3/6, x'_2 = x_2 + t x_3 + t^2/2, x'_3 = x_3 + t\}, \\ B^t &= \{x'_1 = x_1 + t x_2, x'_3 = x_3 + t\}, \quad P^t = \{x'_1 = x_1 + t x_2 + t^2/2, x'_2 = x_2 + t\}, \\ N^t &= \{x'_1 = x_1 + t x_2 + t^2 x_3/2, x'_2 = x_2 + t x_3, x'_4 = x_4 + t\}, \quad S^t = \{x'_1 = x_1 + t\}. \end{aligned}$$

Если $t \neq 0$, то A^t – параболический сдвиг с переносом, B^t – винтовой сдвиг, S^t – перенос, P^t – параболический поворот, N^t – винтовой параболический сдвиг.

$\mathcal{A} = (A^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (B^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{P} = (P^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{N} = (N^t : t \in \mathbb{R})$, $\mathcal{S} = (S^t : t \in \mathbb{R})$ – однопараметрические группы. Найдем их инварианты.

Пусть $F = f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}$.

Если $F \in \mathbf{K}^{\mathcal{A}}$, то применяя к F преобразование A^t , получим

$$F = f(x_1 + tx_2 + t^2x_3/2 + t^3/6, x_2 + tx_3 + t^2/2, x_3 + t, x_4, \dots, x_n).$$

Полагая $t = -x_3$, получим $F = f(x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3, x_2 - x_3^2/2, 0, x_4, \dots, x_n)$. Но $x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3, 2x_2 - x_3^2, x_4, \dots, x_n$ – инварианты группы \mathcal{A} . Следовательно,

$$\mathbf{K}^{\mathcal{A}} = \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3, 2x_2 - x_3^2, x_4, \dots, x_n]. \quad (2)$$

Аналогично показывается, что

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{\mathcal{B}} &= \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3, x_2, x_4, \dots, x_n], & \mathbf{K}^{\mathcal{P}} &= \mathbb{R}[2x_1 - x_2^2, x_3, \dots, x_n], \\ \mathbf{K}^{\mathcal{N}} &= \mathbb{R}[x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2, x_2 - x_3x_4, x_3, x_5, \dots, x_n], & \mathbf{K}^{\mathcal{S}} &= \mathbb{R}[x_2, \dots, x_n]. \end{aligned} \quad (3)$$

2°. Группы, порожденные двумя отражениями. Пусть в пространстве V для каждого $i \in \{1; 2\}$ задано отражение $R_i = (\Lambda_i, P_i)$ относительно аффинной прямой Λ_i в направлении линейной гиперплоскости P_i ; L_i – линейная прямая, параллельная Λ_i ; $S = L_1 + L_2$, $Q = P_1 \cap P_2$; $T = R_2R_1$, G – группа, порожденная R_1 и R_2 ; \bar{G} – замыкание группы G в топологии Зарисского группы $\text{Aff}(V)$ всех аффинных преобразований пространства V ; $F \in \mathbf{K}(G)$.

Очевидно, что $R_1^2 = R_2^2 = \text{id}$, $TR_1 = R_1T^{-1} = R_2$. Поэтому

$$G = \{T^m : m \in \mathbb{Z}\} \cup \{T^m R_1 : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть χ_F – характер группы G , являющийся весом F (т.е. $F \cdot g^{-1} = \chi_F(g) F$ для каждого элемента g группы G). Тогда $\chi_F(G) \subseteq \{-1; 1\}$. При этом если G' – компонента единицы id_V группы G , то $\chi_F(G') = \{1\}$. Кроме того, $F \in \mathbf{K}(\bar{G})$, а F как полуинвариант группы \bar{G} имеет вес $\tilde{\chi}_F$, являющийся непрерывным продолжением веса χ_F , и $\tilde{\chi}_F(G) \subseteq \{-1; 1\}$.

Рассматривая все возможные случаи “взаимного расположения” $P_1, P_2, \Lambda_1, \Lambda_2$, построим канонический базис пары (R_1, R_2) , и в этом базисе найдем координатные представления элементов группы \bar{G} , а также полуинварианты группы G .

Не нарушая общности, далее считаем, что $\Lambda_1 = L_1$; при этом если $L_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$, то и $\Lambda_2 = L_2$, а если $P_1 \neq P_2$, $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ и $V = S \oplus Q$, то $\vec{0} \in \Lambda_2 + Q$.

Отсюда следует, что $P_1 \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$. Зафиксируем $c \in P_1 \cap \Lambda_2$. При этом если $Q \cap \Lambda_2 \neq \emptyset$, то считаем, что $c \in Q \cap \Lambda_2$.

1. $L_1 = L_2, P_1 = P_2$.

При построении канонического базиса (1) пары (R_1, R_2) полагаем, что $e_1 \in L_1, (e_2, \dots, e_n)$ – базис в P_1 , причем если $L_1 \neq \Lambda_2$, то $e_2 = 2c$.

В каноническом базисе $R_1 = \{x'_i = -x_i \ (i > 1)\}$.

1.1. $L_1 = \Lambda_2$.

В этом случае $R_1 = R_2$, $G = \{\text{id}, R_1\}$.

Пусть $F = f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда $f(x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$ в силу R_1 -полуинвариантности F . Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1]\langle x_2, \dots, x_n \rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1][x_2, \dots, x_n]$.

1.2. $L_1 \neq \Lambda_2$.

Теперь $e_2/2 \in \Lambda_2$ и $e_1 \parallel \Lambda_2$. Полагая $\mathcal{S} = (S^t : t \in \mathbb{R})$, где $S^t = \{x'_2 = x_2 + t\}$, имеем: $T = S^1$, $\bar{G} = \mathcal{S} \cup (\mathcal{S} \cdot R_1)$. Но тогда $F \in \mathbf{K}^{\mathcal{S}}$, т.е. $F \in \mathbb{R}[x_1, x_3, \dots, x_n]$, и, как в случае **1.1**, получаем: $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1]\langle x_3, \dots, x_n \rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1][x_3, \dots, x_n]$.

2. $L_1 = L_2$, $P_1 \neq P_2$.

Построим в V канонический базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы e_1, \dots, e_n так, чтобы выполнялись следующие условия:

$e_1 \in L_1$, $e_2 \in P_1 \setminus Q$, $e_1 + 2e_2 \in P_2$; если $n > 2$, то (e_3, \dots, e_n) – базис Q ; при этом если $L_1 + Q \neq \Lambda_2 + Q$ (и тогда $c \notin Q$), то $e_2 = 2c$, а если $L_1 + Q = \Lambda_2 + Q$, $L_1 \neq \Lambda_2$ (и тогда $n > 2$, $c \in Q \setminus \{\vec{0}\}$), то $e_3 = 2c$.

2.1. $L_1 = \Lambda_2$.

Для любого вещественного t пусть $D^t = \{x'_1 = x_1 + tx_2\}$. Тогда $\mathcal{D} = \{D^t : t \in \mathbb{R}\}$ – однопараметрическая группа сдвигов, $T = D^1$. Поэтому $\bar{G} = \mathcal{D} \cup (\mathcal{D} \cdot R_1)$.

Из \mathcal{D} -инвариантности F имеем:

$$F = f(x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_2, \dots, x_n]. \quad (4)$$

Теперь, как и в случае **1.1**, получаем:

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}\langle x_2, \dots, x_n \rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2, \dots, x_n].$$

2.2. $L_1 + Q \neq \Lambda_2 + Q$.

Определяя P^t и \mathcal{P} так же, как в п. 1^o, получаем: $T = P^1$. Отсюда $\bar{G} = \mathcal{P} \cup (\mathcal{P} \cdot R_1)$.

Теперь из (3) имеем: $F = f(2x_1 - x_2^2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^{\mathcal{P}}$. Поэтому из R_1 -полуинвариантности F следует, что $f(2x_1 - x_2^2, -x_3, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$. Отсюда

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[2x_1 - x_2^2]\langle x_3, \dots, x_n \rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[2x_1 - x_2^2][x_3, \dots, x_n].$$

2.3. $L_1 + Q = \Lambda_2 + Q$, $L_1 \neq \Lambda_2$.

Определяя B^t и \mathcal{B} так же, как в п. 1^o, имеем: $T = B^1$, $\bar{G} = \mathcal{B} \cup (\mathcal{B} \cdot R_1)$.

Теперь из (3) получаем:

$$F = f(x_1 - x_2x_3, x_2, x_4, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3, x_2, x_4, \dots, x_n]. \quad (5)$$

Отсюда $f(x_1 - x_2x_3, -x_2, -x_4, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$ в силу R_1 -полуинвариантности F , и $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3]\langle x_2, x_4, \dots, x_n \rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3][x_2, x_4, \dots, x_n]$.

3. $L_1 \neq L_2, P_1 = P_2$.

Построим в V канонический базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы e_1, \dots, e_n так, чтобы выполнялись следующие условия:

$e_1 \in P_1 \cap S$; $e_2 \in L_1$; $e_1 + 2e_2 \in L_2$; если $n > 2$, то (e_1, e_3, \dots, e_n) – базис P_1 ; если $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$ (и тогда $n > 2$), то $e_3 = 2c$.

3.1. $\Lambda_1 = L_1, \Lambda_2 = L_2$.

Определяя D^t и \mathcal{D} так же, как случае **2.1**, получаем: $T = D^1, \bar{G} = \mathcal{D} \cup (\mathcal{D} \cdot R_1)$.

Из \mathcal{D} -инвариантности F следует (4). Теперь, как в случае **1.1**, получаем:

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2]\langle x_3, \dots, x_n \rangle; \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2][x_3, \dots, x_n].$$

3.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Определяя B^t и \mathcal{B} так же, как в п. 1^о, имеем: $T = B^1, \bar{G} = \mathcal{B} \cup (\mathcal{B} \cdot R_1)$.

Теперь из \mathcal{B} -инвариантности F получаем (5). Поэтому из R_1 -полуинвариантности F следует, что $f(-x_1 + x_2x_3, x_2, -x_4, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$. Отсюда

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2]\langle x_1 - x_2x_3, x_4, \dots, x_n \rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2][x_1 - x_2x_3, x_4, \dots, x_n].$$

4. $L_1 \neq L_2, V = S \oplus Q$.

Пусть J – отражение относительно плоскости Q в направлении плоскости S .

Зафиксируем $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Построим в V базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы e_1, \dots, e_n так, чтобы выполнялись следующие условия:

1) $e_1 \in P_1 \cap S$; $e_2 \in L_1$; при этом если $L_2 \subseteq P_1$, а $L_1 \not\subseteq P_2$, то $e_1 + 2e_2 \in P_2$; если же $L_2 \not\subseteq P_1$, то $e_1 + \alpha e_2 \in L_2$;

2) если $n > 2$, то (e_3, \dots, e_n) – базис Q ; при этом если $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$, то $e_3 = 2c$.

Отсюда $R_1 = \{x'_i = -x_i \ (i \neq 2)\}$, $J = \{x'_1 = -x_1, x'_2 = -x_2\}$.

Если $n > 2$, то полагаем $\mathcal{S} = \{S^t : t \in \mathbb{R}\}$, где $S^t = \{x'_3 = x_3 + t\}$.

4.1. $L_1 \subset P_2, L_2 \subset P_1, \Lambda_2 = L_2$.

В этом случае $T = R_2R_1 = R_1R_2 = J$, и поэтому $G = \{\text{id}, J, R_1, R_2\}$.

Возможны лишь следующие случаи.

а) F – T -инвариантный многочлен.

Значит, $F = g(x_1^2, x_2^2, x_1x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}\langle x_1, x_2 \rangle[x_3, \dots, x_n]$; теперь из R_1 -полуинвариантности F получаем: $g(x_1^2, x_2^2, -x_1x_2, -x_3, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$.

б) F – не T -инвариантный многочлен.

Меняя, если нужно, нумерацию x_1 и x_2 , можем считать, что F – R_1 -инвариантный, но не R_2 -инвариантный многочлен. Тогда

$$F = g(x_2, x_1^2, x_1x_3, \dots, x_1x_n, x_3^2, x_3x_4, \dots, x_n^2) \in \mathbb{R}[x_2]\langle x_1, x_3, \dots, x_n \rangle$$

в силу R_1 -инвариантности F , и теперь в из T -полуинвариантности F следует, что $g(-x_2, x_1^2, -x_1x_3, \dots, -x_1x_n, x_3^2, x_3x_4, \dots, x_n^2) = -F$.

В результате получаем: $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2, x_2^2]\langle x_1x_2, x_3, \dots, x_n \rangle$,

$$\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2, x_2^2][x_1x_2, x_3, \dots, x_n] \cup \\ \cup \mathbb{R}[x_1^2]\langle x_3, \dots, x_n \rangle [x_2, x_1x_3, \dots, x_1x_n] \cup \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_3, \dots, x_n \rangle [x_1, x_2x_3, \dots, x_2x_n].$$

4.2. $L_1 \subset P_2$, $L_2 \subset P_1$, $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

В этом случае $P_2 = \ker x_1$, $e_1 \parallel \Lambda_2$, $e_3/2 \in \Lambda_2$. Отсюда $T = JS^1 = S^1J$. Поэтому $\bar{G} = \mathcal{S} \cdot \{\text{id}, R_1, J, R_1J\}$.

Следовательно, $\mathbf{K}^G \subseteq \mathbf{K}^{\mathcal{S}} = \mathbb{R}[x_1, x_2, x_4, \dots, x_n]$. Теперь, как и в случае **4.1**, получаем: $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2, x_2^2]\langle x_1x_2, x_4, \dots, x_n \rangle$,

$$\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2, x_2^2][x_1x_2, x_4, \dots, x_n] \cup \\ \cup \mathbb{R}[x_1^2]\langle x_4, \dots, x_n \rangle [x_2, x_1x_4, \dots, x_1x_n] \cup \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_4, \dots, x_n \rangle [x_1, x_2x_4, \dots, x_2x_n].$$

4.3. $L_1 \not\subseteq P_2$, $L_2 \subseteq P_1$.

В этом случае $e_1 \in L_2$, $P_2 = \ker(2x_1 - x_2)$.

4.3.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Пусть D^t и \mathcal{D} в построенном базисе определяются так же, как и в случае **2.1**. Тогда $T = JD^1 = D^1J$, $\bar{G} = \mathcal{D} \cdot \{\text{id}, R_1, J, R_1J\}$.

Из \mathcal{D} -инвариантности F получаем (4). Теперь, как и в случае **4.1**, имеем:

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_3, \dots, x_n \rangle;$$

F – T -инвариантный многочлен, не принадлежащий \mathbf{K}^G , тогда и только тогда, когда $F \in \mathbb{R}[x_2^2][x_3, \dots, x_n]$;

F – R_1 -инвариантный многочлен, не принадлежащий \mathbf{K}^G , тогда и только тогда, когда $F \in \mathbb{R}[x_2]\langle x_3, \dots, x_n \rangle$.

Допустим теперь, что F – R_2 -инвариантный многочлен, не принадлежащий \mathbf{K}^G . Тогда $f(x_2, -x_3, \dots, -x_n) = -F$ в силу (4) и R_1 -полуинвариантности F . Следовательно, $F \in \mathbb{R}[x_2][x_3, \dots, x_n]$. При этом $f(-x_2, x_3, \dots, x_n) = -F$, т.к. F полуинвариантен относительно T . Отсюда $F \in \mathbb{R}[x_2][x_3, \dots, x_n]$.

Значит, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2^2][x_3, \dots, x_n] \cup \mathbb{R}[x_2]\langle x_3, \dots, x_n \rangle \cup \mathbb{R}[x_2][x_3, \dots, x_n]$.

4.3.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Определяя B^t и \mathcal{B} так же, как в п. 1^o, получаем: $T = B^1J = JB^1$, и отсюда $\bar{G} = \mathcal{B} \cdot \{\text{id}, R_1, J, R_1J\}$.

Из \mathcal{B} -инвариантности F имеем (5).

Рассмотрим теперь следующие случаи.

а) F инвариантен относительно J .

С учетом (5) получаем: $f(-x_1 + x_2x_3, -x_2, x_4, \dots, x_n) = F$. Поэтому

$$F = g((x_1 - x_2x_3)^2, (x_1 - x_2x_3)x_2, x_2^2, x_4, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_4, \dots, x_n]\langle x_1 - x_2x_3, x_2 \rangle.$$

Теперь из R_1 -инвариантности F имеем:

$$g((x_1 - x_2x_3)^2, -(x_1 - x_2x_3)x_2, x_2^2, -x_4, \dots, -x_n) = F.$$

Если же F не инвариантен относительно R_1 , то

$$g((x_1 - x_2x_3)^2, -(x_1 - x_2x_3)x_2, x_2^2, -x_4, \dots, -x_n) = -F.$$

б) F не инвариантен относительно J .

В этом случае если F инвариантен относительно R_1 , то

$$f(-x_1 + x_2x_3, x_2, -x_4, \dots, -x_n) = F.$$

Отсюда

$$F = g(x_2, (x_1 - x_2x_3)^2, (x_1 - x_2x_3)x_4, \dots, (x_1 - x_2x_3)x_n, x_4^2, x_4x_5, \dots, x_n^2) \in \mathbb{R}[x_2]\langle x_1 - x_2x_3, x_4, \dots, x_n \rangle,$$

и из полуинвариантности F относительно J имеем:

$$g(-x_2, (x_1 - x_2x_3)^2, -(x_1 - x_2x_3)x_4, \dots, -(x_1 - x_2x_3)x_n, x_4^2, x_4x_5, \dots, x_n^2) = -F.$$

Если же F не инвариантен относительно R_1 , то F инвариантен относительно R_1J . Но тогда $f(x_1 - x_2x_3, -x_2, -x_4, \dots, -x_n) = F$. Поэтому

$$F = g(x_1 - x_2x_3, x_2^2, x_2x_4, \dots, x_2x_n^2, x_4^2, x_4x_5, \dots, x_n^2) \in \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3, x_2, x_4, \dots, x_n]\langle x_2, x_4, \dots, x_n \rangle,$$

и $g(-x_1 + x_2x_3, x_2^2, -x_2x_4, \dots, -x_2x_n^2, x_4^2, x_4x_5, \dots, x_n^2) = -F$ в силу полуинвариантности F относительно J .

Таким образом, $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[(x_1 - x_2x_3)^2, x_2^2]\langle (x_1 - x_2x_3)x_2, x_4, \dots, x_n \rangle$,

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(G) &= \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[(x_1 - x_2x_3)^2, x_2^2][(x_1 - x_2x_3)x_2, x_4, \dots, x_n] \cup \\ &\cup \mathbb{R}[(x_1 - x_2x_3)^2]\langle x_4, \dots, x_n \rangle [x_2, (x_1 - x_2x_3)x_4, \dots, (x_1 - x_2x_3)x_n] \cup \\ &\cup \mathbb{R}[x_2^2]\langle x_4, \dots, x_n \rangle [x_1 - x_2x_3, x_2x_4, \dots, x_2x_n]. \end{aligned}$$

Случай $L_1 \subseteq P_2, L_2 \not\subseteq P_1$ аффинно эквивалентен случаю **4.3**.

4.4. $L_1 \not\subseteq P_2, L_2 \not\subseteq P_1, L_1 \neq L_2$.

Для $i \in \{1; 2\}$ пусть $L'_i = P_i \cap S$. Двойное отношение

$$\varkappa = (L_1, L'_1; L_2, L'_2)$$

прямых L_1, L'_1, L_2, L'_2 назовем двойным отношением пары (R_1, R_2) .

По условию, $e_1 + \alpha e_2 \in L_2$, и из определения \varkappa следует, что $e_1 + \varkappa \alpha e_2 \in P_2$. Поэтому $P_2 = \ker(\alpha \varkappa x_1 - x_2)$, $\varkappa \notin \{0; 1\}$.

Положим $\mu = \sqrt{|\varkappa|}$, $\alpha = \mu^{-1}$. Получаем базис, в котором $\mu e_1 + e_2 \in L_2$, $P_2 = \ker((\operatorname{sgn} \varkappa) \mu x_1 - x_2)$.

4.4.1. $\varkappa > 0$.

Пусть $\mathcal{H} = (H^t : t \in \mathbb{R})$, где $H^t = \{x'_1 = x_1 \operatorname{ch} t + x_2 \operatorname{sh} t, x'_2 = x_1 \operatorname{sh} t + x_2 \operatorname{ch} t\}$.

4.4.1.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Если $\varkappa < 1$, то при $\varphi = 2 \operatorname{arth} \mu$ имеем: $T = H^\varphi$, $G = \{H^{m\varphi}, H^{m\varphi} R_1 : m \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\varkappa > 1$, то полагая $\varphi = 2 \operatorname{arcth} \mu$, получаем:

$$T = H^\varphi J, \quad G = \{H^{2m\varphi}, H^{(2m+1)\varphi} J, H^{2m\varphi} R_1, H^{(2m+1)\varphi} J R_1 : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Поэтому при любом положительном \varkappa , не равном 1, $\bar{G} = \mathcal{H} \cdot \{\operatorname{id}, R_1, J, R_1 J\}$, и из \mathcal{H} -инвариантности F имеем: $F = f(x_1^2 - x_2^2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2, x_3, \dots, x_n]$.

Но тогда $f(x_1^2 - x_2^2, -x_3, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$ в силу R_1 -полуинвариантности F . Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2]\langle x_2, \dots, x_n \rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2][x_3, \dots, x_n]$.

4.4.1.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Если $\varkappa < 1$, то полагая $\varphi = 2 \operatorname{arth} \mu$, получаем:

$$T = H^\varphi S^1, \quad G = \{H^{m\varphi} S^m, H^{m\varphi} S^m R_1 : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Если же $\varkappa > 1$. Полагая $\varphi = 2 \operatorname{arcth} \mu$, получаем: $T = H^\varphi S^1 J$,

$$G = \{H^{2m\varphi} S^{2m}, H^{(2m+1)\varphi} S^{2m+1} J, H^{2m\varphi} S^{2m} R_1, H^{(2m+1)\varphi} S^{2m+1} J R_1 : m \in \mathbb{Z}\}.$$

Таким образом, учитывая периодичность функции $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, получаем, что при любом положительном \varkappa , не равном 1, $\bar{G} = \mathcal{H} \cdot \mathcal{S} \cdot \{\operatorname{id}, R_1, J, R_1 J\}$.

Но тогда из \mathcal{S} -инвариантности F следует, что F не зависит от x_3 . Теперь, как и в случае 4.4.1.1, получаем:

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2]\langle x_4, \dots, x_n \rangle, \quad \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 - x_2^2][x_4, \dots, x_n].$$

4.4.2. $\varkappa < 0$.

Пусть $\mathcal{E} = (E^t : t \in \mathbb{R})$, где $E^t = \{x'_1 = x_1 \cos t - x_2 \sin t, x'_2 = x_1 \sin t + x_2 \cos t\}$.

Положим $\varphi = -2 \operatorname{arctg} \mu$.

4.4.2.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Тогда $T = E^\varphi$, $G = \{E^{m\varphi}, E^{m\varphi} R_1 : m \in \mathbb{Z}\}$.

Если $\varphi = 2\pi k/m$, где k и m – взаимно-простые натуральные числа, то G конечна и изоморфна диэдральной группе H_2^m , и полуинварианты группы G могут быть выражены через базисные инварианты группы H_2^m (см. [6]).

Допустим, что φ не соизмеримо с π . Тогда G бесконечна и $\bar{G} = \mathcal{E} \cup (\mathcal{E} \cdot R_1)$ (такое же замыкание G имеет и относительно евклидовой топологии группы $\operatorname{Aff}(V)$).

Теперь из \mathcal{E} -инвариантности F следует, что

$$F = f(x_1^2 + x_2^2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2, x_3, \dots, x_n].$$

Из R_1 -полуинвариантности F получаем: $f(x_1^2 + x_2^2, -x_3, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$. Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2]\langle x_3, \dots, x_n \rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2][x_3, \dots, x_n]$.

4.4.2.2. $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Тогда $T = E^\varphi S^1$.

Если $\varphi = 2\pi k/m$, где k и m – взаимно-простые натуральные числа, то полагая $\psi = 2\pi/m$ и $G_0 = \{E^{l\psi}, E^{l\psi} R_1 : l = 0, \dots, m-1\}$, получаем:

$$G = G_0 \cdot \{S^l : l \in \mathbb{Z}\}, \quad \bar{G} = G_0 \cdot \mathcal{S}.$$

При этом G_0 конечна и изоморфна диэдральной группе H_2^m , полуинварианты группы G не зависят от x_3 и выражаются через базисные инварианты группы H_2^m .

Допустим теперь, что φ не соизмеримо с π . Тогда $\bar{G} = (\mathcal{E} \cdot \mathcal{S}) \cup (\mathcal{E} \cdot \mathcal{S} \cdot R_1)$ в силу периодичности функции $t \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Из \mathcal{S} -инвариантности F следует, что F не зависит от x_3 , и, как в случае 4.4.2.1, $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2]\langle x_4, \dots, x_n \rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_1^2 + x_2^2][x_4, \dots, x_n]$.

5. $L_1 \neq L_2$, $P_1 \neq P_2$, $V \neq S \oplus Q$.

Отсюда $n > 2$, $\dim(S \cap Q) = 1$, $L_1 + Q = L_2 + Q$, $L_1 \not\subseteq P_2$, $L_2 \not\subseteq P_1$.

Построим в V канонический базис (1), последовательно выбирая ненулевые векторы e_1, \dots, e_n так, чтобы выполнялись все следующие условия:

1) $e_1 \in Q \cap S$, $e_2 \in L_1$, $e_1 + 2e_2 \in L_2$ (это условие выполнимо, т.к. прямые L_1, L_2 и $Q \cap S$ попарно различны и лежат в 2-плоскости S); $e_3 \in P_1 \setminus Q$, $e_2 + 2e_3 \in P_2 \setminus Q$ (это условие выполнимо, т.к. $e_3 \notin P_2$, а 2-плоскость $\langle e_2, e_3 \rangle$ пересекает P_2 по прямой, которая не содержится в Q); если $n > 3$, то (e_1, e_4, \dots, e_n) – базис в Q ;

2) если $L_1 + Q \neq L_2 + Q$, то $e_3 = 2c + e_1/12$;

3) если $L_1 + Q = L_2 + Q$ и $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ (и тогда $n > 3$, т.к. $L_1 + Q$ содержит скрещивающиеся прямые L_1 и L_2), то $e_4 = 2c$.

В таком базисе $R_1 = \{x'_i = -x_i \ (i \neq 2)\}$, $P_2 = \ker(2x_2 - x_3)$.

5.1. $\Lambda_2 = L_2$.

Для любого $t \in \mathbb{R}$ пусть $R^t = \{x'_1 = x_1 + tx_2 + t^2x_3/2, \ x'_2 = x_2 + tx_3\}$. Тогда $\mathcal{R} = \{R^t : t \in \mathbb{R}\}$ – однопараметрическая группа параболических сдвигов, $T = R^1$, и поэтому $\bar{G} = \mathcal{R} \cup (\mathcal{R} \cdot R_1)$.

Из последнего равенства следует, что $F \in \mathbf{K}^{\mathcal{R}}$, т.е. (см. [6])

$$F = f(2x_1x_3 - x_2^2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[2x_1x_3 - x_2^2, x_3, \dots, x_n].$$

Теперь $f(2x_1x_3 - x_2^2, -x_3, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$ в силу R_1 -инвариантности F . Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[2x_1x_3 - x_2^2]\langle x_3, \dots, x_n \rangle$, $\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[2x_1x_3 - x_2^2][x_3, \dots, x_n]$.

5.2. $L_1 + Q \neq L_2 + Q$.

Это эквивалентно тому, что $c \notin Q$.

Определяя A^t и \mathcal{A} так же, как в п. 1^о, имеем: $T = A^1$, $\bar{G} = \mathcal{A} \cup (\mathcal{A} \cdot R_1)$.

Теперь из (2) следует, что

$$F = f(x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3, 2x_2 - x_3^2, x_4, \dots, x_n) \in \mathbb{R}[x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3, 2x_2 - x_3^2, x_4, \dots, x_n].$$

Но тогда $f(-x_1 + x_2x_3 - x_3^3/3, 2x_2 - x_3^2, -x_4, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$ в силу R_1 -инвариантности F . Отсюда $\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[2x_2 - x_3^2]\langle x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3, x_4, \dots, x_n \rangle$ и

$$\mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[2x_2 - x_3^2][x_1 - x_2x_3 + x_3^3/3, x_4, \dots, x_n].$$

5.3. $L_1 + Q = \Lambda_2 + Q$, $L_1 \cap \Lambda_2 = \emptyset$.

Определяя N^t и \mathcal{N} так же, как в п. 1^o, имеем: $T = N^1$, $\bar{G} = \mathcal{N} \cup (\mathcal{N} \cdot R_1)$.

Теперь из (3) получаем:

$$F = f(x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2, x_2 - x_3x_4, x_3, x_5, \dots, x_n) \in \\ \mathbb{R}[x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2, x_2 - x_3x_4, x_3, x_5, \dots, x_n].$$

Отсюда $f(-x_1 + x_2x_4 - x_3x_4^2/2, x_2 - x_3x_4, -x_3, -x_5, \dots, -x_n) \in \{-F, F\}$ в силу R_1 -инвариантности F . Значит,

$$\mathbf{K}^G = \mathbb{R}[x_2 - x_3x_4]\langle x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2, x_3, x_5, \dots, x_n \rangle, \\ \mathbf{K}(G) = \mathbf{K}^G \cup \mathbb{R}[x_2 - x_3x_4][x_1 - x_2x_4 + x_3x_4^2/2, x_3, x_5, \dots, x_n].$$

Заключение. Основные результаты работы:

Получена аффинная классификация пар отражений относительно прямых и групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых; найдены полуинварианты бесконечных групп, порожденных двумя отражениями относительно прямых.

Аналогичным образом могут быть вычислены полуинварианты нецентроаффинных групп, действующих на нецилиндрических алгебраических поверхностях и порожденных отражениями относительно прямых.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Игнатенко В.Ф. Алгебраические поверхности с бесконечным множеством плоскостей кривой симметрии. IV // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1998. Т.5, № 1/2. – С. 35–48.
- [2] Рудницкий О.И. Об одном классе диких групп кривых симметрий, имеющих четые орбиты направлений симметрии // Ученые записки ТНУ, 2002, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 2. – С. 75–81.
- [3] Комиссаренко Е.В., Криворучко А.И. Об инвариантах бесконечных групп отражений с четырьмя линейными оболочками орбит направлений симметрии // Ученые записки ТНУ, 2005, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 1. – С. 33–41.
- [4] Криворучко А.И. О кольцах инвариантов групп, порожденных отражениями относительно скрещивающихся прямых. – Мат. физика, анализ, геометрия (2000), т. 7, № 4. – С. 415–441.
- [5] Криворучко А.И. О нецентроаффинных группах, порожденных отражениями относительно прямых // Ученые записки ТНУ, 2004, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 1. – С. 38–46.

- [6] Криворучко А.И. О группах, порожденных двумя аффинными отражениями // Ученые записки ТНУ, 2006, сер. "Матем. Мех. Информ. и киберн. № 2. – С. 43–51.

Знайдена афінна класифікація пар афінних віддзеркалень відносно прямих, а також груп, які породжені двома такими віддзеркаленнями; побудовані усі напів-інваріанти нескінченних груп, які породжені двома віддзеркаленнями.

Affine classification of groups generated by two affine reflections through straight lines are obtained. Semi-invariants of infinite groups generated by two affine reflections through straight lines are calculated.