

Д. О. ЦВЕТКОВ

МАЛЫЕ ДВИЖЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд, исследовалась в работе [1]. В данной работе исходная задача изучается с помощью нового подхода, связанного с применением операторных блок-матриц (см., например, [3]).

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть идеальная стратифицированная жидкость, плотность ρ_0 которой в состоянии покоя изменяется вдоль вертикальной оси Ox_3 : $\rho_0 = \rho_0(x_3)$, частично заполняет неподвижный сосуд и занимает в состоянии покоя область Ω , ограниченную твердой стенкой S и свободной поверхностью Γ . Предположим, что начало O декартовой системы координат $Ox_1x_2x_3$ выбрано на свободной равновесной поверхности Γ , которая является плоской и расположена перпендикулярно ускорению силы тяжести $\vec{g} = -g\vec{e}_3$, где \vec{e}_3 — орт оси Ox_3 .

Будем рассматривать основной случай устойчивой стратификации жидкости по плотности:

$$0 < N_{min}^2 \leq N^2(x_3) \leq N_{max}^2 = N_0^2 < \infty, \quad (1)$$
$$N^2(x_3) = -\frac{g\rho_0'(x_3)}{\rho_0(x_3)}, \quad \rho_0(0) > 0,$$

где $N^2(x_3)$ — квадрат частоты плавучести (частоты Вейсяля-Брента).

В состоянии покоя давление в жидкости распределено по закону

$$p_0 = p_0(x_3) = p_0(0) - g \int_0^{x_3} \rho_0(\tau) d\tau. \quad (2)$$

Рассмотрим малые движения жидкости, близкие к состоянию покоя. Обозначим через $\vec{u} = \vec{u}(t, x)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ поле скорости в жидкости, $p = p(t, x)$ — отклонение поля давлений от равновесного давления (2), $\rho = \rho(t, x)$ — отклонения

поля плотности от исходного поля $\rho_0(x_3)$, а через $\zeta = \zeta(t, \hat{x})$ ($\hat{x} = (x_1, x_2) \in \Gamma$) — отклонение свободно движущейся поверхности жидкости $\Gamma(t)$ от Γ по нормали \vec{n} . Тогда малые движения исходной системы описываются следующей начально-краевой задачей (см. [1]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} &= \rho_0^{-1}(x_3) \left(-\nabla p - g\rho \vec{e}_3 \right) + \vec{f}(t, x) \quad (\text{в } \Omega), \\ \operatorname{div} \vec{u} &= 0, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho_0 \cdot \vec{u} = 0 \quad (\text{в } \Omega), \\ \vec{u} \cdot \vec{n} &=: u_n = 0 \quad (\text{на } S), \quad u_n = \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad (\text{на } \Gamma), \quad p = g\rho_0(0)\zeta \quad (\text{на } \Gamma), \\ \vec{u}(0, x) &= \vec{u}^0(x), \quad \rho(0, x) = \rho^0(x) \quad (x \in \Omega), \quad \zeta(0, \hat{x}) = \zeta_0(\hat{x}) \quad (\hat{x} \in \Gamma). \end{aligned} \quad (3)$$

Отметим, что для классического решения задачи (3) имеет место закон баланса полной энергии:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho_0(x_3) |\vec{u}|^2 d\Omega + g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(x_3) N^2(x_3)]^{-1} |\rho|^2 d\Omega + \right. \\ \left. + g\rho_0(0) \int_{\Gamma} |\zeta|^2 d\Gamma \right) = \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \vec{f} \cdot \vec{u} d\Omega. \end{aligned} \quad (4)$$

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Начально-краевую задачу (3) приведем в дальнейшем к дифференциальному уравнению в гильбертовом пространстве. Для этого применим прием проектирования первого уравнения (3) на ортогональные подпространства (см. [2]). Свяжем с функцией ρ_0 гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$ вектор функций со скалярным произведением

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \int_{\Omega} \rho_0(x_3) \vec{u}(x) \overline{\vec{v}(x)} d\Omega. \quad (5)$$

Как следует из (1), для $\rho = \rho_0(x_3)$ справедливы неравенства

$$0 < m \leq \rho_0 \leq M < \infty,$$

обеспечивающие эквивалентность норм, определенных (5) и обычным скалярным произведением в $\vec{L}_2(\Omega)$.

Лемма 1. *Имеет место следующее ортогональное разложение:*

$$\vec{L}_2(\Omega, \rho_0) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\vec{J}_0(\Omega, \rho_0) &= \{ \vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \operatorname{div} \vec{u} = 0 \text{ (в } \Omega), u_n = 0 \text{ (на } \partial\Omega) \}, \\ \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) &= \{ \vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{v} = \rho_0^{-1} \nabla p, v_n = 0 \text{ (на } S), \\ &\quad \nabla \cdot \vec{v} = 0 \text{ (в } \Omega), \int_{\Gamma} p d\Gamma = 0 \}, \\ \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) &= \{ \vec{w} \in \vec{L}_2(\Omega, \rho_0) : \vec{w} = \rho_2^{-1} \nabla \varphi, \varphi = 0 \text{ (на } \Gamma) \}.\end{aligned}$$

Наряду с введенными пространствами, понадобятся еще гильбертово пространство $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ скалярных функций со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2(\Omega)} := g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(x_3) N^2(x_3)]^{-1} \varphi(x) \overline{\psi(x)} d\Omega$$

и гильбертово пространство $L_2(\Gamma)$ со скалярным произведением

$$(\eta, \zeta)_0 := \rho_0(0) \int_{\Gamma} \eta(\hat{x}) \overline{\zeta(\hat{x})} d\Gamma.$$

ПЕРЕХОД К СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем считать $\vec{u}(t, x)$ и $\rho_0^{-1} \nabla p(t, x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega, \rho_0)$, тогда в силу уравнений и граничных условий (3), ортогонального разложения (6), имеем

$$\begin{aligned}\vec{u}(t, x) &\in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) =: \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0), \\ \rho_0^{-1} \nabla p(t, x) &\in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0).\end{aligned}$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\begin{aligned}\vec{u}(t, x) &= \vec{v}(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla w(t, x), \quad \vec{v}(t, x) \in \vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1} \nabla w(t, x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \\ \rho_0^{-1} \nabla p(t, x) &= \rho_0^{-1} \nabla p_1(t, x) + \rho_0^{-1} \nabla p_2(t, x), \\ \rho_0^{-1} \nabla p_1(x, t) &\in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0), \quad \rho_0^{-1} \nabla p_2(x, t) \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0).\end{aligned}\tag{7}$$

Обозначим P_0 , $P_{h,S}$ и $P_{0,\Gamma}$ ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega, \rho_0)$, $\vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$, $\vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega, \rho_0)$ соответственно. Тогда, подставляя (7) в первое уравнение (3) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -P_0 (\rho_0^{-1} g \rho \vec{e}_3) + P_0 \vec{f}, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\rho_0^{-1} \nabla w) &= -\rho_0^{-1} \nabla p_1 - P_{h,S} (\rho_0^{-1} g \rho \vec{e}_3) + P_{h,S} \vec{f}, \\ \vec{0} &= -\rho_0^{-1} \nabla p_2 - P_{0,\Gamma} (\rho_0^{-1} g \rho \vec{e}_3) + P_{0,\Gamma} \vec{f}.\end{aligned}\tag{8}$$

Из последнего соотношения следует, что $\rho_0^{-1} \nabla p_2$ может быть найдено, если известно решение $\rho = \rho(t, x)$. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением

первых двух соотношений, а также граничных условий и начальных данных с соответствующей заменой $p \rightarrow p_1$, так как $p = p_1 + p_2$, $p_2 = 0$ (на Γ).

Рассмотрим вспомогательную задачу. По заданной функции $\psi(\hat{x})$, $\hat{x} \in \Gamma$, найти функцию $p_1(x)$, $x \in \Omega$, являющуюся решением задачи

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\rho_0^{-1}(x) \nabla p_1) &= 0 \quad (\text{в } \Omega), \quad \rho_0^{-1}(x) \nabla p_1 \cdot \vec{n} = 0 \quad (\text{на } S), \\ \rho_0^{-1}(0) p_1 &= \psi \quad (\text{на } \Gamma), \quad \int_{\Gamma} \psi \, d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Это аналог известной задачи Зарембы. Она имеет единственное решение $p_1 \in H_{\Gamma}^1(\Omega, \rho_0)$ при $\psi \in H_{\Gamma}^{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \cap H_0$, где $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ — пространство Соболева-Слободецкого (см. [4]), $H_0 = L_2(\Gamma) \ominus \{1_{\Gamma}\}$.

Если $p_1(x)$ — решение вспомогательной задачи (9) для $\psi \in H_{\Gamma}^{\frac{1}{2}}$, то $\rho_0^{-1} \nabla p_1(x) \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ и $\rho_0^{-1}(x) \nabla p_1(x) =: G\psi$, где $G : H_{\Gamma}^{\frac{1}{2}} \rightarrow \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0)$ есть линейный ограниченный оператор.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} -\nabla \rho_0 \cdot \vec{v} &=: C_1^* \vec{v}, \quad -\nabla \rho_0 \cdot \vec{w} =: C_2^* \vec{w}, \quad \vec{w} = \rho_0^{-1} \nabla w, \\ P_0(\rho_0^{-1} g \rho \vec{e}_3) &=: C_1 \rho, \quad P_{h,S}(\rho_0^{-1} g \rho \vec{e}_3) =: C_2 \rho. \end{aligned}$$

Отметим, что операторы C_1 и C_1^* , C_2 и C_2^* взаимно сопряжены соответственно, и $\|C_1\| = \|C_1^*\| \leq N_0$, $\|C_2\| = \|C_2^*\| \leq N_0$.

Для $\psi = g\zeta$ имеем из (9) $\rho_0^{-1} \nabla p_1 = gG\zeta$. Учитывая введенные обозначения для операторов, перепишем начально-краевую задачу (3) в виде последнего соотношения (8) и задачи Коши для системы дифференциально-операторных уравнений:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \\ \zeta \\ \rho \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & gG & C_2 \\ 0 & -\gamma_n & 0 & 0 \\ -C_1^* & -C_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \\ \zeta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 \vec{f} \\ P_{h,S} \vec{f} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\left(\vec{v}(0); \vec{w}(0); \zeta(0); \rho(0) \right)^t = \left(\vec{v}^0; \vec{w}^0; \zeta^0; \rho^0 \right)^t,$$

$$\left(\vec{v}; \vec{w}; \zeta; \rho \right)^t \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) \oplus H_0 \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega) =: \mathcal{H}.$$

Здесь γ_n — оператор следа: $\gamma_n \vec{u} := u_n = \vec{u} \cdot \vec{n}|_{\Gamma}$. Данный оператор может быть расширен до оператора $\tilde{\gamma}_n$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\tilde{\gamma}_n) = \{ \vec{w} \in \vec{G}_{h,S}(\Omega, \rho_0) : \tilde{\gamma}_n \vec{w} \in H_0 \},$$

в этом случае оператор $\tilde{\gamma}_n$ есть оператор, сопряженный к оператору G : $\tilde{\gamma}_n = G^*$.

Определение 1. Функции $\vec{u}(t, x)$, $\zeta(t, \hat{x})$, $\rho(t, x)$ и $p(t, x) = p_1(t, x) + p_2(t, x)$ назовем сильным решением задачи (3) на отрезке $[0, T]$, если выполнено последнее уравнение (8) и $\{\vec{v}; \vec{w}; \zeta; \rho\}$ есть сильное решение задачи Коши (10) в пространстве \mathcal{H} . Это значит, что для всех $t \geq 0$ функции $\vec{v} \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0)$, $\vec{w} \in \mathcal{D}(\tilde{\gamma}_n)$, $\zeta \in H_{\Gamma}^{\frac{1}{2}}$, $\rho \in \mathfrak{L}_2(\Omega)$ и функции $d\vec{v}/dt$, $d\vec{w}/dt$, $d\zeta/dt$, $d\rho/dt$, $C_1\rho$, $C_2\rho$, $G\zeta$, $C_1^*\vec{v}$, $C_2^*\vec{w}$, $\tilde{\gamma}_n\vec{w}$ есть непрерывные по t , кроме того, уравнение и начальное условие (10) выполнены.

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ СИЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Рассмотрим для простоты задачу (10) при $g = 1$. (Если сделать замену $g^{\frac{1}{2}}\zeta \rightarrow \zeta$, $g^{\frac{1}{2}}G \rightarrow G$, тогда получим такую же задачу, как при $g = 1$.) Свяжем с задачей (10) оператор-матрицу которая имеет плотную в \mathcal{H} область определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \vec{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathcal{D}(\tilde{\gamma}_n) \oplus H_{\Gamma}^{\frac{1}{2}} \oplus \mathfrak{L}_2(\Omega) \quad (11)$$

и определена на $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ по закону

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & C_1 \\ 0 & 0 & G & C_2 \\ 0 & -G^* & 0 & 0 \\ -C_1^* & -C_2^* & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что оператор \mathcal{A} с областью определения (11) будет максимально аккретивным оператором и, значит задача Коши (10) будет равномерно корректной (см. [2]), а оператор $(-\mathcal{A})$ есть генератор сжимающей группы унитарных операторов $\mathcal{U}(t) := \exp(-t\mathcal{A})$, и справедлива следующая

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

$$y^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \quad f(t) \in C^1([0, T]; \mathcal{H}),$$

тогда задача Коши (10) имеет единственное сильное решение на $[0, T]$, выражаемой формулой

$$y(t) = \mathcal{U}(t)y^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)f(s) ds, \quad (12)$$

где $y^0 := (\vec{v}^0; \vec{w}^0; \zeta^0; \rho^0)^t$, $y := (\vec{v}; \vec{w}; \zeta; \rho)^t$, $f := (P_0\vec{f}; P_{h,S}\vec{f}; 0; 0)^t$.

Как следствие теоремы 1 имеет место следующий результат

Теорема 2. Если выполнены условия:

$$\vec{v}^0 \in \vec{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \vec{w}^0 \in \mathcal{D}(\tilde{\gamma}_n), \quad \zeta^0 \in H_{\Gamma}^{\frac{1}{2}}, \quad \rho_0 \in \mathfrak{L}_2(\Omega), \quad \vec{f}(t) \in C^1([0, T]; \vec{L}_2(\Omega, \rho_0)),$$

тогда задача Коши (3) имеет единственное сильное решение (в смысле определения 1) для любого $t \in [0, T]$.

Выводы

В данной работе исследована задача о малых движениях идеальной стратифицированной жидкости, частично заполняющей произвольный сосуд. Основным новым результатом является теорема существования единственности сильного решения изучаемой начально-краевой задачи (теорема 2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Копачевский Н.Д., Темнов А.Н. *Колебания стратифицированной жидкости в бассейне произвольной формы* // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 1986, — Т.26, № 5. — С. 734 — 755.
- [2] Копачевский Н.Д., Крейн С.Г., Нго Зуй Кан *Операторные методы в линейной гидродинамике: Эволюционные и спектральные задачи*. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
- [3] Azizov T. Ya., Hardt V., Kopachevsky N.D., Mennicken R. *To the problem on small motions and normal oscillations of a viscous fluid in a partially filled container* // Math. Nachr. — 2003. — V. 248. — 249. — P. 3 — 39.
- [4] Никольский С.М. *Приближение функций многих переменных и теоремы вложения*. — М.: Наука, 1977. — 455 с.