Ученые записки Таврического национального университета
им. В. И. Вернадского

Серия «Физико-математические науки»
Том 23 (62) № 2 (2010), с. 52–55.

УДК 517.968.7

Б. М. Вронский, Н. Д. Копачевский

ОБ ОДНОЙ ОЦЕНКЕ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ

В работе получена оценка одной оператор-функции, возникающей при исследовании нормальных колебаний частично диссипативной гидросистемы, содержащей сжимаемые компоненты.

Ключевые слова: асимптотическая оценка.

Введение

В предлагаемой работе получена оценка одной оператор-функции, возникающей при исследовании нормальных колебаний частично диссипативной гидросистемы, содержащей сжимаемые компоненты.

Постановка задачи

В работе [1] рассмотрена задача о малых движениях и нормальных колебаниях гидросистемы, состоящей из несмешивающихся идеальной сжимаемой и вязкой несжимаемой жидкостей, которые целиком заполняют ограниченный сосуд произвольнй формы. В процессе исследования возникает необходимость асимптотической оценки для некоторой оператор-функции. Эта оценка и будет приведена ниже.

Рассмотрим оператор-функцию

$$T(\lambda) := \lambda HY(c^2 I + \lambda^2 A^{-1})^{-1} Y^* H^*. \tag{1}$$

Здесь введенные операторы имеют вид:

$$H = P^{\frac{1}{2}} Q, \quad H^* = \Gamma P^{-\frac{1}{2}}, \quad Y = -\gamma A^{-\frac{1}{2}}, \quad Y^* = A^{\frac{1}{2}} T. \tag{2}$$

Определения введенных операторов, множеств и пространств, в которых эти операторы действуют, приведены в работе [1] и в монографии [2].

Основная теорема

В этом разделе мы сформулируем и докажем основную теорему об асимптотической оценке при $\lambda \to \infty$ оператор-функции $T(\lambda)$.

Теорема 1. *Оператор-функция* $T(\lambda)$ *обладает свойством:*

$$T(\lambda) = o(1), \quad \text{\textit{при} } \lambda \to \infty, \lambda \in \Lambda(\varepsilon, R). \tag{3}$$

Доказательство. Оно основано на использовании леммы Г.В.Радзиевского (см. [3]), в частности, на свойстве

$$\lim_{\eta\to\infty} \sup_{|\lambda|>\eta} |\lambda|^\beta \|(I-\lambda H)^{-1} H^\beta T\| = 0, \tag{4}$$

при выполнении условий

$$\lambda \in \Lambda(\varepsilon, R), \quad 0 \le H \in \mathfrak{S}_\infty, \quad T \in \mathfrak{S}_\infty, \quad 0 \le \beta < 1.$$

Кроме того, мы будем использовать элементы теории шкал гильбертовых пространств.

Построим по оператору A шкалу пространств

$$E^\alpha := D(A^\alpha), \quad -1 \le \alpha \le 1.$$

Тогда:

$$E^0 = L_{2,\Omega_2} = L_2(\Omega_2) \ominus \{1_{\Omega_2}\}, \quad E^{1/2} = H^1_{\Omega_2} = D(A^{1/2}), \quad E^1 = D(A).$$

Докажем теперь, что операторы $A^{3/4}T : H^{-1/2}(\Gamma) \to E^{-1/4}$, и $\gamma A^{-1/4} : E^{-1/4} \to H^{1/2}$ ограниченны и взаимно сопряжены.

В самом деле, исходя из свойств решений первой и второй вспомогательных задач, имеет место равенства:

$$\langle \gamma A^{-1/2}\varphi, \psi\rangle_{L_2(\Gamma)} = (\varphi, A^{1/2}T\psi)_{L_2(\Omega_2)} = \langle A^{-1/4}\varphi, A^{3/4}T\psi\rangle_{L_2(\Omega_2)}, \tag{5}$$

$\forall \varphi \in L_{2,\Omega_2}, \quad \psi \in H_\Gamma^{-1/2} := (H_\Gamma^{1/2})^*, \quad H_\Gamma^{1/2} := H^{1/2}(\Gamma) \cap L_{2,\Omega_2}$.

Положим в равенстве (5) $A^{-1/4}\varphi = \hat{\varphi} \in E^{1/4}$ (если φ пробегает всё $E^0 = L_{2,\Omega_2}$, то $\hat{\varphi}$ пробегает всё $E^{1/4}$), тогда:

$$\langle \gamma A^{-1/2}\hat{\varphi}, \psi\rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \hat{\varphi}, A^{3/4}T\psi\rangle_{L_2(\Omega_2)}, \quad \forall \psi \in H_\Gamma^{-1/2}, \quad \forall \hat{\varphi} \in E^{1/4}. \tag{6}$$

Отсюда, по общему определению сопряженного оператора, действующего из одного пространства в другое, получаем, что,

во-первых, $A^{3/4}T$— ограниченный оператор из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $E^{-1/4}$, так как $A^{1/2}T$ — ограниченный оператор из $H_\Gamma^{-1/2}$ в E^0, а $A^{3/4} = A^{1/4}(A^{1/2}T)$ — ограниченный оператор из $H_\Gamma^{-1/2}$ в $E^{-1/4}$, поскольку $A^{1/4} : E^0 \to E^{-1/4}$ ограничен (из теории шкал), во-вторых из (6) следует, что поскольку:

$$(\gamma A^{-1/4})^* = A^{3/4}T, \quad \gamma A^{-1/4} : E^{1/4} \to H_\Gamma^{1/2}$$

и нормы сопряженных операторов совпадают, то оператор $\gamma A^{-1/4}$ — тоже ограничен.

В дальнейшем в качестве основного выберем пространство $E^{-1/4}$.

Так как пространства $\vec{J}_{0,S}(\Omega_1)$ и $E^{-1/4}$ сепарабельны, то между ними имеет место изометрический изоморфизм, точнее, можно считать, что:

$$\vec{J}_{0,S}(\Omega_1) = VE^{-1/4}, \quad V^{-1}\vec{J}_{0,S}(\Omega_1) = E^{-1/4}, \quad VV^{-1} = I(\text{в } \vec{J}_{0,S}(\Omega_1)).$$

Тогда оператор-функцию $T(\lambda)$ можно переписать в виде:

$$-T(\lambda)c^2 = \lambda V\{\left(V^{-1}PQJ^*\gamma A^{-1/4}\right)\left(I + i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1} A^{-1/4}\cdot \\ \left(I - i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1} A^{-1/4}\left(A^{3/4}TJ\Gamma P^{-1/2}V\right)\}V^{-1} \quad (7)$$

Здесь $J : H_\Gamma^{1/2} \to (H_\Gamma^{1/2})^*$ — оператор вложения, являющийся по теореме Гальярдо вполне непрерывным. Имеем в итоге набор ограниченных операторов, действующих указанным ниже образом:

$$V : E^{-1/4} \to \vec{J}_{0,S}(\Omega_1); \quad P^{-1/2} : \vec{J}_{0,S}(\Omega_1) \to \vec{J}^1_{0,S}(\Omega_1);$$
$$\Gamma : \vec{J}^1_{0,S}(\Omega_1) \to H_\Gamma^{1/2}; \quad J \text{ – вполне непрерывный из } H_\Gamma^{1/2} \text{в } (H_\Gamma^{1/2})^*;$$
$$T : (H_\Gamma^{1/2})^* \to H^1_{\Omega_2}; \quad A^{1/2} : H^1_{\Omega_2} \to E^0, \quad A^{1/4} : E^0 \to E^{-1/4}.$$

Поэтому $F := \left(A^{3/4}TJ\Gamma P^{-1/2}V\right)$, $F : E^{-1/4} \to E^{-1/4}$ — вполне непрерывный оператор, Кроме того, $F^* := \left(V^{-1}PQJ^*\gamma A^{-1/4}\right)$ — вполне непрерывный оператор.

С учетом новых обозначений имеем новое выражение для оператор-функции $T(\lambda)$:

$$\frac{c^2T(\lambda)}{\lambda} = V\left(F^*A^{-1/4}\left(I + i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1}\left(I - i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1} A^{-1/4}F\right)V^{-1}.$$

По лемме Г.В.Радзиевского имеем (для пространства $E^{-1/4}$, где оператор A^{-1} положителен и вполне непрерывен):

$$||\left(I - i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1} A^{-1/4}F|| = ||F^*A^{-1/4}\left(I + i\lambda c^{-1}A^{-1/2}\right)^{-1}|| = o(\lambda^{1/2}),$$

при $\lambda \to \infty$ и $\lambda \in \Lambda(\varepsilon, R)$.

Из этого равенства и структуры изучаемой оператор-функции следует утверждение теоремы о поведении оператор-функции $T(\lambda)$ на бесконечности. **Доказательство** закончено.

Список литературы

[1] Вронский Б. М. О спектре одной гидродинамической задачи // Ученые записки Симферопольского государственного университета. - №7(46).- с.60-65.

[2] Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан. Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. - М. : Наука, 1989. - 416 с.

[3] Радзиевский Г. В. Задача о полноте корневых векторов спектральной теории оператор - функций // УМН. - 1982. - т. 37, вып. 2, с. 81 - 145.

В роботі досліджена асимптотична поведінка деякої оператор-функції на нескінченності.

Ключові слова: асимптотична поведінка.

Asymptotic of some operator-function is investigated.

Keywords: operator-function, asymptotic.